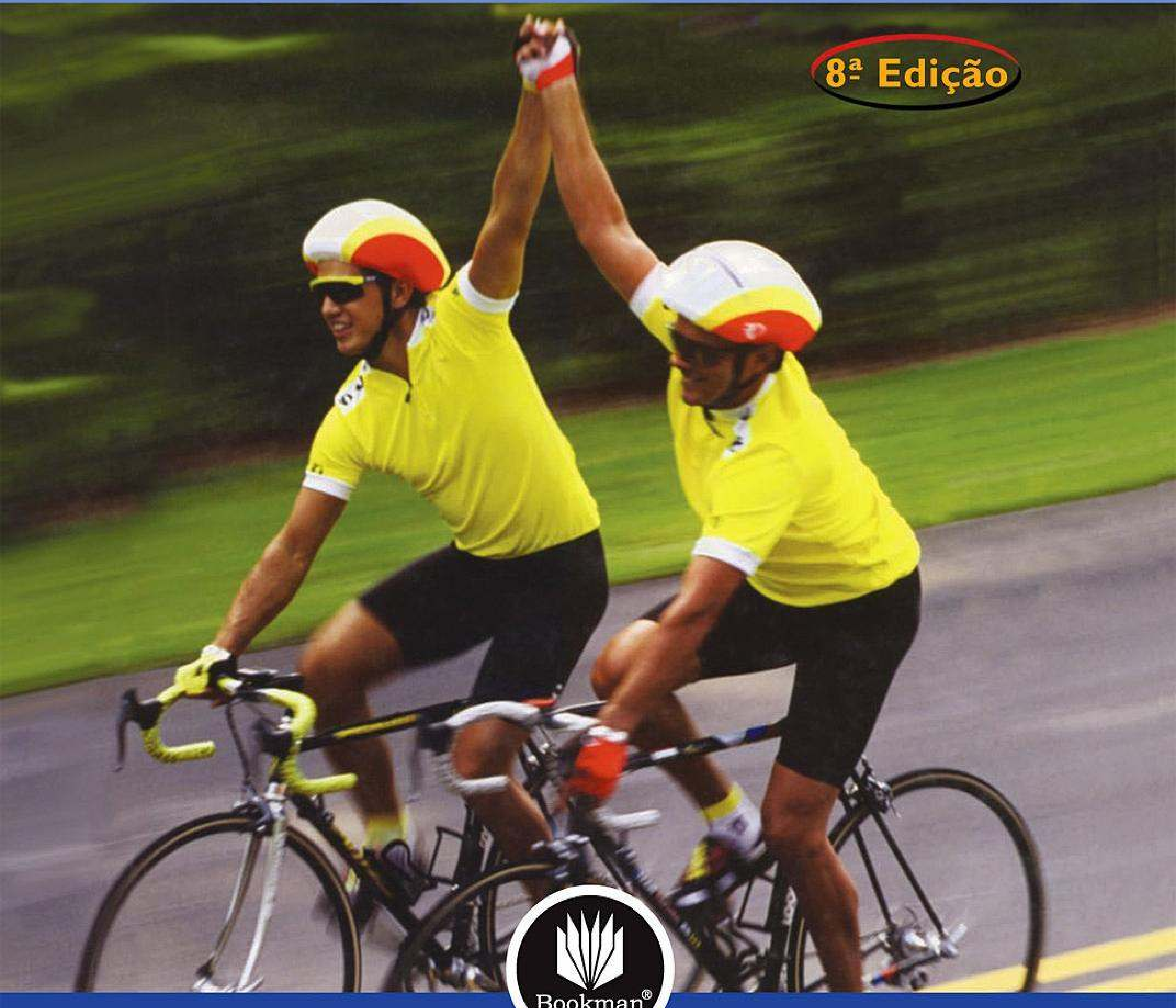
CÁLCULO

Volume I

Howard Anton • Irl Bivens • Stephen Davis



8ª Edição

Bookman®

A634c Anton, Howard

Cálculo / Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis ; tradução Claus Ivo Doering. – 8. ed. –Porto Alegre : Bookman, 2007.

680 p. : il. ; 28 cm.

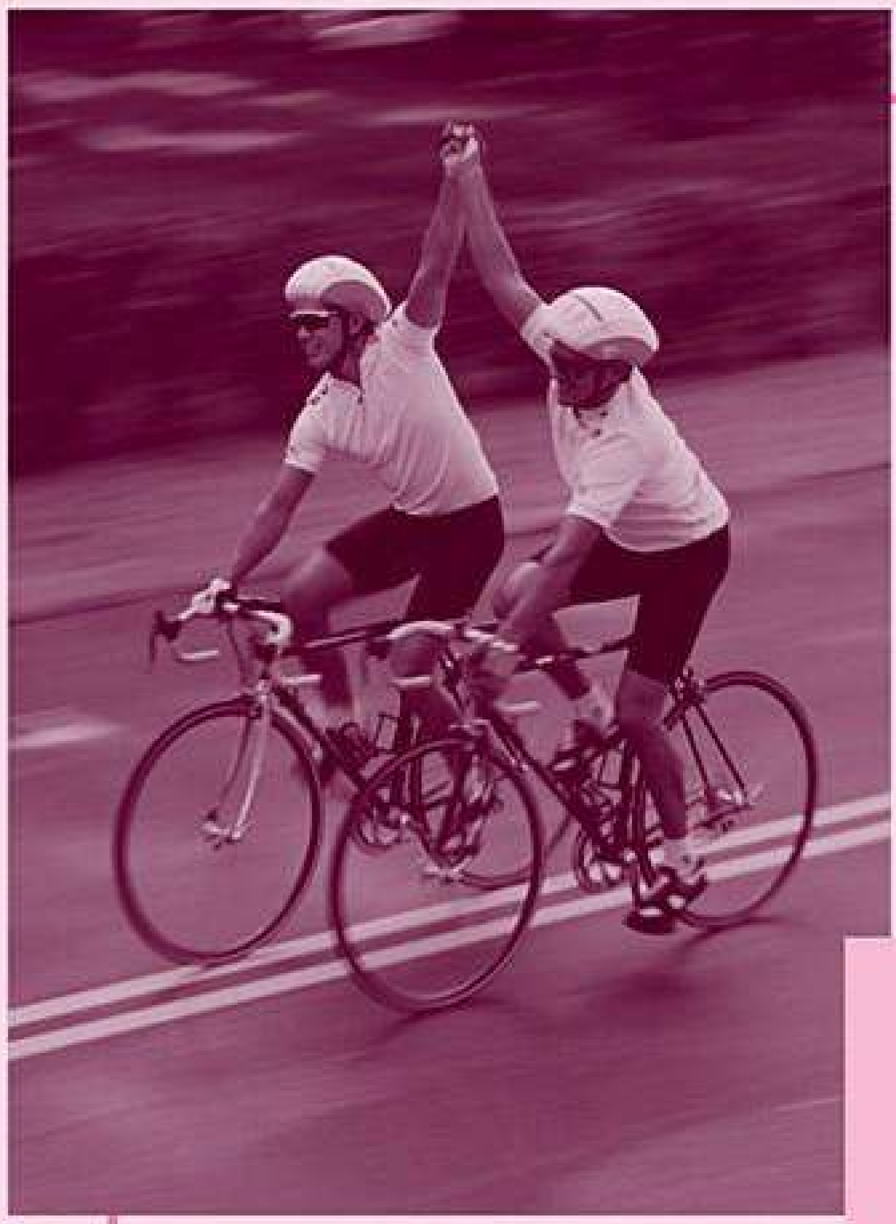
Conteúdo: v. 1. Funções. Limites e continuidade. Derivada. Funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas inversas. Derivada em gráficos e aplicações. Integração. Aplicações da integral definida na geometria, nas ciências e na engenharia. Princípios do cálculo e de integrais. Revisão de trigonometria. Resolução de equações polinomiais.

ISBN 978-85-60031-63-4

1. Matemática – Cálculo. I. Título.

CDU 51-3

Catalogação na publicação: Júlia Angst Coelho – CRB 10/1712



CÁLCULO

8ª Edição

Volume I

HOWARD ANTON
Drexel University

IRL BIVENS
Davidson College

STEPHEN DAVIS
Davidson College

Tradução:

Claus Ivo Doering
Professor Titular do Instituto de Matemática da UFRGS

Reimpressão

Bookman®

2007

Obra originalmente publicada sob o título
Calculus: Early Transcendentals Single and Multivariable, 8th Edition

ISBN 0-471-47244-1

Capa: *Mário Röhnelt*, arte sobre capa original

Preparação de originais: *Sandro Andretta*

Supervisão editorial: *Denise Weber Nowaczyk*

Editoração eletrônica: *Laser House*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
ARTMED® EDITORA S.A.
(BOOKMAN® COMPANHIA EDITORA é uma divisão da ARTMED® EDITORA S.A.)
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 - Santana
90040-340 Porto Alegre RS
Fone (51) 3027-7000 Fax (51) 3027-7070

SÃO PAULO
Av. Angélica, 1.091 - Higienópolis
01227-100 São Paulo SP
Fone (11) 3665-1100 Fax (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

SOBRE HOWARD ANTON

Howard Anton é Bacharel em Matemática pela Lehigh University, Mestre em Matemática pela University of Illinois e Doutor em Matemática pela Polytechnic University of Brooklyn. No início da década de 1960 trabalhou na Burroughs Corporation e na Avco Corporation em Cabo Canaveral, na Flórida, onde esteve envolvido com o programa espacial tripulado. Em 1968 entrou para o Departamento de Matemática da Drexel University, onde lecionou em tempo integral até 1983. Desde então é professor adjunto da Drexel e dedica a maior parte de seu tempo a escrever livros didáticos e a atividades junto a associações matemáticas. Foi presidente da seção do leste do estado da Pensilvânia e do estado de Delaware da Mathematical Association of America (MAA), foi membro do conselho diretor daquela organização e orientou a criação das subdivisões estudantis da MAA. Publicou vários trabalhos de pesquisa em Análise Funcional, Teoria da Aproximação e Topologia, bem como artigos pedagógicos. É especialmente conhecido por seus livros didáticos em Matemática, que estão entre os mais utilizados no mundo. Existem, atualmente, mais de uma centena de versões de seus livros, inclusive traduções para o espanhol, árabe, português, italiano, indonésio, francês, japonês, chinês, hebraico e alemão.

SOBRE IRL BIVENS

Irl C. Bivens, agraciado com a Medalha George Polya e o Prêmio Merten M. Hasse de Texto Didático de Matemática, é Bacharel em Matemática pelo Pfeiffer College e Doutor em Matemática pela University of North Carolina, em Chapel Hill. Desde 1982 leciona no Davidson College, onde atualmente ocupa a posição de professor de Matemática. Em um ano acadêmico típico, leciona Cálculo, Topologia e Geometria. Também é apreciador de história da Matemática e seu seminário anual de História da Matemática é um dos mais concorridos entre os formandos de Matemática de Davidson. Publicou vários artigos sobre Matemática do Ensino Superior, bem como trabalhos de pesquisa em sua área de especialização, a Geometria Diferencial. Atualmente é membro do comitê editorial da série de livros de problemas matemáticos da MAA e consultor do *Mathematical Reviews*.

SOBRE STEPHEN DAVIS

Stephen L. Davis é Bacharel em Matemática pelo Lindenwood College e Doutor em Matemática pela Rutgers University. Tendo lecionado na Rutgers University e na Ohio State University, chegou ao Davidson College em 1981, onde atualmente é professor de Matemática. Leciona regularmente disciplinas de Cálculo, Álgebra Linear, Álgebra Abstrata e Computação. No ano letivo de 1995-1996 foi professor associado visitante no Swarthmore College. Publicou vários artigos sobre o ensino e a avaliação do Cálculo, bem como trabalhos de pesquisa em sua área de especialização, a Teoria de Grupos Finitos. Ocupou vários postos, inclusive de presidente e tesoureiro, na seção sudeste da Mathematical Association of America (MAA). Atualmente é professor consultor do Serviço de Avaliação Educacional de Cálculo Avançado, membro da diretoria da Associação da Carolina do Norte de Professores de Matemática Avançada e ativamente envolvido no treinamento, no Clube de Matemática de Charlotte, de estudantes matematicamente talentosos do Ensino Médio. Foi diretor estadual da Carolina do Norte da MAA.

Para
Minha esposa, Pat
Meus filhos, Brian, David e Lauren

Em memória de
Minha mãe, Shirley
Meu pai, Benjamin
Albert Herr, estimado colega
Stephen Girard (1750-1831), filantropo

—H.A.

Para
Meu filho, Robert

—I.B.

Para
Minha esposa, Elisabeth
Meus filhos, Laura, Anne e James

—S.D.

PREFÁCIO

SOBRE ESTA EDIÇÃO

O principal foco desta nova edição foi ***aumentar a compreensão estudantil*** por meio de uma revisão cuidadosa da exposição do texto; a criação de novos tipos de problemas, em particular os Exercícios de Compreensão e os exercícios de Enfocando Conceitos; e a revisão de muitos exemplos, acrescentando mais passos e reformulando-os para maior clareza.

Recursos Computacionais Nesta edição fornecemos muitos exemplos e exercícios para os professores que queiram utilizar calculadoras gráficas, sistemas de computação simbólica ou outros programas. Contudo, esses exemplos e exercícios são implementados de tal maneira que é possível utilizar o texto em disciplinas em que os recursos computacionais são utilizados amplamente, moderadamente ou até mesmo não utilizados. Para dar um fundamento sólido ao uso desses recursos computacionais, incluímos uma seção denominada *Gráficos de Funções Utilizando Calculadoras e Recursos Computacionais* (Seção 1.2). Novos comentários, denominados ***Domínio da Tecnologia***, direcionam os estudantes para aplicações tecnológicas recentes e úteis. Os exercícios que exigem recursos computacionais estão marcados com ícones para facilitar a identificação.

Internet Este texto é suplementado pelo *site*

www.wiley.com/college/anton

Exposição Revisada Cada página, cada explicação e cada exemplo foram criticamente reexaminados e tiveram sua exposição refeita, onde necessário, para levar os estudantes direto ao cerne das questões. Além disso, os Apêndices A, B, C e D da edição anterior foram deslocados para o *site* que acompanha este texto. Os módulos *Expandindo o Horizonte do Cálculo* agora estão no *site* e os estudantes são dirigidos a eles em parágrafos introdutórios aos mesmos, com o endereço na internet ao final dos capítulos apropriados no texto.

NOVIDADES NA OITAVA EDIÇÃO

Exercícios Novos e Atualizados

- Os novos ***Exercícios de Compreensão***, no início dos exercícios de cada seção, contêm uma coleção básica de quatro a oito exercícios planejados para tocar em aptidões e conceitos básicos da seção. Os estudantes podem utilizar esses exercícios como uma maneira concisa de testar seu conhecimento de cada seção. As respostas dos Exercícios de Verificação Rápida aparecem ao final de cada seção.
- O novo conjunto ***Enfocando Conceitos*** em cada grupo de exercícios destaca os exercícios que são mais conceituais.
- Os ***Exercícios de Revisão*** substituíram os Exercícios Suplementares ao final de cada capítulo. Uma seleção desses exercícios pode ser utilizada para rever conceitos importantes dentro do capítulo ou construir as verificações do mesmo. Além disso, as coleções de exercícios foram conferidas e expandidas para incluir uma maior variedade e uma equivalência mais acentuada entre exercícios pares e ímpares.

Introdução a Funções Exponenciais e Logarítmicas no Início O Capítulo 1 agora contém o material básico relativo a funções inversas, logarítmicas e exponenciais (que na edição anterior estava no Capítulo 4).

Notas Marginais Comentários marginais gerais chamam a atenção para idéias no texto ou fornecem idéias adicionais. Esses comentários gerais e os denominados ***Domínio da Tecnologia*** substituem os comentários intitulados *Para o Leitor* da edição anterior.

Análise de Funções O material tradicional sobre "esboço de curvas" aparece como parte da Análise de Funções (Seções 5.1-5.3). A Seção 5.3 foi revisada para obter um equilíbrio melhor entre os métodos do Cálculo e o uso de recursos computacionais no gráfico de funções. A seção sobre movimento retilíneo foi transferida para o final do capítulo para facilitar a transição da discussão de gráficos para o tópico de máximos e mínimos de funções. Assim, podemos tratar de aplicações mais cedo nesse capítulo.

Técnicas de Derivação A seção de Técnicas de Derivação (Seção 3.3) é dedicada, agora, às regras básicas: derivada de uma constante e de potências de x, a regra do múltiplo constante e as regras da soma e da diferença. As regras do produto e do quociente foram deslocadas para uma seção própria (Seção 3.4).

OUTRAS CARACTERÍSTICAS

Flexibilidade Esta edição foi feita com uma flexibilidade planejada para servir a um amplo espectro de filosofias do Cálculo, desde a mais tradicional até a mais inovadora. Os recursos computacionais podem ser enfatizados, ou não, e a ordem de muitos tópicos pode ser permutada livremente para acomodar as necessidades específicas do professor.

Revisão de Trigonometria Muitos alunos são atormentados por deficiências em Trigonometria, de modo que incluímos uma revisão de Trigonometria no Apêndice A.

Notas Históricas Nesta edição foram mantidas as notas históricas e as biografias que, desde sua primeira edição, são uma marca deste livro. Todo o material biográfico foi destilado de

referências básicas com o objetivo de capturar as personalidades dos grandes matemáticos e trazê-los com vida aos estudantes.

Exercícios Gradativos Alguns conjuntos de exercícios são gradativos, começando com problemas rotineiros e progredindo para problemas de maior dificuldade.

Rigor O desafio de escrever um bom livro de Cálculo está em obter o equilíbrio correto entre o rigor e a clareza. Nosso objetivo é apresentar uma Matemática rigorosa na maior extensão possível em um tratamento introdutório. Quando a clareza e o rigor colidem, escolhemos a clareza; contudo, acreditamos que é importante o estudante entender a diferença entre uma demonstração precisa e um argumento informal, de modo que tentamos tornar claro quando os argumentos apresentados são informais ou para motivação. A teoria envolvendo argumentos de ϵ-δ aparece em seções separadas, podendo ser estudada ou não, de acordo com a preferência do professor.

Nível Matemático Este texto foi escrito em um nível matemático que permita a preparação do estudante para as mais variadas profissões que requeiram uma sólida formação matemática, incluindo a Engenharia, várias ciências e a Administração.

Computação Gráfica Nesta edição fazemos uso extensivo da moderna computação gráfica para esclarecer conceitos e desenvolver a habilidade do estudante de visualizar objetos matemáticos, particularmente os do espaço tridimensional. Para aqueles que trabalham com recursos computacionais, há vários exercícios que foram projetados especialmente para desenvolver a habilidade de gerar e analisar curvas e superfícies matemáticas.

Aplicabilidade do Cálculo Um dos objetivos primários desta edição é estabelecer a relação do Cálculo com o mundo real e com as experiências próprias do estudante. Esse tema é mantido ao longo de exemplos, exercícios e módulos. As aplicações dadas nos exercícios foram escolhidas para fornecer ao estudante uma idéia da aplicabilidade do Cálculo.

Equações Diferenciais no Início As idéias básicas de equações diferenciais, problemas de valor inicial, campos de direções e curvas integrais são introduzidas simultaneamente com integração e depois revistas com mais detalhes no Capítulo 9.

Opção Paramétrica no Início De acordo com a tendência moderna de discutir as equações paramétricas no início da disciplina, introduzimos as curvas paramétricas na Seção 1.8, para depois rever o assunto no Capítulo 11, onde discutimos os assuntos relacionados ao Cálculo. Os professores que preferirem a tradicional discussão das equações paramétricas mais tarde não encontrarão problema algum em postergar o material da Seção 1.8 até a discussão sobre Geometria Analítica no Capítulo 11.

Princípios do Cálculo de Integrais O tradicional capítulo sobre Técnicas de Integração é denominado "Princípios do Cálculo de Integrais" para refletir uma abordagem mais moderna do material. O capítulo enfatiza métodos gerais e o papel de recursos computacionais no lugar de truques específicos para calcular integrais complicadas ou obscuras.

Apêndice de Equações Polinomiais Como muitos estudantes têm dificuldades em resolver equações polinomiais, incluímos o Apêndice B, em que revisamos o Teorema da Fatoração, o Teorema do Resto e o procedimento para encontrar raízes racionais.

Regra dos Quatro A "regra dos quatro" diz respeito à apresentação dos conceitos dos pontos de vista verbal, algébrico, visual e numérico. De acordo com a filosofia pedagógica atual, sempre que indicado, utilizamos essa abordagem.

SUPLEMENTOS

SUPLEMENTOS PARA O ESTUDANTE*

Student Solutions Manual, Neil Wigley
O Manual de Soluções para o Estudante (em inglês) fornece soluções detalhadas para os exercícios ímpares do livro.
Uma Variável: ISBN 0-471-67205-X
Várias Variáveis: ISBN 0-471-67212-2

Student Study Guide, Brian Camp
O Guia de Estudos para o Estudante (em inglês) contém idéias centrais e sugestões de estudo, bem como amostras de provas para cada seção e capítulo do livro.
Uma Variável: ISBN 0-471-67206-8
Várias Variáveis: ISBN 0-471-67213-0

SUPLEMENTOS PARA O PROFESSOR**

Instructor's Manual, Irl Bivens e Stephen Davis
O Manual do Professor (em inglês) fornece cronogramas e planos de ensino para cada seção do livro. A maioria dos planos de ensino contém uma lista não numerada dos pontos essenciais a serem enfatizados. A discussão de cada seção conclui com uma amostra de trabalho de casa para os alunos.
ISBN 0-471-67202-5

---

* Disponível somente no mercado norte-americano.

** Os professores interessados em receber material de apoio (em inglês) devem entrar em contato com a Bookman Editora pelo endereço secretariaeditorial@artmed.com.br e encaminhar comprovante de docência.

Instructor's Solutions Manual, Neil Wigley
O Manual de Soluções para o Professor (em inglês) contém soluções detalhadas para todos os exercícios do livro.
Uma Variável: ISBN 0-471-67203-3
Várias Variáveis: ISBN 0-471-72429-7

Test Bank, Henry Smith
O Banco de Testes (em inglês) contém uma variedade de perguntas e respostas para cada seção do livro.
ISBN 0-471-67204-1

PARA O ESTUDANTE E O PROFESSOR

Módulos Horizonte na Internet
Alguns capítulos selecionados terminam com referências a módulos na internet denominados *Expandindo o Horizonte do Cálculo* (em inglês). Como o nome indica, esses módulos têm o propósito de levar o estudante um passo além do texto tradicional de Cálculo. Eles são opcionais, podem ser usados como projetos para trabalho em grupo ou individual e podem ser usados pelos professores na disciplina. Por exemplo, há módulos que trabalham iteração e sistemas dinâmicos, equações do movimento, aplicação de integração a projeto de estrada de ferro, colisão de cometa com a Terra e modelagem de furacões. Esses módulos podem ser encontrados no *site*
www.bookman.com.br

OUTROS RECURSOS

eGrade Plus é uma ferramenta *on-line* poderosa que disponibiliza, tanto para professores quanto para estudantes, uma coleção integrada de recursos de ensino e aprendizado num *site* fácil de utilizar (em inglês). O eGrade Plus está organizado em torno das atividades essenciais executadas pelo professor e pelo aluno em sala de aula:

Para Professores

- **Prepare e Apresente:** Crie apresentações de aulas utilizando todos os recursos oferecidos pela Wiley, tais como versões *on-line* do livro, apresentações em *PowerPoint* e simulações interativas, tornando mais eficiente seu tempo de preparo de aula. Esses conteúdos podem ser facilmente adaptados, personalizados e completados para atender as demandas de sua disciplina.
- **Crie Trabalhos de Casa:** Automatize a elaboração e a correção de trabalhos de casa e de testes utilizando bancos de testes fornecidos pela Wiley ou escrevendo seu próprio banco. Os trabalhos de casa dos alunos serão automaticamente avaliados e as notas lançadas em sua planilha de notas. eGrade Plus pode estabelecer vínculos entre os problemas passados para casa e as seções on-line do livro, disponibilizando um assessoramento contextualizado para os alunos.
- **Registre o Progresso dos Alunos:** Mantenha um registro do progresso de seus alunos através de uma planilha das notas, que lhe permitirá analisar resultados individuais e globais da classe para determinar seu progresso e nível de entendimento.
- **Administre sua Disciplina:** eGrade Plus pode ser facilmente integrado com outros sistemas de administração de classe, planilhas de notas ou outros recursos que possam estar sendo utilizados em sua disciplina, fornecendo flexibilidade para construir sua própria disciplina, com seu próprio estilo.

Para Estudantes
O eGrade Plus da Wiley fornece retorno instantâneo aos trabalhos de casa e um tesouro de material de apoio. Essa ferramenta poderosa vai ajudar seus alunos a desenvolver a compreensão conceitual do material de aula e aumentar sua habilidade de resolver problemas.

- **Study&Practice:** a área **"Estude e Pratique"** (em inglês) está vinculada diretamente ao conteúdo do livro, permitindo aos estudantes revisar o texto enquanto estudam e elaboram os trabalhos de casa. Esse pacote inclui os seguintes:
  - **Soluções de Cálculo utilizando JustAsk! (Marca Registrada)** (em inglês) inclui problemas que se relacionam com material dos capítulos, tutoriais interativos, soluções e respostas detalhadas e orientações para soluções.
  - **Explorações do Cálculo** (em inglês) consiste numa série de aplicativos interativos Java que permitem ao estudante explorar o significado geométrico de muitos conceitos centrais do Cálculo 1.
  - **Revisão de Álgebra e Trigonometria** (em inglês) é uma revisão orientada, com ritmo ditado pelo usuário, de tópicos centrais da Álgebra e Trigonometria que são essenciais ao domínio do Cálculo.
  - **O Manual de Soluções para o Estudante** (em inglês) contém soluções detalhadas para exercícios selecionados do livro.
  - **O Guia de Estudos para o Estudante** (em inglês) oferece sugestões e dicas de estudo, idéias e conceitos centrais e amostras de testes e provas.
  - **Testes On-Line de Cálculo** (em inglês) oferece oportunidades para auto-avaliação de estudantes.
- **Assignment:** a área **"Trabalho de Casa"** (em inglês) mantém num mesmo lugar todos os trabalhos que você quer que seus alunos completem, facilitando-lhes manter-se em dia. Os estudantes terão acesso a uma variedade de ferramentas interativas de resolução de problemas, bem como outros recursos para aumentar sua confiança e entendimento. Além disso, muitos trabalhos de casa contém um *link* para as seções correspondentes do livro multimídia, fornecendo aos estudantes auxílio contextualizado do assunto estudado que os ajuda a vencer os obstáculos na resolução de problemas à medida que aparecerem.
- **Gradebook:** uma **Planilha Pessoal de Notas** (em inglês) permite que cada aluno confira suas notas de trabalhos anteriores a qualquer momento.

Por favor, visite o *site* **www.wiley.com/college/anton** (em inglês) ou confira uma demonstração *on-line* em **www.wiley.com/college/egradeplus**. Aqui podem ser encontradas informações adicionais (em inglês) sobre as características e vantagens de eGrade Plus, como solicitar um *test drive* de eGrade Plus para este livro e como adaptá-lo para uso em classe.

The Faculty Resource Network A *Rede de Recursos para o Corpo Docente* (em inglês) é uma rede para o uso de professores, mantida por professores do Ensino Superior dedicados ao efetivo uso de tecnologia em sala de aula. Esse grupo pode ajudá-lo a aplicar técnicas inovadoras em sala de aula, implementar pacotes específicos de aplicativos e adaptar a utilização de recursos às necessidades específicas de cada turma. Solicite mais informações ao seu representante local da Wiley.

AGRADECIMENTOS

Tivemos a sorte de contar com a orientação e o apoio de muita gente talentosa, cujos conhecimento e habilidade enriqueceram este livro de muitas formas. Por sua valiosa ajuda, agradecemos a:

REVISORES E COLABORADORES DA OITAVA EDIÇÃO

Gregory Adams, *Bucknell University*
Bill Allen, *Reedley College–Clovis Center*
Jerry Allison, *Black Hawk College*
Stella Ashford, *Southern University and A&M College*
Christopher Barker, *San Joaquin Delta College*
David Bradley, *University of Maine*
Paul Britt, *Louisiana State University*
Andrew Bulleri, *Howard Community College*
Miriam Castroconde, *Irvine Valley College*
Neena Chopra, *The Pennsylvania State University*
Gaemus Collins, *University of California, San Diego*
Danielle Cross, *Northern Essex Community College*
Stephan DeLong, *Tidewater Community College–Virginia Beach Campus*
Ryness Doherty, *Community College of Denver*
T. J. Duda, *Columbus State Community College*
Peter Embalabala, *Lincoln Land Community College*
Laurene Fausett, *Georgia Southern University*
Richard Hall, *Cochise College*
Noal Harbertson, *California State University, Fresno*
Donald Hartig, *California Polytechnic State University*
Konrad Heuvers, *Michigan Technological University*
John Johnson, *George Fox University*
Grant Karamyan, *University of California, Los Angeles*
Cecilia Knoll, *Florida Institute of Technology*
Carole King Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Richard Lane, *University of Montana*
James Martin, *Wake Technical Community College*
Vania Mascioni, *Ball State University*
Tamra Mason, *Albuquerque TVI Community College*
Roy Mathias, *The College of William & Mary*
John Michaels, *SUNY Brockport*
Darrell Minor, *Columbus State Community College*
Darren Narayan, *Rochester Institute of Technology*
Efton Park, *Texas Christian University*
Joanne Peeples, *El Paso Community College*
Richard Ponticelli, *North Shore Community College*
Holly Puterbaugh, *University of Vermont*
Robert Rock, *Daniel Webster College*
John Saccoman, *Seton Hall University*
Paul Seeburger, *Monroe Community College*
Charlotte Simmons, *University of Central Oklahoma*
Bryan Stewart, *Tarrant County College–Southeast Campus*
Bradley Stoll, *The Harker School*
Eleanor Storey, *Front Range Community College*
Richard Swanson, *Montana State University*
Helene Tyler, *Manhattan College*
Paramanathan Varatharajah, *North Carolina A&T State University*
David Voss, *Western Illinois University*
Jim Voss, *Front Range Community College*
Richard Watkins, *Tidewater Community College*
Jane West, *Trident Technical College*
Janine Wittwer, *Williams College*
Richard Zang, *University of New Hampshire*
Diane Zych, *Erie Community College–North Campus*

REVISORES E COLABORADORES DE EDIÇÕES ANTERIORES

Edith Ainsworth, *University of Alabama*
Loren Argabright, *Drexel University*
David Armacost, *Amherst College*
Dan Arndt, *University of Texas at Dallas*
Ajay Arora, *McMaster University*
Mary Lane Baggett, *University of Mississippi*
John Bailey, *Clark State Community College*
Robert C. Banash, *St. Ambrose University*
William H. Barker, *Bowdoin College*
George R. Barnes, *University of Louisville*
Scott E. Barnett, *Wayne State University*
Larry Bates, *University of Calgary*
John P. Beckwith, *Michigan Technological University*

Joan E. Bell, *Northeastern Oklahoma State University*
Harry N. Bixler, *Baruch College, CUNY*
Kbenesh Blayneh, *Florida A&M University*
Marilyn Blockus, *San Jose State University*
Ray Boersma, *Front Range Community College*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*
David Bolen, *Virginia Military Institute*
Daniel Bonar, *Denison University*
GeorgeW. Booth, *Brooklyn College*
Phyllis Boutilier, *Michigan Technological University*
Linda Bridge, *Long Beach City College*
Mark Bridger, *Northeastern University*
Judith Broadwin, *Jericho High School*
John Brothers, *Indiana University*
Stephen L. Brown, *Olivet Nazarene University*
Virginia Buchanan, *Hiram College*
Robert C. Bucker, *Western Kentucky University*
Robert Bumcrot, *Hofstra University*
Christopher Butler, *Case Western Reserve University*
Carlos E. Caballero, *Winthrop University*
Cheryl Cantwell, *Seminole Community College*
James Caristi, *Valparaiso University*
Judith Carter, *North Shore Community College*
Stan R. Chadick, *Northwestern State University*
Hongwei Chen, *Christopher Newport University*
Chris Christensen, *Northern Kentucky University*
Robert D. Cismowski, *San Bernardino Valley College*
Patricia Clark, *Rochester Institute of Technology*
Hannah Clavner, *Drexel University*
Ted Clinkenbeard, *Des Moines Area Community College*
David Clydesdale, *Sauk Valley Community College*
David Cohen, *University of California, Los Angeles*
Michael Cohen, *Hofstra University*
Pasquale Condo, *University of Lowell*
Robert Conley, *Precision Visuals*
Mary Ann Connors, *U.S. Military Academy at West Point*
Cecil J. Coone, *State Technical Institute at Memphis*
Norman Cornish, *University of Detroit*
Fielden Cox, *Centennial College*
Terrance Cremeans, *Oakland Community College*
Gary Crown, *Wichita State University*
Lawrence Cusick, *California State University–Fresno*
Michael Dagg, *Numerical Solutions, Inc.*
Art Davis, *San Jose State University*
A. L. Deal, *Virginia Military Institute*
Charles Denlinger, *Millersville University*
William H. Dent, *Maryville College*
Blaise DeSesa, *Allentown College of St. Francis de Sales*
Blaise DeSesa, *Drexel University*
Debbie A. Desrochers, *Napa Valley College*
Dennis DeTurck, *University of Pennsylvania*
Jacqueline Dewar, *Loyola Marymount University*
Preston Dinkins, *Southern University*
Gloria S. Dion, *Educational Testing Service*
Irving Drooyan, *Los Angeles Pierce College*
Tom Drouet, *East Los Angeles College*
Clyde Dubbs, *New Mexico Institute of Mining and Technology*
Della Duncan, *California State University–Fresno*
Ken Dunn, *Dalhousie University*
Sheldon Dyck, *Waterloo Maple Software*
Hugh B. Easler, *College of William and Mary*
Scott Eckert, *Cuyamaca College*
Joseph M. Egar, *Cleveland State University*
Judith Elkins, *Sweet Briar College*
Brett Elliott, *Southeastern Oklahoma State University*
William D. Emerson, *Metropolitan State College*
Garret J. Etgen, *University of Houston*
Benny Evans, *Oklahoma State University*
Philip Farmer, *Diablo Valley College*
Victor Feser, *University of Maryland*
Iris Brann Fetta, *Clemson University*
James H. Fife, *Educational Testing Service*
Sally E. Fischbeck, *Rochester Institute of Technology*
Dorothy M. Fitzgerald, *Golden West College*
Barbara Flajnik, *Virginia Military Institute*
Daniel Flath, *University of South Alabama*
Ernesto Franco, *California State University–Fresno*
Nicholas E. Frangos, *Hofstra University*
Katherine Franklin, *Los Angeles Pierce College*
Marc Frantz, *Indiana University–Purdue University at Indianapolis*
Michael Frantz, *University of La Verne*
Susan L. Friedman, *Bernard M. Baruch College, CUNY*
William R. Fuller, *Purdue University*
Beverly Fusfield
Daniel B. Gallup, *Pasadena City College*
Bradley E. Garner, *Boise State University*
Carrie Garner
Susan Gerstein
Mahmood Ghamsary, *Long Beach City College*
Rob Gilchrist, *U.S. Air Force Academy*
G. S. Gill, *Brigham Young University*
Michael Gilpin, *Michigan Technological University*
Kaplana Godbole, *Michigan Technological Institute*
S. B. Gokhale, *Western Illinois University*
Morton Goldberg, *Broome Community College*
Mardechai Goodman, *Rosary College*
Sid Graham, *Michigan Technological University*
Bob Grant, *Mesa Community College*
Raymond Greenwell, *Hofstra University*
Dixie Griffin, Jr., *Louisiana Tech University*
Gary Grimes, *Mt. Hood Community College*
David Gross, *University of Connecticut*
Jane Grossman, *University of Lowell*
Michael Grossman, *University of Lowell*
Dennis Hadah, *Saddleback Community College*
Diane Hagglund, *Waterloo Maple Software*
Douglas W. Hall, *Michigan State University*
Nancy A. Harrington, *University of Lowell*
Kent Harris, *Western Illinois University*
Karl Havlak, *Angelo State University*
J. Derrick Head, *University of Minnesota–Morris*
Jim Hefferson, *St. Michael College*
Albert Herr, *Drexel University*
Peter Herron, *Suffolk County Community College*
Warland R. Hersey, *North Shore Community College*
Konrad J. Heuvers, *Michigan Technological University*
Dean Hickerson
Robert Higgins, *Quantics Corporation*
Rebecca Hill, *Rochester Institute of Technology*
Tommie Ann Hill-Natter, *Prairie View A&M University*
Holly Hirst, *Appalachian State University*
Edwin Hoefer, *Rochester Institute of Technology*
Louis F. Hoelzle, *Bucks County Community College*
Robert Homolka, *Kansas State University–Salina*
Henry Horton, *University of West Florida*
Joe Howe, *St. Charles County Community College*
Shirley Huffman, *Southwest Missouri State University*
Hugh E. Huntley, *University of Michigan*
Fatenah Issa, *Loyola University of Chicago*
Gary S. Itzkowitz, *Rowan University*
Emmett Johnson, *Grambling State University*
Jerry Johnson, *University of Nevada–Reno*
John M. Johnson, *George Fox College*
Wells R. Johnson, *Bowdoin College*
Kenneth Kalmanson, *Montclair State University*
Herbert Kasube, *Bradley University*
Phil Kavanagh, *Mesa State College*
David Keller, *Kirkwood Community College*
Maureen Kelley, *Northern Essex Community College*
Dan Kemp, *South Dakota State University*
Harvey B. Keynes, *University of Minnesota*
Lynn Kiaer, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Vesna Kilibarda, *Indiana University Northwest*
Cecilia Knoll, *Florida Institute of Technology*
Holly A. Kresch, *Diablo Valley College*
Richard Krikorian, *Westchester Community College*
John Kubicek, *Southwest Missouri State University*
Paul Kumpel, *SUNY, Stony Brook*
Theodore Lai, *Hudson County Community College*
Fat C. Lam, *Gallaudet University*
Leo Lampone, *Quantics Corporation*
James F. Lanahan, *University of Detroit–Mercy*
Bruce Landman, *University of North Carolina at Greensboro*
Jeuel LaTorre, *Clemson University*
Kuen Hung Lee, *Los Angeles Trade–Technology College*
Marshall J. Leitman, *Case Western Reserve University*
Benjamin Levy, *Lexington H.S., Lexington, Mass.*
Darryl A. Linde, *Northeastern Oklahoma State University*
Phil Locke, *University of Maine, Orono*
Leland E. Long, *Muscatine Community College*
John Lucas, *University of Wisconsin–Oshkosh*
Stanley M. Lukawecki, *Clemson University*
Phoebe Lutz, *Delta College*
Nicholas Macri, *Temple University*
Michael Magill, *Purdue University*
Ernest Manfred, *U.S. Coast Guard Academy*
Melvin J. Maron, *University of Louisville*
Mauricio Marroquin, *Los Angeles Valley College*
Thomas W. Mason, *Florida A&M University*
Majid Masso, *Brookdale Community College*
Larry Matthews, *Concordia College*
Thomas McElligott, *University of Lowell*
Phillip McGill, *Illinois Central College*
Judith McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Joseph Meier, *Millersville University*
Robert Meitz, *Arizona State University*

Laurie Haskell Messina, *University of Oklahoma*
Aileen Michaels, *Hofstra University*
Janet S. Milton, *Radford University*
Robert Mitchell, *Rowan College of New Jersey*
Marilyn Molloy, *Our Lady of the Lake University*
Ron Moore, *Ryerson Polytechnical Institute*
Barbara Moses, *Bowling Green State University*
Eric Murphy, *U.S. Air Force Academy*
David Nash, *VP Research, Autofacts, Inc.*
Doug Nelson, *Central Oregon Community College*
Lawrence J. Newberry, *Glendale College*
Kylene Norman, *Clark State Community College*
Roxie Novak, *Radford University*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Stanley Ocken, *City College–CUNY*
Ralph Okojie, *Elizabeth City State University*
Ann Ostberg
Judith Palagallo, *The University of Akron*
Donald Passman, *University of Wisconsin*
David Patterson, *West Texas A&M*
Walter M. Patterson, *Lander University*
Steven E. Pav, *Alfred University*
Edward Peifer, *Ulster County Community College*
Gary L. Peterson, *James Madison University*
Lefkios Petevis, *Kirkwood Community College*
Robert Phillips, *University of South Carolina at Aiken*
Mark A. Pinsky, *Northeastern University*
Catherine H. Pirri, *Northern Essex Community College*
ThomasW. Polaski, *Winthrop University*
Father Bernard Portz, *Creighton University*
Irwin Pressman, *Carleton University*
Douglas Quinney, *University of Keele*
David Randall, *Oakland Community College*
B. David Redman, Jr., *Delta College*
Irmgard Redman, *Delta College*
Richard Remzowski, *Broome Community College*
Guanshen Ren, *College of Saint Scholastica*
William H. Richardson, *Wichita State University*
John Rickert, *Rose-Hulman Institute of Technology*
David Robbins, *Trinity College*
Lila F. Roberts, *Georgia Southern University*
David Rollins, *University of Central Florida*
Naomi Rose, *Mercer County Community College*
Sharon Ross, *DeKalb College*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
David Sandell, *U.S. Coast Guard Academy*
Avinash Sathaye, *University of Kentucky*
Ned W. Schillow, *Lehigh County Community College*
Dennis Schneider, *Knox College*
George W. Schultz, *St. Petersburg Junior College*
Dan Seth, *Morehead State University*
Richard B. Shad, *Florida Community College–Jacksonville*
George Shapiro, *Brooklyn College*
Parashu R. Sharma, *Grambling State University*
Michael D. Shaw, *Florida Institute of Technology*
Donald R. Sherbert, *University of Illinois*
Howard Sherwood, *University of Central Florida*
Mary Margaret Shoaf-Grubbs, *College of New Rochelle*
Bhagat Singh, *University of Wisconsin Centers*
Ann Sitomer, *Portland Community College*
Martha Sklar, *Los Angeles City College*
Henry Smith, *Southeastern Louisiana University*
Jeanne Smith, *Saddleback Community College*
John L. Smith, *Rancho Santiago Community College*
Wolfe Snow, *Brooklyn College*
Ian Spatz, *Brooklyn College*
Jean Springer, *Mount Royal College*
Rajalakshmi Sriram, *Okaloosa-Walton Community College*
Norton Starr, *Amherst College*
Mark Stevenson, *Oakland Community College*
Gary S. Stoudt, *University of Indiana of Pennsylvania*
John A. Suvak, *Memorial University of Newfoundland*
P. Narayana Swamy, *Southern Illinois University*
Richard B. Thompson, *The University of Arizona*
Skip Thompson, *Radford University*
Josef S. Torok, *Rochester Institute of Technology*
William F. Trench, *Trinity University*
Walter W. Turner, *Western Michigan University*
Thomas Vanden Eynden, *Thomas More College*
Paul Vesce, *University of Missouri–Kansas City*
Richard C. Vile, *Eastern Michigan University*
David Voss, *Western Illinois University*
Ronald Wagoner, *California State University–Fresno*
Shirley Wakin, *University of New Haven*
James E. Ward, *Bowdoin College*
James Warner, *Precision Visuals*
Peter Waterman, *Northern Illinois University*
Evelyn Weinstock, *Glassboro State College*
Bruce R. Wenner, *University of Missouri–Kansas City*
Candice A. Weston, *University of Lowell*
Bruce F. White, *Lander University*
Neil Wigley, *University of Windsor*
Ted Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Gary L. Wood, *Azusa Pacific University*
Yihren Wu, *Hofstra University*
Richard Yuskaitis, *Precision Visuals*
Michael Zeidler, *Milwaukee Area Technical College*
Michael L. Zwilling, *Mount Union College*

As seguintes pessoas leram vários estágios da oitava edição em busca de precisão matemática e pedagógica e/ou ajudaram na tarefa criticamente importante de preparar as respostas dos exercícios:

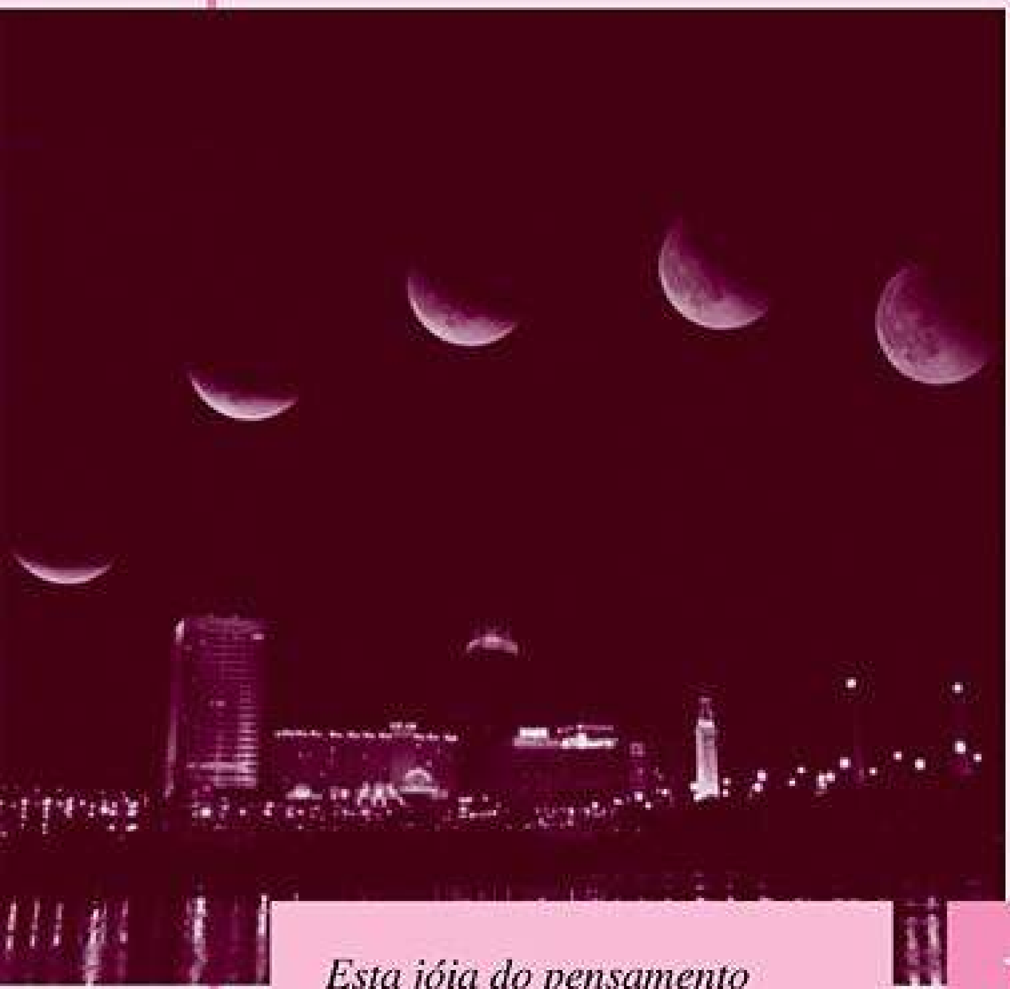
Elka Block, *Twin Prime Editorial*
Dean Hickerson, *University of California, Davis*
Thomas Polaski, *Winthrop University*
Frank Purcell, *Twin Prime Editorial*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*

SUMÁRIO

Volume I

Volume II

c a p í t u l o u m



FUNÇÕES

Esta jóia do pensamento matemático moderno, a noção de função.

— Thomas J. McCormack
Ensaísta e Tradutor Científico

Um dos temas mais importantes do Cálculo é a análise das relações entre quantidades físicas ou matemáticas. Tais relações podem ser descritas em termos de gráficos, fórmulas, dados numéricos ou palavras. Neste capítulo, desenvolveremos o conceito de "função", que é a idéia básica subjacente a quase todas as relações matemáticas e físicas, não importando como são expressas. Estudaremos as propriedades de algumas das funções mais básicas que ocorrem no Cálculo, incluindo as funções polinomiais, trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciais e logarítmicas. Para os leitores que gostariam de estudar as aplicações mais a fundo, fornecemos uma seção opcional que introduz o uso de curvas de regressão para modelar dados do mundo real. Concluímos o capítulo com uma discussão de curvas do plano que são melhor descritas utilizando um par de funções. (Esse material relativo a "curvas paramétricas" pode ser adiado até mais tarde, se for conveniente.)

Foto: ***O desenvolvimento do Cálculo nos séculos XVII e XVIII foi motivado pela necessidade de entender fenômenos físicos como as marés, as fases da Lua, a natureza da luz e a gravidade.***

1.1 FUNÇÕES

Nesta seção definiremos e desenvolveremos o conceito de "função", que é o objeto matemático básico utilizado por cientistas e matemáticos para descrever relações entre quantidades variáveis. As funções desempenham um papel central no Cálculo e em suas aplicações.

DEFINIÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Muitas leis científicas e muitos princípios de Engenharia descrevem como uma quantidade depende de outra. Em 1673, essa idéia foi formalizada por Leibniz, que cunhou o termo *função* para indicar a dependência de uma quantidade em relação a uma outra, conforme a definição a seguir.

1.1.1 DEFINIÇÃO Se uma variável y depende de uma variável x de tal modo que cada valor de x determina exatamente um valor de y, então dizemos que ***y* é uma função de *x***.

Quatro maneiras usuais de representar funções são:

- Numericamente com tabelas
- Algebricamente com fórmulas
- Geometricamente com gráficos
- Verbalmente

Tabela 1.1.1
VELOCIDADES DE QUALIFICAÇÃO NAS 500 MILHAS DE INDIANÁPOLIS

ANO t	VELOCIDADE S (milhas/hora)
1987	215,390
1988	219,198
1989	223,885
1990	225,301
1991	224,113
1992	232,482
1993	223,967
1994	228,011
1995	231,604
1996	233,100
1997	218,263
1998	223,503
1999	225,179
2000	223,471
2001	226,037
2002	231,342
2003	231,725
2004	222,024

O método de representação muitas vezes depende de como surgiu a função. Por exemplo:

- A Tabela 1.1.1 mostra a velocidade de qualificação S para a *pole* na corrida de 500 milhas de Indianápolis como uma função do ano t. Há exatamente um valor de S para cada valor de t.
- A Figura 1.1.1 é um registro gráfico de um terremoto feito por um sismógrafo. O gráfico descreve a deflexão D da agulha do sismógrafo como uma função do tempo T decorrido desde o instante em que o abalo deixou o epicentro do terremoto. Há exatamente um valor de D para cada valor de T.
- Algumas das mais conhecidas funções surgem de fórmulas; por exemplo, a fórmula $C = 2\pi r$ expressa o comprimento da circunferência C de um círculo como uma função do raio r do círculo. Há exatamente um valor de C para cada valor de r.
- Algumas vezes, as funções são descritas em palavras. Por exemplo, a Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton é, freqüentemente, enunciada da seguinte forma: A força gravitacional de atração entre dois corpos no Universo é diretamente proporcion al ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Esta é a descrição verbal da fórmula:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

na qual F é a força de atração, m_1 e m_2 são as massas, r é a distância entre os corpos e G é uma constante. Se as massas são constantes, então a descrição verbal define F como uma função de r. Há exatamente um valor de F para cada valor de r.

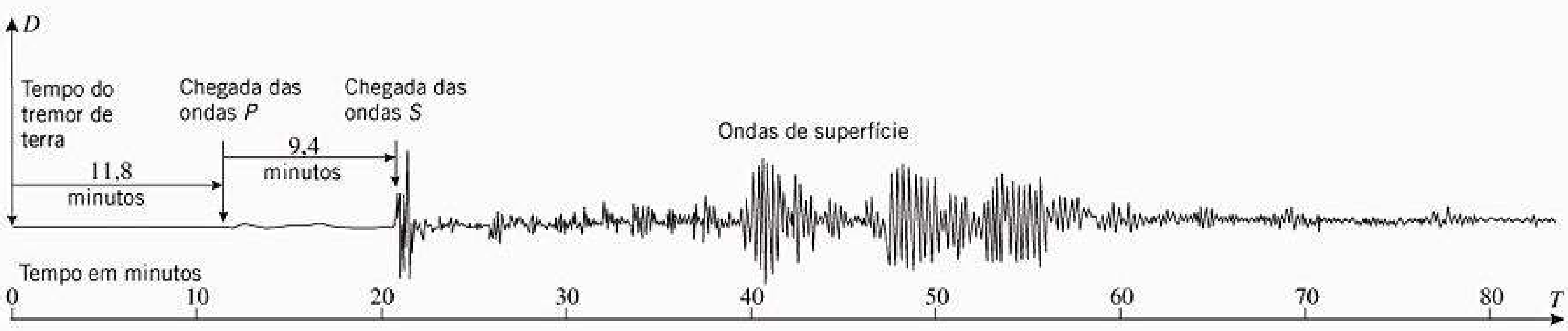


Figura 1.1.1

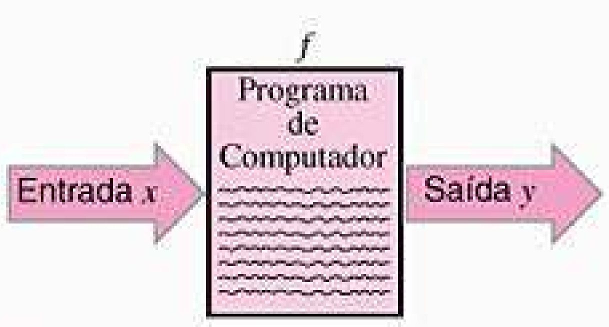


Figura 1.1.2

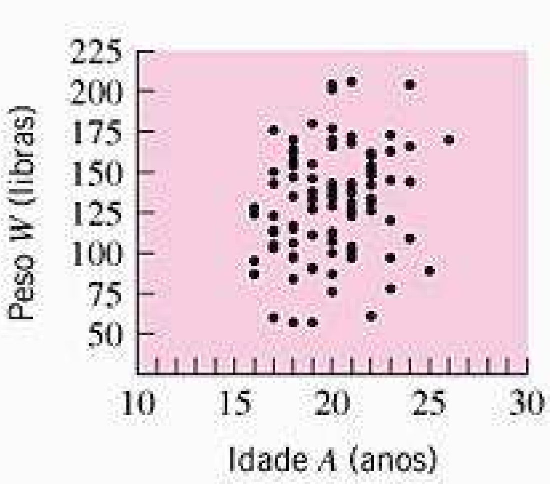


Figura 1.1.3

Na metade do século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (pronuncia-se "oiler") concebeu a idéia de denotar funções pelas letras do alfabeto, tornando possível, desse modo, trabalhar com funções sem apresentar fórmulas específicas, gráficos ou tabelas. Para entender a idéia de Euler, pense numa função como sendo um programa de computador que toma uma *entrada* x, opera com ela de alguma forma e produz exatamente uma *saída* y. O programa de computador é um objeto por si só, assim podemos dar-lhe um nome, digamos f. Dessa forma, a função f (o programa de computador) associa uma única saída y a cada entrada x (Figura 1.1.2). Isso sugere a definição seguinte.

1.1.2 DEFINIÇÃO Uma ***função*** f é uma regra que associa uma única saída a cada entrada. Se a entrada for denotada por x, então a saída é denotada por $f(x)$ (leia-se "f de x").

Nessa definição, o termo *única* significa "exatamente uma". Assim, uma função não pode produzir duas saídas diferentes com a mesma entrada. Por exemplo, a Figura 1.1.3 mostra um gráfico de dispersão de pesos *versus* idade para uma amostra aleatória de 100

estudantes universitários. Esse gráfico de dispersão *não* descreve o peso W como uma função da idade A, pois há alguns valores de A com mais de um valor correspondente de W. Isso é esperado, uma vez que duas pessoas com a mesma idade não têm, necessariamente, o mesmo peso.

VARIÁVEIS INDEPENDENTES E DEPENDENTES

Para uma dada entrada x, a saída de uma função f é denominada ***valor*** de f em x, ou ***imagem*** de x por f. Muitas vezes denotamos a saída de uma função por uma letra, digamos y, e escrevemos

$$y = f(x)$$

Essa equação expressa y como uma função de x; a variável x é denominada ***variável independente*** ou ***argumento*** de f, e a variável y é denominada ***variável dependente*** de f. Essa terminologia tem o objetivo de sugerir que x está livre para variar, mas, uma vez dado um valor específico para x, o valor correspondente de y está determinado. Por enquanto, consideramos apenas funções em que as variáveis independente e dependente são números reais, caso em que dizemos que f é uma ***função real de uma variável real***. Adiante consideraremos outros tipos de funções.

Tabela 1.1.2

x	0	1	2	3
y	3	4	−1	6

► Exemplo 1 A Tabela 1.1.2 descreve a relação funcional $y = f(x)$ em que

$f(0) = 3$ — f associa $y = 3$ a $x = 0$

$f(1) = 4$ — f associa $y = 4$ a $x = 1$

$f(2) = -1$ — f associa $y = -1$ a $x = 2$

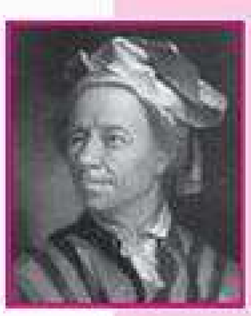
$f(3) = 6$ — f associa $y = 6$ a $x = 3$ ◄

► Exemplo 2 A equação

$$y = 3x^2 - 4x + 2$$

está na forma $y = f(x)$ em que a função f é dada pela fórmula

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$$



Leonhard Euler (1707-1783) Euler foi, provavelmente, o mais prolífico de todos os matemáticos. Foi dito que "Euler fazia matemática tão facilmente quanto a maioria dos homens respira". Ele nasceu em Basel, Suíça, e era filho de um ministro protestante, o qual, por sua vez, já estudara Matemática. O gênio de Euler se desenvolveu cedo. Ele freqüentou a Universidade de Basel e, aos 16 anos, obteve simultaneamente os títulos de Bacharel em Artes e Mestre em Filosofia. Enquanto estava em Basel, teve a sorte de ser orientado um dia por semana pelo notável matemático Johann Bernoulli. Sob a pressão do pai, começou a estudar Teologia. Contudo, o fascínio pela Matemática era muito grande e, aos 18 anos, começou a pesquisar. Não obstante, a influência do pai era muito forte e seus estudos teológicos persistiram, e assim por toda a vida Euler foi profundamente religioso e simples. Em períodos diferentes, lecionou na Academia de Ciências de São Petersburgo (Rússia), na Universidade de Basel e na Academia de Ciências de Berlim. A energia e a capacidade de trabalho de Euler eram praticamente ilimitadas. Seus trabalhos acumulados formam mais de 100 volumes in-quarto (folha de papel dobrada duas vezes) e acredita-se que muito de seu trabalho tenha sido perdido. É particularmente espantoso que nos últimos 17 anos de sua vida, quando mais produziu, estava cego! A memória impecável de Euler era fenomenal. Mais cedo em sua vida, memorizou a *Eneida* de Virgílio e, com 70 anos, era capaz de recitar a obra inteira. Além disso, podia dar a primeira e a última sentença de cada página do livro memorizado. Sua habilidade em resolver problemas de cabeça era inacreditável. Ele solucionava de cabeça grandes problemas do movimento lunar que frustravam Isaac Newton e, em certa ocasião, fez um complicado cálculo de cabeça para encerrar uma discussão entre dois estudantes, cujos cálculos diferiam na qüinquagésima casa decimal.

A partir de Leibniz e Newton, os resultados em Matemática se desenvolveram rápida e desordenadamente. O gênio de Euler deu uma coerência à paisagem Matemática. Ele foi o primeiro matemático a trazer toda a força do Cálculo para resolver problemas da Física. Ele fez contribuições importantes a virtualmente todos os ramos da Matemática bem como à teoria da óptica, dos movimentos planetários, da eletricidade, do magnetismo e da mecânica geral.

Para cada entrada x, a saída correspondente y é obtida substituindo x nessa fórmula.

$$f(0) = 3(0)^2 - 4(0) + 2 = 2 \qquad \boxed{f \text{ associa } y = 2 \text{ a } x = 0}$$

$$f(-1{,}7) = 3(-1{,}7)^2 - 4(-1{,}7) + 2 = 17{,}47 \qquad \boxed{f \text{ associa } y = 17{,}47 \text{ a } x = -1{,}7}$$

$$f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} + 2 = 8 - 4\sqrt{2} \qquad \boxed{f \text{ associa } y = 8 - 4\sqrt{2} \text{ a } x = \sqrt{2}}$$

GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Se f for uma função de uma variável real a valores reais, então o ***gráfico*** de f no plano xy é definido como sendo o gráfico da equação $y = f(x)$. Por exemplo, o gráfico da função $f(x) = x$ é o gráfico da equação $y = x$ que aparece na Figura 1.1.4. Essa figura também mostra os gráficos de algumas outras funções básicas, possivelmente conhecidos. Na próxima seção, vamos discutir técnicas para a construção de gráficos de funções usando computadores e calculadoras.

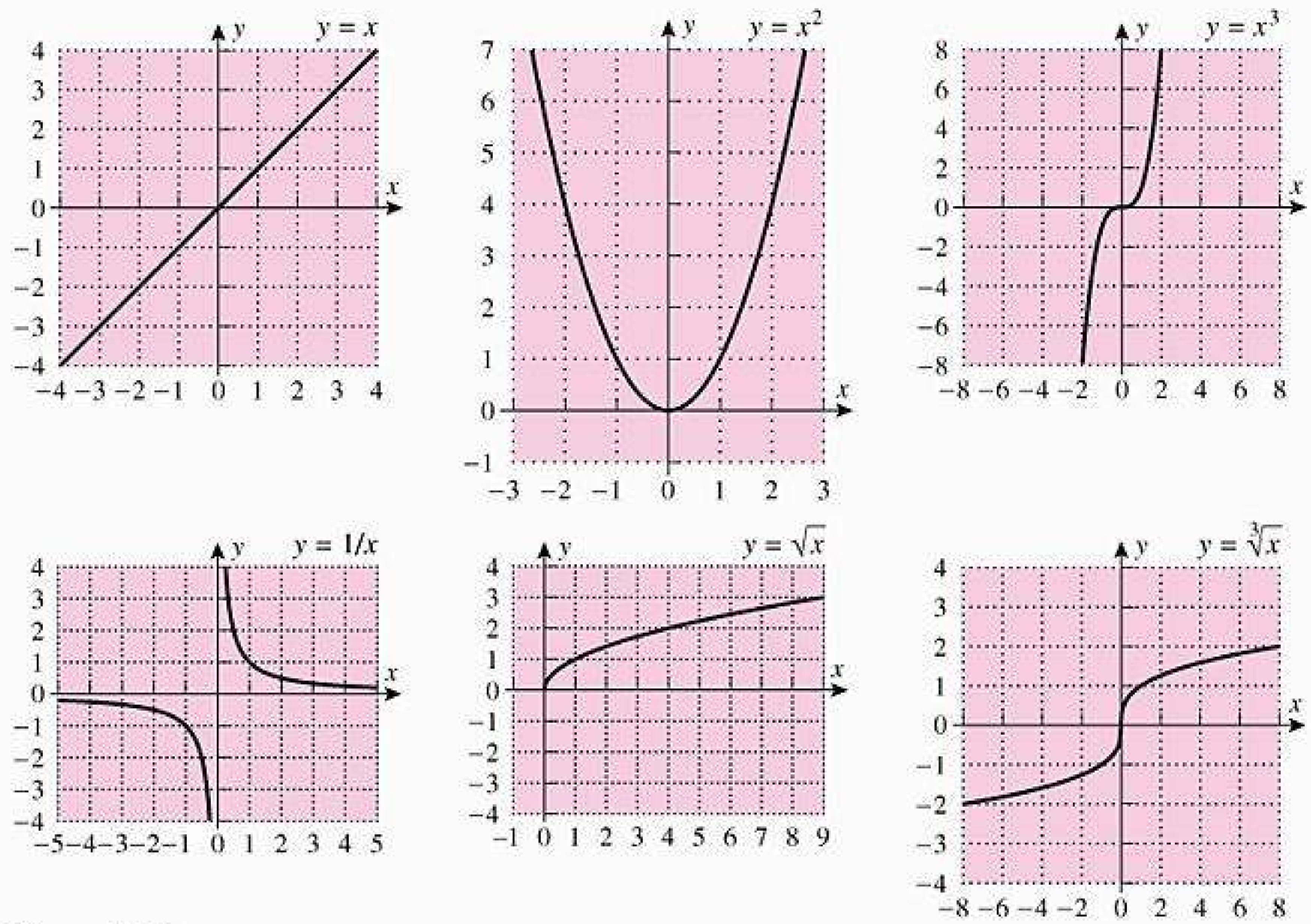


Figura 1.1.4

Como $\sqrt{x}$ é imaginário para valores negativos de x, não há pontos no gráfico de $y = \sqrt{x}$ na região em que $x < 0$.

Os gráficos podem fornecer informação visual importante sobre uma função. Por exemplo, como o gráfico de uma função f no plano xy é o gráfico da equação $y = f(x)$, os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$, ou seja, *a coordenada y de um ponto do gráfico de f é o valor de f na coordenada x correspondente* (Figura 1.1.5). Os valores de x para os quais $f(x) = 0$ são as coordenadas x dos pontos nos quais o gráfico de f intersecta o eixo x (Figura 1.1.6). Esses valores são denominados ***zeros*** de f, ***raízes*** de $f(x) = 0$ ou ***pontos de corte*** de $y = f(x)$ ***com o eixo x***.

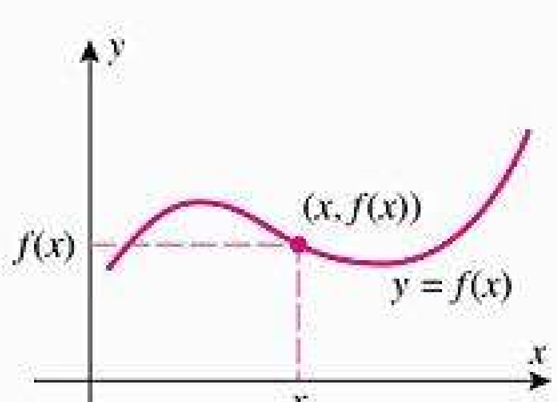


Figura 1.1.5 A coordenada y de um ponto no gráfico de $y = f(x)$ é o valor de f na coordenada x correspondente.

O TESTE DA RETA VERTICAL

Nem toda curva no plano xy é o gráfico de uma função. Por exemplo, considere a curva na Figura 1.1.7, que é cortada em dois pontos distintos (a, b) e (a, c) por uma reta vertical. Essa curva não pode ser o gráfico de $y = f(x)$, qualquer que seja a função f; pois senão teríamos

$$f(a) = b \quad e \quad f(a) = c$$

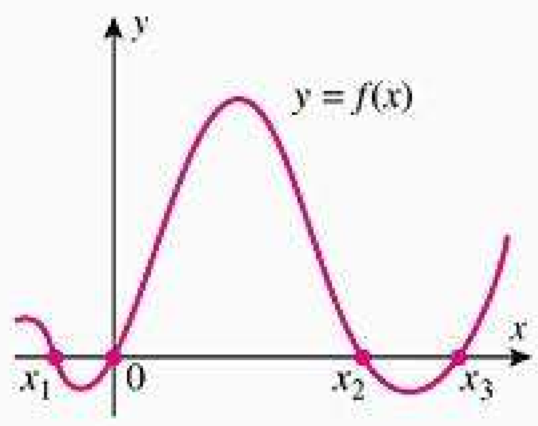


Figura 1.1.6 f tem zeros em x_1, 0, x_2 e x_3.

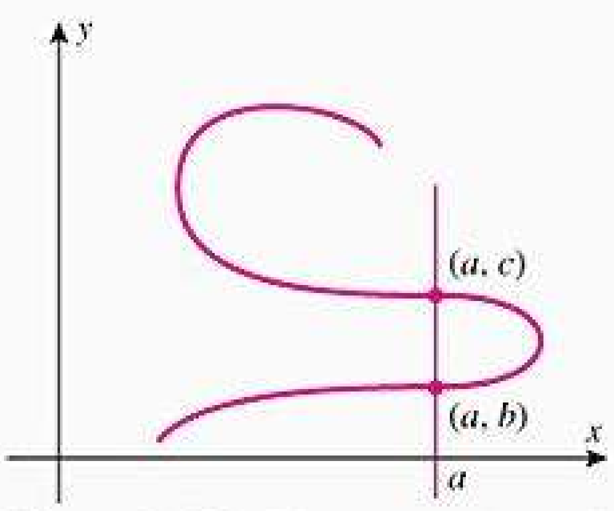


Figura 1.1.7 Esta curva não pode ser o gráfico de uma função.

Veja no Apêndice G da internet uma revisão sobre círculos.

o que é impossível, uma vez que f não pode atribuir dois valores diferentes para a. Assim, não existe uma função f cujo gráfico seja a curva dada. Isso ilustra o seguinte resultado geral, denominado ***teste da reta vertical***.

> **1.1.3 TESTE DA RETA VERTICAL** *Uma curva no plano xy é o gráfico de alguma função f se e somente se nenhuma reta vertical intersecta a curva mais de uma vez.*

▶ Exemplo 3 O gráfico da equação

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

é um círculo de raio 5, centrado na origem, e assim existem retas verticais que cortam o gráfico mais de uma vez. Isso também pode ser visto algebricamente resolvendo (3) para y em termos de x:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Essa equação não define y como uma função de x, pois o lado direito tem "valores múltiplos" no sentido de que um valor de x no intervalo $(-5, 5)$ produz dois valores correspondentes de y. Por exemplo, se $x = 4$, então $y = \pm 3$, assim $(4, 3)$ e $(4, -3)$ são dois pontos do círculo na mesma reta vertical (Figura 1.1.8). Entretanto, se considerarmos o círculo como a união dos dois semicírculos:

$$y = \sqrt{25 - x^2} \text{ e } y = -\sqrt{25 - x^2}$$

cada um dos quais define y como uma função de x (Figura 1.1.9). ◀

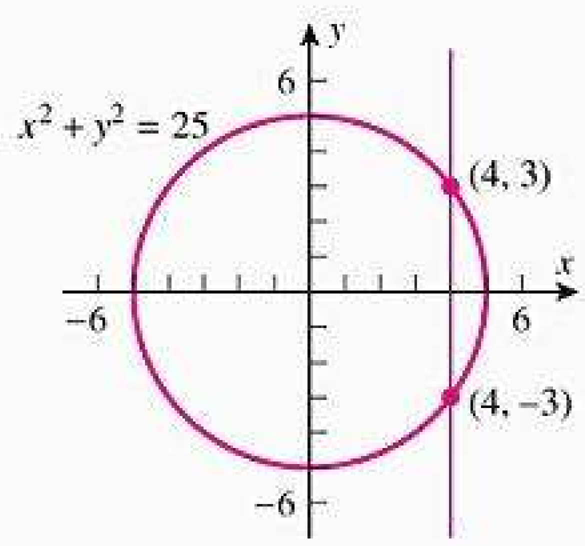


Figura 1.1.8

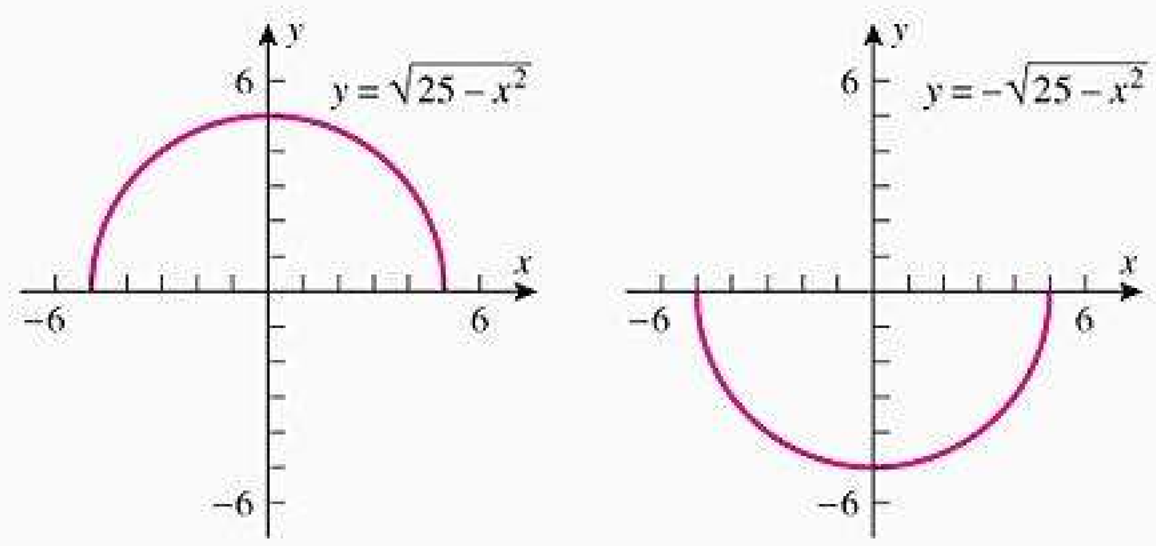


Figura 1.1.9 A união dos semicírculos é o círculo completo.

■ A FUNÇÃO VALOR ABSOLUTO

Lembre-se de que o ***valor absoluto*** ou ***grandeza*** de um número real x é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Símbolos tais como $+x$ e $-x$ são enganosos, uma vez que é tentador concluir ser $+x$ positivo e $-x$ negativo. Porém, isso não precisa ser assim, pois x pode ser positivo ou negativo. Por exemplo, se x for negativo, digamos $x = -3$, então $-x = 3$ é positivo e $+x = -3$ é negativo.

O efeito de considerar o valor absoluto de um número é tirar fora o sinal menos, se o número for negativo, ou deixá-lo como está, se for não-negativo. Assim,

$$|5| = 5, \quad \left|-\tfrac{4}{7}\right| = \tfrac{4}{7}, \quad |0| = 0$$

Uma discusão mais detalhada das propriedades de valor absoluto é dada no Apêndice E da internet. Porém, por conveniência, vamos dar o resumo a seguir de suas propriedades algébricas.

> **1.1.4 PROPRIEDADES DO VALOR ABSOLUTO** *Se a e b são números reais, então*
>
> (a) $|-a| = |a|$ — Um número e seu negativo têm o mesmo valor absoluto.
>
> (b) $|ab| = |a|\,|b|$ — O valor absoluto de um produto é igual ao produto dos valores absolutos.
>
> (c) $|a/b| = |a|/|b|, b \neq 0$ — O valor absoluto de uma razão é a razão dos valores absolutos.
>
> (d) $|a + b| \leq |a| + |b|$ — A ***desigualdade triangular***.

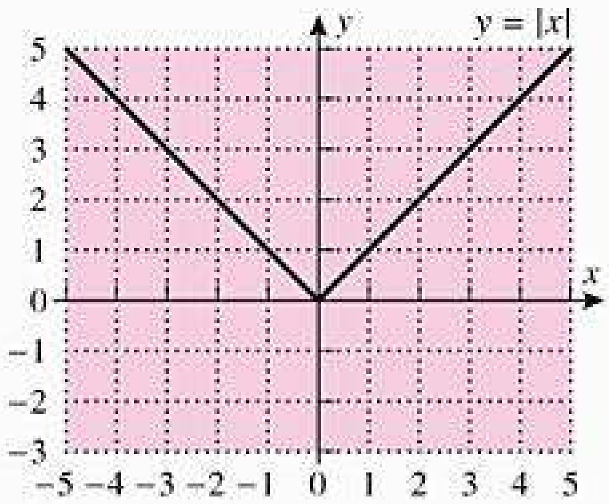


Figura 1.1.10

O gráfico da função $f(x) = |x|$ pode ser obtido representando separadamente as duas partes da equação

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Para $x \geq 0$, o gráfico de $y = x$ é o raio de inclinação 1 com seu ponto final na origem e, para $x < 0$, o gráfico de $y = -x$ é o raio de inclinação −1 também com seu ponto final na origem. Combinando as duas partes, obtemos o gráfico em forma de V da Figura 1.1.10.

Valores absolutos guardam relações importantes com raízes quadradas. Para ver isso, lembre-se de que, pela Álgebra, todo número real positivo x tem duas raízes quadradas, uma positiva e a outra negativa. Por definição, o símbolo $\sqrt{x}$ denota a raiz quadrada *positiva* de x. Para denotar a raiz quadrada negativa, precisamos escrever $-\sqrt{x}$. Por exemplo, a raiz quadrada positiva de 9 é $\sqrt{9} = 3$, enquanto a raiz quadrada negativa é $-\sqrt{9} = -3$. (Não cometa o erro de escrever $\sqrt{9} = \pm 3$.)

Ao simplificar as expressões da forma $\sqrt{x^2}$ é necessário cuidado, pois nem sempre é verdade que $\sqrt{x^2} = x$. Essa equação é correta se x for não-negativo, porém falsa para x negativo. Por exemplo, se $x = -4$, então

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \neq x$$

Uma afirmação que é correta para todos os valores reais de x é

$$\sqrt{x^2} = |x| \tag{2}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Verifique (2) usando uma calculadora gráfica para mostrar que as equações $y = \sqrt{x^2}$ e $y = |x|$ têm o mesmo gráfico.

■ FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

A função valor absoluto $f(x) = |x|$ é um exemplo de uma função definida ***por partes***, no sentido de que a fórmula para f muda dependendo do valor de x.

► Exemplo 4 Esboce o gráfico da função definida por partes pela fórmula

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \sqrt{1 - x^2}, & -1 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Solução A fórmula para f muda nos pontos $x = -1$ e $x = 1$ (denominados ***pontos de mudança*** para a fórmula). Um bom procedimento para elaborar os gráficos de funções definidas por partes é fazê-lo separadamente sobre os intervalos determinados pelos pontos de mudança e depois nos próprios pontos. Para a função f deste exemplo, o gráfico é o segmento da reta horizontal $y = 0$ sobre o intervalo $(-\infty, -1)$, o semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ sobre o intervalo $(-1, 1)$ e o segmento da reta $y = x$ sobre o intervalo $(1, +\infty)$. A fórmula para f especifica que a equação $y = 0$ se aplica ao ponto de mudança −1 [assim, $y = f(-1) = 0$] e que a equação $y = x$ se aplica ao ponto de mudança 1 [assim, $y = f(1) = 1$]. O gráfico de f está na Figura 1.1.11. ◄

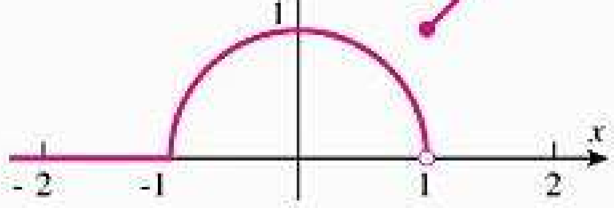


Figura 1.1.11

Na Figura 1.1.11, no ponto de mudança $x = 1$, a bola sólida está na reta enquanto a bola vazia está no semicírculo, enfatizando que o ponto está na reta e não no semicírculo. Não há ambigüidade no ponto $x = -1$, pois as duas partes do gráfico juntam-se continuamente aí.

► Exemplo 5 Aumentando a velocidade na qual o ar passa sobre a pele de uma pessoa, aumenta também a taxa de evaporação da umidade da pele, produzindo uma sensação de resfriamento. (Por isso utilizamos ventiladores no verão.) O ***índice de sensação térmica*** em um dado instante (definido pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA) é a temperatura em graus Fahrenheit a uma velocidade de vento de 3 milhas por hora que produziria a mesma sensação de resfriamento sobre a pele exposta que a combinação de temperatura do ar e velocidade do vento no dado instante. Uma fórmula empírica, isto é, baseada em dados experimentais, para o índice de sensação térmica W a 32°F com uma velocidade do vento de v milhas por hora é

$$W = \begin{cases} 32, & 0 \le v \le 3 \\ 55{,}628 - 22{,}07v^{0{,}16}, & 3 < v \end{cases}$$

Um gráfico de $W(v)$ gerado por computador é dado na Figura 1.1.12. ◄

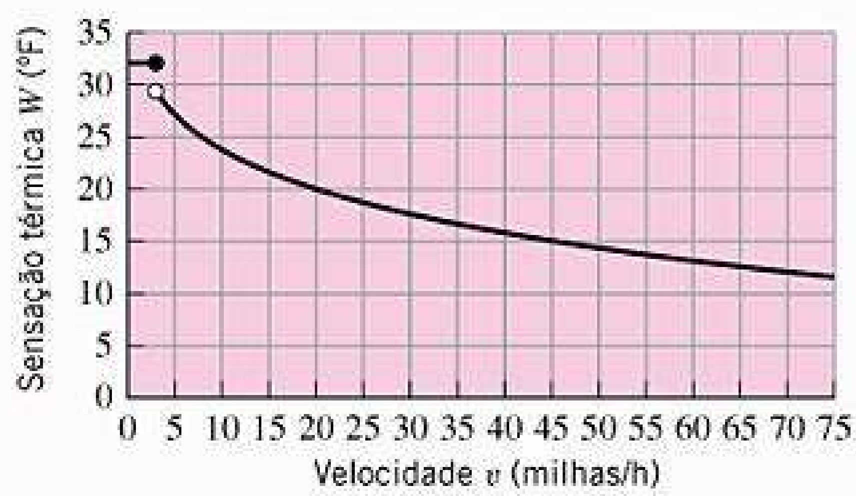


Figura 1.1.12 Sensação térmica *versus* velocidade do vento a 32ºF.

DOMÍNIO E IMAGEM

Se x e y estão relacionados pela equação $y = f(x)$, então o conjunto de todas as entradas permitidas (os valores de x) é denominado ***domínio*** de f, e o conjunto de todas as saídas (os valores de y) que resultam quando x varia sobre o domínio é denominado ***imagem*** de f. Por exemplo, se f é a função definida pela tabela no Exemplo 1, então o domínio é o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ e a imagem é o conjunto $\{3, 4, -1, 6\}$.

Às vezes, considerações físicas ou geométricas impõem restrições sobre as entradas permissíveis de uma função. Por exemplo, se y denota a área de um quadrado de lado x, então essas variáveis estão relacionadas pela equação $y = x^2$. Embora essa equação produza um único valor de y para cada número real x, o fato de que os comprimentos devem ser números não-negativos impõe a exigência que $x \ge 0$.

Poder-se-ia argumentar que um quadrado físico não pode ter um lado de comprimento nulo. Contudo, muitas vezes é matematicamente conveniente permitir comprimentos iguais a zero, e assim o faremos neste texto.

Quando uma função está definida por uma fórmula matemática, a fórmula em si pode impor restrições sobre as entradas permissíveis. Por exemplo, se $y = 1/x$, então $x = 0$ não é uma entrada válida, pois divisão por zero não está definida, e se $y = \sqrt{x}$, então valores negativos de x não são entradas válidas, pois produzem valores imaginários de y e havíamos concordado em considerar somente funções reais de variável real. Em geral, temos a seguinte definição.

1.1.5 DEFINIÇÃO Se uma função de variável real a valores reais for definida por uma fórmula e se não houver um domínio explicitado, então deve ser entendido que o domínio consiste em todos os números reais para os quais a fórmula dê lugar a um valor real. Isso é denominado ***domínio natural*** da função.

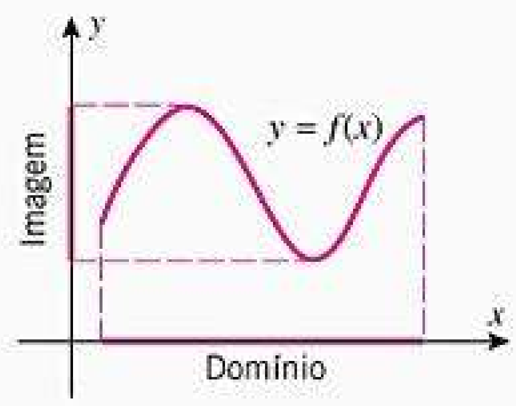


Figura 1.1.13 A projeção de $y = f(x)$ sobre o eixo x é o conjunto de valores x permissíveis para f e a projeção sobre o eixo y é o conjunto de valores y correspondentes.

O domínio e a imagem de uma função f podem ser identificados projetando o gráfico de $y = f(x)$ sobre os eixos coordenados, como mostra a Figura 1.1.13.

▶ Exemplo 6 Encontre o domínio natural de

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = 1/[(x-1)(x-3)]$

(c) $f(x) = \text{tg}\, x$ (d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

Solução (a) A função f tem valores reais para todo x real, assim seu domínio natural é o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Solução (b) A função f tem valores reais para todo x real, exceto $x = 1$ e $x = 3$, onde ocorrem divisões por zero. Dessa forma, o domínio natural é

$$\{x : x \neq 1 \quad \text{e} \quad x \neq 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

Solução (c) Uma vez que $f(x) = \text{tg}\, x = \text{sen}\, x \,/\, \cos x$, a função f tem valores reais exceto onde $\cos x = 0$, e isso ocorre quando x for um múltiplo inteiro ímpar de $\pi/2$. Assim, o domínio natural consiste em todos os números reais, exceto

$$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Veja no Apêndice A uma revisão sobre trigonometria.

Solução (d) A função f tem valores reais, exceto quando a expressão dentro do radical for negativa. Assim, o domínio natural consiste em todos os números reais x tais que

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \geq 0$$

Essa desigualdade é satisfeita se $x \leq 2$ ou $x \geq 3$ (verifique), de modo que o domínio natural de f é

$$(-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \blacktriangleleft$$

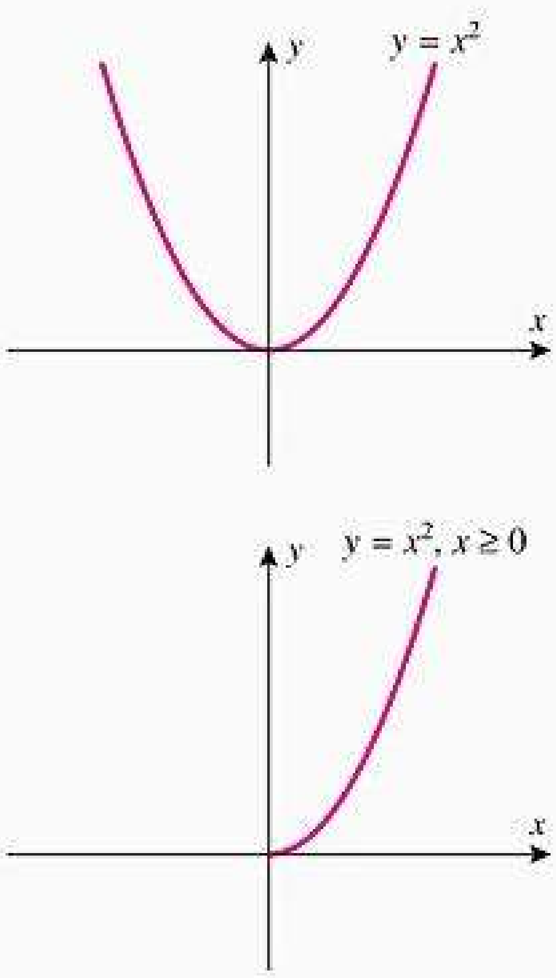


Figura 1.1.14

Em alguns casos explicitamos o domínio ao definir uma função. Por exemplo, se $f(x) = x^2$ é a área de um quadrado de lado x, então podemos escrever

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0$$

para indicar que tomamos o domínio de f como sendo o conjunto dos números reais não-negativos (Figura 1.1.14).

■ O EFEITO DE OPERAÇÕES ALGÉBRICAS SOBRE O DOMÍNIO

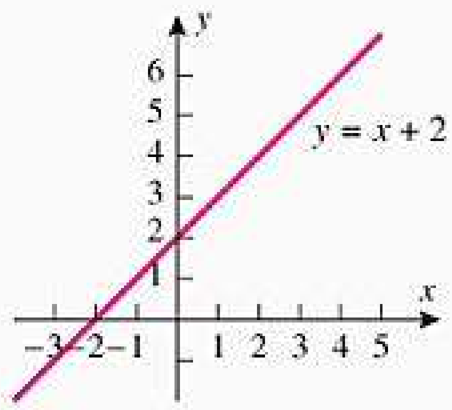
Expressões algébricas são, freqüentemente, simplificadas cancelando fatores comuns no numerador e no denominador. Entretanto, deve-se tomar cuidado com tais simplificações, pois elas podem alterar o domínio.

▶ Exemplo 7 O domínio natural da função

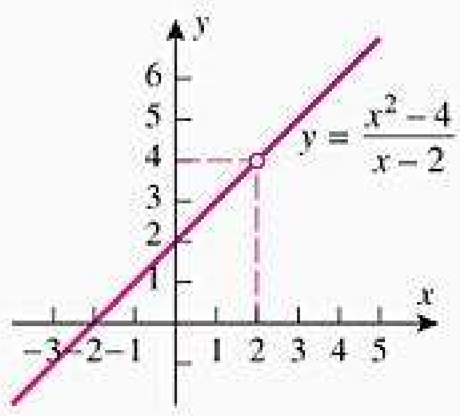
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \tag{3}$$

consiste em todos números reais x, exceto $x = 2$. Contudo, fatorando o numerador e cancelando o fator comum ao numerador e ao denominador, obtemos

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 \tag{4}$$



(a)



(b)

Figura 1.1.15

Como o lado direito de (4) tem um valor de $f(2) = 4$, mas $f(2)$ não está definido em (3), vemos que a simplificação algébrica alterou a função. Geometricamente, o gráfico de (4) é a reta da Figura 1.1.15*a*, enquanto o gráfico de (3) é a mesma reta, mas com um buraco em $x = 2$, já que a função não está definida nesse ponto (Figura 1.1.15*b*). Resumindo, o efeito geométrico do cancelamento algébrico foi eliminar um buraco do gráfico original. ◄

As alterações no domínio de uma função que resultam de simplificações algébricas são, às vezes, irrelevantes para o problema que estamos tratando, podendo ser ignoradas. Contudo, se o domínio deve ser preservado, devemos impor explicitamente as restrições sobre a função simplificada. Por exemplo, se quisermos preservar o domínio da função no Exemplo 7, devemos expressar a forma simplificada da função como

$$f(x) = x + 2, \quad x \neq 2$$

► Exemplo 8 Encontre o domínio e a imagem de

$$\text{(a) } f(x) = 2 + \sqrt{x-1} \qquad \text{(b) } f(x) = (x+1)/(x-1)$$

Solução (a) Como nenhum domínio foi explicitado, o domínio de f é o domínio natural $[1, +\infty)$. À medida que x varia sobre o intervalo $[1, +\infty)$, o valor de $\sqrt{x-1}$ varia sobre o intervalo $[0, +\infty)$; assim, o valor de $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ varia sobre o intervalo $[2, +\infty)$, que é a imagem de f. O domínio e a imagem estão destacados nos eixos x e y da Figura 1.1.16.

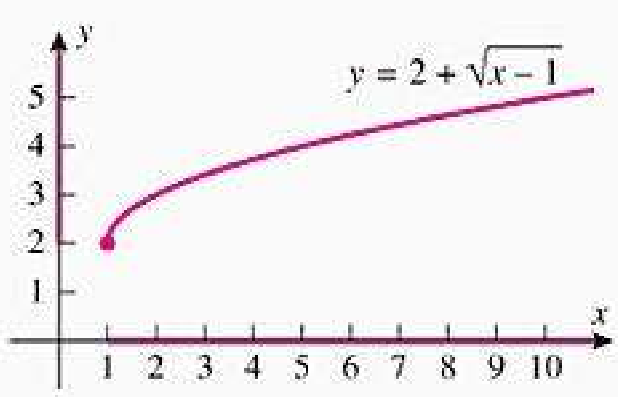


Figura 1.1.16

Solução (b) A função f dada está definida para todos os x reais, exceto $x = 1$; assim, o domínio natural de f é

$$\{x : x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Para determinar a imagem, é conveniente introduzir uma variável dependente

$$y = \frac{x+1}{x-1} \tag{5}$$

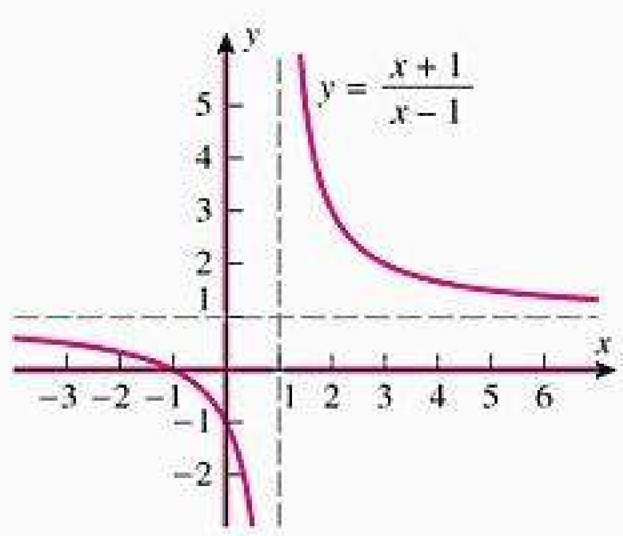


Figura 1.1.17

Embora o conjunto de valores possíveis de y não seja imediatamente evidente dessa equação, o gráfico de (5), que aparece na Figura 1.1.17, sugere que a imagem de f consiste em todos y, exceto os y reais = 1. Para ver isso, vamos resolver (5) para x em termos de y:

$$\begin{aligned} (x-1)y &= x+1 \\ xy - y &= x+1 \\ xy - x &= y+1 \\ x(y-1) &= y+1 \\ x &= \frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$

Agora fica evidente pelo segundo membro da equação que $y = 1$ não está na imagem; caso contrário, teríamos uma divisão por zero. Nenhum outro valor de y é excluído por essa equação; dessa forma, a imagem da função f é $\{y : y \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, que está de acordo com o resultado obtido graficamente. ◄

■ O DOMÍNIO E A IMAGEM EM PROBLEMAS APLICADOS

Em aplicações, considerações físicas freqüentemente impõem restrições sobre o domínio e a imagem de uma função.

▶ Exemplo 9 Uma caixinha aberta é feita de pedaços de papelão com 16 por 30 cm, cortando fora quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando para cima os lados (Figura 1.1.18*a*).

(a) Seja V o volume da caixa que resulta quando os quadrados tiverem lados de comprimento x. Determine uma fórmula para V como uma função de x.

(b) Encontre o domínio de V.

(c) Use o gráfico de V dado na Figura 1.1.18*c* para estimar a imagem de V.

(d) Descreva em palavras o que o gráfico diz sobre o volume.

Solução (a) Conforme mostra a Figura 1.1.18*b*, a caixa resultante tem dimensões $16 - 2x$ por $30 - 2x$ por x, logo o volume $V(x)$ é dado por

$$V(x) = (16 - 2x)(30 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3$$

Solução (b) O domínio é o conjunto dos valores de x, enquanto a imagem é o conjunto dos valores de V. Uma vez que x é uma medida de comprimento, deve ser não-negativa, e uma vez que não podemos cortar quadrados com lados maiores do que 8 cm (por quê?), os valores de x no domínio devem satisfazer

$$0 \le x \le 8$$

Solução (c) A partir do gráfico de V *versus* x na Figura 1.1.18*c*, estimamos que os valores de V na imagem satisfazem

$$0 \le V \le 725$$

Note que se trata de uma aproximação. Mais adiante mostraremos como determinar exatamente a imagem.

Solução (d) O gráfico nos mostra que a caixa com volume máximo ocorre para um valor de x entre 3 e 4 cm e que o volume máximo é de aproximadamente 725 cm^3. Além disso, o volume decresce em direção a zero quando x se aproxima de 0 ou 8. ◄

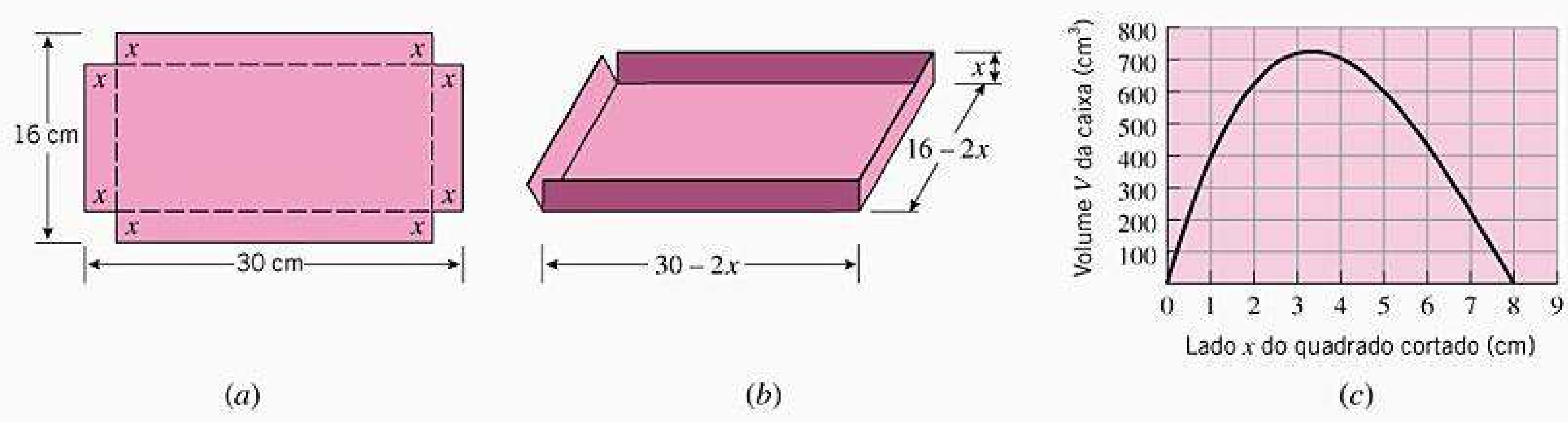


Figura 1.1.18

Nas aplicações que envolvem tempo, as fórmulas para as funções são, freqüentemente, expressas em termos de uma variável t, cujo valor inicial é considerado como sendo $t = 0$.

▶ Exemplo 10 Às 8h05min da manhã, um carro é detectado a uma velocidade de 30 m/s por um radar que está posicionado no acostamento de uma estrada reta. Supondo que o carro mantenha uma velocidade constante entre 8h05min e 8h06min da manhã, determine uma função $D(t)$ que expresse a distância percorrida pelo carro durante esse intervalo de tempo, como uma função do tempo t.

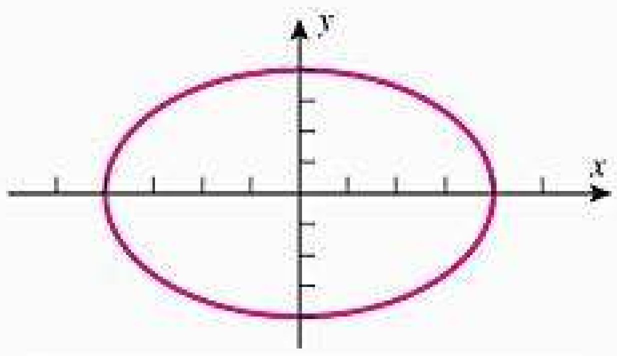


Figura 1.1.19

Solução Seria incômodo usar como variável t o tempo em horas; assim, vamos medir o tempo decorrido em segundos, começando com $t = 0$ às 8h05min e terminando com $t = 60$ às 8h06min. Em cada instante, a distância percorrida (em metros) é igual à velocidade do carro (em metros por segundo) multiplicada pelo tempo decorrido (em segundos). Então,

$$D(t) = 30t, \quad 0 \le t \le 60$$

O gráfico de D *versus* t está na Figura 1.1.19. ◄



O círculo está achatado porque 1 unidade no eixo y é menor do que 1 unidade no eixo x.

Figura 1.1.20

QUESTÕES DE ESCALAS E DE UNIDADES

Em problemas geométricos nos quais desejamos preservar a "verdadeira" forma de um gráfico, é necessário usar unidades de igual comprimento em ambos os eixos. Por exemplo, fazendo o gráfico de um círculo em um sistema de coordenadas em que a unidade no eixo dos y é menor do que a unidade no eixo dos x, o círculo será achatado verticalmente, resultando em uma elipse (Figura 1.1.20). Também devemos usar unidades iguais quando aplicamos a fórmula da distância:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

para calcular a distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) no plano xy.

Porém, há situações nas quais é inconveniente ou impossível apresentar um gráfico usando unidades de igual comprimento. Por exemplo, consideremos a equação

$$y = x^2$$

Se quisermos mostrar a parte do gráfico no intervalo $-3 \le x \le 3$, então não há problemas em usar unidades iguais, pois y varia somente entre 0 e 9 naquele intervalo. Entretanto, se quisermos mostrar a parte do gráfico sobre o intervalo $-10 \le x \le 10$, então ocorre um problema em manter unidades de igual comprimento, uma vez que os valores de y variam entre 0 e 100. Nesse caso, a única maneira razoável de mostrar todo o gráfico sobre o intervalo $-10 \le x \le 10$ é comprimir a unidade de comprimento ao longo do eixo y, conforme ilustrado na Figura 1.1.21.

Nas aplicações em que as variáveis sobre os dois eixos têm unidades não-relacionadas (p.ex., centímetros sobre o eixo y e segundos sobre o eixo x), então nada se obtém requerendo que as unidades tenham igual comprimento; escolha os comprimentos que tornem o gráfico tão claro quanto possível.

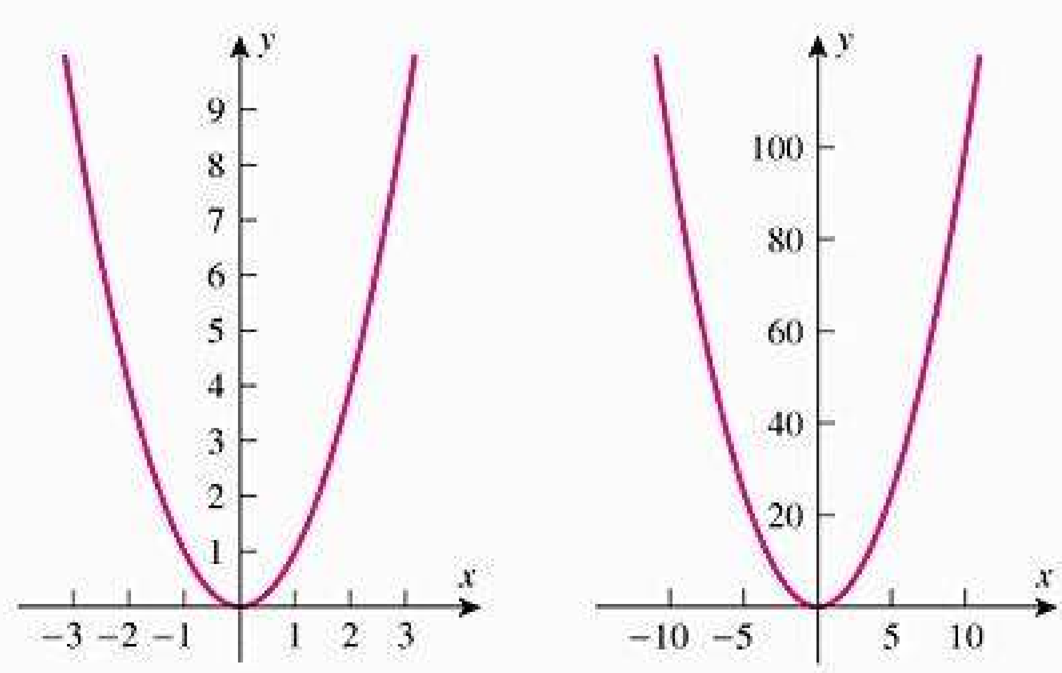


Figura 1.1.21

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.1 *(Ver página 16 para respostas.)*

1. Seja $f(x) = \sqrt{x+1} + 4$.

(a) O domínio natural de f é ________.

(b) $f(3) =$ ________.

(c) $f(t^2 - 1) =$ ________.

(d) $f(x) = 7$ se $x =$ ________.

(e) A imagem de f é ________.

2. Os segmentos de retas no plano xy formam letras, conforme indicado.



(a) Se o eixo y é paralelo à letra I, quais das letras representam o gráfico de $y = f(x)$ para alguma função f?

(b) Se o eixo y é perpendicular à letra I, quais das letras representam o gráfico de $y = f(x)$ para alguma função f?

3. Use o gráfico de $y = f(x)$ em anexo para completar cada item.

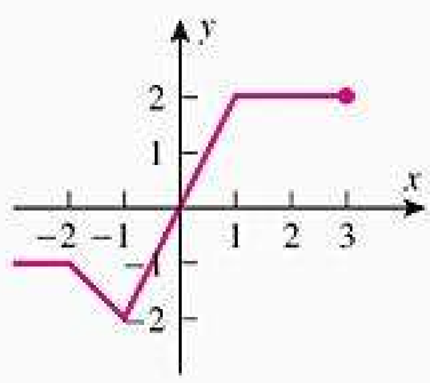
(a) O domínio de f é __________.

(b) A imagem de f é __________.

(c) $f(-3) =$ __________.

(d) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ __________.

(e) As soluções de $f(x) = -\frac{3}{2}$ são $x =$ __________ e $x =$ __________.



4. A tabela a seguir dá a previsão de cinco dias de temperaturas máximas e mínimas em graus Celsius (°C).

	SEGUNDA	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA
MÁXIMA	25	21	15	19	23
MÍNIMA	16	18	14	15	16

(a) Suponha que x e y denotem, respectivamente, as previsões de temperaturas máxima e mínima para cada um dos cinco dias. Será y uma função de x? Se for, dê o domínio e a imagem dessa função.

(b) Suponha que x e y denotem, respectivamente, as previsões de temperaturas mínima e máxima para cada um dos cinco dias. Será y uma função de x? Se for, dê o domínio e a imagem dessa função.

5. Sejam c, l e A o comprimento, a largura e a área de um retângulo, respectivamente, e suponha que a largura do retângulo seja a metade do comprimento.

(a) Se c é expresso como uma função de l, então $c =$ ______.

(b) Se A é expressa como uma função de c, então $A =$ ______.

(c) Se l é expressa como uma função de A, então $l =$ ______.

EXERCÍCIOS 1.1 Recurso Gráfico

1. Use o gráfico abaixo para responder as seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis onde for necessário.

(a) Para quais valores de x vale $y = 1$?

(b) Para quais valores de x vale $y = 3$?

(c) Para quais valores de y vale $x = 3$?

(d) Para quais valores de x vale $y \le 0$?

(e) Quais são os valores máximo e mínimo de y e em quais valores de x eles ocorrem?

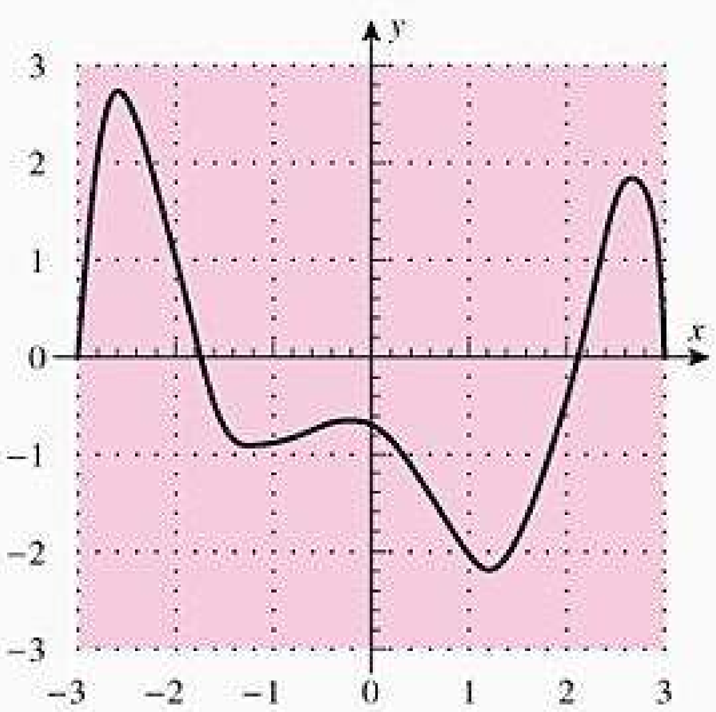


Figura Ex-1

2. Use a tabela abaixo para responder as questões propostas no Exercício 1.

Tabela Ex-2

x	−2	−1	0	2	3	4	5	6
y	5	1	−2	7	−1	1	0	9

3. Em cada parte da figura abaixo, determine se o gráfico define y como uma função de x.

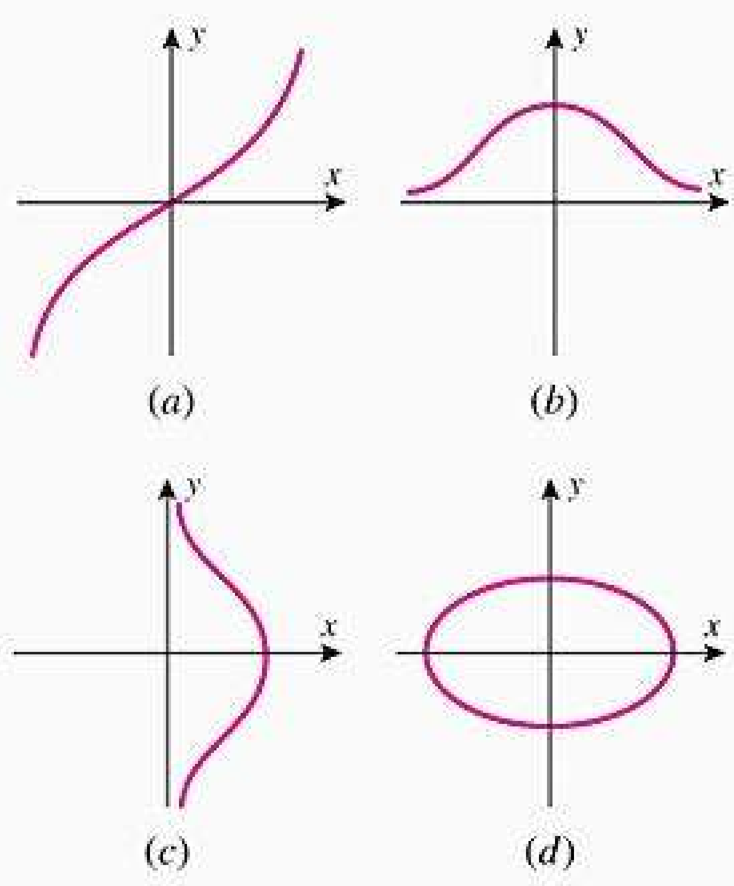


Figura Ex-3

4. Em cada parte, compare os domínios naturais de f e de g.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 1}$; $g(x) = x$

(b) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x + 1}$; $g(x) = \sqrt{x}$

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Use o gráfico do consumo de cigarros na figura abaixo para responder as seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis onde for necessário.

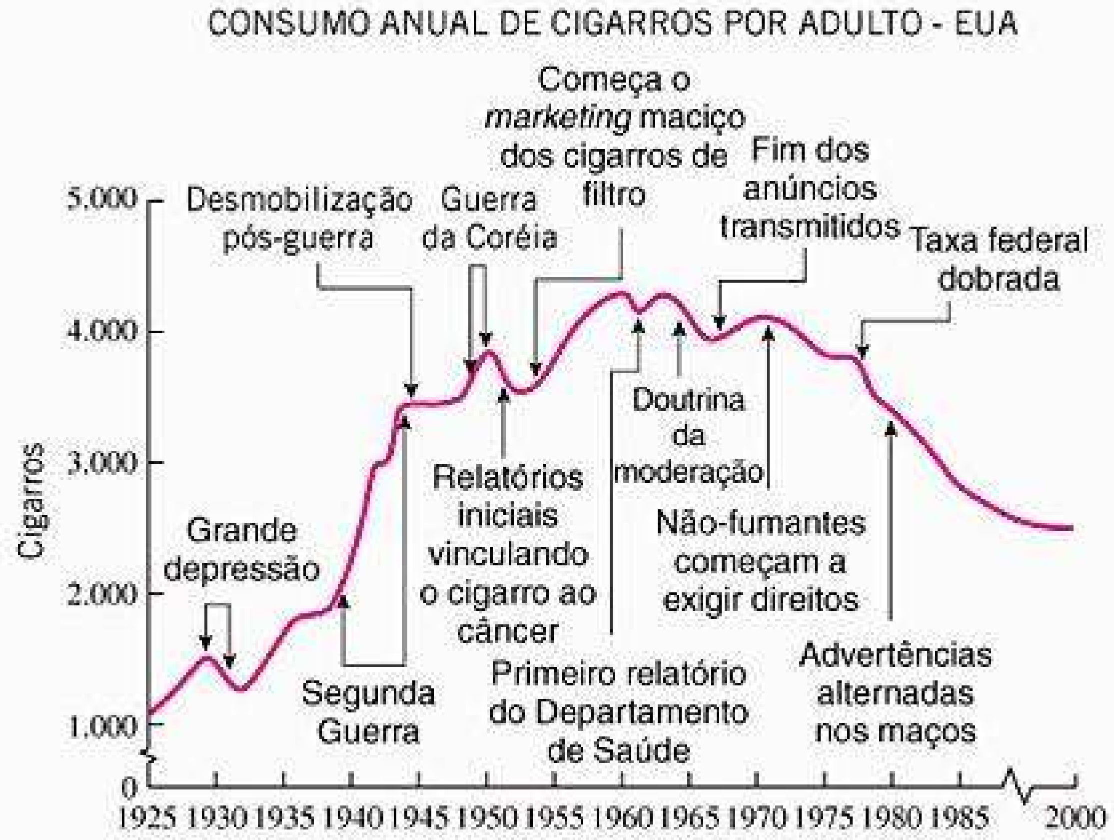
(a) Quando o consumo anual de cigarros atingiu 3 mil por adulto pela primeira vez ?

(b) Quando o consumo anual de cigarros por adulto atingiu seu ponto mais alto e qual seu valor ?

(c) A partir do gráfico, pode-se saber quantos cigarros foram consumidos em um dado ano? Se não, quais informações adicionais você precisaria para fazer essa determinação?

(d) Quais os fatores prováveis do aumento do consumo anual de cigarros por adulto?

(e) Quais os fatores prováveis do declínio no consumo anual de cigarros por adulto?



Fonte: U.S. Department of Health and Human Services.

Figura Ex-5

6. Use o gráfico do consumo de cigarros do Exercício 5 para responder as seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis onde for necessário.

(a) Quando o consumo anual de cigarros caiu para 3 mil por adulto?

(b) Entre o ano do primeiro relatório do Departamento de Saúde e o ano de 1970, quando foi atingido o mínimo do consumo anual de cigarros por adulto?

(c) O que foi maior, a taxa de crescimento do consumo *per capita* de cigarros durante a Segunda Guerra ou a taxa de crescimento entre o fim da Segunda Guerra e o começo da Guerra da Coréia?

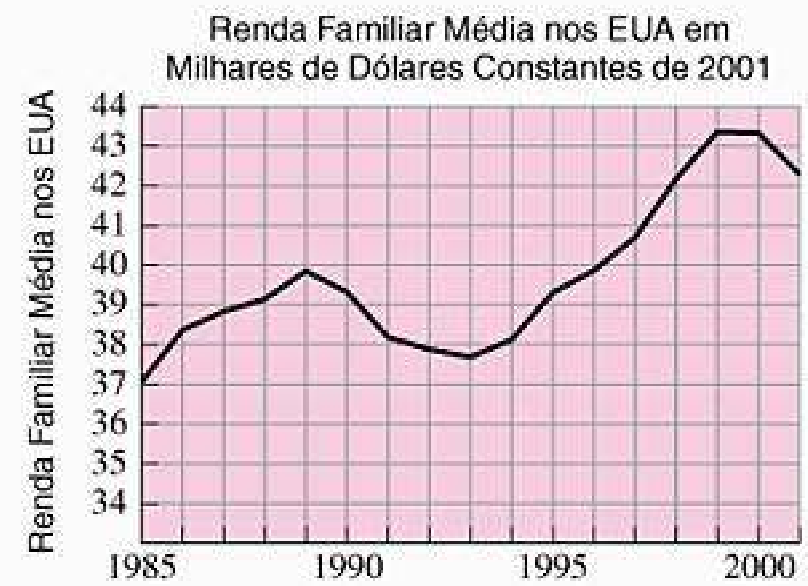
(d) Há indícios de que o consumo *per capita* de cigarros vá acabar caindo aos níveis anteriores da Segunda Guerra?

7. O gráfico a seguir mostra a renda familiar média nos EUA (ajustada pela inflação) entre 1985 e 2001. Use-o para responder as seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis onde for necessário.

(a) Quando a renda média atingiu seu valor máximo e qual foi a renda média quando isso ocorreu?

(b) Quando a renda média atingiu seu valor mínimo e qual foi a renda média quando isso ocorreu?

(c) A renda média estava diminuindo durante os dois anos do período entre 1999 e 2001. Ela estava diminuindo mais rapidamente durante o primeiro ou o segundo ano daquele período? Explique seu raciocínio.



Fonte: U.S. Census Bureau, July 2003

Figura Ex-7

8. Use o gráfico da renda média do Exercício 7 para responder as seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis onde for necessário.

(a) Qual foi o crescimento anual médio da renda média entre 1993 e 1999?

(b) A renda média cresceu durante o período de seis anos entre 1993 e 1999. A renda média cresceu mais rapidamente durante os três primeiros anos ou durante os últimos três anos desse período? Explique seu raciocínio.

(c) Considere a afirmação: "Depois de anos de declínio, a renda média deste ano foi finalmente maior do que a do ano passado". Em que ano essa afirmação estaria correta?

9. Encontre $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(3)$, $f(\sqrt{2})$ e $f(3t)$.

(a) $f(x) = 3x^2 - 2$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 3 \\ 2x, & x \leq 3 \end{cases}$

10. Encontre $g(3)$, $g(-1)$, $g(\pi)$, $g(-1{,}1)$ e $g(t^2 - 1)$.

(a) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq 1 \\ 3, & x < 1 \end{cases}$

11-14 Determine o domínio natural da função algebricamente e confirme seu resultado com o gráfico produzido por seus recursos de fazer gráficos. [*Nota*: Ajuste seu recurso gráfico para radianos quando se tratar de funções trigonométricas.]

11. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ (b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

(c) $G(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

(e) $h(x) = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$

12. (a) $f(x) = \dfrac{1}{5x+7}$ (b) $h(x) = \sqrt{x - 3x^2}$

(c) $G(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-4}}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

(e) $h(x) = \dfrac{3}{2 - \cos x}$

13. (a) $f(x) = \sqrt{3-x}$ (b) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

(c) $h(x) = 3 + \sqrt{x}$ (d) $G(x) = x^3 + 2$

(e) $H(x) = 3 \operatorname{sen} x$

14. (a) $f(x) = \sqrt{3x-2}$ (b) $g(x) = \sqrt{9-4x^2}$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{3+\sqrt{x}}$ (d) $G(x) = \dfrac{3}{x}$

(e) $H(x) = \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}$

ENFOCANDO CONCEITOS

15. (a) Se você tivesse uma máquina que pudesse registrar a população mundial continuamente, você esperaria obter um gráfico da população *versus* o tempo que fosse uma curva contínua (não-interrompida)? Explique o que poderia causar interrupções na curva.

(b) Suponha que um paciente de um hospital receba uma injeção de um antibiótico a cada oito horas e que entre as injeções a concentração C de antibiótico na corrente sangüínea decresce à medida que ele é absorvido pelos tecidos. Como poderia ser o gráfico de C *versus* o tempo decorrido?

16. (a) Caso você tivesse uma máquina que pudesse medir a temperatura de um quarto continuamente por um período de 24 horas, você esperaria obter um gráfico contínuo (não-quebrado) da temperatura *versus* o tempo? Explique seu raciocínio.

(b) Se você tivesse um computador que pudesse acompanhar continuamente o número de caixas de cereal nas prateleiras de um supermercado durante uma semana, você esperaria obter um gráfico de curva contínua (sem interrupções) do número de caixas *versus* o tempo? Explique seu raciocínio.

17. Um bote balança para cima e para baixo sob a ação de ondas fracas. De repente é atingido por uma onda grande e afunda. Esboce um gráfico aproximado da altura do bote acima do fundo do mar como uma função do tempo.

18. Um copo com café quente está sobre a mesa. Você despeja leite frio nele e espera por uma hora. Esboce um gráfico aproximado da temperatura do café como uma função do tempo.

19. Use a equação $y = x^2 - 6x + 8$ para responder as questões.

(a) Para quais valores de x vale $y = 0$?

(b) Para quais valores de x vale $y = -10$?

(c) Para quais valores de x vale $y \geq 0$?

(d) Terá y um valor mínimo? Um valor máximo? Se assim for, determine-os.

20. Use a equação $y = 1 + \sqrt{x}$ para responder as seguintes questões.

(a) Para quais valores de x vale $y = 4$?

(b) Para quais valores de x vale $y = 0$?

(c) Para quais valores de x vale $y \geq 6$?

(d) Terá y um valor mínimo? Um valor máximo ? Se assim for, determine-os.

21. Conforme mostra a figura abaixo, um pêndulo de comprimento constante L faz um ângulo θ com sua posição vertical. Expresse a altura h como uma função do ângulo θ.

22. Expresse o comprimento L da corda de um círculo com raio de 10 cm como função do ângulo central θ (veja a figura abaixo).

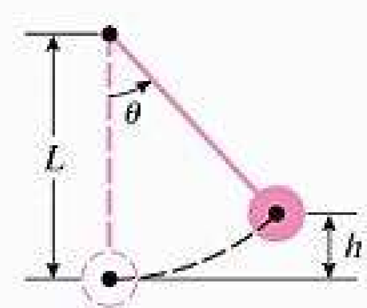


Figura Ex-21

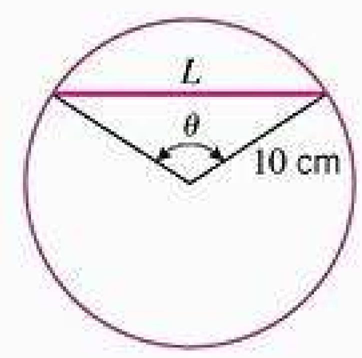


Figura Ex-22

23-24 Expresse a função na forma por partes, sem usar valores absolutos. [*Sugestão*: Pode ser útil gerar o gráfico da função.]

23. (a) $f(x) = |x| + 3x + 1$ (b) $g(x) = |x| + |x - 1|$

24. (a) $f(x) = 3 + |2x - 5|$ (b) $g(x) = 3|x - 2| - |x + 1|$

25. Conforme mostra a figura abaixo, uma caixa aberta deve ser construída de uma folha retangular de metal com 8 por 15 cm, cortando fora quadrados com lados de comprimento x de cada canto e dobrando os lados.

(a) Expresse o volume V como uma função de x.

(b) Encontre o domínio de V.

(c) Esboce o gráfico da função V obtida em (a) e estime a imagem dessa função.

(d) Com palavras, descreva como o volume V da caixa varia com x e discuta como poderiam ser construídas caixas com volumes máximo e mínimo.

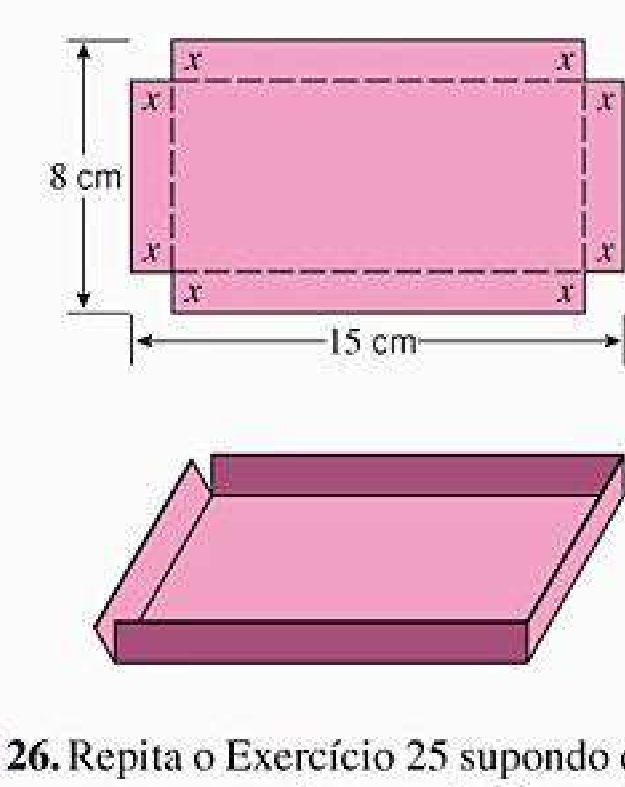


Figura Ex-25

26. Repita o Exercício 25 supondo que a caixa seja construída da mesma maneira a partir de uma folha quadrada de metal com 6 cm de lado.

27. Uma firma de construções acrescentou uma área retangular de mil metros quadrados à sua sede. Três lados da área estão cercados. O lado da sede que é adjacente à área mede 100 metros e uma parte desse lado é utilizada como o quarto lado da área acrescentada. Sejam x e y as dimensões da área retangular, onde x é medido paralelamente à sede, e L o comprimento da cerca necessária para essas dimensões.

(a) Encontre uma fórmula para L em termos de x e y.

(b) Encontre uma fórmula que expresse L somente em termos de x.

(c) Qual é o domínio da função em (b)?

(d) Esboce o gráfico da função em (b) e estime as dimensões da área retangular que minimizem a quantidade de cerca necessária.

28. Conforme mostra a figura abaixo, uma câmara é montada em um ponto a 900 m da base de lançamento de um foguete. Quando lançado, o foguete sobe verticalmente e o ângulo de elevação da câmera é constantemente ajustado para seguir a base do foguete.

(a) Expresse a altura x como uma função do ângulo de elevação.

(b) Determine o domínio da função em (a).

(c) Gere o gráfico da função em (a) e use-o para estimar a altura do foguete, quando seu ângulo de elevação for $\pi/4 \approx 0{,}7854$ radianos. Compare essa estimativa com a altura exata. [*Sugestão*: Numa calculadora gráfica, use as características *trace* e *zoom*, que são úteis.]

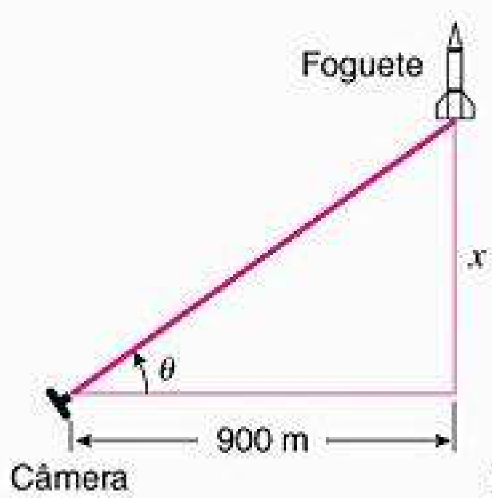


Figura Ex-28

29. Uma companhia de sopa deseja fabricar uma lata na forma de um cilindro circular reto que tenha capacidade para 500 cm^3 de líquido. O material para a tampa e a base custa 0,02 centavos/cm^2, enquanto o material para a lateral custa 0,01 centavo/cm^2.

(a) Estime o raio r e a altura h da lata que custa menos para ser fabricada. [*Sugestão*: Expresse o custo C em termos de r.]

(b) Suponha que a tampa e a base de raio r são tiradas de folhas quadradas, cujos lados têm comprimento $2r$, e os retalhos são descartados. Levando em conta o custo das folhas quadradas, você esperaria que o custo da lata de menor custo seja maior ou menor do que em (a)? Explique.

(c) Estime o raio, a altura e o custo da lata em (b) e determine se sua conjectura estava certa.

30. Um construtor de dependências esportivas quer colocar uma pista de corrida de um quarto de milha – 396 metros – em torno de um campo de futebol americano, conforme a figura a seguir. O campo de futebol tem 108 metros de comprimento (incluindo as zonas finais) por 48 metros de largura. A pista consta de duas retas e dois semicírculos.

(a) Mostre que é possível construir a pista de um quarto de milha em torno do campo de futebol. [*Sugestão*: Encontre a menor pista que pode ser construída em torno do campo de futebol.]

(b) Seja L o comprimento de uma das partes retas (em metros) e x uma distância (em metros) entre a lateral do campo e a parte reta da pista. Faça um gráfico de L *versus* x.

(c) Use o gráfico para estimar o valor de x que produz a parte reta mais curta e então ache exatamente esse valor.

(d) Use o gráfico para estimar o comprimento da maior parte reta possível e encontre exatamente esse comprimento.

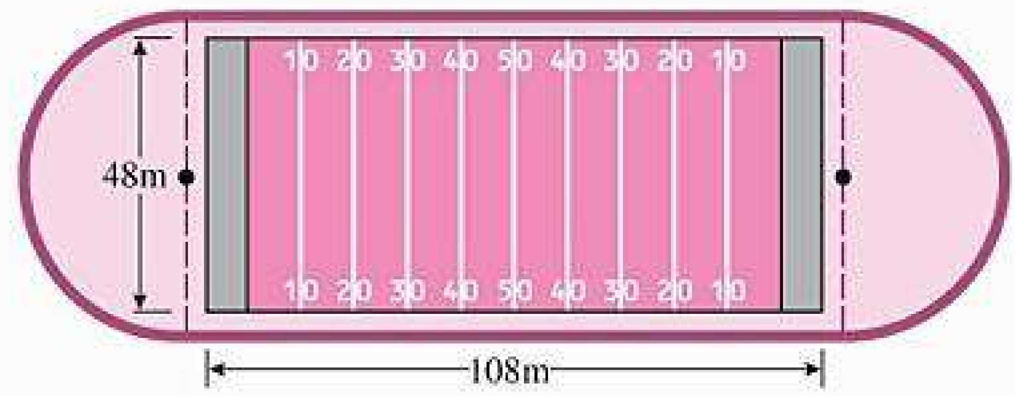


Figura Ex-30

31-32 (i) Explique por que a função f tem um ou mais buracos em seu gráfico e estabeleça os valores de x nos quais esses buracos ocorrem. (ii) Determine uma função g cujo gráfico seja idêntico ao de f, mas sem buracos.

31. $f(x) = \dfrac{(x+2)(x^2-1)}{(x+2)(x-1)}$ **32.** $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{|x|}$

33. Em 2001, o Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA introduziu um novo índice de sensação térmica (WCT). Para uma dada temperatura externa T em graus Fahrenheit e velocidade do vento igual a v milhas por hora, o índice de sensação térmica WCT é a temperatura em graus Fahrenheit a uma velocidade de vento de 3 milhas por hora que produziria a mesma sensação de resfriamento sobre a pele exposta que a combinação de temperatura externa T e velocidade do vento v. Utilizando um modelo mais preciso de resfriamento devido ao vento, a nova fórmula é dada por

$$\text{WCT} = \begin{cases} T, & 0 \le v \le 3 \\ 35{,}74 + 0{,}6215T - 35{,}75v^{0{,}16} + 0{,}4275Tv^{0{,}16}, & 3 < v \end{cases}$$

onde T é a temperatura em °F, v é a velocidade do vento em milhas por hora e WCT é a temperatura equivalente em °F. Encontre o índice de sensação térmica até o grau mais próximo se $T = 25$°F e

(a) $v = 3$ milhas/hora (b) $v = 15$ milhas/hora
(c) $v = 46$ milhas/hora

Fonte: Adaptado de UMAP Module 658, *Windchill*, de W. Bosch e L. Coob, COMAP, Arlington, MA.

34-36 Use a fórmula para o índice de sensação térmica descrita no Exercício 33.

34. Encontre a temperatura do ar até o grau mais próximo se o WCT for de −60ºF e a velocidade do vento for de 48 milhas/h.

35. Encontre a temperatura do ar até o grau mais próximo se o WCT for de −10ºF e a velocidade do vento for de 48 milhas/h.

36. Encontre a velocidade do vento até a milha por hora mais próxima se o WCT for de 5ºF com uma temperatura do ar de 20ºF.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.1

1. (a) $[-1, +\infty)$ (b) 6 (c) $|t| + 4$ (d) 8 (e) $[4, +\infty)$ **2.** (a) M (b) I **3.** (a) $(-\infty, 3]$ (b) $[-2, 2]$ (c) -1 (d) 1 (e) $-\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{2}$
4. (a) sim; domínio: {15, 19, 21, 23, 25}; imagem: {14, 15, 16, 18} (b) não **5.** (a) $c = 2l$ (b) $A = c^2/2$ (c) $l = \sqrt{A/2}$

1.2 GRÁFICOS DE FUNÇÕES UTILIZANDO CALCULADORAS E RECURSOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção discutiremos questões relacionadas à geração de gráficos de equações e de funções com recursos gráficos (calculadoras gráficas e computadores). Como os recursos gráficos variam amplamente, é difícil fazer afirmações gerais sobre eles. Assim, em vários lugares desta seção pediremos ao leitor que localize em seu próprio recurso gráfico detalhes específicos sobre como ele opera.

■ CALCULADORAS GRÁFICAS E SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

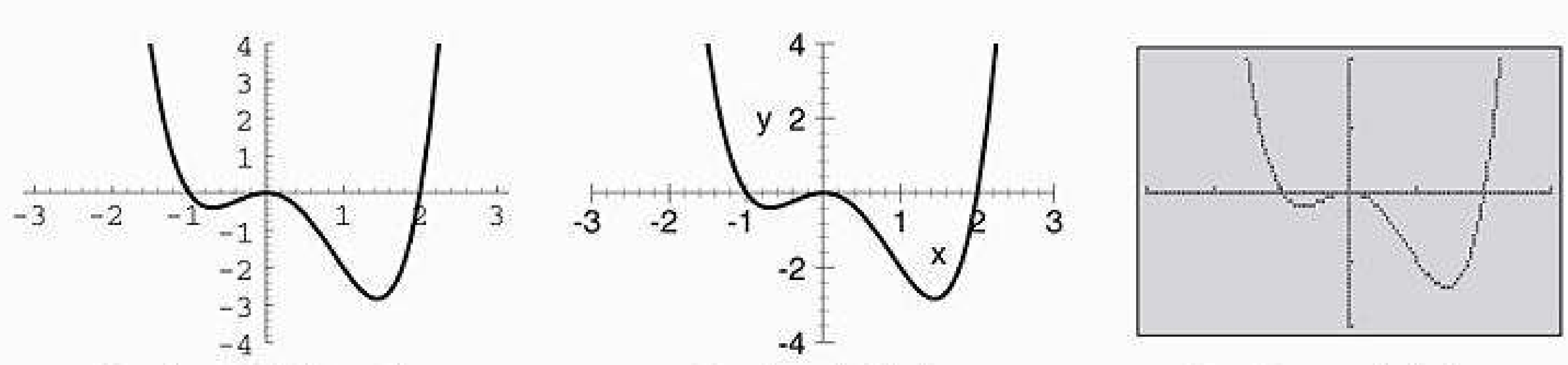
O desenvolvimento de novas tecnologias tem mudado significativamente como e onde matemáticos, engenheiros e cientistas executam seu trabalho, bem como sua abordagem na solução de problemas. Entre as mais significativas inovações estão os programas designados por ***Sistemas Algébricos Computacionais*** (CAS), cujos exemplos mais comuns são o *Mathematica*, o *Maple* e o *Derive*.* Os sistemas algébricos computacionais não apenas têm capacidade gráfica, mas, como o nome sugere, podem executar muitos dos cálculos simbólicos que ocorrem na Álgebra, no Cálculo e na Matemática Superior. Por exemplo, é trivial para um CAS executar a fatoração

$$x^6 + 23x^5 + 147x^4 - 139x^3 - 3464x^2 - 2112x + 23040 = (x+5)(x-3)^2(x+8)^3$$

ou a computação numérica exata

$$\left(\frac{63456}{3177295} - \frac{43907}{22854377}\right)^3 = \frac{2251912457164208291259320230122866923}{382895955819369204449565945369203764688375}$$

A tecnologia também tornou possível gerar, em segundos, gráficos de equações e funções, os quais no passado levariam horas para ser produzidos. A Figura 1.2.1 mostra



Gerado pelo Mathematica *Gerado pelo Maple* *Gerado por calculadora*

Figura 1.2.1

* *Mathematica* é um produto da Wolfram Research, Inc.; *Maple* é um produto da Waterloo Maple Software, Inc.; e *Derive* é um produto da Soft Warehouse, Inc.

os gráficos da função $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$ produzidos com vários recursos gráficos; os dois primeiros foram gerados com os programas *Mathematica* e *Maple*, e o terceiro com uma calculadora gráfica. As calculadoras gráficas produzem gráficos mais grosseiros do que a maioria dos programas de computador, mas têm a vantagem de ser compactas e portáteis.

■ JANELAS DE INSPEÇÃO

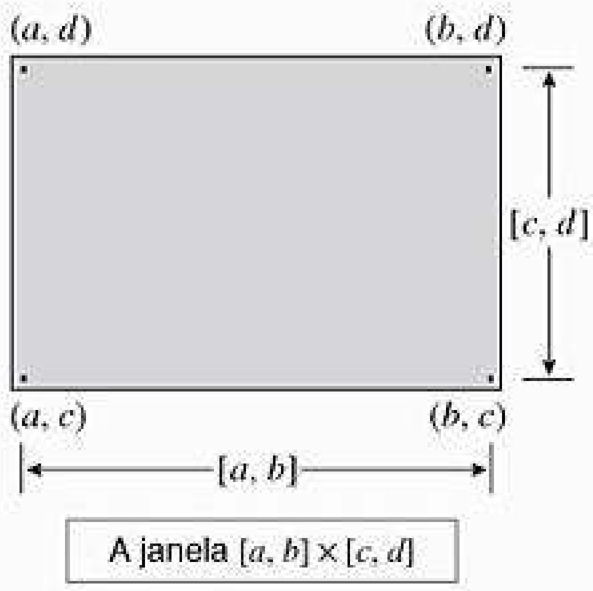


Figura 1.2.2

Os recursos gráficos podem mostrar somente uma parte do plano *xy* em sua tela; assim, o primeiro passo ao fazer o gráfico de uma equação é determinar qual região retangular do plano *xy* desejamos ver exposta. Essa região é denominada ***janela de inspeção*** (ou ***retângulo de inspeção***). Por exemplo, na Figura 1.2.1, a janela de inspeção estende-se sobre o intervalo $[-3, 3]$ na direção *x* e $[-4, 4]$ na direção *y*. Assim, dizemos que a janela de inspeção é $[-3, 3] \times [-4, 4]$ (leia "$[-3, 3]$ por $[-4, 4]$"). Em geral, se a janela de inspeção for $[a, b] \times [c, d]$, então ela se estende entre $x = a$ e $x = b$ na direção *x* e entre $y = c$ e $y = d$ na direção *y*. Dizemos que $[a, b]$ é o ***intervalo x*** da janela e que $[c, d]$ é o ***intervalo y*** da janela (Figura 1.2.2).

Recursos gráficos diferentes denotam as janelas de inspeção de formas distintas. Por exemplo, os dois primeiros gráficos na Figura 1.2.1 foram produzidos pelos comandos

```
Plot [x^4 - x^3 -2*x^2, {x, -3, 3}, PlotRange ->{-4, 4}]
```
(*Mathematica*)

```
plot (x^4 - x^3 -2*x^2, x = -3..3, y = -4..4);
```
(*Maple*)

e o último gráfico foi produzido em uma calculadora gráfica, pressionando a tecla GRAPH, depois dando os seguintes valores às variáveis que determinam os intervalos *x* e *y*:

$$x\text{Min} = -3,\ x\text{Max} = 3,\ y\text{Min} = -4,\ y\text{Max} = 4$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use seu próprio recurso computacional para gerar o gráfico da função

$$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$$

na janela $[-3, 3] \times [-4, 4]$.

■ SINAIS REPRESENTANDO PONTOS NA ESCALA E GRADE DE RETAS

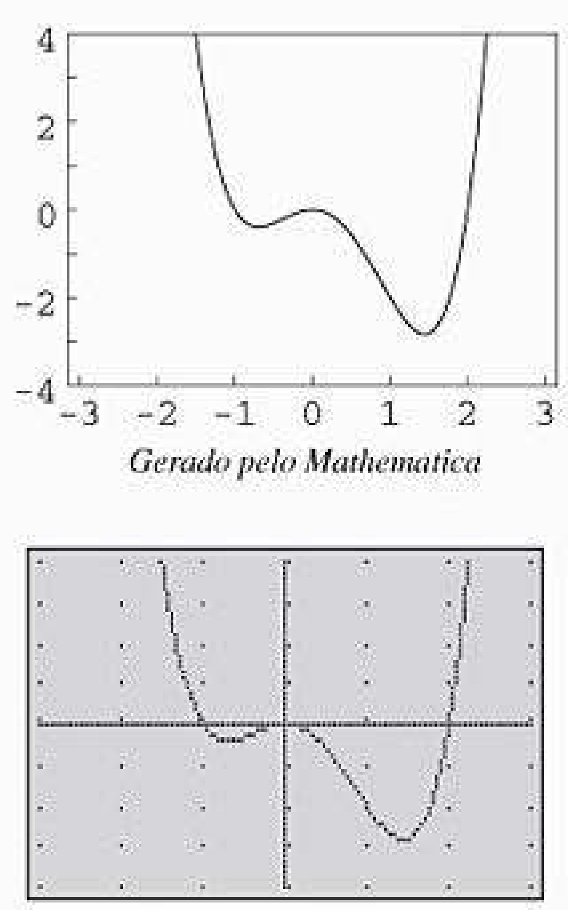
Para ajudar a localizar pontos visualmente em uma janela de inspeção, os recursos gráficos fornecem métodos de representar ***pontos na escala***, (também denominados ***sinais de escalas***) sobre os eixos coordenados ou outras localizações na janela. Em programas como o *Mathematica* e o *Maple*, há comandos específicos para designar o espaço entre os sinais na escala, porém, se o usuário não der o espaçamento, então o programa faz uma escolha por *default*. Por exemplo, nas duas primeiras partes da Figura 1.2.1, os sinais sobre a escala foram escolhas por *default*.

Em algumas calculadoras gráficas, o espaçamento entre os sinais sobre a escala é determinado por duas ***variáveis de escala*** (também denominados ***fatores de escala***), os quais vamos denotar por

$$x\text{Scl e } y\text{Scl}$$

(A notação varia entre calculadoras.) Essas variáveis especificam o espaçamento entre os sinais sobre as escalas nas direções *x* e *y*, respectivamente. Por exemplo, na terceira parte da Figura 1.2.1, a janela e os sinais sobre as escalas foram especificados pelos ajustes

$$x\text{Min} = -3 \qquad x\text{Max} = 3$$
$$y\text{Min} = -4 \qquad y\text{Max} = 4$$
$$x\text{Scl} = 1 \qquad y\text{Scl} = 1$$

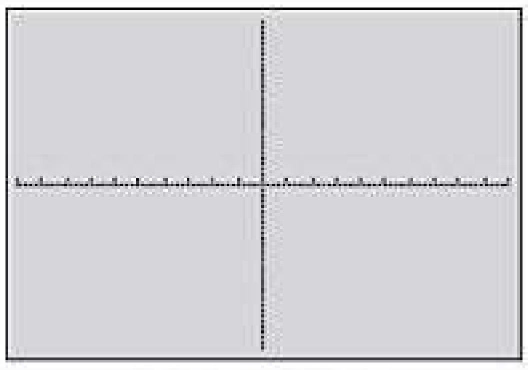


Gerado pelo Mathematica

Gerado por calculadora gráfica

Figura 1.2.3

A maioria dos recursos gráficos permite variações na disposição e na localização desses sinais. Por exemplo, a Figura 1.2.3 mostra duas variações dos gráficos da Figura 1.2.1; a primeira foi gerada em um computador usando uma opção de colocar sinais e números sobre os lados da janela, e a segunda foi gerada em uma calculadora usando uma opção de desenhar uma grade de retas simulando papel gráfico.



[−5, 5] × [−5, 5]
xScl = 0,5; yScl = 10

Figura 1.2.4

► Exemplo 1 A Figura 1.2.4 mostra a janela $[-5, 5] \times [-5, 5]$ com os sinais sobre a escala espaçados em 0,5 unidade na direção x e 10 unidades na direção y. Note que não há sinais visíveis na direção y, pois o sinal da origem está coberto pelo eixo x e os demais na direção x caem fora da janela. ◄

► Exemplo 2 A Figura 1.2.5 mostra a janela $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com os sinais sobre a escala espaçados em 0,1 unidade nas direções x e y. Nesse caso, os sinais estão tão próximos que criam um efeito de retas mais grossas sobre os eixos cooordenados. Quando isso ocorre, em geral aumentamos os fatores de escala para reduzir o número de sinais e torná-los legíveis. ◄

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Calculadoras com recursos gráficos têm valores por *default* para a janela e para os fatores de escala. Por exemplo, uma calculadora tem uma janela *default* de $[-10, 10] \times [-10, 10]$ e fatores de escala *default* de xScl = 1 e yScl = 1. Verifique o manual para determinar os valores *default* de sua calculadora e como restaurar essa configuração. Se estiver usando um programa de computador, verifique o tutorial do mesmo para determinar os comandos que especificam o espaçamento entre os sinais sobre as escalas.

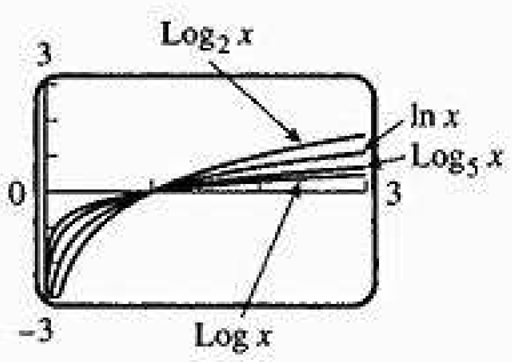


Figura 1.2.5

■ COMO ESCOLHER UMA JANELA DE INSPEÇÃO

Quando o gráfico de uma função se estende indefinidamente em alguma direção, nenhuma janela pode mostrá-lo todo. Em tais casos, a escolha da janela de inspeção pode afetar nossa percepção do gráfico. Por exemplo, a Figura 1.2.6 mostra um gráfico gerado em computador de $y = 9 - x^2$, e a Figura 1.2.7 mostra quatro vistas desse gráfico geradas em uma calculadora.

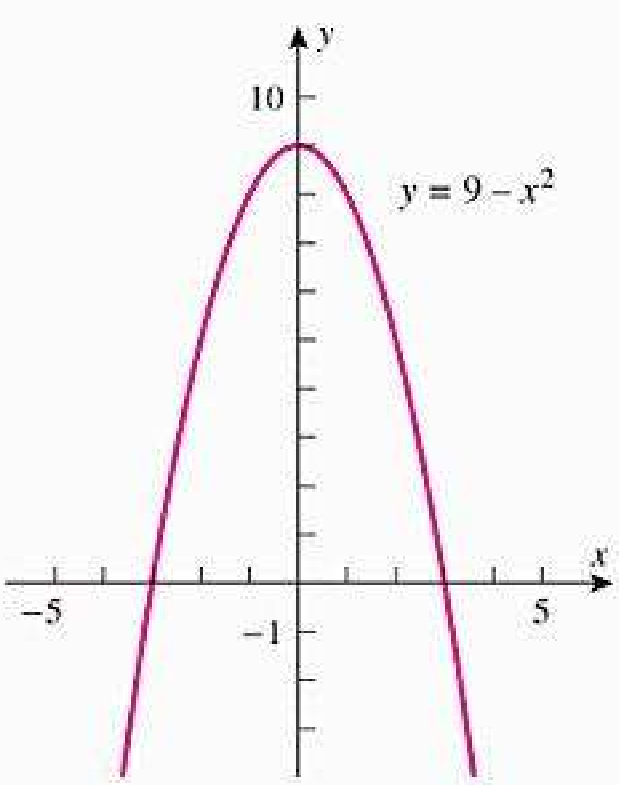


Figura 1.2.6

- Na parte (*a*), o gráfico cai completamente fora da janela; assim, ela aparece em branco (exceto por eixos e sinais).
- Na parte (*b*), o gráfico está quebrado em duas partes, pois sai e entra na janela.
- Na parte (*c*), o gráfico parece uma linha reta, pois focalizamos em um pequeno segmento da curva.
- Na parte (*d*), temos uma visão mais completa da forma do gráfico, pois a janela compreende todos os pontos importantes; isto é, o ponto mais alto e as intersecções com o eixo x.

Para uma função cujo gráfico não se estenda indefinidamente em ambas as direções x e y, o domínio e a imagem da função podem ser usados para obter uma boa janela de inspeção, como mostramos no exemplo seguinte.

► Exemplo 3 Use o domínio e a imagem da função $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$ para determinar uma janela que contenha todo o gráfico.

Solução O domínio natural de f é $[-2, 2]$ e a imagem é $[0, \sqrt{12}]$ (verifique). Dessa forma, todo o gráfico está contido na janela de inspeção $[-2, 2] \times [0, \sqrt{12}]$. Por clareza, é preferível usar uma janela um pouco maior para evitar ter o gráfico muito próximo dos lados da mesma. Por exemplo, a janela $[-3, 3] \times [-1, 4]$ dá o gráfico da Figura 1.2.8. ◄

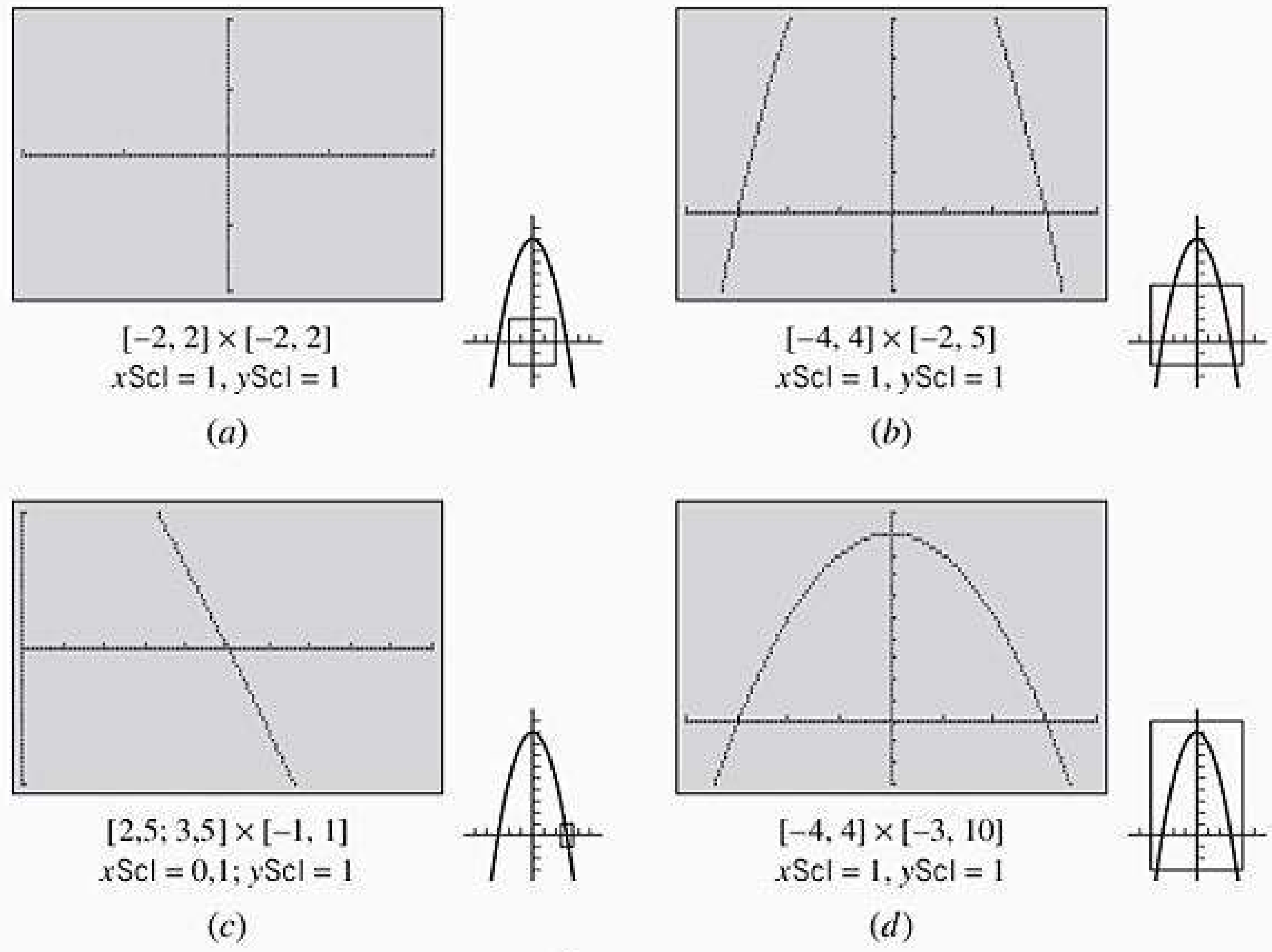
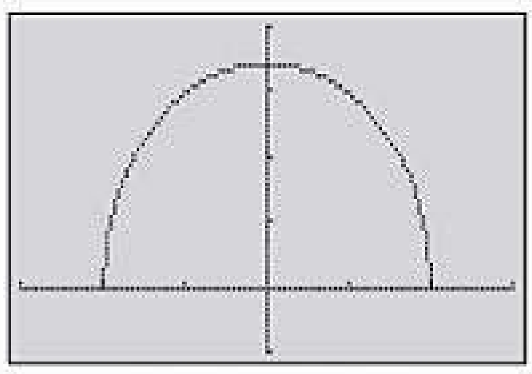


Figura 1.2.7 Quatro vistas de $y = 9 - x^2$



$[-3, 3] \times [-1, 4]$
xScl = 1, yScl = 1

Figura 1.2.8

Às vezes será impossível encontrar uma única janela de inspeção que exiba todas as características importantes de um gráfico, caso em que precisaremos decidir o que é mais importante para o problema à mão e escolher a janela de acordo.

► Exemplo 4 Faça o gráfico da equação $y = x^3 - 12x^2 + 18$ nas seguintes janelas, discutindo as vantagens e desvantagens de cada uma.

(a) $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com xScl = 1 e yScl = 1

(b) $[-20, 20] \times [-20, 20]$ com xScl = 1 e yScl = 1

(c) $[-20, 20] \times [-300, 20]$ com xScl = 1 e yScl = 20

(d) $[-5, 15] \times [-300, 20]$ com xScl = 1 e yScl = 20

(e) $[1, 2] \times [-1, 1]$ com xScl = 0,1 e yScl = 0,1

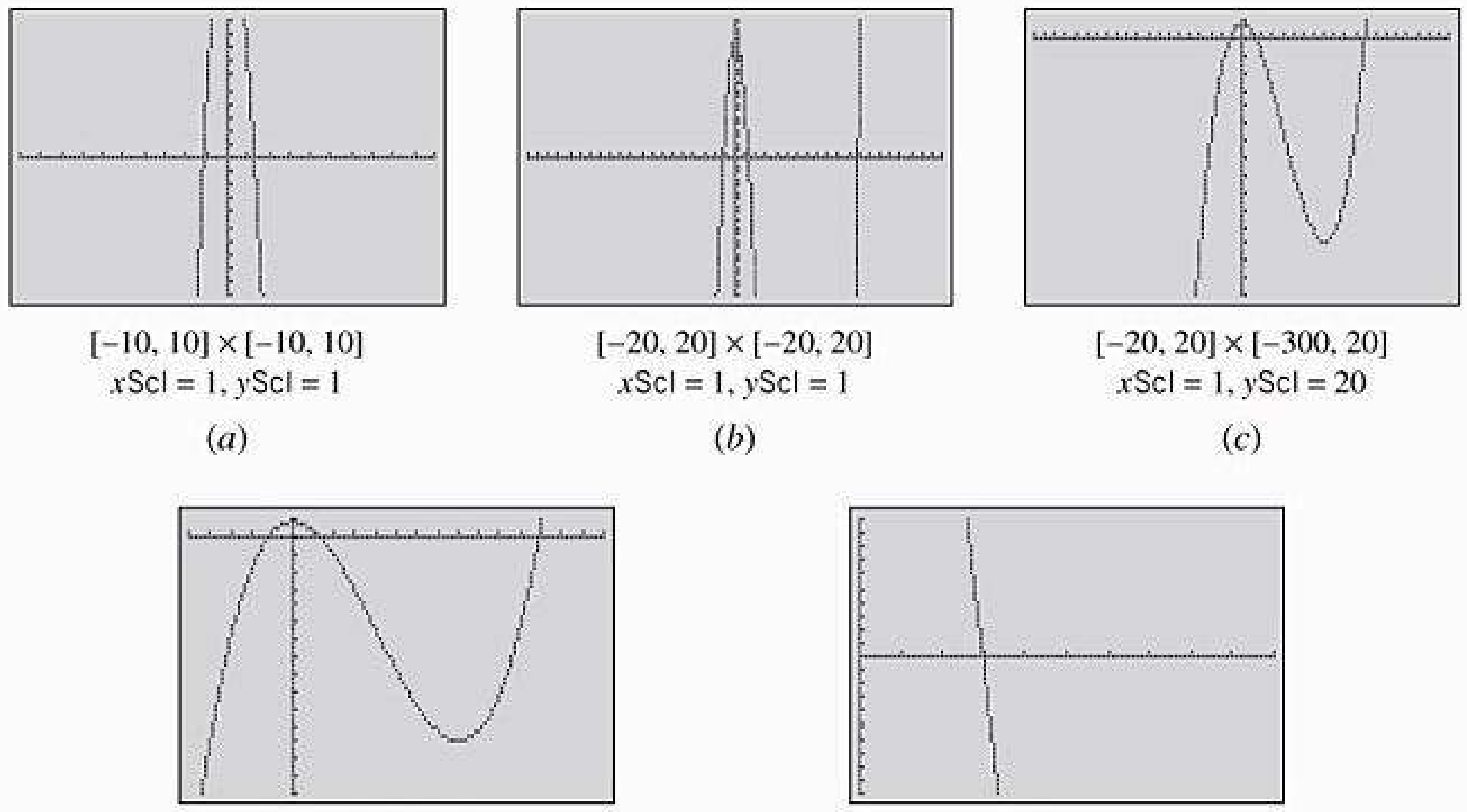
Solução (a) A janela na Figura 1.2.9*a* cortou fora a parte do gráfico que intersecta o eixo y e mostra somente duas das três raízes reais possíveis para o polinômio cúbico dado. Para contornar esse problema, precisamos alargar a janela em ambas as direções x e y.

Solução (b) A janela da Figura 1.2.9*b* mostra a intersecção do gráfico com o eixo y e as três raízes reais, mas cortou fora a parte do gráfico entre as duas raízes positivas. Além disso, os sinais na direção y estão quase ilegíveis, por estarem muito perto um do outro. Precisamos estender a janela na direção de y negativo e aumentar yScl. Como não sabemos o quanto estender a janela, são necessárias algumas tentativas para obter o que queremos.

Solução (c) A janela na Figura 1.2.9*c* mostra todos os principais aspectos do gráfico. Porém, temos algum espaço desperdiçado na direção x. Podemos melhorar a figura diminuindo a janela apropriadamente nessa direção.

Solução (d) A janela na Figura 1.2.9*d* mostra todos os principais aspectos do gráfico sem muito desperdício de espaço. Entretanto, não oferece uma visão clara das raízes. Para obter uma visão mais próxima das raízes, precisamos abandonar a idéia de mostrar todos os principais aspectos do gráfico e escolher as janelas que focalizem as raízes.

Solução (e) A janela 1.2.9*e* expõe muito pouco do gráfico, porém mostra claramente que a raiz no intervalo [1, 2] é aproximadamente 1,3. ◄



(a) $[-10, 10] \times [-10, 10]$, xScl = 1, yScl = 1

(b) $[-20, 20] \times [-20, 20]$, xScl = 1, yScl = 1

(c) $[-20, 20] \times [-300, 20]$, xScl = 1, yScl = 20

(d) $[-5, 15] \times [-300, 20]$, xScl = 1, yScl = 20

(e) $[1, 2] \times [-1, 1]$, xScl = 0,1; yScl = 0,1

Figura 1.2.9

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

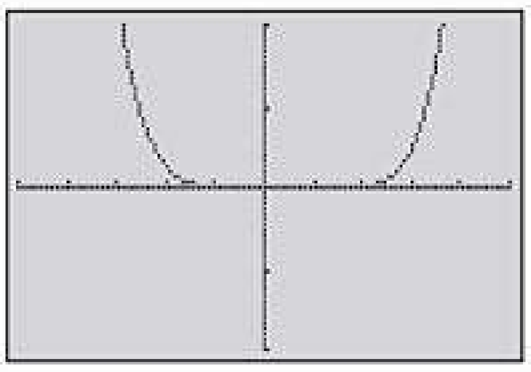
Há situações nas quais queremos determinar a janela de inspeção, escolhendo o intervalo x para a janela e permitindo que o recurso gráfico determine um intervalo y, o qual compreende os valores máximo e mínimo da função sobre o intervalo x. A maioria dos recursos gráficos fornece algum método para fazer isso, assim, verifique nas instruções para descobrir como fazê-lo. Permitir que o recurso gráfico determine o intervalo y da janela elimina muito da adivinhação do problema, como aquela na parte (b) do exemplo precedente.

■ FAZENDO *ZOOM*

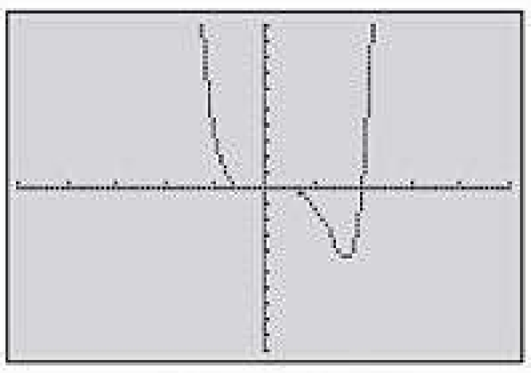
O processo de aumentar ou diminuir o tamanho da janela de inspeção é denominado ***fazer o zoom***. Ao reduzir o tamanho da janela, vemos menos do gráfico como um todo, mas muitos detalhes da parte mostrada; isso é denominado ***fazer o zoom para dentro***. Ao contrário, aumentando o tamanho da janela, mais vemos o gráfico como um todo, porém, com menos detalhes da parte mostrada; isso é denominado ***fazer o zoom para fora***. Muitas calculadoras fornecem um menu para os dois tipos de *zoom* por fatores fixo. Por exemplo, em algumas delas o efeito total de ampliação ou redução é controlado atribuindo-se valores a dois ***fatores de zoom***, xFact e yFact. Se

$$x\text{Fact} = 10 \quad \text{e} \quad y\text{Fact} = 5$$

então, cada vez que um comando de *zoom* é executado, a janela de inspeção é ampliada ou reduzida por um fator de 10 na direção x e um fator de 5 na direção y. Com programas de computador, como o *Mathematica* e o *Maple*, o *zoom* é controlado ajustando-se diretamente os intervalos x e y; contudo, há maneiras de automatizar isso através de programação.



$[-5, 5] \times [-1000, 1000]$
xScl = 1, yScl = 500
(*a*)



$[-5, 5] \times [-10, 10]$
xScl = 1, yScl = 1

Figura 1.2.10

COMPRESSÃO

A ampliação da janela de inspeção de um gráfico tem o efeito geométrico de compressão, pois uma maior parte do gráfico é espremida na tela da calculadora. Se a compressão for muito grande, então podem-se perder detalhes do gráfico. Dessa forma, a escolha da janela de inspeção depende, freqüentemente, do que queremos ver: mais do gráfico ou mais do detalhe. A Figura 1.2.10 mostra duas vistas da equação

$$y = x^5(x-2)$$

Na parte (*a*) da figura, o intervalo y é muito grande, resultando em uma compressão vertical que obscurece os detalhes nos arredores do eixo x. Na parte (*b*), o intervalo y é muito menor, e conseqüentemente vemos mais detalhes nas vizinhanças do eixo x, porém menos do gráfico na direção y.

► **Exemplo 5** A função $f(x) = x + 0{,}01\,\text{sen}(50\pi x)$ é a soma de $f_1(x) = x$, cujo gráfico é a reta $y = x$, e $f_2(x) = 0{,}01\,\text{sen}(50\pi x)$, cujo gráfico é uma curva senoidal de amplitude 0,01 e período $2\pi/50\pi = 0{,}04$. Isso sugere que o gráfico de $f(x)$ segue o padrão geral da reta $y = x$, mas com altos e baixos resultantes da contribuição das ondulações senoidais, como vemos na parte (*c*) da Figura 1.2.11. Gere os quatro gráficos mostrados na Figura 1.2.11 e explique por que as oscilações são visíveis somente na parte (*c*).

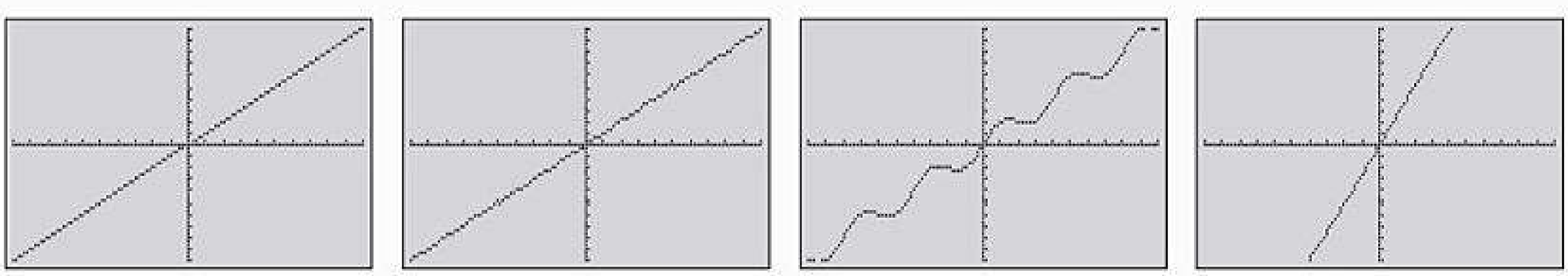
Solução Para gerar os quatro gráficos, inicialmente devemos colocar o recurso gráfico no modo radiano.* Como as janelas de partes sucessivas do exemplo são de tamanho decrescente, com fator de 10, os leitores que utilizarem calculadoras podem fixar o fator de *zoom* em 10 unidades em ambas as direções x e y.

(a) Na Figura 1.2.11*a*, o gráfico parece ser uma reta, pois a compressão vertical esconde as pequenas oscilações senoidais (sua amplitude é apenas 0,01).

(b) Na Figura 1.2.11*b*, começam a aparecer pequenos altos e baixos na reta, pois há menos compressão vertical.

(c) Na Figura 1.2.11*c*, as oscilações começam a ficar evidentes, pois a escala vertical é mais compatível com a amplitude das oscilações

(d) Na Figura 1.2.11*d*, o gráfico parece ser uma reta, pois vemos o *zoom* de uma porção muito pequena da curva. ◄



$[-10, 10] \times [-10, 10]$	$[-1, 1] \times [-1, 1]$	$[-0{,}1; 0{,}1] \times [-0{,}1; 0{,}1]$	$[-0{,}01; 0{,}01] \times [-0{,}01; 0{,}01]$
xScl = 1, yScl = 1	xScl = 0,1; yScl = 0,1	xScl = 0,01; yScl = 0,01	xScl = 0,001; yScl = 0,001
(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)

Figura 1.2.11

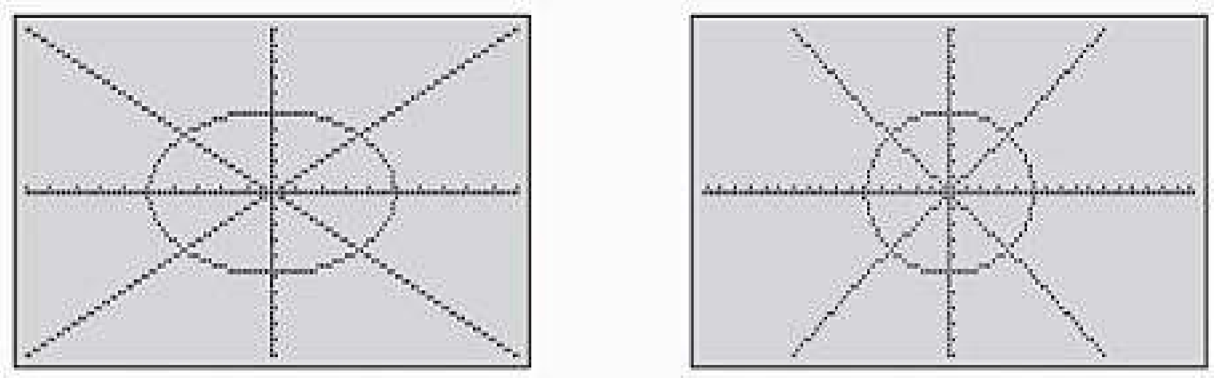
* Neste livro seguimos a convenção de que ângulos são medidos em radianos, a não ser que a medida em graus esteja especificada.

DISTORÇÃO NA PROPORÇÃO DA APARÊNCIA

A Figura 1.2.12*a* mostra um círculo de raio 5 e duas retas perpendiculares, esboçado em uma janela de $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com xScl = 1 e yScl = 1. Entretanto, o círculo está distorcido e as retas não aparentam ser perpendiculares, pois a calculadora não usou o mesmo comprimento para 1 unidade no eixo x e 1 unidade no eixo y. (Compare o espaçamento entre os sinais sobre os eixos.) Isso é denominado ***distorção na proporção da aparência***. Muitas calculadoras têm um menu para corrigir automaticamente a distorção ajustando adequadamente a janela de inspeção. Por exemplo, algumas calculadoras fazem a correção da janela $[-10, 10] \times [-10, 10]$ mudando-a para

$$[-16{,}9970674487;\ 16{,}9970674487] \times [-10, 10]$$

(Figura 1.2.12*b*). Em programas como o *Mathematica* e o *Maple*, a distorção na proporção da aparência é controlada pelo ajuste das dimensões físicas da janela de inspeção na tela do computador, em vez de alterar os intervalos x e y da janela.



[−10, 10] × [−10, 10]
xScl = 1, yScl = 1
(*a*)

[−16,9970674487; 16,9970674487] × [−10, 10]
xScl = 1, yScl = 1
(*b*)

Figura 1.2.12

ERRO DE AMOSTRAGEM

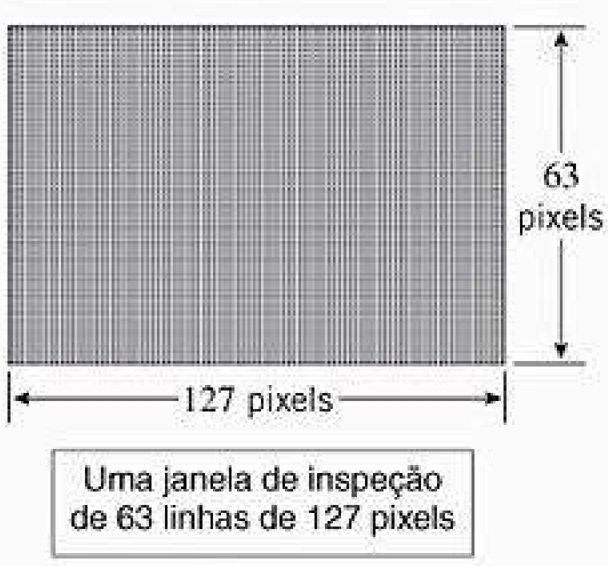


Figura 1.2.13

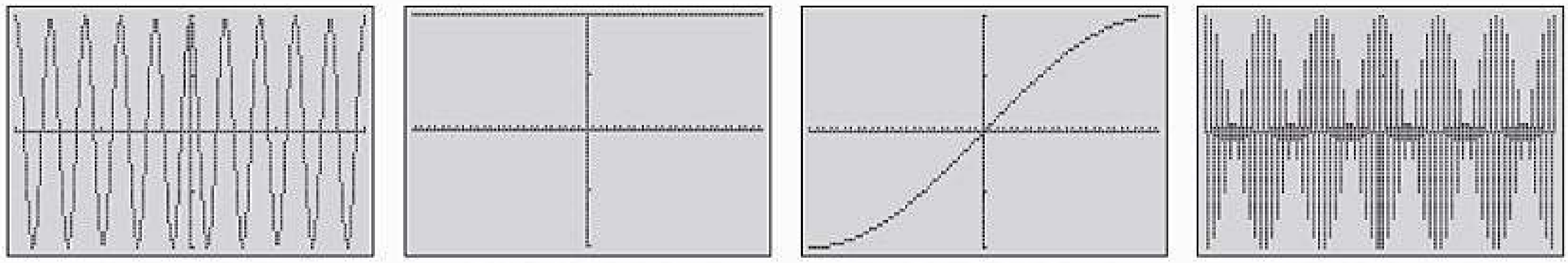
A janela de inspeção de um recurso gráfico é composta de uma grade retangular de pequenos blocos retangulares denominados ***pixels***. Para imagens em preto e branco, cada *pixel* tem dois estados, um ativo (ou escuro) e o outro desativado (ou claro). Um gráfico é formado ativando *pixels* apropriados para exibir a forma da curva. Em uma certa calculadora bem conhecida, a grade de *pixels* consiste em 63 linhas de 127 *pixels* cada (Figura 1.2.13), caso em que dizemos que a janela tem uma ***resolução*** de 127×63 (*pixels* por linha vezes o número de linhas). Uma resolução típica em tela de computador é de 1024×768. Quanto maior a resolução, mais lisos parecem ser os gráficos na tela.

O procedimento utilizado por um recurso gráfico para gerar um gráfico é semelhante ao de esboçar uma curva à mão: quando digitamos uma equação e escolhemos uma janela, o recurso gráfico *seleciona* as coordenadas x de certos *pixels* (sendo que essa escolha depende da janela que está sendo usada) e *calcula* as correspondentes coordenadas y. Em seguida, o recurso ativa os *pixels* cujas coordenadas mais se aproximam dos pontos calculados e utiliza um algoritmo predeterminado para ativar *pixels* intermediários adicionais para criar o formato da curva. Esse processo não é perfeito e é possível que alguma janela produza uma falsa impressão a respeito da forma do gráfico, em geral por características importantes do gráfico estarem ocorrendo entre os pontos calculados. Isso é denominado ***erro de amostragem***. Por exemplo, a Figura 1.2.14 mostra o gráfico de $y = \cos(10\pi x)$ gerado por uma certa calculadora bem conhecida em quatro janelas distintas. (A calculadora do leitor pode produzir resultados diferentes.) O gráfico da parte (*a*) tem o formato correto, mas os outros três não, devido a erros de amostragem:

- Na parte (*b*), ocorre que os *pixels* exibidos caem justamente nos picos da curva do cosseno, dando a impressão falsa de que o gráfico é uma reta horizontal.
- Na parte (*c*), os *pixels* exibidos caem em pontos sucessivamente mais elevados do gráfico.
- Na parte (*d*), os *pixels* exibidos caem em um certo padrão regular que cria mais uma impressão falsa da forma do gráfico.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de uma calculadora gráfica, leia o manual para descobrir sua resolução.



$[-1, 1] \times [-1, 1]$
xScl = 0,5; yScl = 0,5
(*a*)

$[-12{,}6; 12{,}6] \times [-1, 1]$
xScl = 1, yScl = 0,5
(*b*)

$[-12{,}5; 12{,}6] \times [-1, 1]$
xScl = 1, yScl = 0,5
(*c*)

$[-6, 6] \times [-1, 1]$
xScl = 1, yScl = 0,5
(*d*)

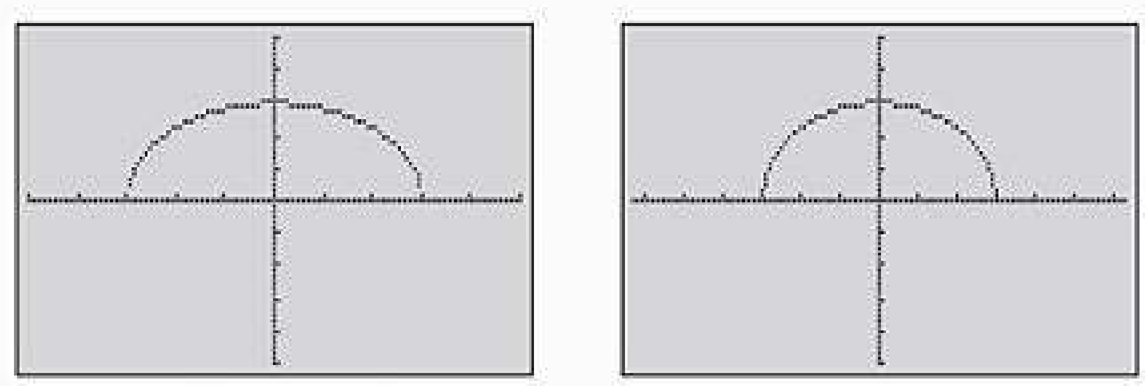
Figura 1.2.14

> A Figura 1.2.14 sugere que, para os gráficos trigonométricos com oscilações rápidas, restringir o intervalo x a poucos períodos provavelmente irá produzir representações mais precisas da forma do gráfico.

LACUNAS FALSAS

Algumas vezes, gráficos contínuos aparentam ter lacunas quando gerados em uma calculadora. Essas ***lacunas falsas*** costumam surgir quando o gráfico aumenta tão rapidamente que o espaço vertical se abre entre *pixels* sucessivos.

► Exemplo 6 A Figura 1.2.15 mostra o gráfico do semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$ em duas janelas de inspeção. Embora esse semicírculo tenha cortes no eixo x nos pontos $x = \pm 3$, a parte (*a*) da figura mostra lacunas falsas nesses pontos, pois não há *pixels* com coordenadas x iguais a ± 3 na janela escolhida. Na parte (*b*) não ocorrem lacunas, pois existem *pixels* com coordenadas x de ± 3 na janela usada. ◄



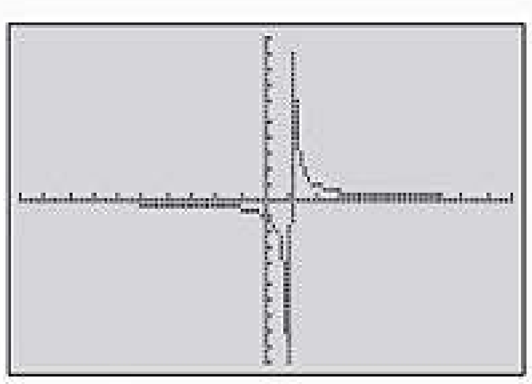
$[-5, 5] \times [-5, 5]$
xScl = 1, yScl = 1
(*a*)

$[-6{,}3; 6{,}3] \times [-5, 5]$
xScl = 1, yScl = 1
(*b*)

Figura 1.2.15

SEGMENTOS DE RETA FALSOS

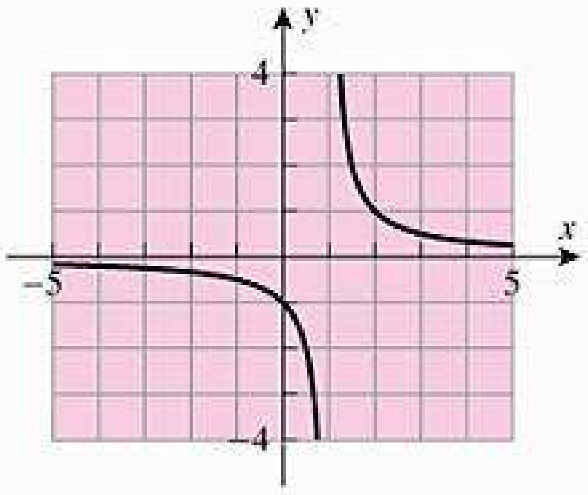
Além de criar lacunas falsas em gráficos contínuos, as calculadoras podem errar na direção oposta colocando ***segmentos de reta falsos*** nas lacunas de curvas descontínuas.



$[-10, 10] \times [-10, 10]$
xScl = 1, yScl = 1

$y = 1/(x-1)$ com segmentos de retas falsos

(*a*)



Aspecto real da curva $y = 1/(x-1)$

(*b*)

Figura 1.2.16

► Exemplo 7 A Figura 1.2.16*a* mostra o gráfico de $y = 1/(x-1)$ na janela *default* de uma calculadora. Embora o gráfico aparente conter segmentos de reta verticais próximos de $x = 1$, estes não deviam estar lá. Realmente, há uma lacuna na curva em $x = 1$, uma vez que uma divisão por zero ocorre nesse ponto (Figura 1.2.16*b*). ◄

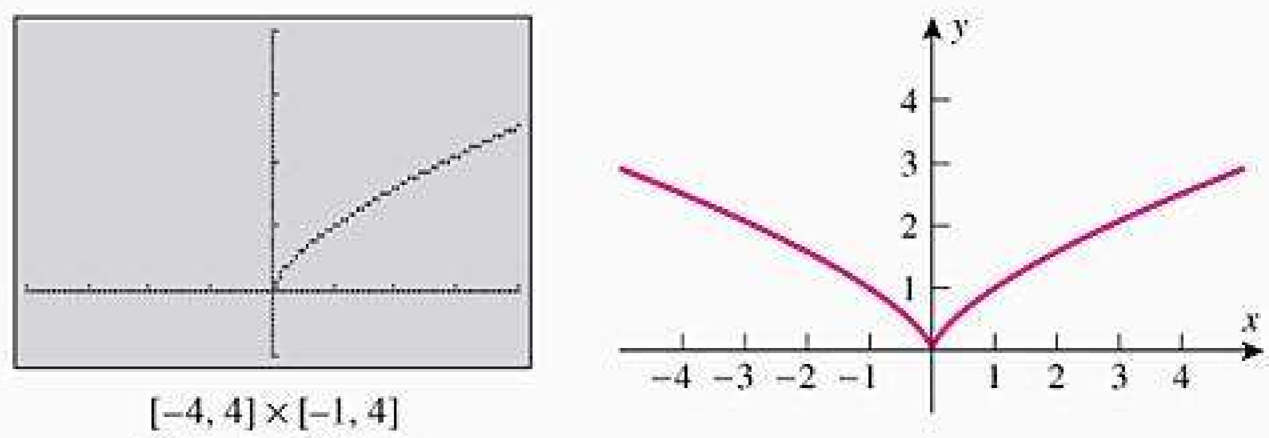
ERROS DE OMISSÃO

A maioria dos recursos gráficos usa logaritmos para avaliar as funções com expoentes fracionários como $f(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$. Contudo, como os logaritmos estão definidos somente para os números positivos, muitos recursos gráficos omitem partes dos gráficos de funções com ex-

poentes fracionários. Por exemplo, uma calculadora faz o gráfico de $y = x^{2/3}$ como o da Figura 1.2.17*a*, quando o gráfico real é o da Figura 1.2.17*b*. (Para uma maneira de contornar isso, veja a discussão que precede o Exercício 29.)

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Determine se seu recurso gráfico produz o gráfico completo de $y = x^{2/3}$ para valores positivos e negativos de x.



$[-4, 4] \times [-1, 4]$
xScl = 1, yScl = 1

Figura 1.2.17 (*a*) (*b*)

■ QUAL É A VERDADEIRA FORMA DE UM GRÁFICO?

Embora os recursos gráficos sejam ferramentas poderosas na geração rápida de gráficos, eles podem produzir gráficos enganosos devido à compressão, ao erro de amostragem, a lacunas falsas e a segmentos de reta falsos. Em resumo, *os recursos gráficos podem sugerir as formas dos gráficos mas não estabelecê-las com certeza*. Assim, quanto mais você souber sobre os gráficos das funções que está gerando, mais fácil será escolher uma boa janela de inspeção e maior será sua habilidade de julgar quão razoáveis são os gráficos produzidos por seu recurso gráfico.

■ MAIS INFORMAÇÕES SOBRE RECURSOS GRÁFICOS E CALCULADORAS

A melhor fonte de informação sobre seu recurso gráfico é o manual do mesmo, por isso sugerimos que o leitor o consulte de tempos em tempos para aprender uma determinada técnica.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.2 (Ver página 26 para respostas.)

1. Use um recurso computacional para gerar o gráfico da equação
$$y = 0{,}4x^3 + \operatorname{sen}(3^x)$$
nas janelas de inspeção dadas e discuta as vantagens de cada janela.
(a) $[-6, 6] \times [-30, 50]$ (b) $[-4, 4] \times [-25, 25]$
(c) $[1{,}2; 1{,}4] \times [0; 0{,}2]$ (d) $[5{,}99; 6{,}01] \times [84, 88]$

2. Use o domínio e a imagem de f para encontrar uma janela de inspeção que exiba todo o gráfico de $f(x) = 2 - \sqrt{1 - 25x^2}$.

3. Explique como ficaria o gráfico de $y = |x|$ se a janela de inspeção $[-0{,}01; 0{,}01] \times [-10, 10]$ fosse visualizada num quadrado.

4. Explique como ficaria o gráfico de $y = |x|$ se a janela de inspeção $[-10, 10] \times [-0{,}01; 0{,}01]$ fosse visualizada num quadrado.

EXERCÍCIOS 1.2 Recurso Gráfico

1-4 Use um recurso computacional para gerar o gráfico de f nas janelas de inspeção dadas e especifique qual janela, em seu opinião, melhor descreve o gráfico.

1. $f(x) = x^4 - x^2$
(a) $[-50, 50] \times [-50, 50]$ (b) $[-5, 5] \times [-5, 5]$
(c) $[-2, 2] \times [-2, 2]$ (d) $[-2, 2] \times [-1, 1]$
(e) $[-1{,}5; 1{,}5] \times [-0{,}5; 0{,}5]$

2. $f(x) = x^5 - x^3$
(a) $[-50, 50] \times [-50, 50]$ (b) $[-5, 5] \times [-5, 5]$
(c) $[-2, 2] \times [-2, 2]$ (d) $[-2, 2] \times [-1, 1]$
(e) $[-1{,}5; 1{,}5] \times [-0{,}5; 0{,}5]$

3. $f(x) = x^2 + 12$
(a) $[-1, 1] \times [13, 15]$ (b) $[-2, 2] \times [11, 15]$
(c) $[-4, 4] \times [10, 28]$ (d) Uma janela de sua escolha

4. $f(x) = -12 - x^2$

(a) $[-1, 1] \times [-15, -13]$ (b) $[-2, 2] \times [-15, -11]$
(c) $[-4, 4] \times [-28, -10]$ (d) Uma janela de sua escolha

5-6 Use o domínio e a imagem de f para determinar uma janela de inspeção que contenha todo o gráfico e, então, gere-o nela.

5. $f(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$ **6.** $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

ENFOCANDO CONCEITOS

7. Faça o gráfico da função $f(x) = x^3 - 15x^2 - 3x + 45$ usando as janelas e o espaçamento de sinais dados e discuta as vantagens e desvantagens de cada janela.

(a) $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com xScl = 1 e yScl = 1
(b) $[-20, 20] \times [-20, 20]$ com xScl = 1 e yScl = 1
(c) $[-5, 20] \times [-500, 50]$ com xScl = 5 e yScl = 50
(d) $[-2, -1] \times [-1, 1]$ com xScl = 0,1 e yScl = 0,1
(e) $[9, 11] \times [-486, -484]$ com xScl = 0,1 e yScl = 0,1

8. Faça o gráfico da função $f(x) = -x^3 - 12x^2 + 4x + 48$ usando as janelas e o espaçamento de sinais dados e discuta as vantagens e desvantagens de cada janela.

(a) $[-10, 10] \times [-10, 10]$ com xScl = 1 e yScl = 1
(b) $[-20, 20] \times [-20, 20]$ com xScl = 1 e yScl = 1
(c) $[-16, 4] \times [-250, 50]$ com xScl = 2 e yScl = 25
(d) $[-3, -1] \times [-1, 1]$ com xScl = 0,1 e yScl = 0,1
(e) $[-9, -7] \times [-241, -239]$ com xScl = 0,1 e yScl = 0,1

9-16 Gere o gráfico de f em uma janela julgada apropriada.

9. $f(x) = x^2 - 9x - 36$ **10.** $f(x) = \dfrac{x+7}{x-9}$

11. $f(x) = 2\cos(80x)$ **12.** $f(x) = 12\,\text{sen}(x/80)$

13. $f(x) = 300 - 10x^2 + 0{,}01x^3$

14. $f(x) = x(30 - 2x)(25 - 2x)$

15. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ **16.** $f(x) = \sqrt{11x - 18}$

17-18 Gere o gráfico de f e determine se seus gráficos contêm segmentos de reta falsos. Esboce o gráfico verdadeiro e veja se é possível eliminar os segmentos de reta falsos, mudando a janela de inspeção.

17. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **18.** $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

19. O gráfico da equação $x^2 + y^2 = 16$ é um círculo de raio 4 e centro na origem.

(a) Encontre a função cujo gráfico é o semicírculo superior e esboce-o.
(b) Encontre a função cujo gráfico é o semicírculo inferior e esboce-o.
(c) Faça o gráfico dos dois semicírculos juntos. Se os dois gráficos combinados não formarem um círculo, tente ajustar a janela de inspeção para eliminar a distorção na proporção da aparência.
(d) Faça o gráfico da porção do círculo no primeiro quadrante.
(e) Há alguma função cujo gráfico seja o lado direito do círculo? Explique.

20. Para cada parte, faça o gráfico da equação resolvendo y em termos de x e, então, esboce juntas as funções resultantes.

(a) $x^2/4 + y^2/9 = 1$
(b) $y^2 - x^2 = 1$

21. Leia o manual de seu recurso gráfico para determinar como fazer o gráfico de funções que envolvam valores absolutos. Faça, então, os gráficos das equações dadas.

(a) $y = |x|$ (b) $y = |x - 1|$
(c) $y = |x| - 1$ (d) $y = |\text{sen}\, x|$
(e) $y = \text{sen}\,|x|$ (f) $y = |x| - |x + 1|$

22. Com base em seu conhecimento da função valor absoluto, esboce o gráfico de $f(x) = |x|/x$. Confira seu resultado usando um recurso gráfico.

ENFOCANDO CONCEITOS

23. Faça uma conjectura sobre a relação entre os gráficos de $y = f(x)$ e $y = |f(x)|$; confira sua conjectura com algumas funções específicas.

24. Faça uma conjectura sobre a relação entre os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f(|x|)$; confira sua conjectura com algumas funções específicas.

25. (a) Com base em seu conhecimento da função valor absoluto, esboce o gráfico de $y = |x - a|$, onde a é uma constante. Confira seu resultado usando um recurso gráfico e alguns valores específicos de a.
(b) Esboce o gráfico de $y = |x - 1| + |x - 2|$; confira seu resultado com um recurso gráfico.

26. Qual é a relação entre os gráficos de $y = |x|$ e $y = \sqrt{x^2}$? Confira sua resposta com um recurso gráfico.

27-28 A maioria dos recursos gráficos fornece uma forma de fazer o gráfico de funções definidas por partes; veja o manual para saber como. Contudo, se sua meta for tão-somente encontrar a forma geral do gráfico, isso poderá ser feito plotando cada parte da função separadamente e combinando as partes com um esboço feito à mão. Use esse método nestes exercícios.

27. Esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2}, & x \le 2 \\ x^3 - 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

28. Esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{1-x}, & 1 < x < 4 \\ x^2 \cos \sqrt{x}, & 4 \le x \end{cases}$$

29-30 Observamos no texto que, em se tratando de funções envolvendo expoentes fracionais (ou radicais), os recursos gráficos omitem partes do gráfico. Se $f(x) = x^{p/q}$, onde p/q é uma fração positiva, *já simplificada*, o problema da omissão pode ser contornado da seguinte forma:

- Se p for par e q ímpar, então faça o gráfico de $g(x) = |x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$.
- Se p e q forem ímpares, então faça o gráfico de $g(x) = (|x|/x)|x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$.

Explicaremos por que isso funciona nos exercícios da próxima seção.

29. (a) Gere os gráficos de $f(x) = x^{2/5}$ e $g(x) = |x|^{2/5}$ e determine se seu recurso gráfico omitiu parte do gráfico de f.

(b) Gere os gráficos das funções $f(x) = x^{1/5}$ e $g(x) = (|x|/x)|x|^{1/5}$ e determine se seu recurso gráfico omitiu parte do gráfico de f.

(c) Gere um gráfico da equação $f(x) = (x-1)^{4/5}$ que mostre todas as suas características importantes.

(d) Gere um gráfico da equação $f(x) = (x+1)^{3/4}$ que mostre todas as suas características importantes.

30. Os gráficos de $y = (x^2 - 4)^{2/3}$ e $y = [(x^2-4)^2]^{1/3}$ deveriam ser os mesmos. Seu recurso gráfico produz o mesmo gráfico para ambas? Se não, o que deve estar acontecendo?

31. Em cada parte, faça o gráfico da função para vários valores de c e descreva em um ou dois parágrafos como as mudanças em c afetam o gráfico em cada caso.

(a) $y = cx^2$ (b) $y = x^2 + cx$

(c) $y = x^2 + x + c$

32. O gráfico de uma equação da forma $y^2 = x(x-a)(x-b)$ (onde $0 < a < b$) é denominado ***cúbica bipartida***. A figura abaixo mostra um gráfico típico dessa equação.

(a) Faça o gráfico da cúbica bipartida $y^2 = x(x-1)(x-2)$ resolvendo para y em termos de x e, então, fazendo os gráficos das duas funções resultantes.

(b) Encontre os cortes no eixo x da cúbica bipartida

$$y^2 = x(x-a)(x-b)$$

e faça uma conjectura sobre como uma mudança nos valores de a e b afetaria o gráfico. Teste sua conjectura através do gráfico da cúbica bipartida para vários valores de a e b.

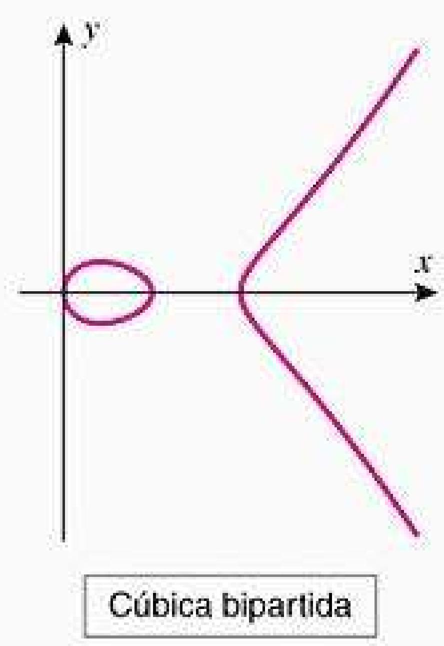


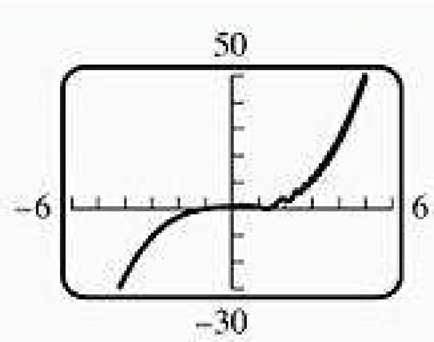
Figura Ex-32

33. Com base em seu conhecimento dos gráficos de $y = x$ e $y = \text{sen}\, x$, faça um esboço do gráfico de $y = x\,\text{sen}\, x$. Verifique sua conclusão usando um recurso gráfico.

34. Como será o gráfico de $y = \text{sen}(1/x)$? Teste sua conclusão usando um recurso gráfico. [*Sugestão*: Examine o gráfico em uma sucessão de intervalos cada vez menores centrados em $x = 0$.]

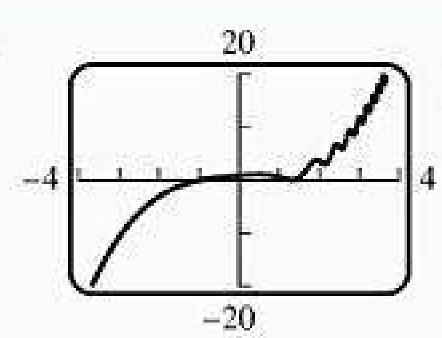
✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.2

1. (a)



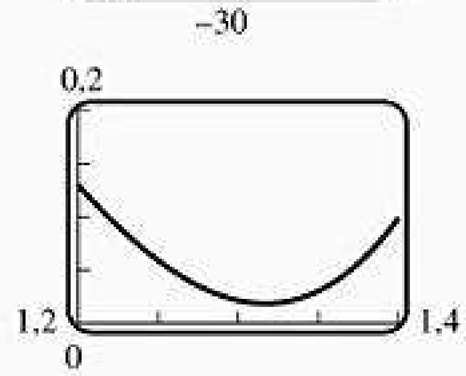
O gráfico é semelhante a uma cúbica, com alguma variação perto da origem.

(b)



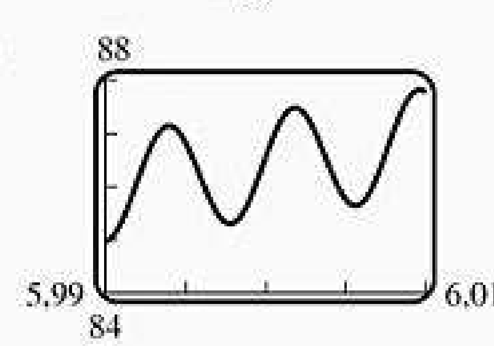
O zero perto de $x = -1$ está mais evidente e existe um possível zero imediatamente à direita de $x = 1$.

(c)



A função não tem um zero à direita de $x = 1$.

(d)



O termo $\text{sen}(3^x)$ produz uma rápida oscilação no gráfico quando x cresce. O termo $(0{,}4)x^3$ provoca um crescimento forte do gráfico para valores maiores de x, ocultando essa oscilação na parte (a).

2. $[-0{,}2; 0{,}2] \times [1, 2]$ **3.** O gráfico ficaria indistinguível do eixo x.

4. O gráfico ficaria indistinguível do eixo não-negativo y.

1.3 FUNÇÕES NOVAS A PARTIR DE ANTIGAS

Da mesma forma que números podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos, produzindo outros números, também funções podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas, produzindo outras funções. Nesta seção, vamos discutir essas operações e algumas outras sem análogos em aritmética ordinária.

OPERAÇÕES ARITMÉTICAS SOBRE FUNÇÕES

Duas funções, f e g, podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas de forma natural para formar novas funções $f+g$, $f-g$, fg e f/g. Por exemplo, $f+g$ é definida pela fórmula

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \tag{1}$$

que indica que, para cada entrada, o valor de $f+g$ é obtido adicionando-se os valores de f e g. Por exemplo, se

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

então,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + x^2$$

A equação (1) dá uma fórmula para $f+g$, porém não diz nada sobre o domínio de $f+g$. Entretanto, para que o lado direito da equação esteja definido, x precisa estar no domínio de f e no domínio de g. Assim, definimos o domínio de $f+g$ como sendo a intersecção desses dois domínios. Mas, geralmente, temos a seguinte definição:

1.3.1 DEFINIÇÃO Dadas as funções f e g, definimos

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Para as funções $f+g$, $f-g$ e fg, definimos o domínio como sendo a intersecção dos domínios de f e g; para a função f/g, definimos o domínio como sendo a intersecção dos domínios de f e g, excluídos os pontos onde $g(x)=0$ (para evitar a divisão por zero).

Se f for uma função constante, digamos $f(x)=c$, então o produto de f e g será cg. Dessa forma, multiplicar uma função por uma constante é um caso particular da multiplicação de duas funções.

► Exemplo 1 Sejam

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x - 3$$

Encontre o domínio e a fórmula das funções $f+g$, $f-g$, fg, f/g e $7f$.

Solução Primeiro, determinaremos as fórmulas para as funções e, depois, os domínios. As fórmulas são:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (1+\sqrt{x-2}) + (x-3) = x - 2 + \sqrt{x-2} \tag{2}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (1+\sqrt{x-2}) - (x-3) = 4 - x + \sqrt{x-2} \tag{3}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (1+\sqrt{x-2})(x-3) \tag{4}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{1+\sqrt{x-2}}{x-3} \tag{5}$$

$$(7f)(x) = 7f(x) = 7 + 7\sqrt{x-2} \tag{6}$$

Os domínios de f e g são $[2, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$, respectivamente (os domínios naturais). Assim, segue da Definição 1.3.1 que os domínios de $f + g$, $f - g$ e fg são a intersecção desses domínios, a saber:

$$[2, +\infty) \cap (-\infty, +\infty) = [2, +\infty) \tag{7}$$

Além disso, como $g(x) = 0$ se $x = 3$, o domínio de f / g é (7) com $x = 3$ removido, ou seja:

$$[2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Finalmente, o domínio de $7f$ é igual ao domínio de f. ◄

Nesse último exemplo ocorreu que os domínios das funções $f + g$, $f - g$, fg e f / g foram os domínios naturais resultantes das fórmulas obtidas para essas funções. Isso nem sempre ocorre, e aqui temos um exemplo.

► Exemplo 2 Mostre que se $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x$, então o domínio de fg não é igual ao domínio natural de h.

Solução O domínio natural de $h(x) = x$ é $(-\infty, +\infty)$. Observe que

$$(fg)(x) = \sqrt{x}\sqrt{x} = x = h(x)$$

no domínio de fg. O domínio de ambas f e g é $[0, +\infty)$, de modo que o domínio de fg é

$$[0, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$$

pela Definição 1.3.1. Como os domínios de fg e h são diferentes, não é correto escrever $(fg)(x) = x$ sem incluir a restrição de que essa fórmula só vale para $x \geq 0$. ◄

■ COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Vamos considerar agora uma operação sobre funções, denominada *composição*, que não tem análogo direto em aritmética usual. Informalmente, a operação de composição é executada substituindo-se em uma dada função a variável independente por alguma função. Por exemplo, suponha que

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$$

Se substituirmos x por $g(x)$ na fórmula de f, obtemos uma nova função:

$$f(g(x)) = (g(x))^2 = (x + 1)^2$$

a qual denotamos por $f \circ g$. Assim,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x + 1)^2$$

Em geral, temos a seguinte definição:

Embora à primeira vista o domínio de $f \circ g$ possa parecer complicado, intuitivamente faz sentido: para computar $f(g(x))$, necessita-se de x no domínio de g para computar $g(x)$ e, depois, $g(x)$ no domínio de f para computar $f(g(x))$.

1.3.2 DEFINIÇÃO Dadas as funções f e g, a ***composição*** de f e g, denotada por $f \circ g$, é a função definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Por definição, o domínio de $f \circ g$ consiste em todo x no domínio de g para o qual $g(x)$ está no domínio de f.

▶ Exemplo 3 Seja $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$

Solução (a) A fórmula para $f(g(x))$ é

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 + 3 = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3$$

Como o domínio de g é $[0, +\infty)$ e o de f é $(-\infty, +\infty)$, o domínio de $f \circ g$ consiste em todo x em $[0, +\infty)$, de modo que $g(x) = \sqrt{x}$ está em $(-\infty, +\infty)$; assim, o domínio de $f \circ g$ é $[0, +\infty)$. Logo,

$$(f \circ g)(x) = x + 3, \quad x \geq 0$$

Solução (b) A fórmula para $g(f(x))$ é

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 3}$$

Como o domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o de g é $[0, +\infty)$, o domínio de $g \circ f$ consiste em todo x em $(-\infty, +\infty)$, de modo que $f(x) = x^2 + 3$ está em $[0, +\infty)$. Assim, o domínio de $g \circ f$ é $(-\infty, +\infty)$. Logo,

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Não há necessidade de indicar que o domínio é $(-\infty, +\infty)$, pois este é o domínio natural de $\sqrt{x^2 + 3}$. ◀

Note que no Exemplo 3 as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ não são a mesma. Assim, a ordem na qual as funções são compostas pode fazer (e geralmente fará) diferença no resultado final.

As composições também podem ser definidas para três ou mais funções; por exemplo, $(f \circ g \circ h)(x)$ é computada como

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Em outras palavras, primeiro encontramos $h(x)$, depois $g(h(x))$ e, finalmente, $f(g(h(x)))$.

▶ Exemplo 4 Encontre $(f \circ g \circ h)(x)$ se

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 1/x, \quad h(x) = x^3$$

Solução

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x^3)) = f(1/x^3) = \sqrt{1/x^3} = 1/x^{3/2} \blacktriangleleft$$

■ EXPRESSANDO UMA FUNÇÃO COMO UMA COMPOSIÇÃO

Muitos problemas em Matemática são abordados pela "decomposição" de funções em uma composição de funções mais simples. Por exemplo, considere a função h dada por

$$h(x) = (x + 1)^2$$

Para calcular $h(x)$ para um dado valor de x, computaríamos primeiro $x + 1$ e, então, o quadrado do resultado. Essas duas operações são executadas pelas funções

$$g(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad f(x) = x^2$$

Podemos expressar h em termos de f e g escrevendo

$$h(x) = (x + 1)^2 = [g(x)]^2 = f(g(x))$$

assim, conseguimos expressar h como a composição $h = f \circ g$.

O processo de raciocínio neste exemplo sugere um procedimento geral de decomposição de uma função h em uma composição $h = f \circ g$:

- Pense sobre como poderíamos calcular $h(x)$ para um valor específico de x, tentando dividir os cálculos em dois passos executados sucessivamente.
- A primeira operação no cálculo determinará uma g e a segunda, uma função f.
- A fórmula para h pode, então, ser escrita como $h(x) = f(g(x))$.

Para fins de descrição, iremos nos referir a g como a "função de dentro" e a f como a "função de fora" na expressão $f(g(x))$. A função de dentro executa a primeira operação e a de fora executa a segunda.

▶ Exemplo 5 Expresse $h(x) = (x-4)^5$ como a composição de duas funções.

Solução Para computar $h(x)$ para um dado valor, calcularíamos primeiro $x - 4$ e, então, elevaríamos o resultado à quinta potência. Logo, a função de dentro (primeira operação) é

$$g(x) = x - 4$$

e a função de fora (segunda operação) é

$$f(x) = x^5$$

logo, $h(x) = f(g(x))$. Como verificação,

$$f(g(x)) = [g(x)]^5 = (x-4)^5 = h(x)$$ ◀

▶ Exemplo 6 Expresse $\operatorname{sen}(x^3)$ como uma composição de duas funções.

Solução Para computar $\operatorname{sen}(x^3)$, calcularíamos primeiro x^3 e, então, o seno do resultado; assim, $g(x) = x^3$ é a função de dentro e $f(x) = \operatorname{sen} x$, a de fora. Logo,

$$\operatorname{sen}(x^3) = f(g(x)) \qquad \boxed{g(x) = x^3 \text{ e } f(x) = \operatorname{sen} x}$$ ◀

A Tabela 1.3.1 dá mais exemplos de decomposições de funções em composições.

Tabela 1.3.1

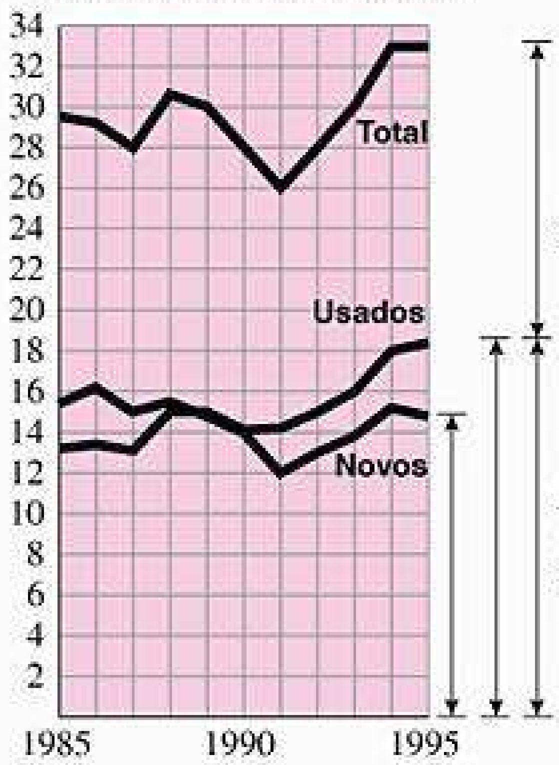
FUNÇÃO	$g(x)$ DE DENTRO	$f(x)$ DE FORA	COMPOSIÇÃO
$(x^2+1)^{10}$	x^2+1	x^{10}	$(x^2+1)^{10} = f(g(x))$
$\operatorname{sen}^3 x$	$\operatorname{sen} x$	x^3	$\operatorname{sen}^3 x = f(g(x))$
$\operatorname{tg}(x^5)$	x^5	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(x^5) = f(g(x))$
$\sqrt{4-3x}$	$4-3x$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{4-3x} = f(g(x))$
$8+\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	$8+x$	$8+\sqrt{x} = f(g(x))$
$\dfrac{1}{x+1}$	$x+1$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x+1} = f(g(x))$

Sempre há mais de uma maneira de expressar uma função como uma composição. Por exemplo, aqui estão duas maneiras de expressar $(x^2+1)^{10}$ como composições diferentes daquela da Tabela 1.3.1:

$$(x^2+1)^{10} = [(x^2+1)^2]^5 = f(g(x)) \qquad \boxed{g(x) = (x^2+1)^2 \text{ e } f(x) = x^5}$$

$$(x^2+1)^{10} = [(x^2+1)^3]^{10/3} = f(g(x)) \qquad \boxed{g(x) = (x^2+1)^3 \text{ e } f(x) = x^{10/3}}$$

Venda de Carros em Milhões



Fonte: NADA.

Figura 1.3.1

■ FUNÇÕES NOVAS A PARTIR DE ANTIGAS

O restante desta seção será dedicado a considerar o efeito geométrico de efetuar operações básicas com funções. Isso nos permitirá utilizar gráficos conhecidos de funções para visualizar ou esboçar gráficos de funções relacionadas. Por exemplo, a Figura 1.3.1 mostra os gráficos de vendas anuais de carros novos $N(t)$ e usados $U(t)$ ao longo de um certo período. Esses gráficos podem ser usados para construir o gráfico do total de vendas anuais de carros $T(t) = N(t) + U(t)$, somando os valores de $N(t)$ e $U(t)$ para cada valor de t. Em geral, o gráfico de $y = f(x) + g(x)$ pode ser construído a partir dos gráficos de $y = f(x)$ e de $y = g(x)$ somando os valores de y correspondentes a cada x.

► Exemplo 7 Na Figura 1.1.4, observe os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/x$ e faça um esboço que mostre a forma geral do gráfico $y = \sqrt{x} + 1/x$ para $x \geq 0$.

Solução Para somar os valores de y correspondentes de $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/x$ graficamente, basta imaginar que eles estão "empilhados" um em cima do outro. Isso dá lugar ao esboço da Figura 1.3.2. ◄

Use a técnica do Exemplo 7 para esboçar o gráfico da função

$$\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

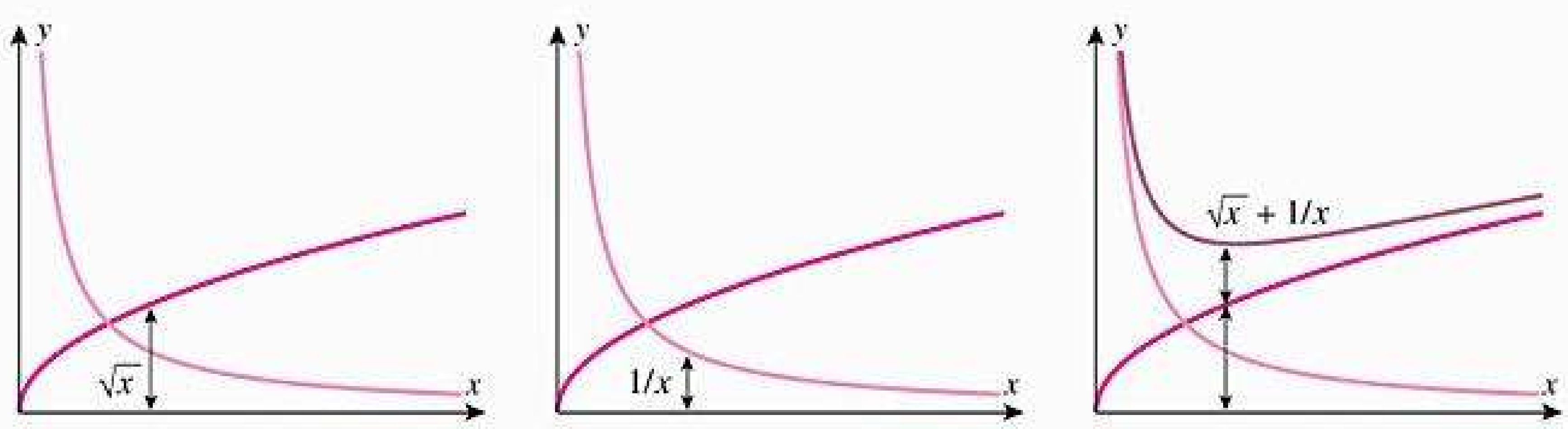


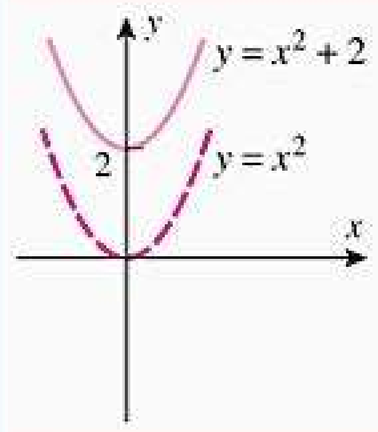
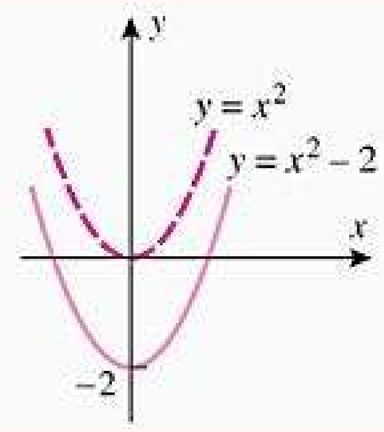
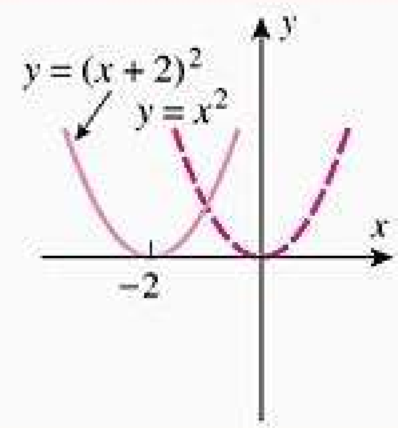
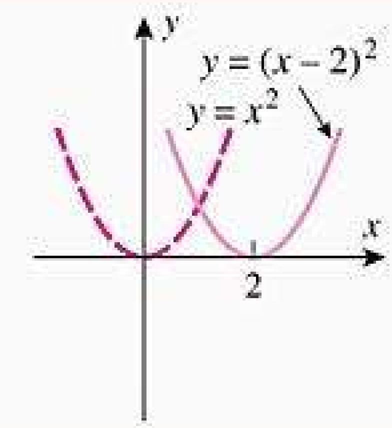
Figura 1.3.2 Somando as coordenadas y de $\sqrt{x}$ e de $1/x$, obtemos a coordenada y de $\sqrt{x} + 1/x$.

■ TRANSLAÇÕES

Na Tabela 1.3.2 ilustramos o efeito geométrico sobre o gráfico de $y = f(x)$ de somar a f ou à sua variável independente x uma constante *positiva* c, bem como o efeito de subtrair essa constante de f ou de x. Por exemplo, o primeiro resultado na tabela ilustra que somando uma constante positiva c à função f soma c a cada coordenada y de seu gráfico, com isso transladando o gráfico c unidades para cima. Analogamente, subtraindo c de f translada o gráfico c unidades para baixo. Por outro lado, se uma constante positiva c é somada a x, então o valor de $y = f(x + c)$ em $x - c$ é $f(x)$; e como o ponto $x - c$ está c unidades à esquerda de x no eixo x, o gráfico de $y = f(x + c)$ necessariamente é o de $y = f(x)$ transladado c unidades para a esquerda. Analogamente, subtraindo c de x translada o gráfico c unidades para a direita.

Antes de passar aos próximos exemplos, é conveniente rever os gráficos das Figuras 1.1.4 e 1.1.10.

Tabela 1.3.2

OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Somar uma constante positiva c a $f(x)$	Subtrair uma constante positiva c de $f(x)$	Somar uma constante positiva c a x	Subtrair uma constante positiva c de x
NOVA EQUAÇÃO	$y = f(x) + c$	$y = f(x) - c$	$y = f(x + c)$	$y = f(x - c)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para cima	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para baixo	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para a esquerda	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para a direita
EXEMPLO				

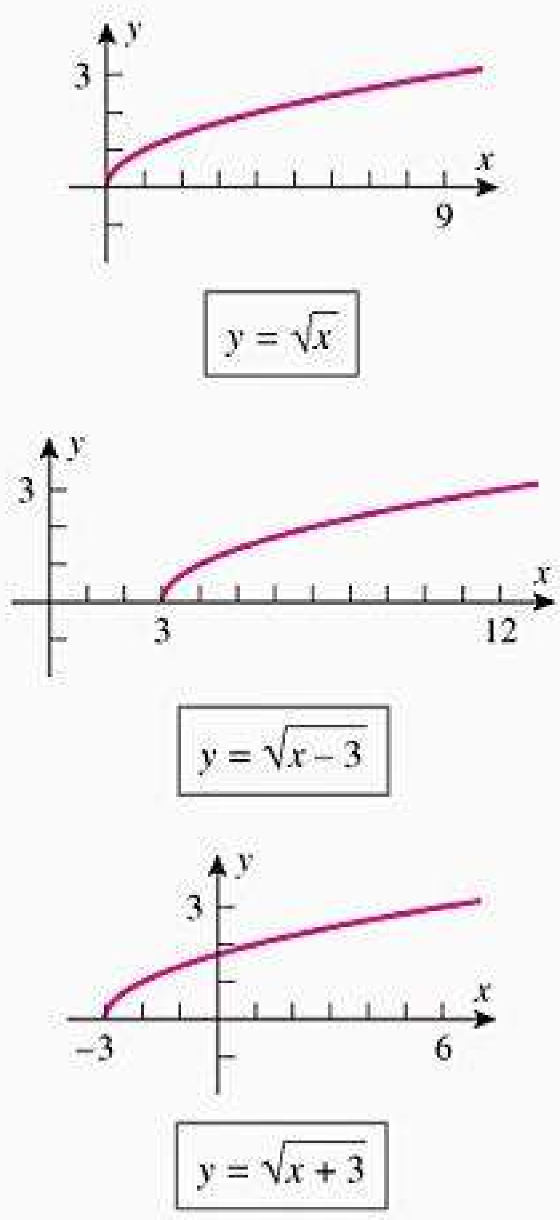


Figura 1.3.3

► Exemplo 8 Esboce o gráfico de

$$\text{(a)}\ \ y = \sqrt{x - 3} \qquad \text{(b)}\ \ y = \sqrt{x + 3}$$

Solução O gráfico da equação $y = \sqrt{x - 3}$ pode ser obtido transladando 3 unidades para a direita o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e o gráfico de $y = \sqrt{x + 3}$ transladando o de $y = \sqrt{x}$ 3 unidades para a esquerda (Figura 1.3.3). ◄

► Exemplo 9 Esboce o gráfico de $y = |x - 3| + 2$.

Solução O gráfico pode ser obtido com duas translações: primeiro transladamos 3 unidades para a direita o gráfico de $y = |x|$ para obter o gráfico de $y = |x - 3|$, depois transladamos esse gráfico 2 unidades para cima para obter o gráfico de $y = |x - 3| + 2$ (Figura 1.3.4). Se for desejado, o mesmo resultado pode ser obtido efetuando as translações em ordem inversa: primeiro transladamos 2 unidades para cima o gráfico de $|x|$ para obter o gráfico de $y = |x| + 2$, depois transladamos esse gráfico 3 unidades para a direita para obter o gráfico de $y = |x - 3| + 2$. ◄

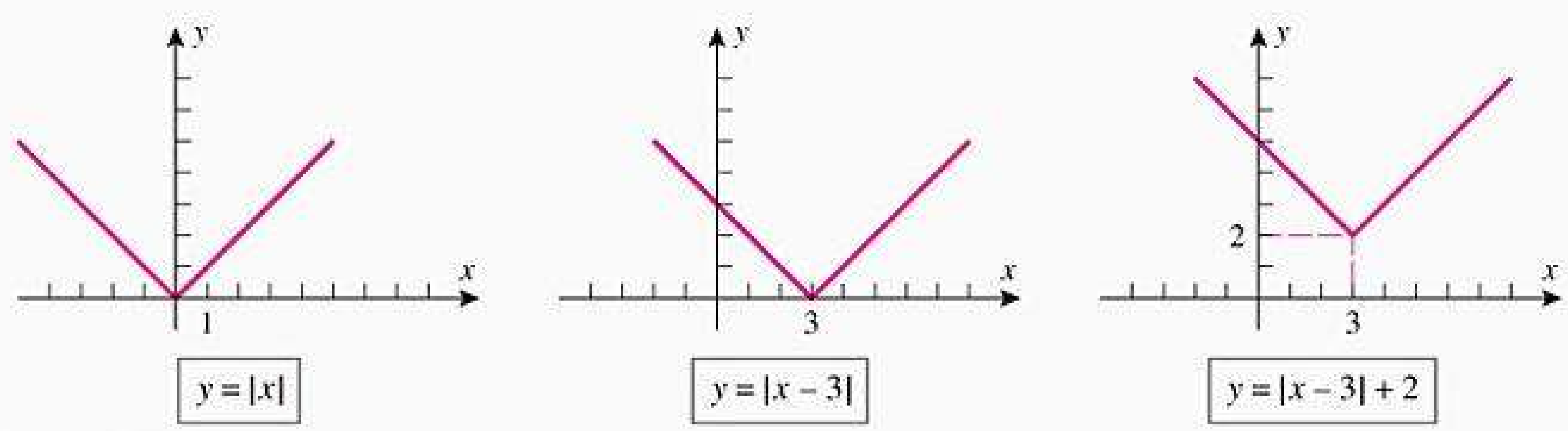


Figura 1.3.4

► Exemplo 10 Esboce o gráfico de $y = x^2 - 4x + 5$.

Solução Completando o quadrado dos dois primeiros termos, temos

$$y = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

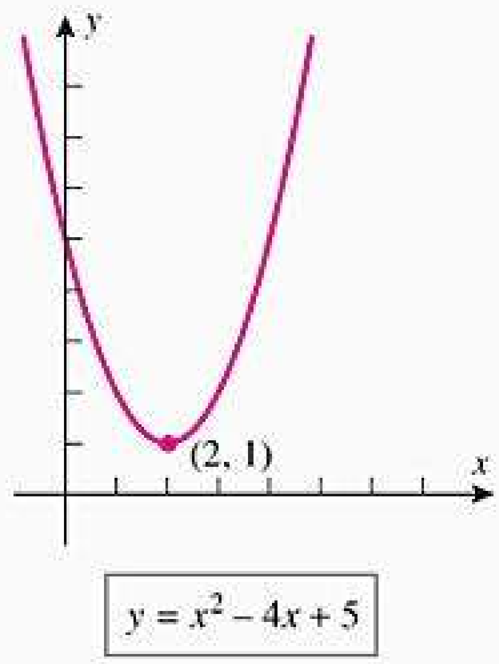


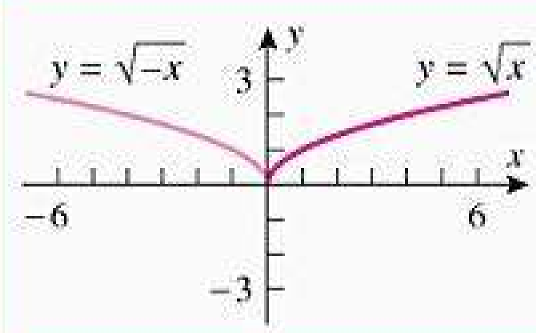
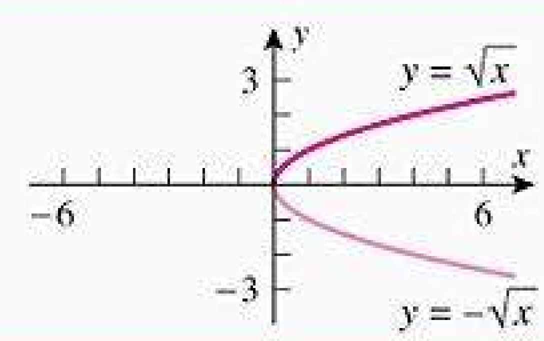
Figura 1.3.5

(ver o Apêndice G da internet para uma revisão dessa técnica). Dessa forma, vemos que o gráfico pode ser obtido transladando 2 unidades para a direita o gráfico de $y = x^2$ devido ao $(x - 2)$ e 1 unidade para cima devido ao +1 (Figura 1.3.5). ◄

REFLEXÕES

O gráfico de $y = f(-x)$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo y porque o ponto (x, y) do gráfico de $f(x)$ é substituído por $(-x, y)$. Analogamente, o gráfico de $y = -f(x)$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo x porque o ponto (x, y) do gráfico de $f(x)$ é substituído por $(x, -y)$ [a equação $y = -f(x)$ é equivalente a $-y = f(x)$]. Isso está resumido na Tabela 1.3.3.

Tabela 1.3.3

OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Substituir x por $-x$	Multiplicar $f(x)$ por -1
NOVA EQUAÇÃO	$y = f(-x)$	$y = -f(x)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Reflete o gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo y	Reflete o gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo x
EXEMPLO		

▶ Exemplo 11 Esboce o gráfico de $y = \sqrt[3]{2 - x}$.

Solução O gráfico pode ser obtido por uma reflexão e por uma translação: primeiro refletir o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ pelo eixo y para obter o gráfico de $y = \sqrt[3]{-x}$, então transladá-lo 2 unidades para a direita para obter o gráfico da equação $y = \sqrt[3]{-(x-2)} = \sqrt[3]{2 - x}$ (Figura 1.3.6). ◄

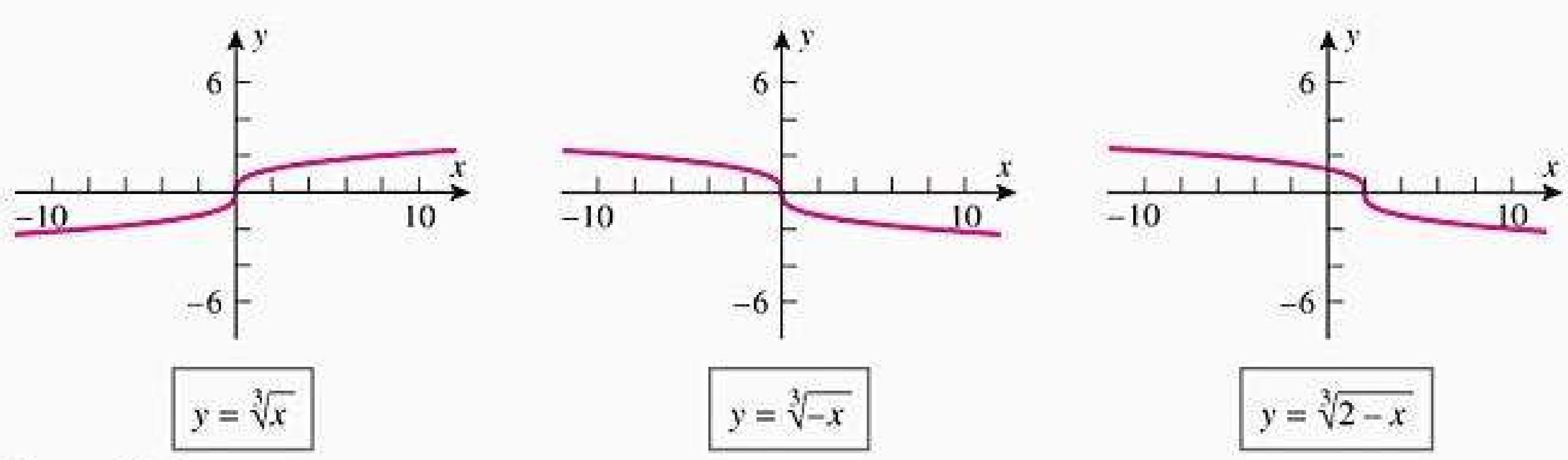


Figura 1.3.6

▶ Exemplo 12 Esboce o gráfico de $y = 4 - |x - 2|$.

Solução O gráfico pode ser obtido por uma reflexão e por duas translações: primeiro, transladar 2 unidades para a direita o gráfico de $y = |x|$ para obter o gráfico de $y = |x - 2|$; depois,

refletir pelo eixo x para obter o gráfico de $y = -|x - 2|$; então, transladá-lo 4 unidades para cima para obter o gráfico da equação $y = -|x - 2| + 4 = 4 - |x - 2|$ (Figura 1.3.7). ◄

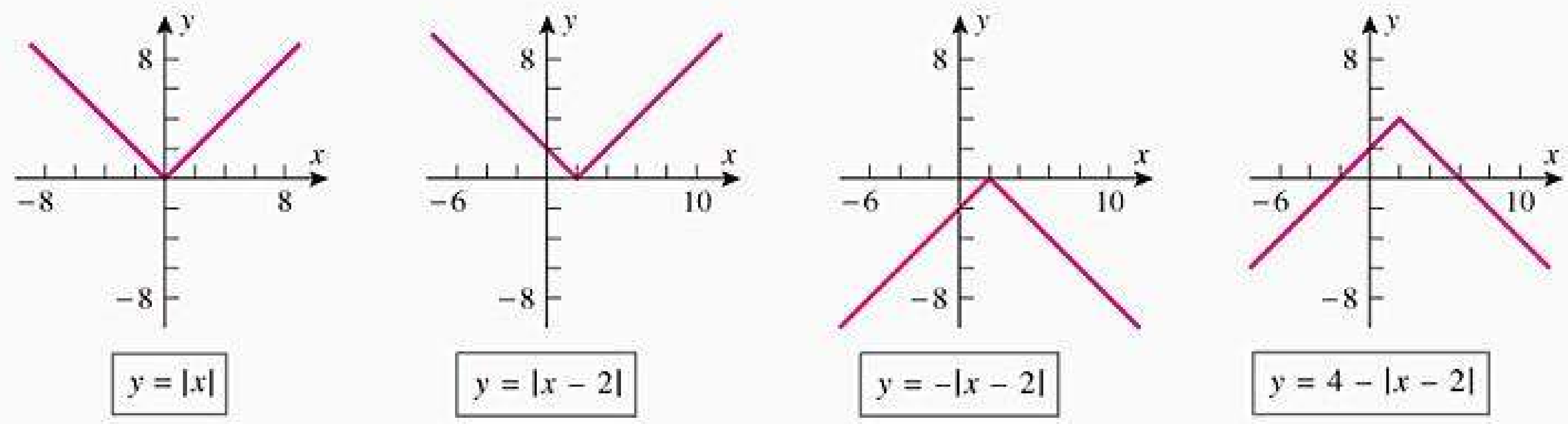


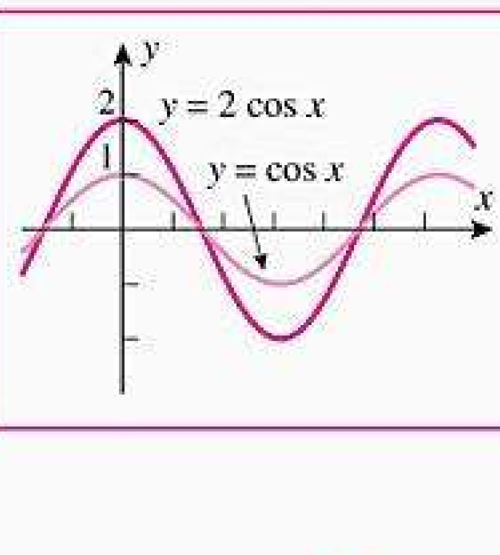
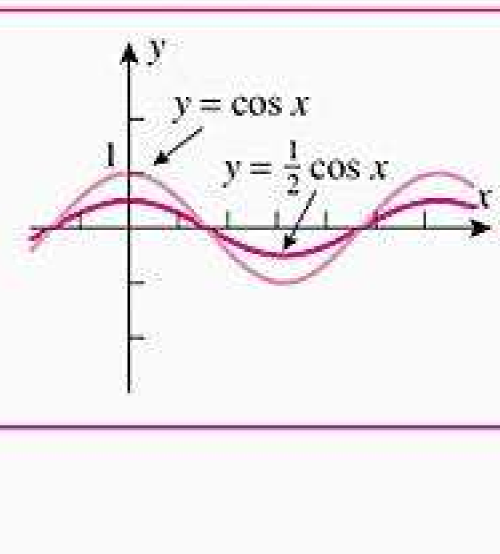
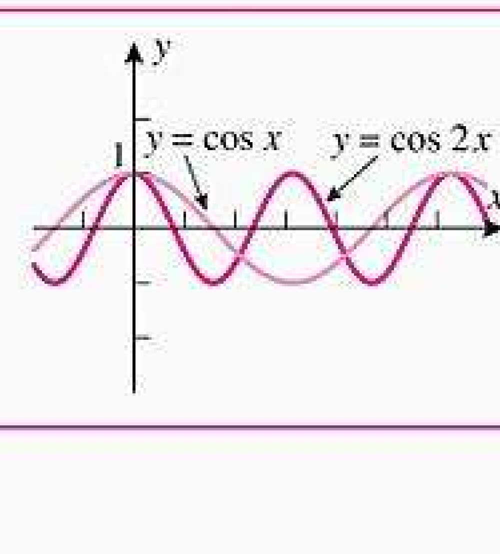
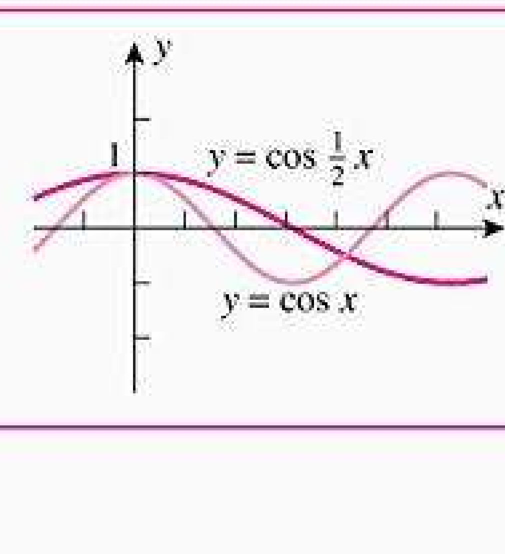
Figura 1.3.7

■ ALONGAMENTOS E COMPRESSÕES

Multiplicar $f(x)$ por uma constante *positiva* c tem o efeito geométrico de alongar o gráfico de $y = f(x)$ na direção y por um fator de c se $c > 1$ e de comprimi-lo na direção y por um fator de $1/c$ se $0 < c < 1$. Por exemplo, multiplicar $f(x)$ por 2 dobra cada coordenada y, portanto alonga o gráfico verticalmente por um fator de 2, enquanto multiplicar por $\frac{1}{2}$ corta cada coordenada y pela metade, portanto comprime o gráfico verticalmente por um fator de 2. Analogamente, multiplicar x por uma constante *positiva* c tem o efeito geométrico de comprimir o gráfico de $y = f(x)$ na direção x por um fator de c se $c > 1$ e de alongá-lo na direção x por um fator de $1/c$ se $0 < c < 1$. [Se isso parece um pouco ao contrário, pense assim: o valor de $2x$ varia duas vezes mais rápido do que x, de modo que um ponto que se move ao longo do eixo x a partir da origem só precisa viajar a metade da distância para que $y = f(2x)$ tenha o mesmo valor que $y = f(x)$, com isso criando uma compressão horizontal do gráfico.] Tudo isso está resumido na Tabela 1.3.4.

Descreva o efeito geométrico de multiplicar uma função f por uma constante *negativa* em termos de reflexões, alongamentos e compressões. Qual é o efeito geométrico de multiplicar a variável independente de uma função f por uma constante negativa?

Tabela 1.3.4

OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Multiplicar $f(x)$ por c ($c > 1$)	Multiplicar $f(x)$ por c ($0 < c < 1$)	Multiplicar x por c ($c > 1$)	Multiplicar x por c ($0 < c < 1$)
NOVA EQUAÇÃO	$y = cf(x)$	$y = cf(x)$	$y = f(cx)$	$y = f(cx)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Alonga o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c	Comprime o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de $1/c$	Comprime o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c	Alonga o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de $1/c$
EXEMPLO				

■ SIMETRIA

A Figura 1.3.8 ilustra três tipos de simetrias: ***simetria em relação ao eixo x***, ***simetria em relação ao eixo y*** e ***simetria em relação à origem***. Como mostra a figura, a curva é simétrica em relação ao eixo x se, para cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(x, -y)$ também está no gráfico, e é simétrica em relação ao eixo y se, para cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(-x, y)$ tam-

bém está no gráfico. Uma curva é simétrica em relação à origem se, para cada ponto (x, y) do gráfico, o ponto $(-x, -y)$ também está no gráfico. (Equivalentemente, a curva é simétrica em relação à origem se permanecer inalterada por uma rotação de 180° em torno da origem. Isso sugere o teste de simetria a seguir.)

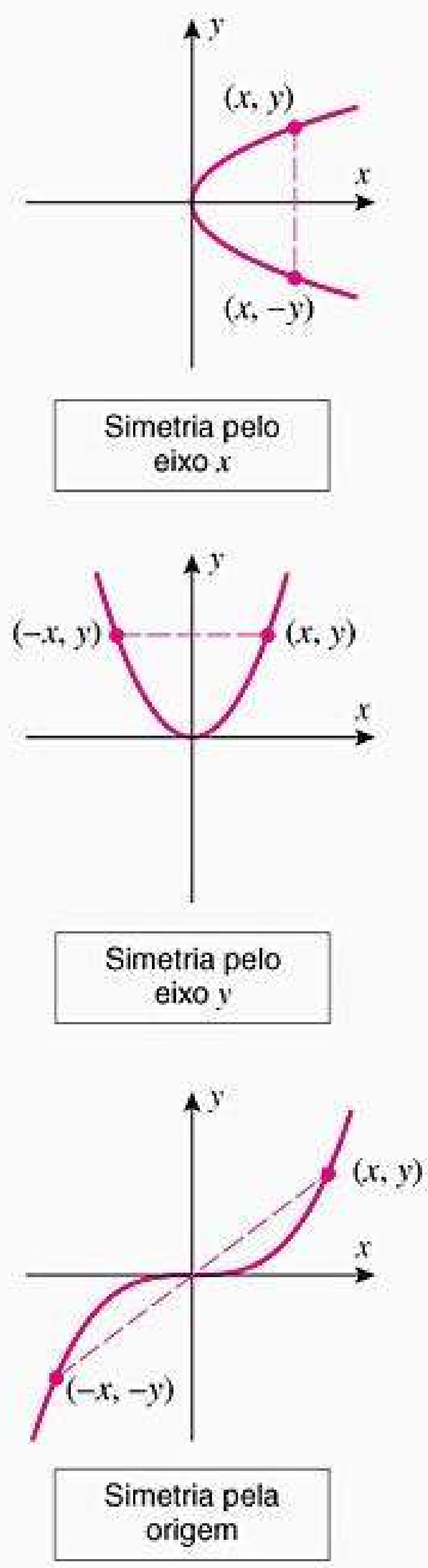


Figura 1.3.8

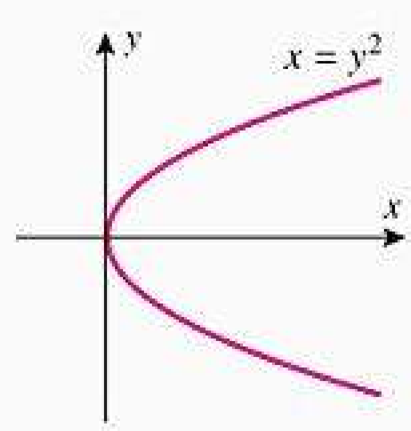


Figura 1.3.9

> **1.3.3 TEOREMA** ***(Testes de simetria)***
>
> (*a*) *Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo y se, e somente se, substituindo-se x por −x em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.*
>
> (*b*) *Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo x se, e somente se, substituindo-se y por −y em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.*
>
> (*c*) *Uma curva plana é simétrica em relação à origem se, e somente se, substituindo-se x por −x e y por −y em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.*

▶ **Exemplo 13** Use o Teorema 1.3.3 para identificar simetrias no gráfico de $x = y^2$.

Solução Substituindo y por $-y$ dá $x = (-y)^2$, que simplifica para a equação original $x = y^2$. Assim, o gráfico é simétrico em relação ao eixo x. O gráfico não é simétrico em relação ao eixo y pois substituindo x por $-x$ dá $-x = y^2$, que não é equivalente à equação original $x = y^2$. Analogamente, o gráfico não é simétrico em relação à origem pois substituindo x por $-x$ e y por $-y$ dá $-x = (-y)^2$, que simplifica para $-x = y^2$, que de novo não é equivalente à equação original. Esses resultados são consistentes com o gráfico de $x = y^2$ mostrado na Figura 1.3.9. ◀

■ FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Dizemos que uma função f é uma ***função par*** se

$$f(-x) = f(x) \tag{8}$$

e uma ***função ímpar*** se

$$f(-x) = -f(x) \tag{9}$$

Geometricamente, os gráficos de funções pares são simétricos em relação ao eixo y, porque substituindo x por $-x$ na equação $y = f(x)$ dá $y = f(-x)$, que é equivalente à equação original $y = f(x)$ por (8) (ver Figura 1.3.10). Analogamente, segue de (9) que os gráficos de funções ímpares são simétricos em relação à origem (ver Figura 1.3.11). Alguns exemplos de funções pares são x^2, x^4, x^6 e cos x; alguns exemplos de funções ímpares são x^3, x^5, x^7 e sen x.

Explique por que o gráfico de uma função não-nula não pode ser simétrico em relação ao eixo x.

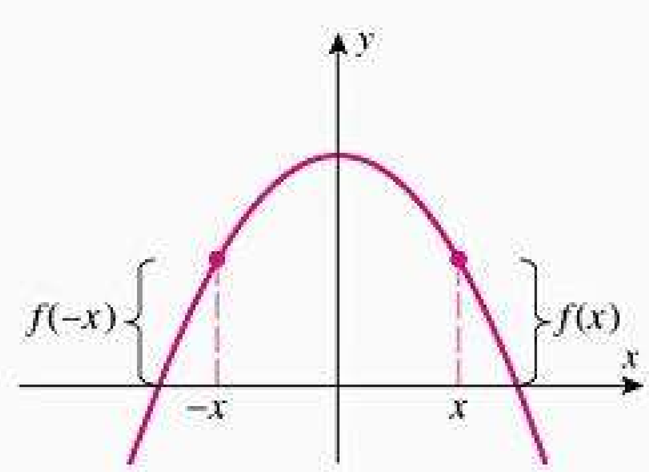


Figura 1.3.10 Este é o gráfico de uma função par, pois $f(-x) = f(x)$.

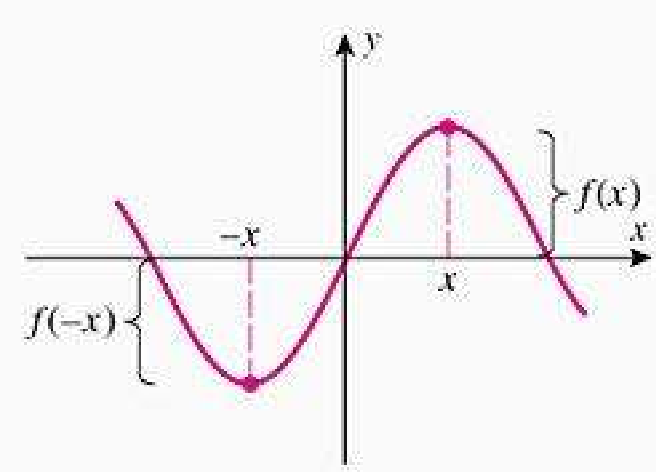


Figura 1.3.11 Este é o gráfico de uma função ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.3 (*Ver página 39 para respostas.*)

1. Sejam $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$ e $g(x) = |x|$. Em cada parte, dê a fórmula para a função e o correspondente domínio.

(a) $f + g$: __________ Domínio: __________

(b) $f - g$: __________ Domínio: __________

(c) fg: __________ Domínio: __________

(d) f/g: __________ Domínio: __________

2. Sejam $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Em cada parte, dê a fórmula para a composição e o correspondente domínio.

(a) $f \circ g$: __________ Domínio: __________

(b) $g \circ f$: __________ Domínio: __________

3. O gráfico de $y = 1 + (x - 2)^2$ pode ser obtido transladando o gráfico de $y = x^2$ para a __________ (esquerda/direita) por __________ unidade(s) e depois transladando o novo gráfico para __________ (cima/baixo) por __________ unidade(s).

4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -2 \le x \le 0 \\ |x-1|, & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

(a) A letra do alfabeto que mais se parece com o gráfico de f é __________.

(b) f é uma função par?

EXERCÍCIOS 1.3 Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

1. O gráfico de uma função f está na figura abaixo. Esboce os gráficos das seguintes equações:

(a) $y = f(x) - 1$ (b) $y = f(x - 1)$

(c) $y = \frac{1}{2}f(x)$ (d) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

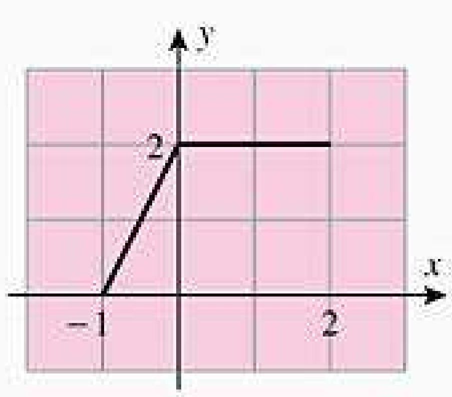


Figura Ex-1

2. Use o gráfico do Exercício 1 para esboçar os gráficos das seguintes equações:

(a) $y = -f(-x)$ (b) $y = f(2 - x)$

(c) $y = 1 - f(2 - x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(2x)$

3. O gráfico de uma função f está na figura abaixo. Esboce os gráficos das seguintes equações:

(a) $y = f(x + 1)$ (b) $y = f(2x)$

(c) $y = |f(x)|$ (d) $y = 1 - |f(x)|$

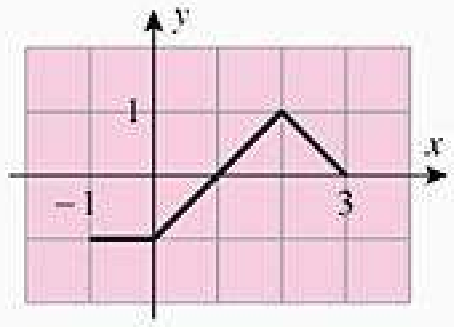


Figura Ex-3

4. Use o gráfico do Exercício 3 para esboçar o gráfico da equação $y = f(|x|)$.

5-10 Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = x^2$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

5. $y = -2(x+1)^2 - 3$ **6.** $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

7. $y = x^2 + 6x$ **8.** $y = x^2 + 6x - 10$

9. $y = 1 + 2x - x^2$ **10.** $y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)$

11-14 Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = \sqrt{x}$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

11. $y = 3 - \sqrt{x+1}$ **12.** $y = 1 + \sqrt{x-4}$

13. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$ **14.** $y = -\sqrt{3x}$

15-18 Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = 1/x$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

15. $y = \dfrac{1}{x-3}$ **16.** $y = \dfrac{1}{1-x}$

17. $y = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ **18.** $y = \dfrac{x-1}{x}$

19-22 Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = |x|$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

19. $y = |x+2| - 2$ **20.** $y = 1 - |x-3|$

21. $y = |2x - 1| + 1$

22. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

23-26 Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

23. $y = 1 - 2\sqrt[3]{x}$

24. $y = \sqrt[3]{x - 2} - 3$

25. $y = 2 + \sqrt[3]{x + 1}$

26. $y + \sqrt[3]{x - 2} = 0$

27. (a) Esboce o gráfico de $y = x + |x|$ adicionando as correspondentes coordenadas y nos gráficos de $y = x$ e $y = |x|$.
(b) Expresse a equação $y = x + |x|$ na forma por partes, sem valores absolutos e confirme que o gráfico obtido em (a) está em conformidade com essa equação.

28. Esboce o gráfico de $y = x + (1/x)$ adicionando as correspondentes coordenadas y nos gráficos de $y = x$ e $y = 1/x$. Use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

29-30 Determine as fórmulas para $f + g$, $f - g$, fg e f/g e estabeleça os domínios das funções.

29. $f(x) = 2\sqrt{x - 1}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

31. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3 + 1$. Determine
(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(4))$
(c) $f(f(16))$ (d) $g(g(0))$

32. Sejam $g(x) = \pi - x^2$ e $h(x) = \cos x$. Encontre
(a) $g(h(0))$ (b) $h(g(\sqrt{\pi/2}))$
(c) $g(g(1))$ (d) $h(h(\pi/2))$

33. Seja $f(x) = x^2 + 1$. Encontre
(a) $f(t^2)$ (b) $f(t + 2)$ (c) $f(x + 2)$
(d) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (e) $f(x + h)$ (f) $f(-x)$
(g) $f(\sqrt{x})$ (h) $f(3x)$

34. Seja $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre
(a) $g(5s + 2)$ (b) $g(\sqrt{x} + 2)$ (c) $3g(5x)$
(d) $\dfrac{1}{g(x)}$ (e) $g(g(x))$ (f) $(g(x))^2 - g(x^2)$
(g) $g(1/\sqrt{x})$ (h) $g((x - 1)^2)$

35-38 Determine as fórmulas para $f \circ g$ e $g \circ f$ e estabeleça os domínios das compostas.

35. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

36. $f(x) = \sqrt{x - 3}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

37. $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$, $g(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

38. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

39-40 Encontre uma fórmula para $f \circ g \circ h$.

39. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $h(x) = x^3$

40. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$

41-44 Expresse f como uma composição de duas funções; isto é, encontre g e h tais que $f = g \circ h$. [*Nota*: Cada exercício tem mais de uma solução.]

41. (a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$

42. (a) $f(x) = x^2 + 1$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

43. (a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (b) $f(x) = \dfrac{3}{5 + \cos x}$

44. (a) $f(x) = 3\operatorname{sen}(x^2)$ (b) $f(x) = 3\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x$

45-46 Expresse F como uma composição de três funções; isto é, encontre f, g e h tais que $F = f \circ g \circ h$. [*Nota*: Cada exercício tem mais de uma solução.]

45. (a) $F(x) = \left(1 + \operatorname{sen}(x^2)\right)^3$ (b) $F(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$

46. (a) $F(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ (b) $F(x) = |5 + 2x|$

ENFOCANDO CONCEITOS

47. Use a tabela abaixo para fazer um gráfico de $y = f(g(x))$.

Tabela Ex-47

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−4	−3	−2	−1	0	1	2
$g(x)$	−1	0	1	2	3	−2	−3

48. Encontre o domínio de $g \circ f$ para as funções f e g do Exercício 47.

49. Esboce o gráfico de $y = f(g(x))$ para as funções cujos gráficos estão na figura abaixo.

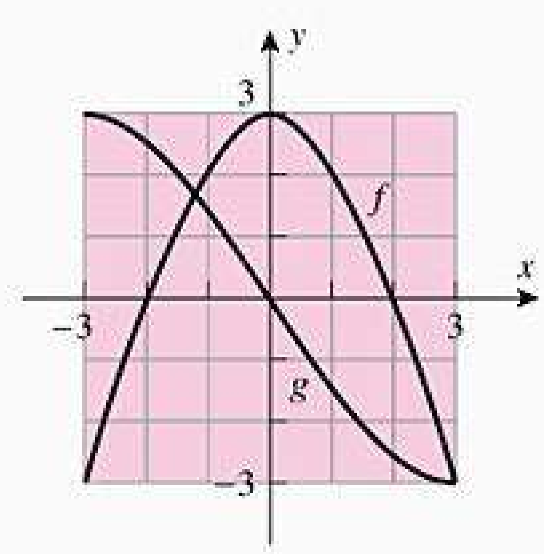


Figura Ex-49

50. Esboce o gráfico de $y = g(f(x))$ para as funções cujos gráficos estão no Exercício 49.

51. Use os gráficos de f e g do Exercício 49 para estimar as soluções das equações $f(g(x)) = 0$ e $g(f(x)) = 0$.

52. Use a tabela do Exercício 47 para resolver as equações $f(g(x)) = 0$ e $g(f(x)) = 0$.

53-56 Encontre

$$\frac{f(w) - f(x)}{w - x} \quad \text{e} \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e simplifique tanto quanto possível.

53. $f(x) = 3x^2 - 5$

54. $f(x) = x^2 - 6x$

55. $f(x) = 1/x$

56. $f(x) = 1/x^2$

57. Classifique em pares, ímpares ou nenhuma dessas as funções cujos valores estão dados na tabela a seguir.

Tabela Ex-57

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	5	3	2	3	1	−3	5
$g(x)$	4	1	−2	0	2	−1	−4
$h(x)$	2	−5	8	−2	8	−5	2

58. Complete a tabela da figura abaixo, de forma que o gráfico de $y = f(x)$ (o qual é um mapa de dispersão) seja simétrico em relação

(a) ao eixo y (b) à origem

Tabela Ex-58

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	1		−1	0		−5	

59. A figura abaixo mostra uma parte de um gráfico. Complete o gráfico de forma que todo ele seja simétrico em relação

(a) ao eixo x (b) ao eixo y (c) à origem

60. A figura abaixo mostra uma parte do gráfico de uma função f. Complete o gráfico supondo que

(a) f é uma função par (b) f é uma função ímpar

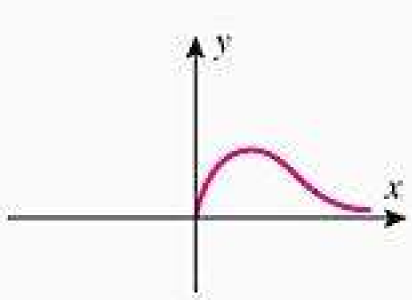


Figura Ex-59

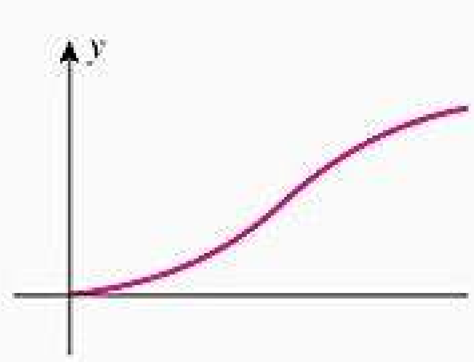


Figura Ex-60

61. Classifique as funções cujos gráficos estão nas figuras a seguir como pares, ímpares ou nenhum desses casos.

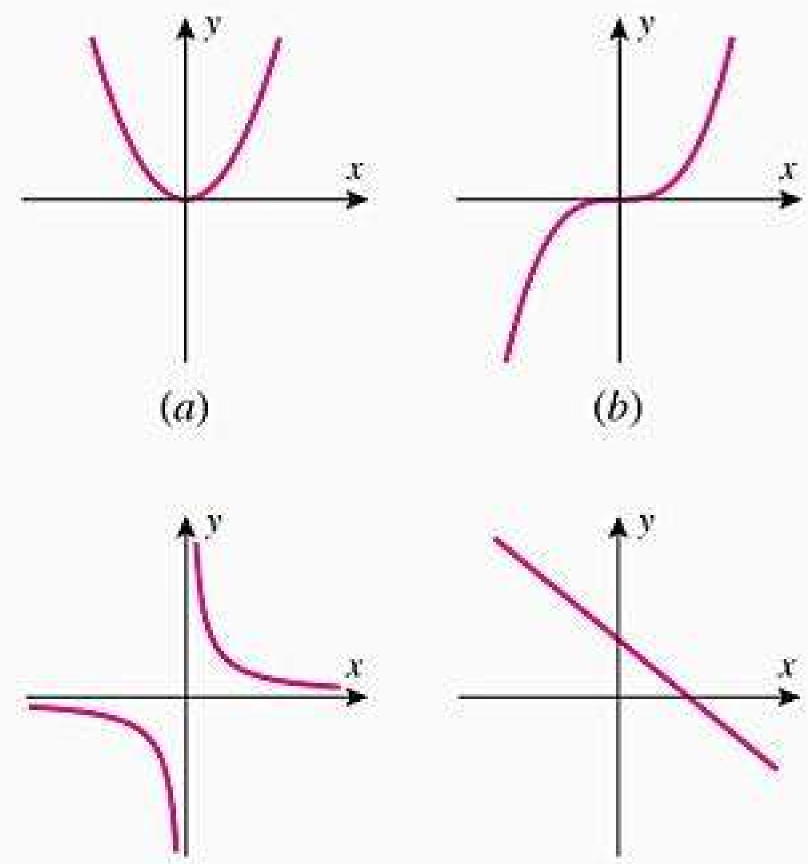


Figura Ex-61

62. Em cada parte das figuras abaixo, determine se o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, ao eixo y, à origem ou nenhum desses casos.

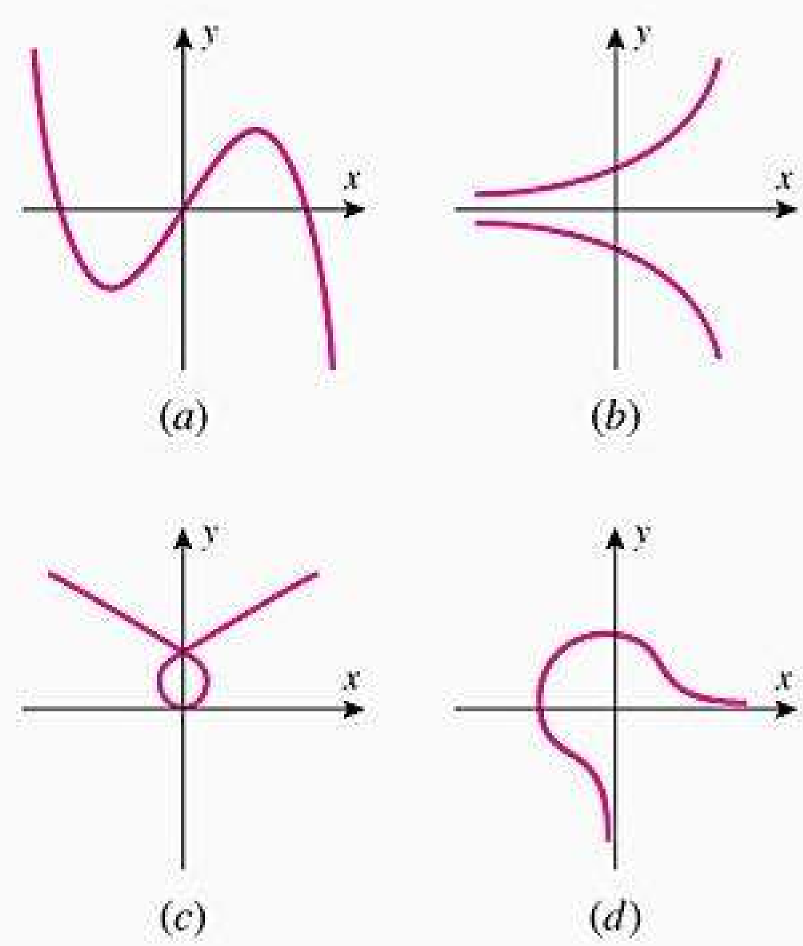


Figura Ex-62

63. Em cada parte, classifique a função como par, ímpar ou nenhum desses casos.

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = x + 1$

(e) $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{1 + x^2}$ (f) $f(x) = 2$

64. Suponha que a função f tenha por domínio todos os números reais. Determine se cada uma das funções a seguir pode ser classificada como par ou ímpar. Explique.

(a) $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ (b) $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

65. Suponha que a função f tenha por domínio todos os números reais. Mostre que f pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar. [*Sugestão:* Ver Exercício 64.]

66-67 Use o Teorema 1.3.3 para determinar se os gráficos têm simetrias em relação ao eixo x, ao eixo y ou à origem.

66. (a) $x = 5y^2 + 9$ (b) $x^2 - 2y^2 = 3$
(c) $xy = 5$

67. (a) $x^4 = 2y^3 + y$ (b) $y = \dfrac{x}{3 + x^2}$
(c) $y^2 = |x| - 5$

68-69 (i) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da equação no primeiro quadrante. [*Nota*: Para isso, resolva a equação para y em termos de x.] (ii) Use a simetria para fazer um esboço à mão de todo o gráfico. (iii) Confirme o que foi feito gerando o gráfico da equação nos demais quadrantes.

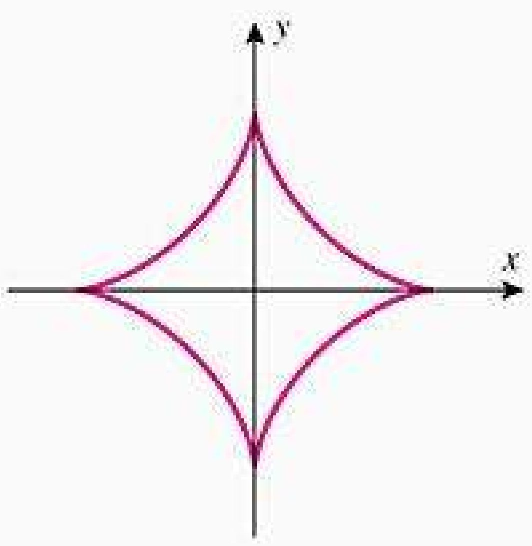
68. $9x^2 = 4y^2 = 36$ **69.** $4x^2 = 16y^2 = 16$

70. O gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que aparece na figura abaixo, é denominado ***hipociclóide quadricúspide***.

(a) Use o Teorema 1.3.3 para confirmar que esse gráfico é simétrico em relação ao eixo x, ao eixo y e à origem.

(b) Encontre uma função f cujo gráfico coincide no primeiro quadrante com a hipociclóide quadricúspide e use um recurso computacional gráfico para confirmar o que foi feito.

(c) Repita (b) para os demais quadrantes.



Hipociclóide quadricúspide

Figura Ex-70

71. A equação $y = |f(x)|$ pode ser escrita como

$$y = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

que mostra que o gráfico de $y = |f(x)|$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y = f(x)$, retendo a parte que está sobre ou acima do eixo x e refletindo por esse eixo a parte que está abaixo. Use esse método para obter o gráfico de $y = |2x - 3|$ a partir de $y = 2x - 3$.

72-73 Use o método descrito no Exercício 71.

72. Esboce o gráfico de $y = |1 - x^2|$.

73. Esboce o gráfico de
(a) $f(x) = |\cos x|$ (b) $f(x) = \cos x + |\cos x|$

74. A ***função maior inteiro***, $\lfloor x \rfloor$, é definida como sendo o maior inteiro que é menor do que ou igual a x. Por exemplo: $\lfloor 2{,}7 \rfloor = 2$, $\lfloor -2{,}3 \rfloor = -3$ e $\lfloor 4 \rfloor = 4$. Esboce o gráfico de $y = f(x)$.
(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$
(c) $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$ (d) $f(x) = \lfloor \text{sen } x \rfloor$

75. É alguma vez verdade que $f \circ g = g \circ f$ se f e g forem funções não-constantes? Se não, prove; se afirmativo, dê alguns exemplos para os quais é verdade.

76. Na discussão que precede o Exercício 29 da Seção 1.2, foi dado um procedimento para gerar o gráfico completo de $f(x) = x^{p/q}$, no qual sugerimos fazer o gráfico da função $g(x) = |x|^{p/q}$ em vez de $f(x)$ quando p for par e q ímpar, e o gráfico de $g(x) = (|x|/x)|x|^{p/q}$ se p e q forem ímpares. Mostre que em ambos os casos $f(x) = g(x)$ se $x > 0$ ou $x < 0$. [*Sugestão*: Mostre que $f(x)$ é uma função par se p for par e q for ímpar e que $f(x)$ é uma função ímpar se p e q forem ímpares.]

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.3

1. (a) $(f+g)(x) = 3\sqrt{x} - 2 + x;\ x \geq 0$ (b) $(f-g)(x) = 3\sqrt{x} - 2 - x;\ x \geq 0$ (c) $(fg)(x) = 3x^{3/2} - 2x;\ x \geq 0$
(d) $(f/g)(x) = \dfrac{3\sqrt{x} - 2}{x};\ x > 0$ **2.** (a) $(f \circ g)(x) = 2 - x;\ x \geq 0$ (b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{2 - x^2};\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
3. direita; 2; cima; 1 **4.** (a) W (b) sim

1.4 FAMÍLIAS DE FUNÇÕES

As funções são, freqüentemente, agrupadas em famílias de acordo com a forma das fórmulas que as definem ou outras características comuns. Nesta seção, vamos discutir algumas das famílias de funções mais básicas.

FAMÍLIAS DE CURVAS

O gráfico de uma função constante $f(x) = c$ é o gráfico da equação $y = c$, que é a reta horizontal mostrada na Figura 1.4.1*a*. Se variarmos c, obteremos um conjunto ou uma ***família*** de retas horizontais tais como as da Figura 1.4.1*b*.

As constantes que variamos para produzir uma família de curvas são denominadas ***parâmetros***. Por exemplo, lembre que uma equação da forma $y = mx + b$ representa uma reta de inclinação m e corte com o eixo y em b. Se mantivermos b fixo e tratarmos m como um parâmetro, obteremos uma família de retas cujos membros têm, todos, o mesmo corte em b com o eixo y (Figura 1.4.2*a*), e se mantivermos m fixo e tratarmos b como um parâmetro, obteremos uma família de retas paralelas cujos membros têm, todos, a mesma declividade m (Figura 1.4.2*b*).

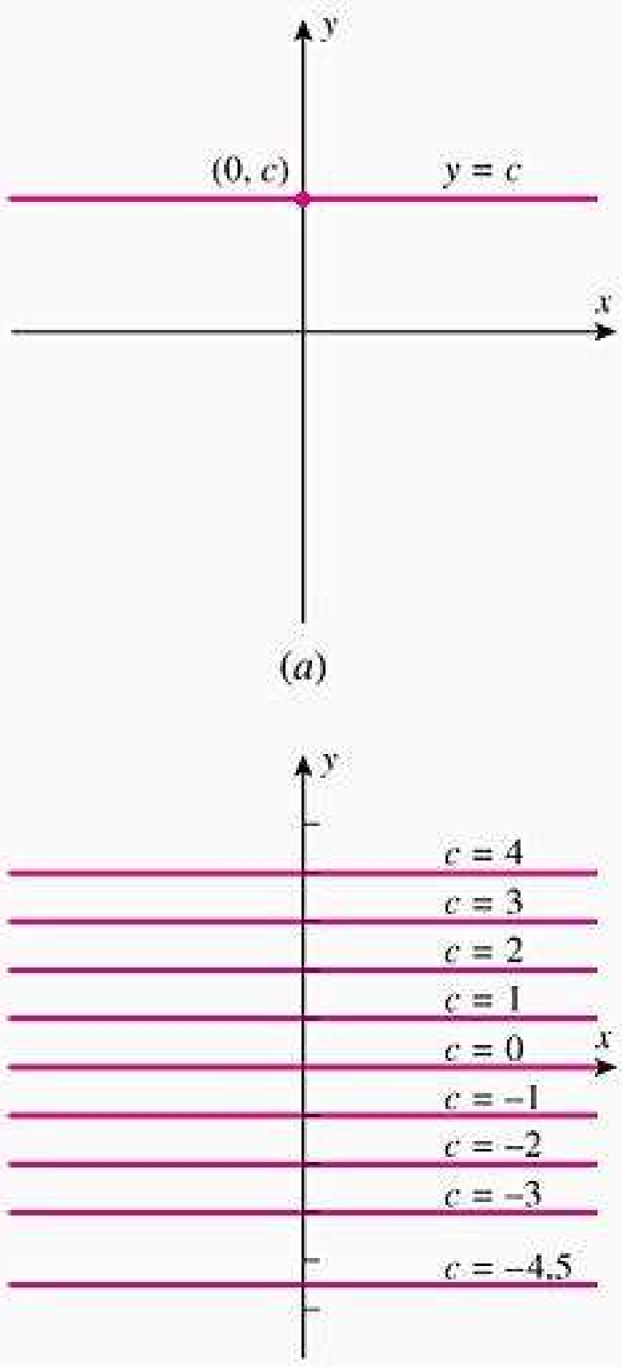


Figura 1.4.1

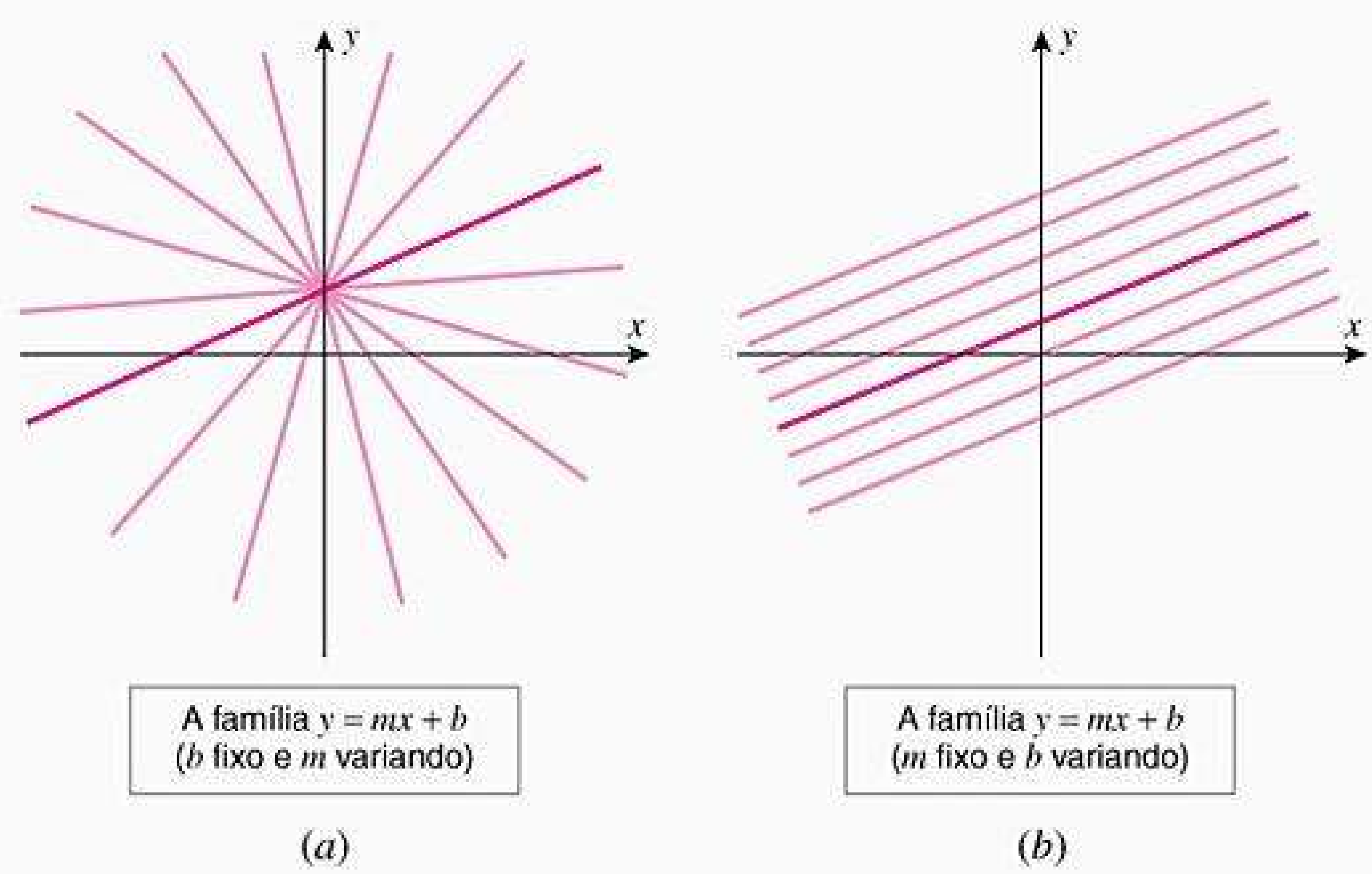


Figura 1.4.2

A FAMÍLIA $y = x^n$

Uma função da forma $f(x) = x^p$, onde p é constante, é denominada ***função potência***. Por enquanto, vamos considerar o caso em que p é um inteiro positivo, digamos $p = n$. Os gráficos das curvas $y = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 estão na Figura 1.4.3. O primeiro gráfico é o da reta $y = x$, cuja inclinação é 1 e passa pela origem, e o segundo é uma parábola que se abre para cima e tem seu vértice na origem (ver Apêndice G da internet).

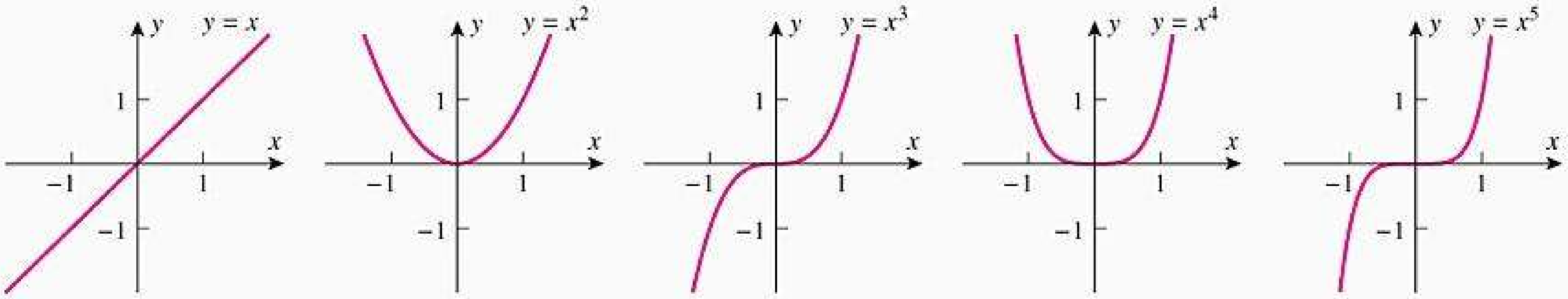


Figura 1.4.3

Para $n \geq 2$, o formato da curva $y = x^n$ depende de n ser par ou ímpar (Figura 1.4.4):

- Para valores pares de n, as funções $f(x) = x^n$ são pares, portanto seus gráficos são simétricos em relação ao eixo y. Os gráficos têm todos o formato geral da parábola $y = x^2$ (embora não sejam realmente parábolas se $n > 2$) e cada gráfico passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais achatados no intervalo $-1 < x < 1$ e mais e mais próximos da vertical nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.
- Para valores ímpares de n, as funções $f(x) = x^n$ são ímpares, portanto seus gráficos são simétricos em relação à origem. Os gráficos têm todos o formato geral da cúbica $y = x^3$ e cada gráfico passa pelos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais achatados no intervalo $-1 < x < 1$ e mais e mais próximos da vertical nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.

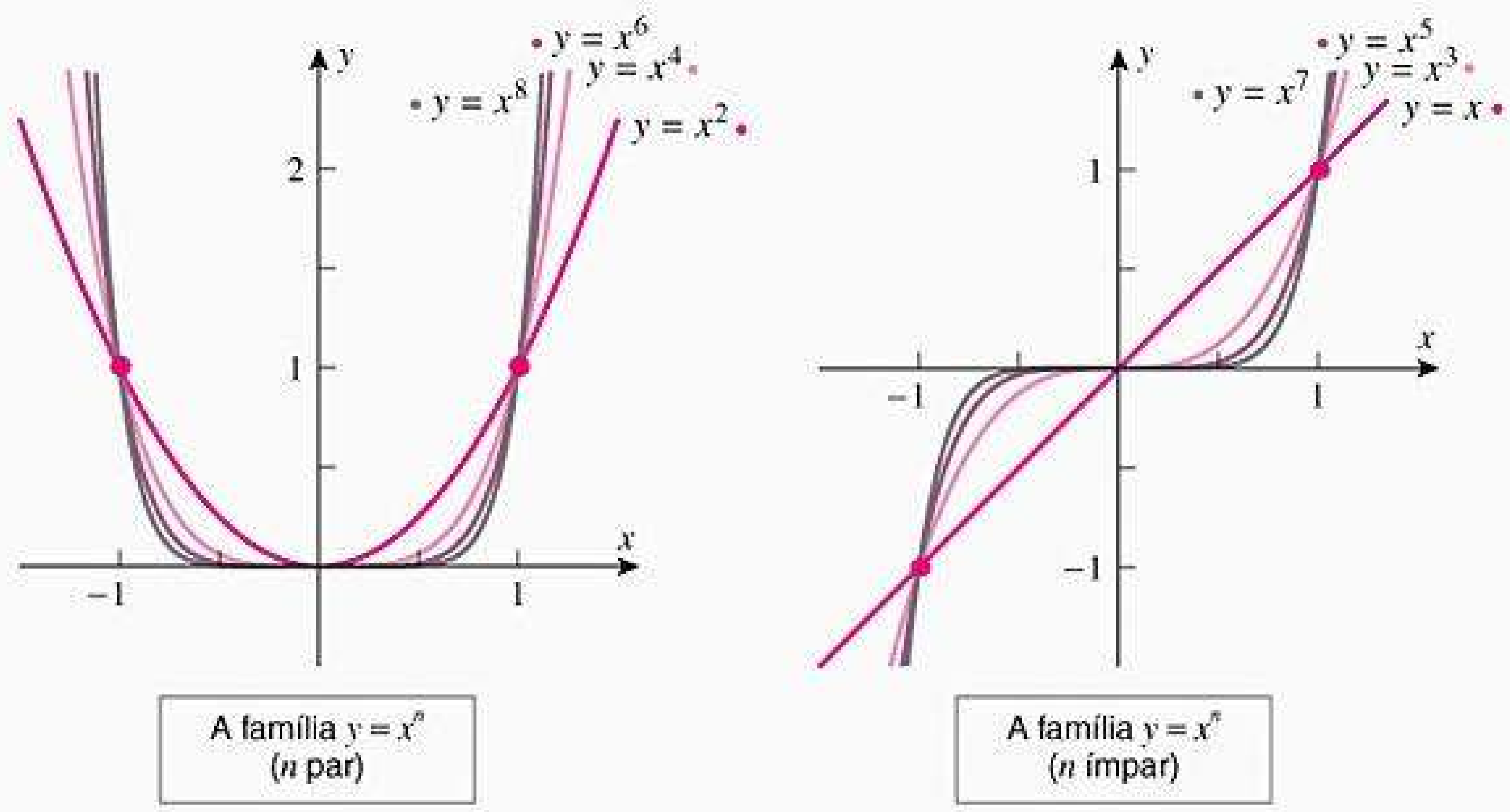


Figura 1.4.4

> Os efeitos de achatar e de aproximar a vertical podem ser entendidos considerando o que ocorre quando um número x é elevado a potências mais e mais elevadas: se $-1 < x < 1$, então o valor absoluto de x^n *decresce* com n crescente, fazendo com que os gráficos nesse intervalo sejam achatados com n crescente (tente elevar $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$ a potências cada vez mais elevadas). Por outro lado, se $x > 1$ ou se $x < -1$, então o valor absoluto de x^n *cresce* com n crescente, fazendo com que os gráficos nesses intervalos se aproximem da vertical com n crescente (tente elevar 2 ou −2 a potências cada vez mais elevadas).

A FAMÍLIA $y = x^{-n}$

Se p é um inteiro negativo, digamos $p = -n$, então as funções potência $f(x) = x^p$ tomam a forma $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$. A Figura 1.4.5 mostra os gráficos de $y = 1/x$ e $y = 1/x^2$. O gráfico de $y = 1/x$ é denominado uma ***hipérbole eqüilátera*** (por razões que serão discutidas adiante).

Como mostra a Figura 1.4.5, o formato da curva $y = 1/x^n$ depende de n ser par ou ímpar:

- Para valores pares de n, as funções $f(x) = 1/x^n$ são pares, portanto seus gráficos são simétricos em relação ao eixo y. Os gráficos têm todos o formato geral da curva $y = 1/x^2$ e cada gráfico passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$. À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais próximos da vertical nos intervalos $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$ e mais e mais achatados nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.

Considerando os valores de $1/x^n$ para um x fixado com n crescente, explique por que os gráficos ficam mais achatados ou próximos da vertical para valores crescentes de n, conforme descrito no texto.

- Para valores ímpares de n, as funções $f(x) = 1/x^n$ são ímpares, portanto seus gráficos são simétricos em relação à origem. Os gráficos têm todos o formato geral da curva $y = 1/x$ e cada gráfico passa pelos pontos (1, 1) e (−1, −1). À medida que n cresce, os gráficos ficam mais e mais próximos da vertical nos intervalos $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$ e mais e mais achatados nos intervalos $x > 1$ e $x < -1$.
- Tanto para valores pares quanto ímpares de n o gráfico $y = 1/x^n$ tem uma quebra na origem (denominada ***descontinuidade***), que ocorre por não ser permitido dividir por zero.

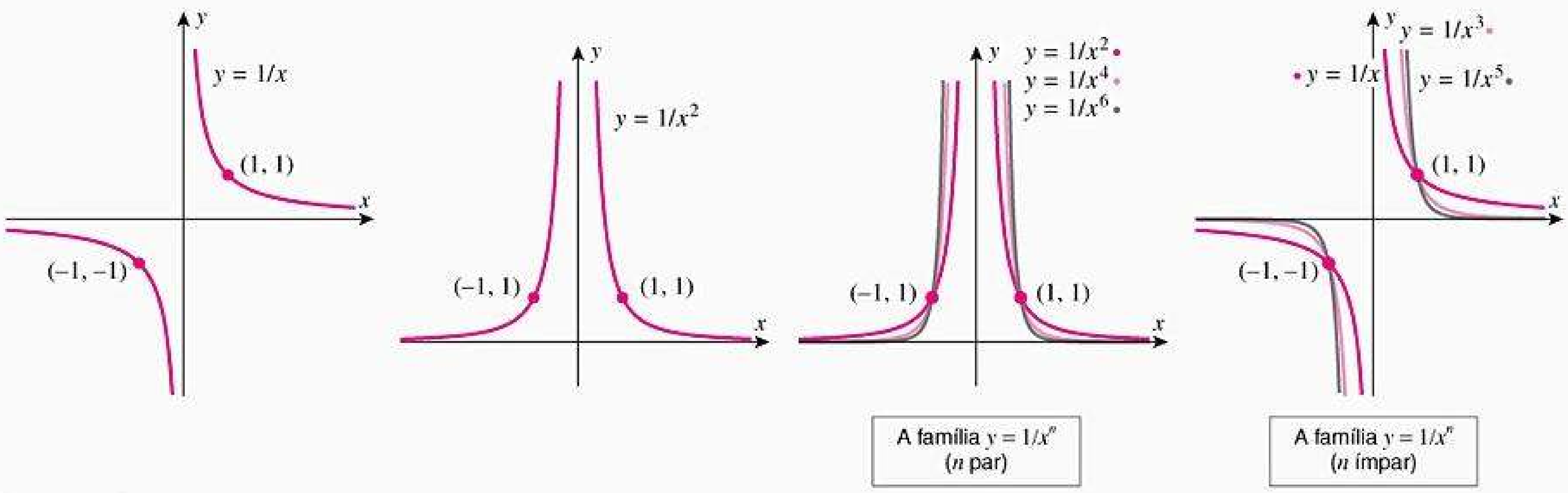


Figura 1.4.5

PROPORÇÕES INVERSAS

Lembre-se de que uma variável y diz-se ***inversamente proporcional a uma variável x*** se houver uma constante positiva k, denominada ***constante de proporcionalidade***, tal que

$$y = \frac{k}{x} \tag{1}$$

Uma vez que se supõe k positiva, o gráfico dessa equação tem a mesma forma básica que $y = 1/x$, mas é comprimido ou alongado na direção do eixo y. Também deveria ser evidente por (1) que duplicando x multiplicamos y por $\frac{1}{2}$, e triplicando x multiplicamos y por $\frac{1}{3}$, e assim por diante.

A equação (1) pode ser expressa como $xy = k$, que nos diz que o produto de grandezas inversamente proporcionais é uma constante positiva. Essa é uma forma útil de identificar proporcionalidade inversa em dados experimentais.

Tabela 1.4.1
DADOS EXPERIMENTAIS

x	0,8	1	2,5	4	6,25	10
y	6,25	5	2	1,25	0,8	0,5

► **Exemplo 1** A Tabela 1.4.1 mostra alguns dados experimentais.

(a) Explique por que os dados sugerem que y é inversamente proporcional a x.

(b) Expresse y como uma função de x.

(c) Faça um gráfico da função e dos dados juntos para $x > 0$.

Solução Para cada ponto dos dados, temos $xy = 5$, portanto y é inversamente proporcional a x e $y = 5/x$. O gráfico dessa equação com os pontos dados está na Figura 1.4.6. ◄

As proporções inversas surgem em várias leis da Física. Por exemplo, a ***lei de Boyle*** afirma que *se uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a uma temperatura constante,*

então é constante o produto da pressão P exercida pelo gás e o volume V que ele ocupa, ou seja:

$$PV = k$$

Isso implica que as variáveis P e V são inversamente proporcionais uma à outra. A Figura 1.4.7 mostra um típico gráfico de volume *versus* pressão sob as condições da lei de Boyle. Observe como, dobrando a pressão, reduzimos o volume à metade, como era de se esperar.

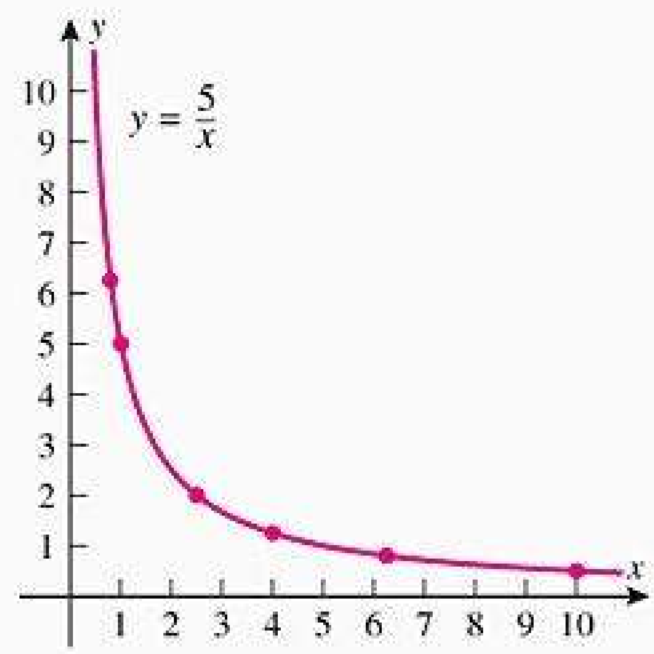


Figura 1.4.6

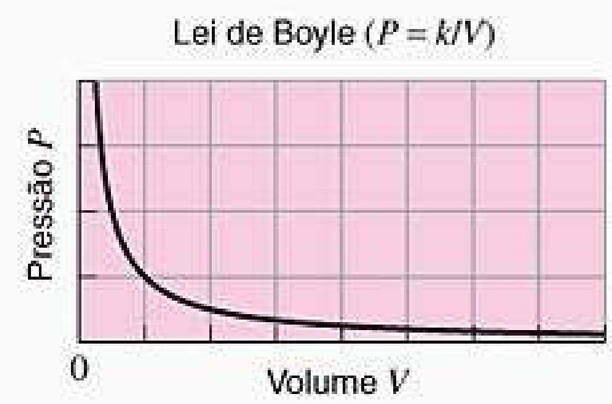


Figura 1.4.7

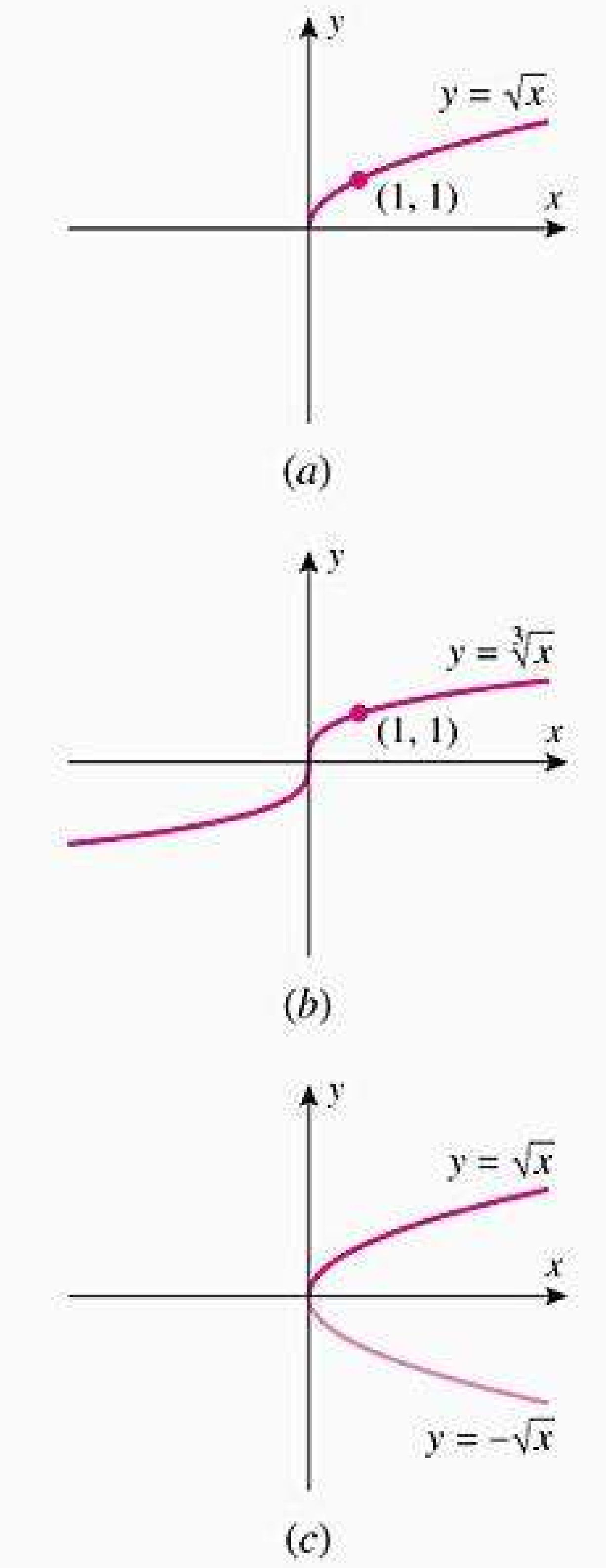


Figura 1.4.8

■ FUNÇÕES POTÊNCIAS COM EXPOENTES NÃO-INTEIROS

Se $p = 1/n$, onde n é um inteiro positivo, então as funções potências $f(x) = x^p$ têm a forma $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Em particular, se $n = 2$, então $f(x) = \sqrt{x}$; e se $n = 3$, então $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Os gráficos dessas funções estão nas partes (a) e (b) da Figura 1.4.8.

Como cada número real tem uma raiz cúbica, o domínio da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é $(-\infty, +\infty)$, de modo que o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ se estende sobre todo o eixo x. Contrastando com esse comportamento, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ se estende somente sobre o intervalo $[0, +\infty)$, pois $\sqrt{x}$ é um número imaginário para x negativo. Como ilustra a Figura 1. 4.8c, os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e de $y = -\sqrt{x}$ constituem, respectivamente, as porções superior e inferior da parábola $x = y^2$. Em geral, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ se estende sobre todo o eixo x se n é ímpar, mas somente sobre o intervalo $[0, +\infty)$ se n é par.

As funções potência podem ter outros expoentes fracionários. Alguns exemplos são:

$$f(x) = x^{2/3}, \quad f(x) = \sqrt[5]{x^3}, \quad f(x) = x^{-7/8} \qquad (2)$$

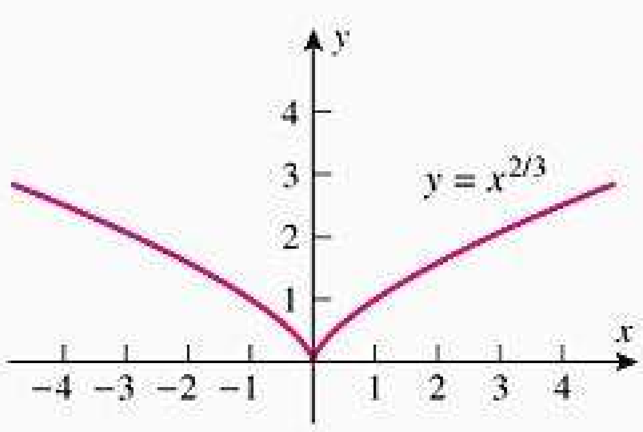


Figura 1.4.9

O gráfico de $f(x) = x^{2/3}$ mostrado na Figura 1.4.9 foi discutido na Seção 1.2. Adiante discutiremos expressões envolvendo expoentes irracionais.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Leia a nota que precede o Exercício 29 da Seção 1.2 e use um recurso gráfico para gerar gráficos de $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e de $f(x) = x^{-7/8}$ que exibam todas as suas características significativas.

■ POLINÔMIOS

Um ***polinômio em x*** é uma função expressa como uma soma finita de termos da forma cx^n, onde c é uma constante e n é um inteiro não-negativo. Alguns exemplos de polinômios são:

$$2x + 1, \quad 3x^2 + 5x - \sqrt{2}, \quad x^3, \quad 4\ (= 4x^0), \quad 5x^7 - x^4 + 3$$

A função $(x^2 - 4)^3$ é também um polinômio, pois pode ser expandida pela fórmula binomial (veja no verso da capa) e expressa, então, como uma soma de termos da forma cx^n:

$$(x^2 - 4)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(4) + 3(x^2)(4^2) - (4^3) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 \qquad (3)$$

Uma revisão mais detalhada sobre polinômios é apresentada no Apêndice B.

Um polinômio geral pode ser escrito em qualquer uma das formas a seguir, dependendo se quisermos as potências de x em ordem crescente ou decrescente:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$
$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

As constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ são denominadas ***coeficientes*** do polinômio. Quando um polinômio é representado em uma dessas formas, a mais alta potência que ocorre com um coeficiente não-nulo é denominada ***grau*** do polinômio. Os polinômios constantes não-nulos são considerados como tendo grau 0, uma vez que podemos escrever $c = cx^0$. Os polinômios de grau 1, 2, 3, 4 e 5 são descritos como ***lineares***, ***quadráticos***, ***cúbicos***, ***quárticos*** e ***quínticos***, respectivamente. Por exemplo:

$3 + 5x$	$x^2 - 3x + 1$	$2x^3 - 7$
tem grau 1 (linear)	tem grau 2 (quadrático)	tem grau 3 (cúbico)
$8x^4 - 9x^3 + 5x - 3$	$\sqrt{3} + x^3 + x^5$	$(x^2 - 4)^3$
tem grau 4 (quártico)	tem grau 5 (quíntico)	tem grau 6 [veja (3)]

O domínio natural de um polinômio em x é $(-\infty, +\infty)$, já que as únicas operações envolvidas são multiplicações e adições; a imagem depende do polinômio. Já sabemos que os gráficos dos polinômios de grau 0 e 1 são retas e que os gráficos dos polinômios de grau 2 são parábolas. A Figura 1.4.10 mostra alguns gráficos de polinômios típicos de graus superiores. Discutiremos mais adiante gráficos de polinômios em detalhes; por ora, é suficiente observar que eles são muito bem-comportados no sentido de não terem descontinuidades ou bicos agudos. Conforme ilustrado na Figura 1.4.10, os gráficos dos polinômios durante um certo tempo vão para baixo e para cima como em uma montanha-russa, para depois subir ou cair indefinidamente, à medida que percorremos a curva em qualquer um dos dois sentidos. Veremos posteriormente que o número de picos e de vales é determinado pelo grau do polinômio.

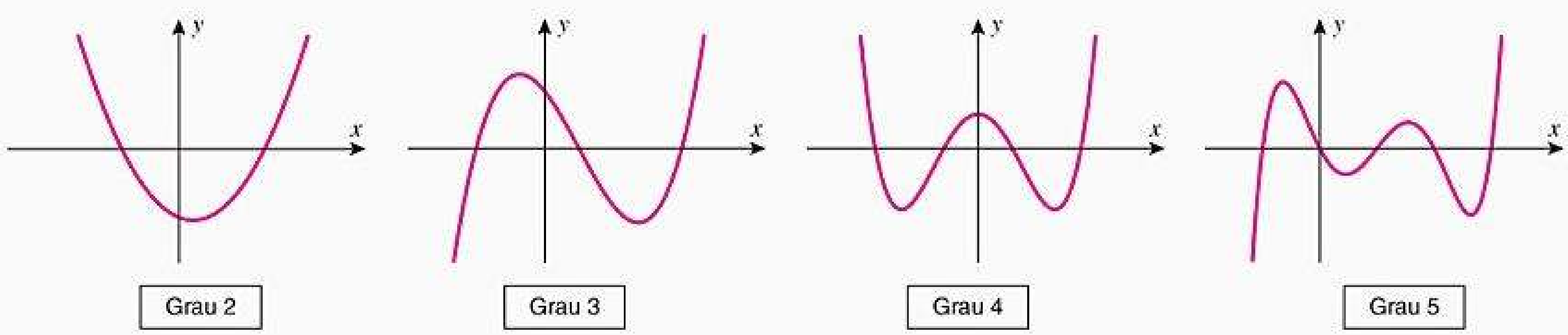


Figura 1.4.10

■ FUNÇÕES RACIONAIS

Uma função que pode ser expressa como uma razão de dois polinômios é denominada ***função racional***. Se $P(x)$ e $Q(x)$ forem polinômios, então o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Por exemplo, o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

consiste em todos os valores de x, exceto $x = 1$ e $x = -1$. Seu gráfico está na Figura 1.4.11, junto com os gráficos de duas outras funções racionais típicas.

Os gráficos das funções racionais com denominadores não-constantes diferem dos gráficos dos polinômios de algumas formas essenciais:

- Diferentemente dos polinômios, cujos gráficos são curvas contínuas (não-quebradas), os gráficos das funções racionais têm descontinuidades nos pontos onde o denominador é zero.
- Diferentemente dos polinômios, as funções racionais podem ter números nos quais não estão definidas. Perto desses pontos, muitas funções racionais têm gráficos que se aproximam bastante de uma reta vertical, denominada ***assíntota vertical***. Na Figura 1.4.11, essas assíntotas estão representadas por linhas tracejadas.
- Diferentemente dos gráficos dos polinômios não-constantes, os quais começam e terminam subindo ou descendo indefinidamente, os gráficos de muitas funções racionais podem começar ou terminar cada vez mais perto de uma reta horizontal, denominada ***assíntota horizontal***, quando se percorre a curva em qualquer um dos sentidos. As assíntotas estão representadas pelas linhas tracejadas horizontais nas duas primeiras partes da Figura 1.4.11. Na terceira parte da figura, uma assíntota horizontal é o eixo x.

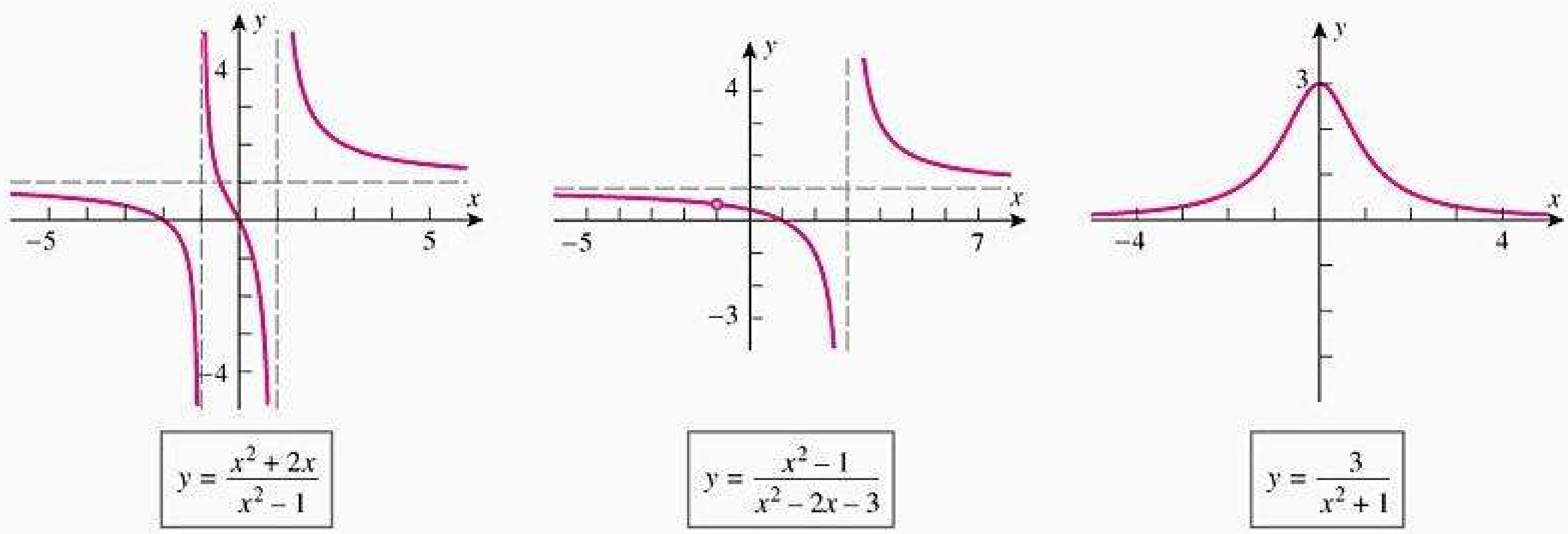


Figura 1.4.11

■ FUNÇÕES ALGÉBRICAS

As funções que podem ser construídas com polinômios, aplicando-se um número finito de operações algébricas (adição, subtração, divisão e extração de raízes), são denominadas ***funções algébricas***. Alguns exemplos são:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad f(x) = 3\sqrt[3]{x}(2 + x), \quad f(x) = x^{2/3}(x + 2)^2$$

Conforme ilustrado na Figura 1.4.12, os gráficos das funções algébricas variam amplamente; assim sendo, é difícil fazer afirmativas genéricas sobre elas. Mais adiante no livro, vamos desenvolver métodos gerais do Cálculo que permitem analisar essas funções.

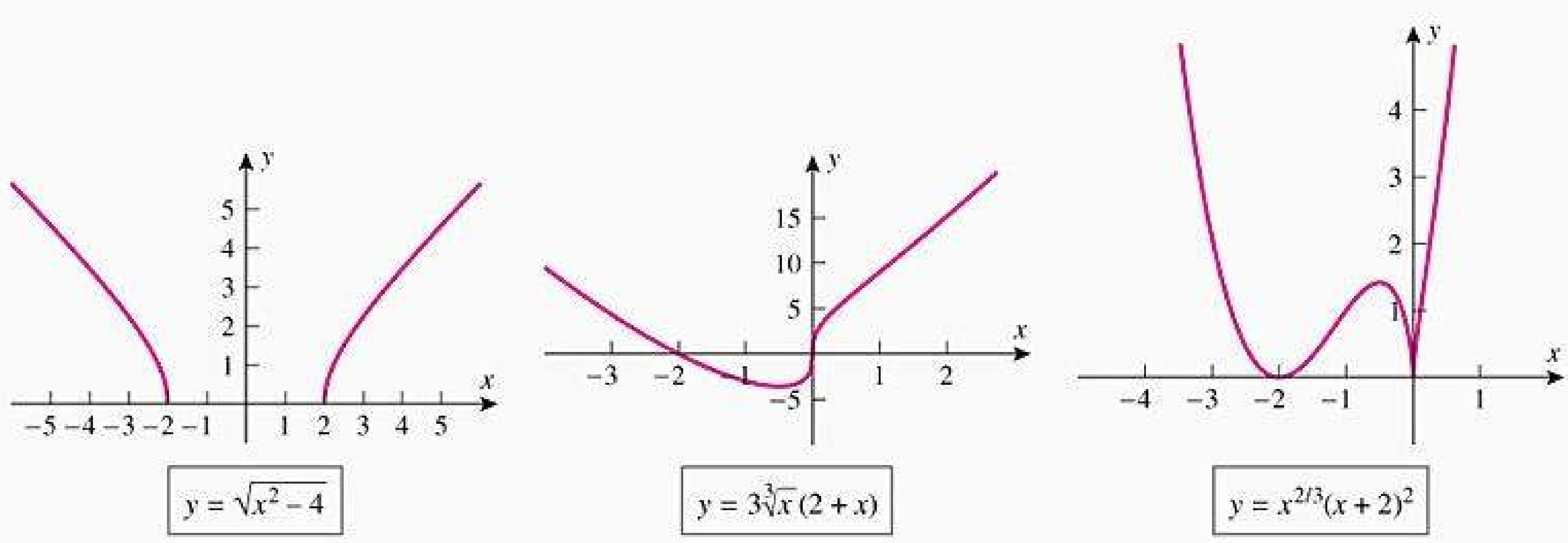


Figura 1.4.12

Neste texto, vamos supor que a variável independente de uma função trigonométrica seja dada em radianos, a menos de menção explícita em contrário. Uma revisão de funções trigonométricas pode ser encontrada no Apêndice A.

AS FAMÍLIAS $y = A$ sen Bx E $y = A \cos Bx$

Muitas aplicações importantes levam às funções trigonométricas do tipo

$$f(x) = A \operatorname{sen}(Bx - C) \quad \text{e} \quad g(x) = A\cos(Bx - C) \tag{4}$$

onde A, B e C são constantes não-nulas. Os gráficos de tais funções podem ser obtidos alongando, comprimindo, transladando e refletindo apropriadamente os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$. Para ver isso, vamos começar com o caso $C = 0$ e considerar como os gráficos das equações

$$y = A \operatorname{sen} Bx \quad \text{e} \quad y = A \cos Bx$$

se relacionam com os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$. Se A e B forem positivos, então o efeito da constante A é alongar ou comprimir verticalmente os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ por um fator A, enquanto o de B é fazer o mesmo, porém horizontalmente por um fator B. Por exemplo, o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} 4x$ pode ser obtido alongando verticalmente o de $y = \operatorname{sen} x$ por um fator 2 e comprimindo horizontalmente por um fator 4. (Lembre-se da Seção 1.3, em que vimos que o multiplicador de x *alonga* quando for menor que 1 e *comprime* quando maior que 1.) Assim, como mostra a Figura 1.4.13, o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} 4x$ varia entre -2 e 2 e repete-se a cada $2\pi/4 = \pi/2$ unidades.

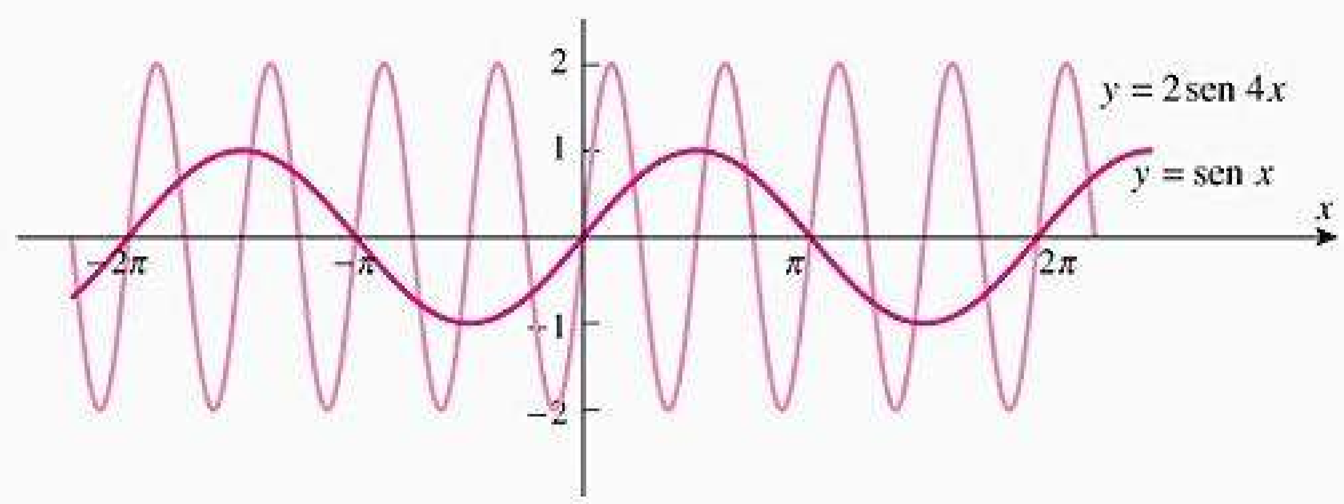


Figura 1.4.13

Em geral, se A e B forem números positivos, então os gráficos de

$$y = A \operatorname{sen} Bx \quad \text{e} \quad y = A \cos Bx$$

oscilam entre $-A$ e A e repetem-se a cada $2\pi/B$ unidades. Assim, dizemos que essas funções têm ***amplitude*** A e ***período*** $2\pi/B$. Além disso, definimos a ***freqüência*** dessas funções como sendo o recíproco do período, ou seja, $B/2\pi$. Se A e B forem negativos, além da compressão e do alongamento, teremos reflexões dos gráficos pelos dois eixos; nesse caso, a amplitude, o período e a freqüência são dados por

$$\text{amplitude} = |A|, \text{ período} = \frac{2\pi}{|B|}, \text{ freqüência} = \frac{|B|}{2\pi}$$

► Exemplo 2 Faça um esboço dos seguintes gráficos que mostre o período e a amplitude.

(a) $y = 3 \operatorname{sen} 2\pi x$ (b) $y = -3 \cos 0{,}5x$ (c) $y = 1 + \operatorname{sen} x$

Solução (a) A equação é do tipo $y = A \operatorname{sen} Bx$ com $A = 3$ e $B = 2\pi$, portanto o gráfico tem a forma de uma função seno, mas com amplitude $A = 3$ e período $2\pi/B = 2\pi/2\pi = 1$ (Figura 1.4.14*a*).

Solução (b) A equação é do tipo $y = A \cos Bx$ com $A = -3$ e $B = 0{,}5$, portanto o gráfico tem a forma de uma função cosseno que foi refletida em torno do eixo x (pois $A = -3$ é negativa), mas com amplitude $|A| = 3$ e período $2\pi/B = 2\pi/0{,}5 = 4\pi$ (Figura 1.4.14*b*).

Solução (c) O gráfico tem a forma de uma função seno que foi transladada uma unidade para cima (Figura 1.4.14*c*). ◄

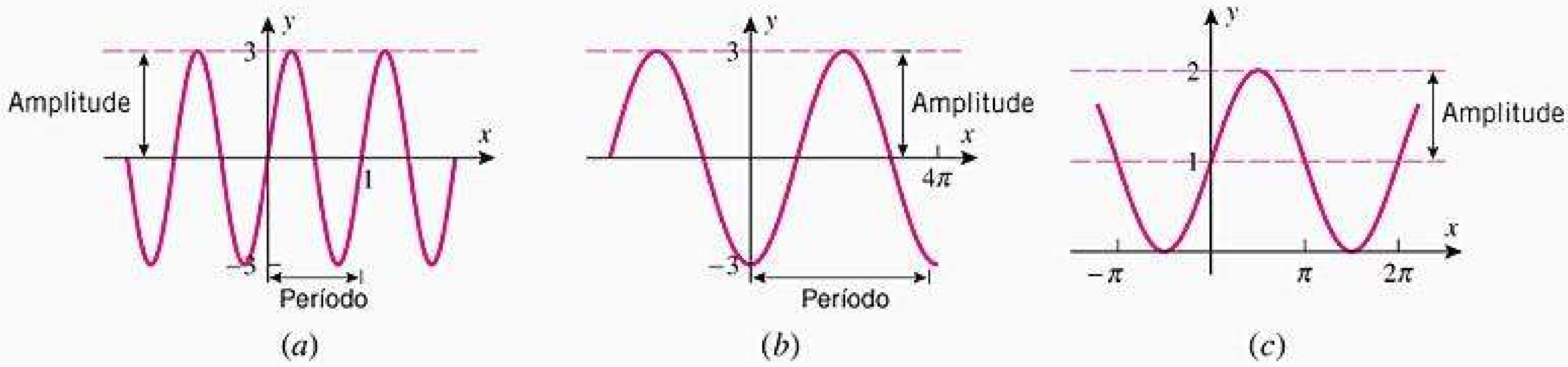


Figura 1.4.14

■ AS FAMÍLIAS $y = A \operatorname{sen}(Bx - C)$ E $y = A \cos(Bx - C)$

Para investigar os gráficos das famílias mais gerais

$$y = A \operatorname{sen}(Bx - C) \quad \text{e} \quad y = A \cos(Bx - C)$$

será útil reescrevê-las na forma

$$y = A \operatorname{sen}\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right] \quad \text{e} \quad y = A \cos\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right]$$

Assim, vemos que os gráficos dessas equações podem ser obtidos transladando os gráficos de $y = A \operatorname{sen} Bx$ e $y = A \cos Bx$ para a esquerda ou para a direita, dependendo do sinal de C/B. Por exemplo, se $C/B > 0$, então o gráfico de

$$y = A \operatorname{sen}[B(x - C/B)] = A \operatorname{sen}(Bx - C)$$

pode ser obtido transladando o de $y = A \operatorname{sen} Bx$ para a direita em C/B unidades (Figura 1.4.15). Se $C/B < 0$, o gráfico de $y = A \operatorname{sen}(Bx - C)$ é obtido por translação do gráfico de $y = A \operatorname{sen} Bx$ para a esquerda por $|C/B|$ unidades.

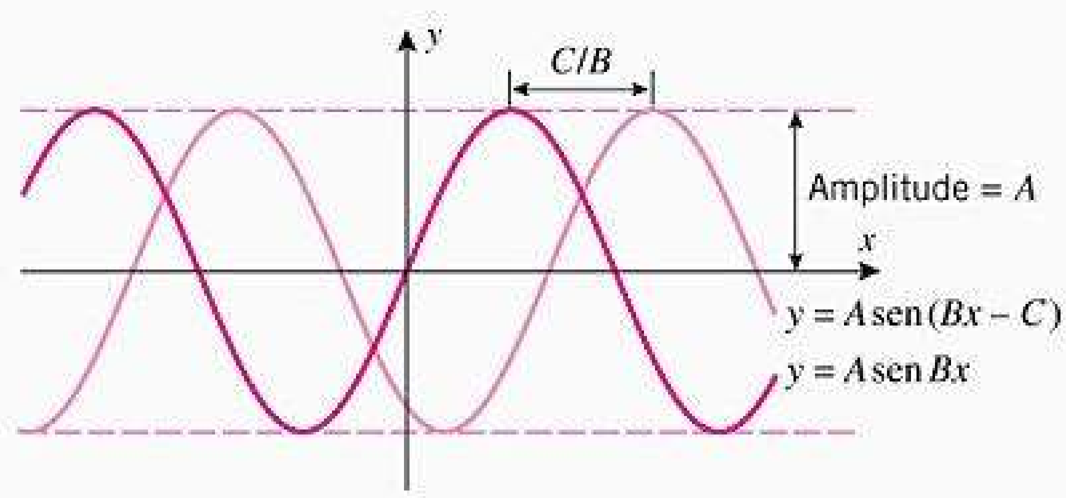


Figura 1.4.15

► **Exemplo 3** Encontre a amplitude e o período de

$$y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

e determine como deveria ser transladado o gráfico de $y = 3 \cos 2x$ para produzir o gráfico dessa equação. Confirme seu resultado fazendo o gráfico da equação em uma calculadora ou computador.

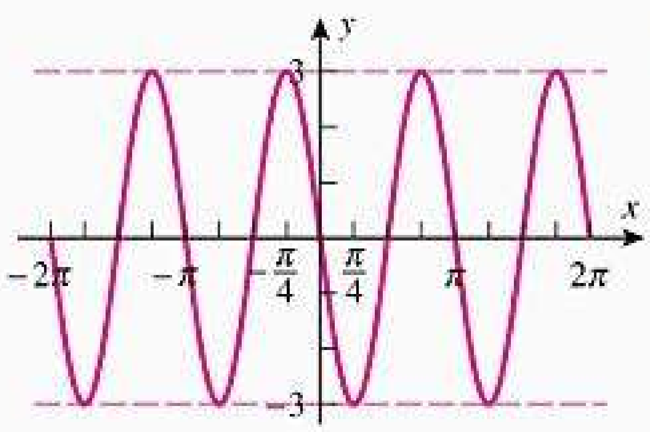


Figura 1.4.16

Solução A equação pode ser reescrita como

$$y = 3\cos\left[2x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\cos\left[2\left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

que é do tipo

$$y = A\cos\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right]$$

com $A = 3$, $B = 2$ e $C/B = -\pi/4$. Segue-se que a amplitude é $A = 3$, o período é $2\pi/B = \pi$ e o gráfico é obtido transladando o gráfico de $y = 3\cos 2x$ para a esquerda por $|C/B| = \pi/4$ unidades (Figura 1.4.16). ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.4 (*Ver página 51 para respostas.*)

1. Considere a família de funções $y = x^n$, onde n é um inteiro. Os gráficos de $y = x^n$ são simétricos em relação ao eixo y se n for __________. Esses gráficos são simétricos em relação à origem se n for __________. O eixo y é uma assíntota vertical desses gráficos se n for __________.

2. Qual é o domínio natural de um polinômio?

3. Considere a família de funções $y = x^{1/n}$, onde n é um inteiro não-nulo. Encontre o domínio natural dessas funções se n for
(a) positivo e par (b) positivo e ímpar
(c) negativo e par (d) negativo e ímpar.

4. Classifique cada equação como polinomial, racional, algébrica ou não uma função algébrica:
(a) $y = \sqrt{x} + 2$ (b) $y = \sqrt{3}x^4 - x + 1$
(c) $y = 5x^3 + \cos 4x$ (d) $y = \dfrac{x^2 + 5}{2x - 7}$
(e) $y = 3x^2 + 4x^{-2}$

5. O gráfico de $y = A$ sen Bx tem amplitude __________ e é periódico de período __________.

EXERCÍCIOS 1.4 Recurso Gráfico

1. (a) Encontre uma equação para a família de retas cujos membros têm inclinação $m = 3$.
(b) Encontre uma equação para o membro da família que passe por $(-1, 3)$.
(c) Esboce os gráficos de alguns membros da família e marque-os com suas equações. Inclua a reta da parte (b).

2. Encontre uma equação para a família de retas cujos membros são perpendiculares àqueles do Exercício 1.

3. (a) Encontre uma equação para a família de retas com corte no eixo y igual a $b = 2$.
(b) Encontre uma equação para o membro da família cujo ângulo de inclinação é de 135°.
(c) Esboce os gráficos de alguns membros da família e marque-os com suas equações. Inclua a reta da parte (b).

4. Encontre uma equação para:
(a) a família de retas passando pela origem.
(b) a família de retas com corte no eixo x igual a $a = 1$.
(c) a família de retas que passam pelo ponto $(1, -2)$.
(d) a família de retas paralelas a $2x + 4y = 1$.

5. Encontre uma equação para a família de retas tangentes ao círculo com centro na origem e raio 3.

6. Encontre uma equação para a família de retas que passam pela intersecção de $5x - 3y + 11 = 0$ e $2x - 9y + 7 = 0$.

7. O Imposto de Renda dos EUA usa um sistema de depreciação linear de 10 anos para determinar o valor de vários itens comerciais. Isso significa que se supõe que um item tenha valor zero no final do décimo ano e que, em tempos intermediários, o valor é uma função linear do tempo decorrido. Esboce algumas retas de depreciação típicas e explique o significado prático do corte com o eixo y.

8. Encontre todas as retas por $(6, -1)$ para as quais o produto dos cortes nos eixos x e y é 3.

ENFOCANDO CONCEITOS

9-10 Estabeleça uma propriedade geométrica comum a todas as retas da família e esboce cinco das retas.

9. (a) a família $y = -x + b$
(b) a família $y = mx - 1$
(c) a família $y = m(x + 4) + 2$
(d) a família $x - ky = 1$

10. a a amí ia $y = b$
b a amí ia $Ax + 2y + 1 = 0$
c a amí ia $2x + By + 1 = 0$
a amí ia $y - 1 = m x + 1$

11. Em ca a arte, c mbine a e uaçã c m um gráfic a

a $y = \sqrt[5]{x}$ b $y = 2x^5$
c $y = -1/x^8$ $y = \sqrt{x^2 - 1}$
e $y = \sqrt[4]{x - 2}$ $y = -\sqrt[5]{x^2}$

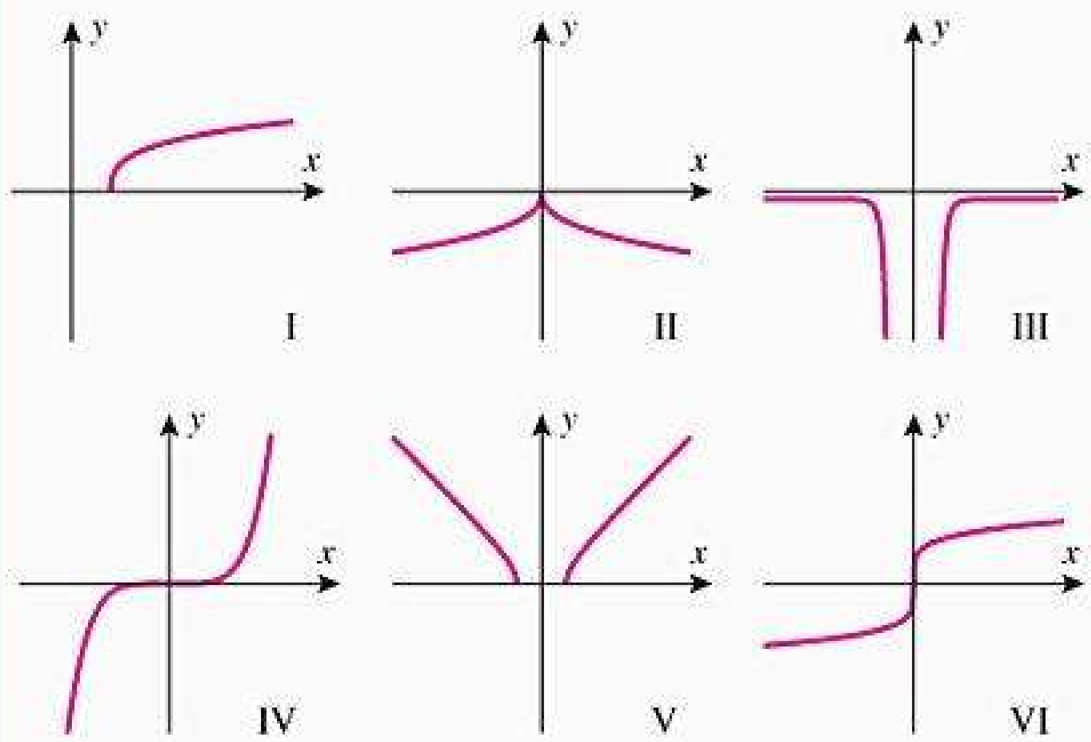


Figura Ex-11

12. tabe a abai á a re a r ima e trê unçõe : uma a rma kx^2, utra a rma kx^{-3} e a terceira a rma $kx^{3/2}$ entifi ue ca a uma e e time k em ca a ca

Tabela Ex-12

x	0,25	0,37	2,1	4,0	5,8	6,2	7,9	9,3
$f(x)$	640	197	1,08	0,156	0,0513	0,0420	0,0203	0,0124
$g(x)$	0,0312	0,0684	2,20	8,00	16,8	19,2	31,2	43,2
$h(x)$	0,250	0,450	6,09	16,0	27,9	30,9	44,4	56,7

13-14 E b ce gráfic a e uaçã ara $n = 1, 3$ e 5 em um i te ma e c r ena a e ara $n = 2, 4$ e em utr i tema e c r e na a nfira eu traba h c m um recur gráfic

13. a $y = -x^n$ b $y = 2x^{-n}$ c $y = x - 1^{1/n}$

14. a $y = 2x^n$ b $y = -x^{-n}$ c $y = -3 x + 2^{1/n}$

15. a E b ce gráfic e $y = ax^2$ ara $a = \pm1, \pm2$ e ±3 em um únic i tema e c r ena a
b E b ce gráfic e $y = x^2 + b$ ara $b = \pm1, \pm2$ e ±3 em um únic i tema e c r ena a
c E b ce a gun membr tí ic a amí ia e cur a $y = ax^2 + b$.

16. a E b ce gráfic e $y = a\sqrt{x}$ ara $a = \pm1, \pm2$ e ±3 em um únic i tema e c r ena a
b E b ce gráfic e $y = \sqrt{x} + b$ ara $b = \pm1, \pm2$ e ±3 em um únic i tema e c r ena a
c E b ce a gun membr tí ic a amí ia e cur a $y = a\sqrt{x} + b$.

17-20 E b ce gráfic a e uaçã azen a tran rmaçõe a r ria a n gráfic e uma unçã e tência bá ica nfira eu traba h c m um recur gráfic

17. a $y = 2(x + 1)^2$ b $y = -3(x - 2)^3$
c $y = \dfrac{-3}{(x + 1)^2}$ $y = \dfrac{1}{(x - 3)^5}$

18. a $y = 1 - \sqrt{x + 2}$ b $y = 1 - \sqrt[3]{x + 2}$
c $y = \dfrac{5}{(1 - x)^3}$ $y = \dfrac{2}{(4 + x)^4}$

19. a $y = \sqrt[3]{x + 1}$ b $y = 1 - \sqrt{x - 2}$
c $y = (x - 1)^5 + 2$ $y = \dfrac{x + 1}{x}$

20. a $y = 1 + \dfrac{1}{x - 2}$ b $y = \dfrac{1}{1 + 2x + x^2}$
c $y = -\dfrac{2}{x^7}$ $y = x^2 + 2x$

21. E b ce gráfic e $y = x^2 + 2x$ c m etan ua ra e a zen a tran rmaçõe a r ria a n gráfic e $y = x^2$

22. a e gráfic e $y = \sqrt{x}$ ara a u ar a e b çar gráfic e $y = \sqrt{|x|}$.
b e gráfic e $y = \sqrt[3]{x}$ ara a u ar a e b çar gráfic e $y = \sqrt[3]{|x|}$.

23. n rme i cuti ne ta eçã , a ei e e e tabe ece ue, a uma tem eratura c n tante, a re ã P e erci a r um gá e tá re aci na a a ume V e a e uaçã $PV = k$
a Enc ntre a uni a e a r ria a ara a c n tante k e a re ã ue é rça r uni a e e área r em ne t n r metr ua ra /m² e ume em metr cúbic m³
b Enc ntre k e gá e ercer uma re ã e 20 000 /m² uan ume é e 1 itr 0,001 m³
c Faça uma tabe a ue m tre a re õe ara ume e 0,25 0,5 1,0 1,5 e 2,0 itr
Faça um gráfic e P *versus* V

24. m abricante e reci iente im ermeabi iza e a e ã ara bebi a uer c n truí na rma e um ara e e í e echa c m ba e ua ra a e ca aci a e e 1/10 itr 100cm³ E time a imen õe reci iente ue re uer a me n r uanti a e e materia ara ua abricaçã

25-26 ma ariá e y e iz er ***inversamente proporcional ao quadrado de uma variável*** x e y e tá re aci na a c m x r uma e uaçã a rma $y = k/x^2$, n e k é uma c n tante nã nu a, e n mina a ***constante de proporcionalidade*** E a termin gia é u a a ne te e ercíci

25. De acordo com a ***lei de Coulomb***, a força F de atração entre duas cargas pontuais positiva e negativa é inversamente proporcional ao quadrado da distância x entre elas.

(a) Supondo que a força de atração entre as cargas é de 0,0005 newton quando a distância entre elas é de 0,3 metro, encontre a constante de proporcionalidade (com unidades adequadas).

(b) Encontre a força de atração das cargas pontuais quando elas estiverem 3 metros uma da outra.

(c) Faça um gráfico da força *versus* distância para as duas cargas.

(d) O que acontece com a força se as partículas ficarem cada vez mais perto uma da outra? O que acontece se ficarem cada vez mais longe uma da outra?

26. Segue a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton que o peso P de um objeto, em relação à Terra, é inversamente proporcional ao quadrado da distância x entre o objeto e o centro da Terra, isto é, $P = C/x^2$.

(a) Supondo que um satélite meteorológico pese 900 kgf na superfície da Terra e que ela é uma esfera com raio de 6.400 km, ache a constante C.

(b) Encontre o peso do satélite quando estiver a 1.600 km acima da superfície da Terra.

(c) Faça um gráfico do peso do satélite *versus* sua distância ao centro da Terra.

(d) Há alguma distância do centro da Terra na qual o peso do satélite seja zero? Explique seu raciocínio.

ENFOCANDO CONCEITOS

27. Combine a equação com seu gráfico na figura a seguir e determine as equações para as assíntotas verticais e horizontais.

(a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$ (b) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - x - 6}$

(c) $y = \dfrac{2x^4}{x^4 + 1}$ (d) $y = \dfrac{4}{(x + 2)^2}$

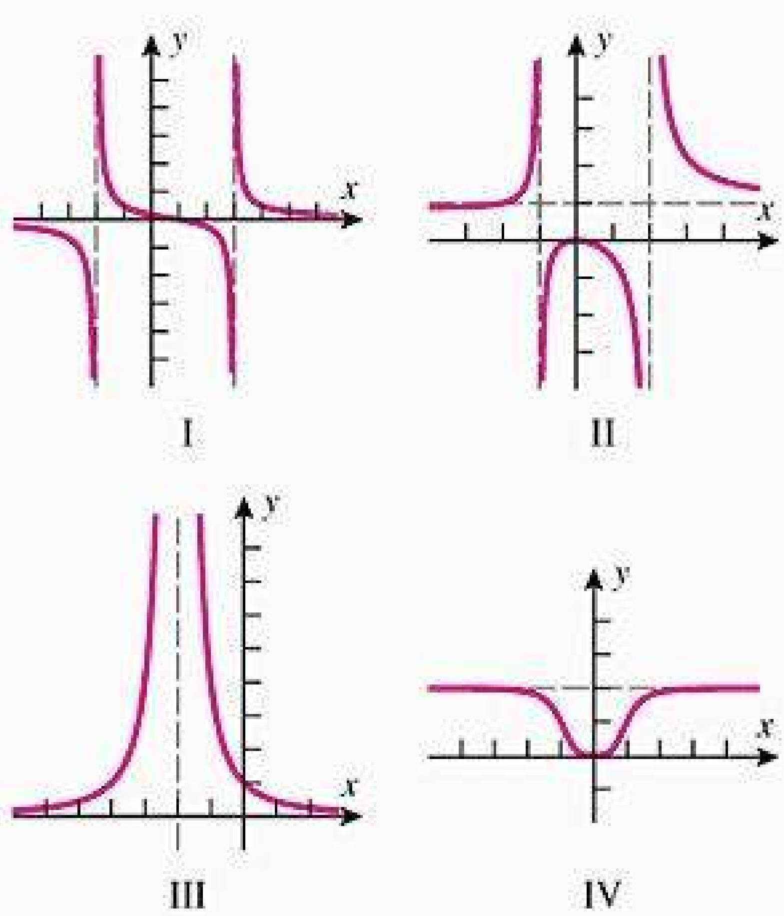


Figura Ex-27

28. Encontre uma equação da forma $y = k/(x^2 + bx + c)$ cujo gráfico se adeque razoavelmente com o da figura abaixo. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

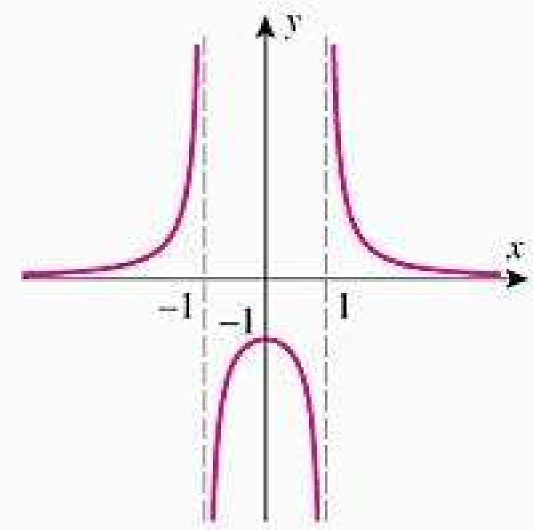


Figura Ex-28

29-30 Encontre uma equação da forma $y = D + A$ sen Bx ou $y = D + A \cos Bx$ para cada gráfico.

29.

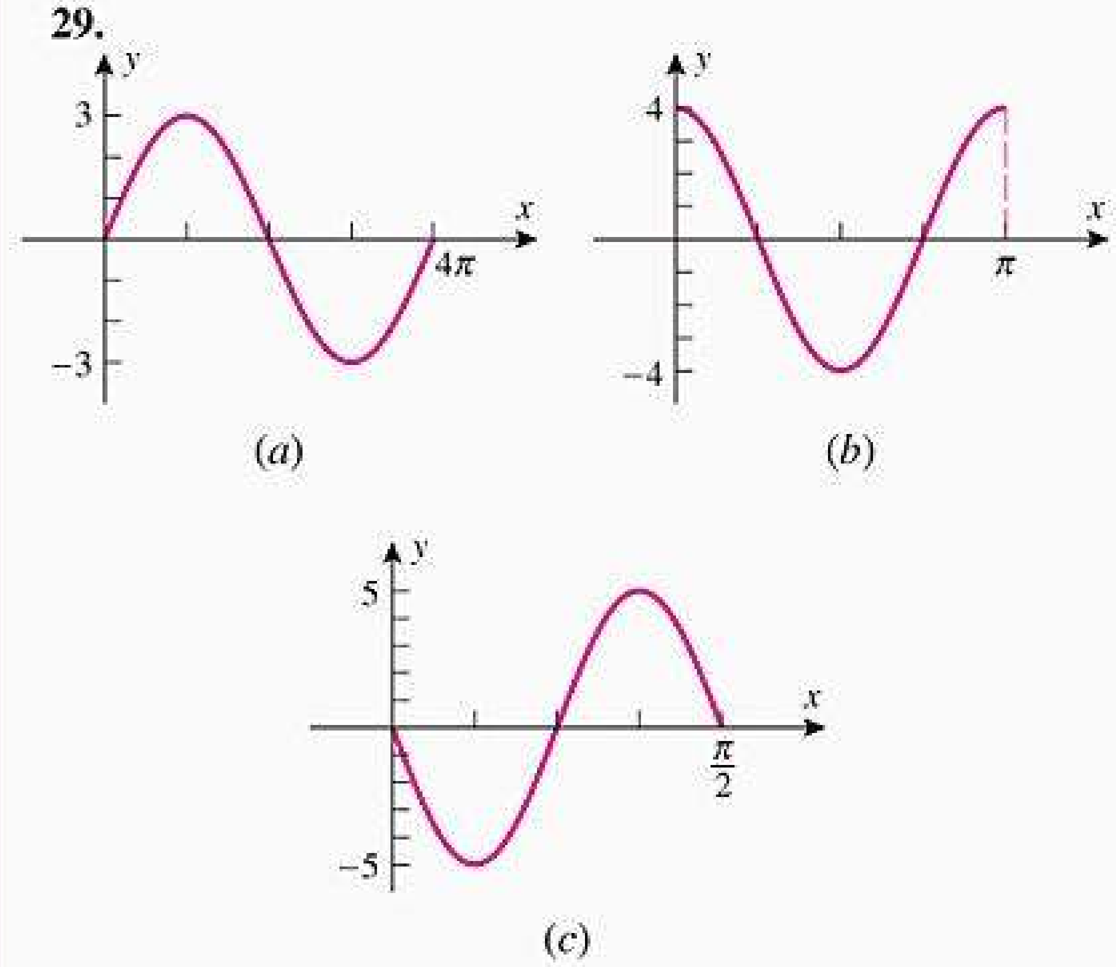


Figura Ex-29

30.

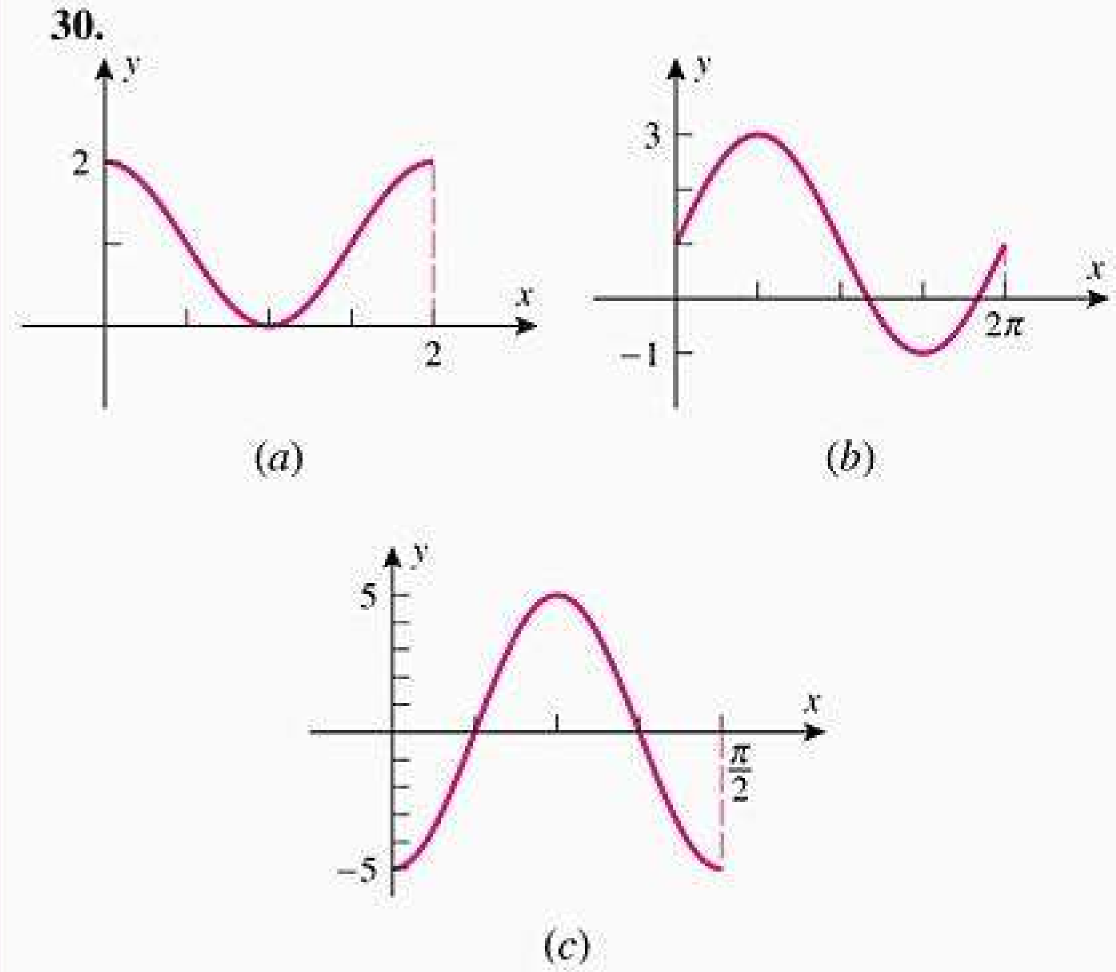


Figura Ex-30

31. Em cada parte, encontre uma equação para o gráfico que tenha a forma $y = y_0 + A \text{ sen } (Bx - C)$.

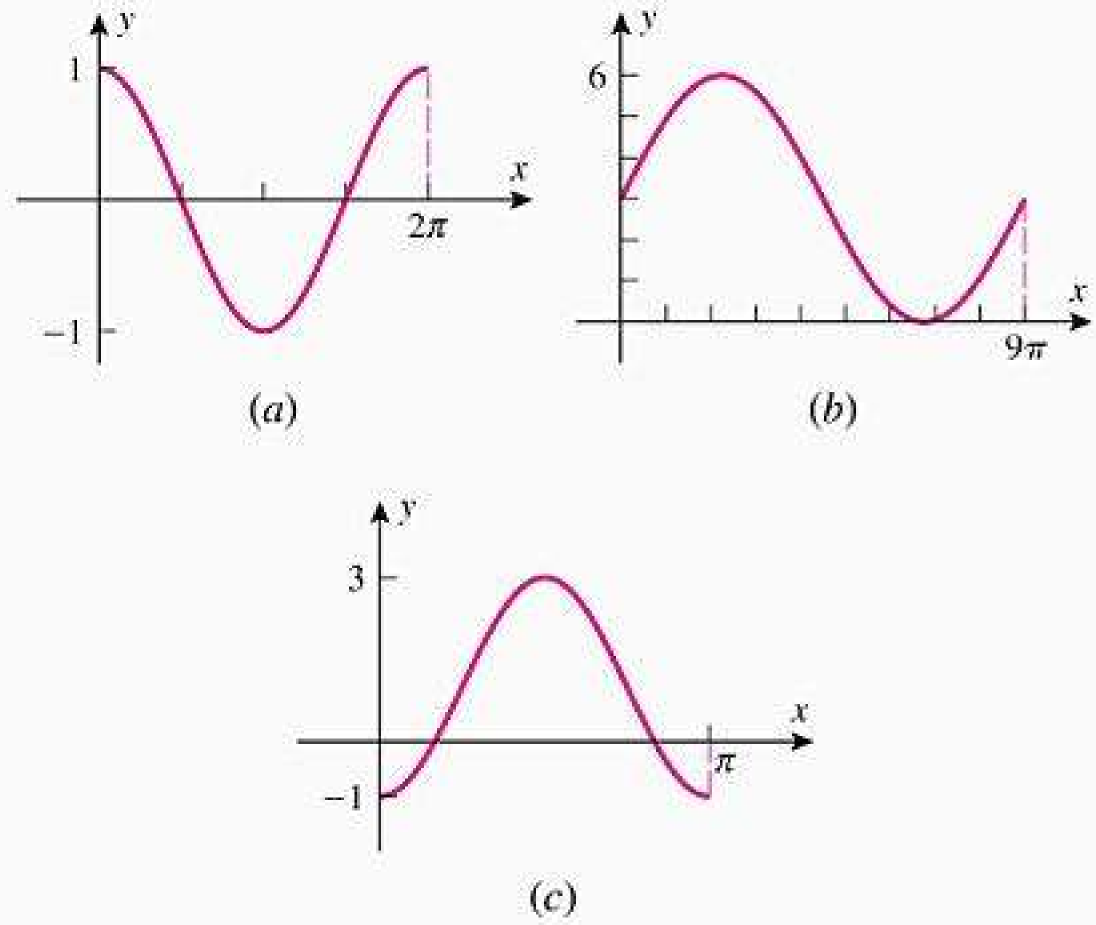


Figura Ex-31

32. Nos EUA, as tomadas elétricas padrão fornecem uma corrente elétrica senoidal com uma voltagem máxima de $V = 120\sqrt{2}$ volts (V), a uma freqüência de 60 hertz (Hz). Escreva uma equação que expresse V como uma função do tempo t, supondo que $V = 0$ se $t = 0$. [*Nota*: 1 Hz = 1 ciclo por segundo.]

33-34 Encontre a amplitude e o período e esboce pelo menos dois períodos do gráfico à mão. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

33. (a) $y = 3 \text{ sen } 4x$ (b) $y = -2 \cos \pi x$
(c) $y = 2 + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

34. (a) $y = -1 - 4 \text{ sen } 2x$ (b) $y = \frac{1}{2}\cos(3x - \pi)$
(c) $y = -4 \text{ sen}\left(\dfrac{x}{3} + 2\pi\right)$

35. Equações da forma

$$x = A_1 \text{ sen } \omega t + A_2 \cos \omega t$$

surgem no estudo de vibrações e de outros movimentos periódicos.

(a) Use a identidade trigonométrica para $\text{sen}(\alpha + \beta)$ para mostrar que a equação pode ser escrita na forma

$$x = A \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

(b) Estabeleça as fórmulas que expressam A e θ em termos das constantes A_1, A_2 e ω.

(c) Expresse a equação

$$x = 5\sqrt{3} \text{ sen } 2\pi t + \tfrac{5}{2} \cos 2\pi t$$

na forma $x = A \text{ sen}(\omega t + \theta)$, e use um recurso gráfico para confirmar que ambas as equações têm o mesmo gráfico.

36. Determine o número de soluções de $x = 2 \text{ sen } x$, e use um recurso computacional ou gráfico para obter um valor aproximado dessas soluções.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.4

1. par; ímpar; negativo **2.** $(-\infty, +\infty)$ **3.** (a) $[0, +\infty)$ (b) $(-\infty, +\infty)$ (c) $(0, +\infty)$ (d) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ **4.** (a) algébrica (b) polinomial (c) não-algébrica (d) racional (e) racional **5.** $|A|$; $2\pi/|B|$

1.5 FUNÇÕES INVERSAS; FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Na linguagem do dia-a-dia, o termo "inverter" tem a conotação de virar em sentido contrário. Por exemplo, em Meteorologia, uma inversão térmica é uma troca das propriedades de temperaturas usuais das camadas atmosféricas e, em Música, uma inversão melódica troca um intervalo ascendente pelo correspondente intervalo descendente. Em Matemática, o termo ***inverter*** *é utilizado para descrever uma função que troca de volta o que uma outra função faz, ou seja, cada uma desfaz o efeito da outra. Nesta seção discutiremos essa idéia matemática fundamental. Em particular, introduziremos as funções trigonométricas inversas para atacar o problema de recuperar um ângulo que possa ter produzido um certo valor de uma função trigonométrica.*

■ FUNÇÕES INVERSAS

A idéia de resolver uma equação $y = f(x)$ para x como uma função de y, digamos $x = g(y)$, é uma das idéias mais importantes na Matemática. Às vezes, resolver essa equação é um processo simples; por exemplo, usando álgebra básica, a equação

$$y = x^3 + 1 \quad \boxed{y = f(x)}$$

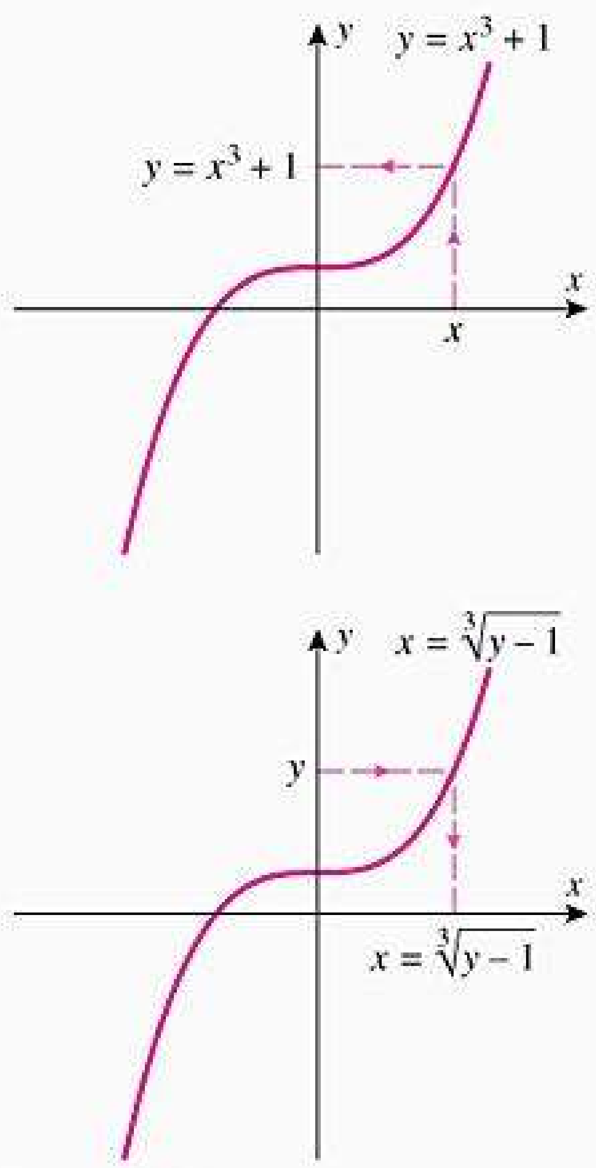


Figura 1.5.1

pode ser resolvida para x como uma função de y:

$$x = \sqrt[3]{y-1} \quad \boxed{x = g(y)}$$

A primeira equação é melhor para calcular y se x for conhecido, e a segunda é melhor para calcular x se y for conhecido (Figura 1. 5.1).

Nosso interesse fundamental nesta seção é identificar relações que possam existir entre as funções f e g, quando uma função $y = f(x)$ for expressa como $x = g(y)$, ou ao contrário. Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = x^3 + 1$ e $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$. Quando essas funções forem compostas em qualquer ordem, uma cancela o efeito da outra, ou seja:

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)-1} = \sqrt[3]{(x^3+1)-1} = x$$
$$f(g(y)) = [g(y)]^3 + 1 = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y \tag{1}$$

Os pares de funções com essas duas propriedades são tão importantes que há uma terminologia específica para elas.

1.5.1 DEFINIÇÃO Se as funções f e g satisfazem as duas condições

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ no domínio de } f$$
$$f(g(y)) = y \text{ para todo } y \text{ no domínio de } g$$

dizemos que f e g são ***funções inversas*** uma da outra, ou então, que ***f é uma inversa de g*** e ***g é uma inversa de f***.

ADVERTÊNCIA

Se f é uma função, então o -1 no símbolo f^{-1} sempre denota a inversa e *nunca* um expoente, ou seja:

$$f^{-1}(x) \text{ nunca significa } \frac{1}{f(x)}$$

Pode ser mostrado (Exercício 34) que se uma função f tem uma inversa, então essa inversa é única. Assim, se uma função f tem uma inversa, temos o direito de falar "da" inversa de f, e passamos a denotá-la pelo símbolo f^{-1}.

► Exemplo 1 As contas feitas em (1) mostram que $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ é a inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Assim, podemos escrever g em notação de inversa como

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$$

e podemos escrever as equações na Definição 1.5.1 como

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ no domínio de } f$$
$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ para cada } y \text{ no domínio de } f^{-1} \tag{2}$$

Referimo-nos a essas equações como as ***equações do cancelamento*** de f e f^{-1}. ◄

■ MUDANÇA DA VARIÁVEL INDEPENDENTE

As fórmulas em (2) usam x como a variável independente para f e y como a variável independente para f^{-1}. Embora muitas vezes seja conveniente utilizar variáveis diferentes para f e f^{-1}, freqüentemente é desejável utilizar a mesma variável independente para ambas. Por exemplo, se quisermos esboçar os gráficos de f e de f^{-1} juntos no mesmo sistema de coordenadas xy, utilizaremos a mesma variável independente x e a mesma variável dependente y para ambas as funções. Assim, para esboçar o gráfico das funções $f(x) = x^3 + 1$ e $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$ do Exemplo 1 no mesmo sistema de coordenadas xy, trocamos a variável independente y para x, usamos y como a variável dependente de ambas as funções, e traçamos o gráfico das equações

$$y = x^3 + 1 \text{ e } y = \sqrt[3]{x-1}$$

Adiante nesta seção voltaremos a tratar de funções inversas, mas para referência futura apresentamos a seguinte reformulação das equações do cancelamento de (2) usando x como a variável independente de ambas f e f^{-1}:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ no domínio de } f$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para cada } y \text{ no domínio de } f^{-1} \tag{3}$$

▶ Exemplo 2 Confirme cada um dos seguintes itens:

(a) A inversa de $f(x) = 2x$ é $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

(b) A inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.

Solução (a)

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x) = \tfrac{1}{2}(2x) = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\tfrac{1}{2}x\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}x\right) = x$$

Solução (b)

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x \blacktriangleleft$$

O resultado no Exemplo 2 deve fazer sentido intuitivamente para você, uma vez que as operações de multiplicar por 2 e por $\frac{1}{2}$ em qualquer ordem cancelam uma o efeito da outra, da mesma forma que as operações de elevar ao cubo e extrair a raiz cúbica.

▶ Exemplo 3 Sabendo que a função f tem uma inversa e que $f(3) = 5$, encontre $f^{-1}(5)$.

Solução Aplicando f^{-1} a ambos os lados da equação $f(3) = 5$, obtemos

$$f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5)$$

e agora aplicamos a primeira das equações de (3) para concluir que $f^{-1}(5) = 3$. ◀

Em geral, se f tem uma inversa e $f(a) = b$, então o procedimento no Exemplo 3 mostra que $a = f^{-1}(b)$; ou seja, f^{-1} leva cada saída de f de volta para a entrada correspondente (Figura 1.5.2).

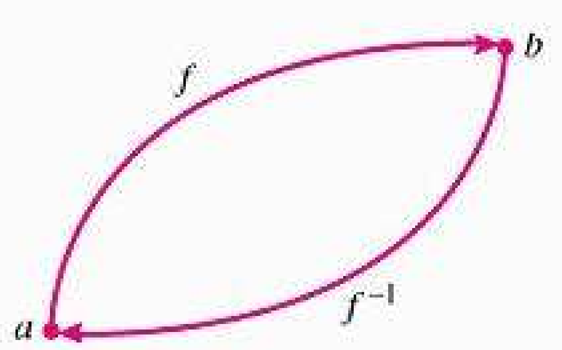


Figura 1.5.2 Se f leva a para b, então f^{-1} leva b de volta para a.

■ DOMÍNIO E IMAGEM DE FUNÇÕES INVERSAS

As equações em (3) implicam a seguinte relação entre os domínios e as imagens de f e de f^{-1}:

$$\text{domínio de } f^{-1} = \text{imagem de } f$$
$$\text{imagem de } f^{-1} = \text{domínio de } f \tag{4}$$

Uma maneira de mostrar que esses dois conjuntos são iguais é mostrar que cada um está contido no outro. Assim, podemos estabelecer a primeira igualdade em (4) mostrando que o domínio de f^{-1} é um subconjunto da imagem de f e que a imagem de f é um subconjunto do domínio de f^{-1}. Isso pode ser feito da seguinte maneira: a primeira equação em (3) implica que f^{-1} está definido em $f(x)$ para todos os valores de x do domínio de f, e isso implica que a imagem de f é um subconjunto do domínio de f^{-1}. Reciprocamente, se x está no domínio de f^{-1}, então a segunda equação em (3) implica que x está na imagem de f, por ser a imagem de $f^{-1}(x)$. Assim, o domínio de f^{-1} é um subconjunto da imagem de f. Deixamos a prova da segunda equação de (4) como um exercício.

■ UM MÉTODO PARA ENCONTRAR FUNÇÕES INVERSAS

No começo desta seção observamos que a resolução de $y = f(x) = x^3 + 1$ em x como uma função de y produz $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$. O teorema seguinte mostra que isso não aconteceu por acaso.

1.5.2 TEOREMA *Se uma equação $y = f(x)$ pode ser resolvida para x como uma função de y, digamos $x = g(y)$, então f tem uma inversa, a qual é $g(y) = f^{-1}(y)$.*

DEMONSTRAÇÃO Substituindo $y = f(x)$ em $x = g(y)$ dá $x = g(f(x))$, que confirma a primeira equação da Definição 1.5.1, e substituindo $x = g(y)$ em $y = f(x)$ dá $y = f(g(y))$, que confirma a segunda equação da Definição 1.5.1. ■

O Teorema 1.5.2 nos dá o seguinte procedimento para encontrar a inversa de uma função.

Um Procedimento para Encontrar a Inversa de uma Função f

Passo 1. Escreva a equação $y = f(x)$.

Passo 2. Se possível, resolva essa equação em x como função de y.

Passo 3. A equação resultante será $x = f^{-1}(y)$, que fornece uma fórmula para f^{-1} com variável independente y.

Passo 4. Se y for aceitável como variável independente da função inversa, estamos feitos; se quisermos ter x como variável independente, precisamos trocar x com y na equação $x = f^{-1}(y)$ para obter $y = f^{-1}(x)$.

Uma maneira alternativa de obter uma fórmula para $f^{-1}(x)$ com x como variável independente é inverter os papéis de x e de y logo no início e então resolver a equação $x = f(y)$ para y como função de x.

► **Exemplo 4** Encontre uma fórmula para a inversa de $f(x) = \sqrt{3x-2}$ com variável independente x e dê o domínio de f^{-1}.

Solução Seguindo o procedimento dado acima, começamos escrevendo

$$y = \sqrt{3x-2}$$

Em seguida, resolvemos essa equação para x como função de y:

$$y^2 = 3x - 2$$
$$x = \tfrac{1}{3}(y^2 + 2)$$

Como queremos que a variável independente seja x, trocamos x e y na última equação para obter a fórmula

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{3}(x^2 + 2) \qquad (5)$$

Sabemos de (4) que o domínio de f^{-1} é a imagem de f. Em geral, isso não precisa ser igual ao domínio natural da fórmula para f^{-1}. De fato, nesse exemplo, o domínio natural de (5) é dado por $(-\infty, +\infty)$, enquanto a imagem de $f(x) = \sqrt{3x-2}$ é $[0, +\infty)$. Assim, se quisermos especificar o domínio de f^{-1}, devemos dá-lo explicitamente reescrevendo (5) como

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{3}(x^2 + 2), \quad x \geq 0$$ ◄

■ EXISTÊNCIA DE FUNÇÃO INVERSA

O procedimento que acabamos de dar para encontrar a inversa de uma função foi baseado na resolução da equação $y = f(x)$ para x como função de y. Esse procedimento pode falhar por duas razões: a função f pode não ter uma inversa, ou tem uma inversa mas a equação $y = f(x)$ não pode ser resolvida explicitamente para x como função de y. Assim, é importante estabelecer condições que garantam a existência de uma inversa, mesmo se não for possível encontrá-la explicitamente.

Se uma função f tem uma inversa, então ela deve associar saídas distintas a entradas distintas. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ não pode ter uma inversa porque associa o mesmo valor a $x = 2$ e a $x = -2$, a saber, $f(2) = f(-2) = 4$. Assim, se $f(x) = x^2$ tivesse uma inversa, então a equação $f(2) = 4$ implicaria que $f^{-1}(4) = 2$ e a equação $f(-2) = 4$ implicaria que $f^{-1}(4) = -2$. Mas isso é impossível, porque $f^{-1}(4)$ não pode ter dois valores diferentes. Uma outra maneira de ver que $f(x) = x^2$ não tem inversa é tentar encontrar uma inversa resolvendo a equação $y = x^2$ para x como função de y. Imediatamente nos deparamos com a equação $x = \pm\sqrt{y}$, que não expressa x como função bem definida de y.

Uma função que associa saídas distintas a entradas distintas é denominada ***injetora*** ou, então, ***invertível***. Pelo que acabamos de discutir, se uma função tem uma inversa, então ela deve ser injetora. A recíproca também é verdadeira, e estabelecemos o seguinte teorema:

1.5.3 TEOREMA *Uma função tem uma inversa se, e somente se, f é injetora.*

Algebricamente, isso significa que uma função é injetora se, e somente se, $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$; geometricamente, uma função é injetora se, e somente se, o gráfico de $y = f(x)$ é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal (Figura 1.5.3). Essa última afirmação, junto com o Teorema 1.5.3, produz o seguinte teste geométrico para determinar se uma função tem uma inversa.

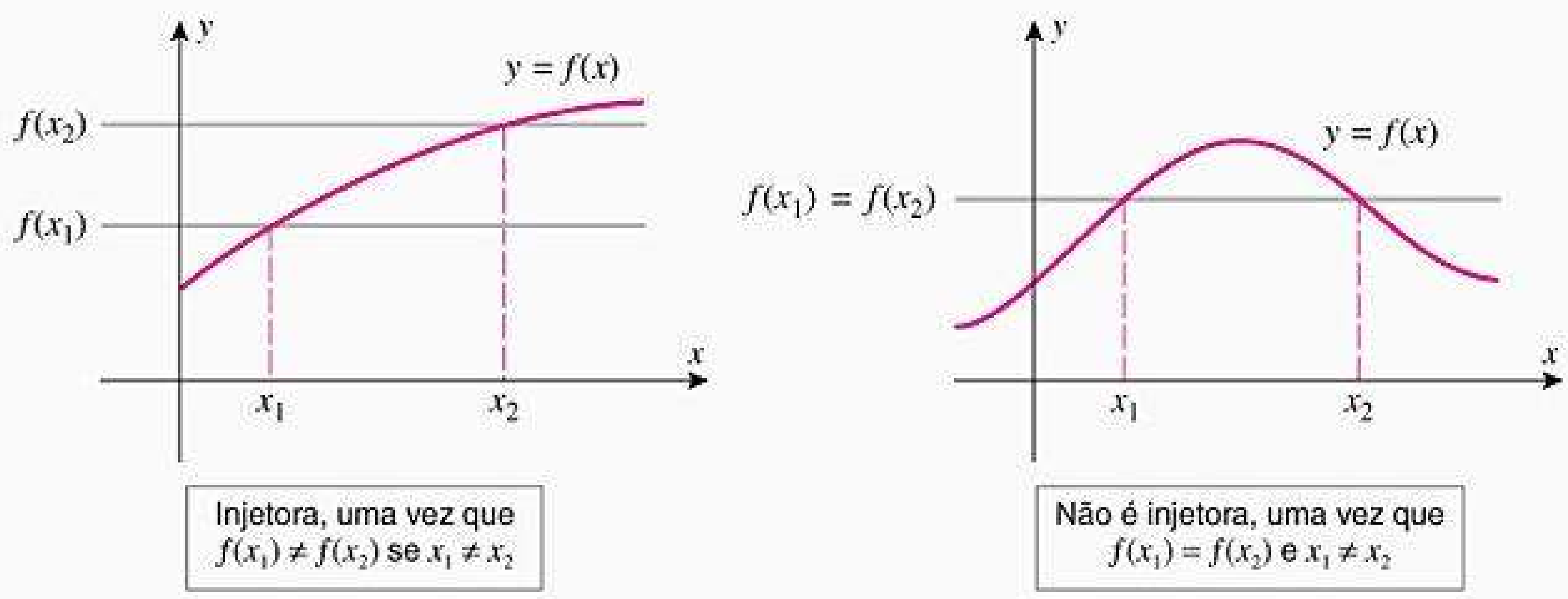


Figura 1.5.3

1.5.4 TEOREMA (*O Teste da Reta Horizontal*) *Uma função tem uma inversa se, e somente se, seu gráfico é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal.*

► Exemplo 5 Use o teste da reta horizontal para mostrar que $f(x) = x^2$ não tem uma inversa, mas que $f(x) = x^3$ tem.

Solução A Figura 1.5.4 mostra uma reta horizontal que corta o gráfico de $y = x^2$ mais de uma vez, de modo que $f(x) = x^2$ não é invertível. A Figura 1.5.5 mostra que o gráfico de $y = x^3$ é cortado, no máximo, uma única vez por qualquer reta horizontal, de modo que $f(x) = x^3$ é invertível. [Lembre do Exemplo 2 que a inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.] ◄

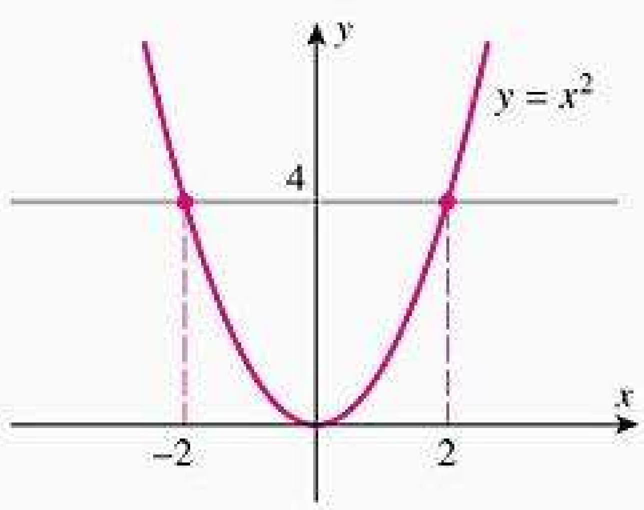


Figura 1.5.4

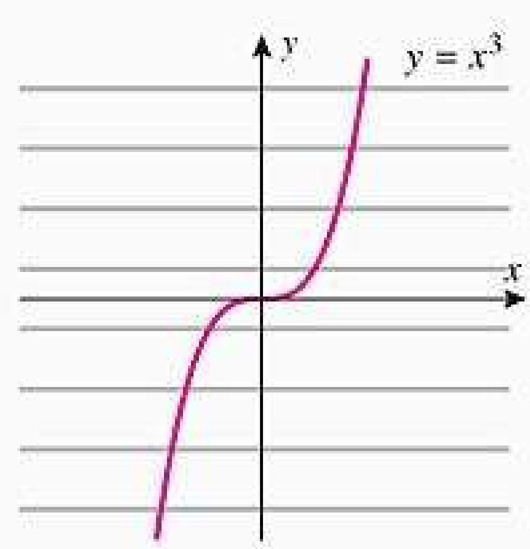


Figura 1.5.5

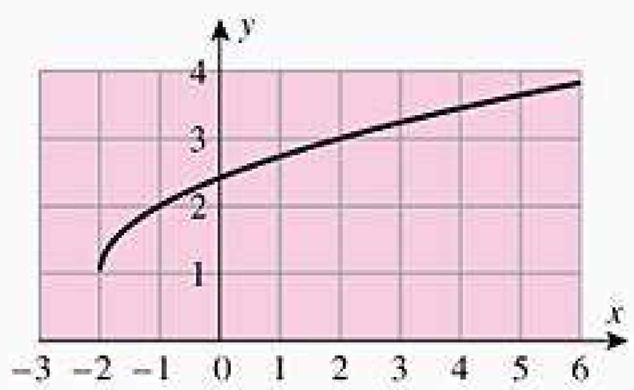


Figura 1.5.6

A função $f(x) = x^3$ na Figura 1.5.5 é um exemplo de uma função crescente. Dê um exemplo de uma função decrescente e calcule sua inversa.

▶ **Exemplo 6** Explique por que a função cujo gráfico está na Figura1.5.6 tem uma inversa e obtenha $f^{-1}(3)$.

Solução A função f tem uma inversa uma vez que seu gráfico passa pelo teste da reta horizontal. Para calcular $f^{-1}(3)$, consideramos $f^{-1}(3)$ como aquele número x para o qual $f(x) = 3$. A partir do gráfico, vemos que $f(2) = 3$; logo, $f^{-1}(3) = 2$. ◀

■ FUNÇÕES CRESCENTES OU DECRESCENTES SÃO INVERTÍVEIS

Uma função cujo gráfico está sempre crescendo quando percorrido da esquerda para a direita é denominada ***função crescente*** e uma função cujo gráfico está sempre decrescendo quando percorrido da esquerda para a direita é denominada ***função decrescente***. Se x_1 e x_2 são pontos do domínio de f, então f é crescente se

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

e f é decrescente se

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

(Figura 1.5.7). É geometricamente evidente que funções crescentes e decrescentes passam no teste da reta horizontal e, portanto, são invertíveis.

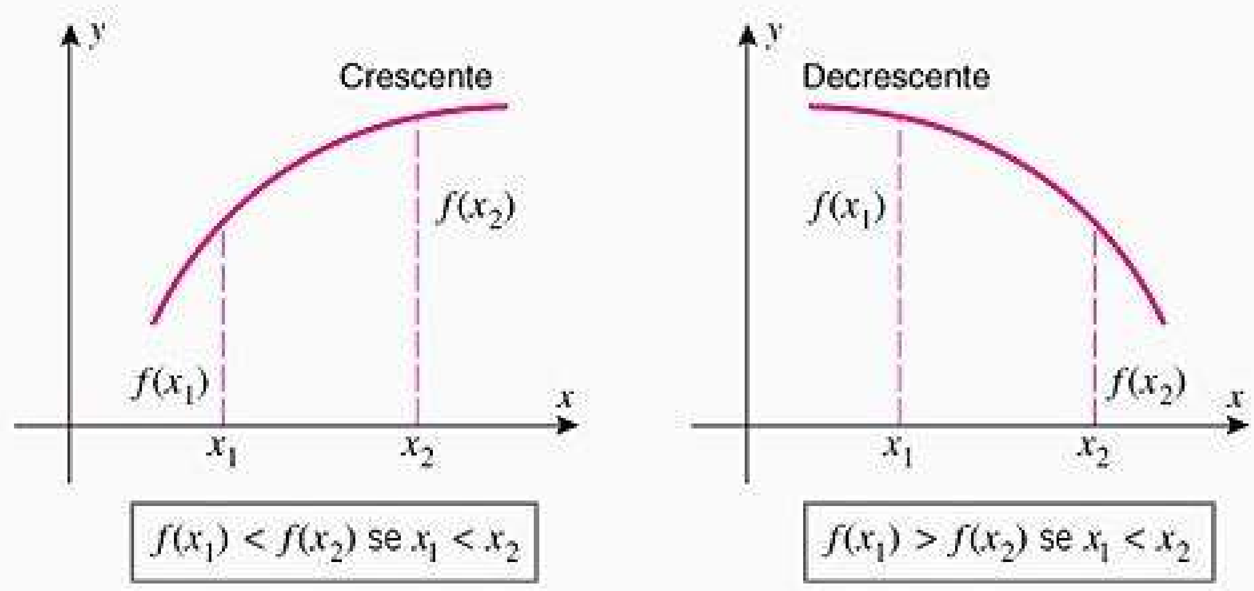


Figura 1.5.7

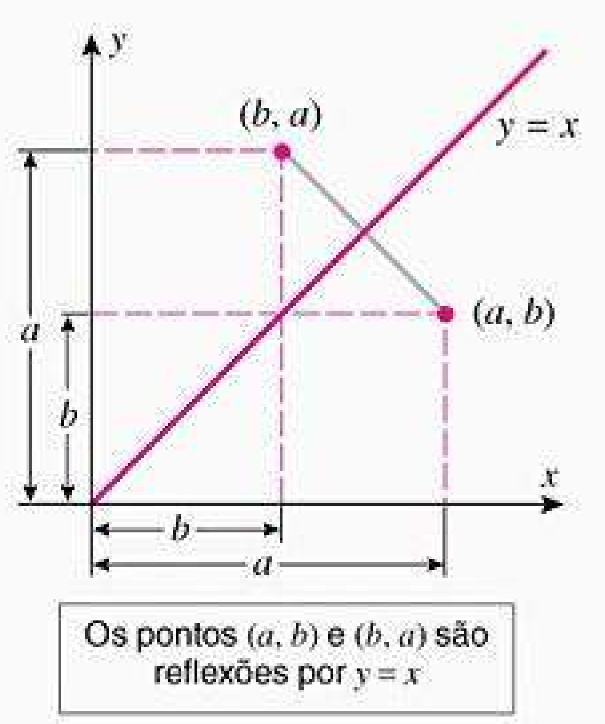


Figura 1.5.8

■ GRÁFICO DAS FUNÇÕES INVERSAS

Nosso próximo objetivo é explorar a relação entre os gráficos de f e f^{-1}. Com esse propósito, será desejável usar x como a variável independente para ambas as funções, para podermos comparar os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$.

Se (a, b) for um ponto no gráfico $y = f(x)$, então $b = f(a)$. Isso é equivalente à afirmativa de que $a = f^{-1}(b)$, a qual significa que (b, a) é um ponto no gráfico de $y = f^{-1}(x)$. Em resumo, inverter as coordenadas de um ponto no gráfico de f produz um ponto no gráfico de f^{-1}. Analogamente, inverter as coordenadas de um ponto no gráfico de f^{-1} produz um ponto no gráfico de f (verifique). Contudo, o efeito geométrico de inverter as coordenadas de um ponto é refletir aquele ponto pela reta $y = x$ (Figura 1.5.8), portanto os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são reflexões um do outro em relação a essa reta (Figura 1.5.9). Em resumo, temos o seguinte resultado:

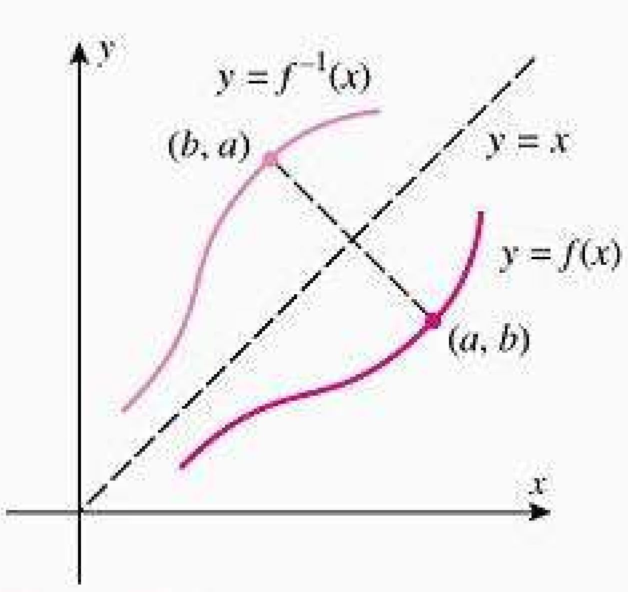


Figura 1.5.9

1.5.5 TEOREMA *Se f tiver uma inversa, então os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$; isto é, cada um é a imagem espelhada do outro em relação àquela reta.*

▶ Exemplo 7 A Figura 1.5.10 mostra os gráficos das funções inversas discutidas nos Exemplos 2 e 4. ◀

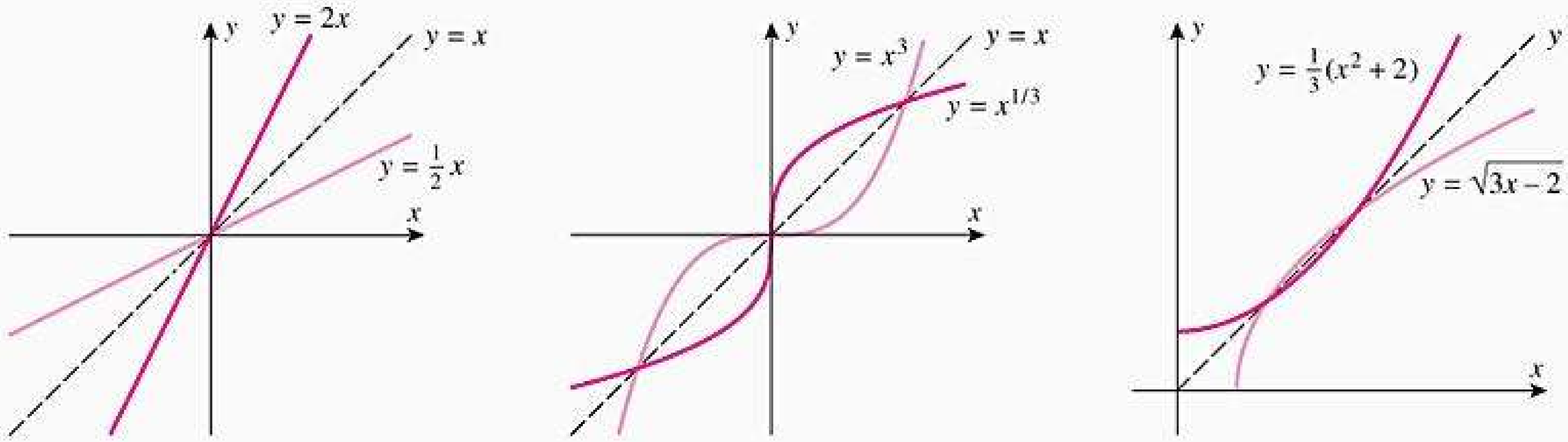


Figura 1.5.10

RESTRINGINDO DOMÍNIOS PARA A INVERTIBILIDADE

Se uma função g é obtida a partir de uma função f pela imposição de restrições sobre o domínio de f, então dizemos que g é uma ***restrição de f***. Assim, por exemplo, a função

$$g(x) = x^3, \quad x \geq 0$$

é uma restrição da função $f(x) = x^3$. Mais precisamente, dizemos que g é uma restrição de x^3 ao intervalo $[0, +\infty)$.

Às vezes é possível criar uma função invertível a partir de uma função que não é invertível pela restrição apropriada do domínio. Por exemplo, já vimos que $f(x) = x^2$ não é invertível. Contudo, considere as funções restritas

$$f_1(x) = x^2, \ x \geq 0 \quad \text{e} \quad f_2(x) = x^2, \ x \leq 0$$

A união dos gráficos dessas duas funções é o gráfico completo de $f(x) = x^2$ (Figura 1.5.11). Cada uma dessas funções restritas é injetora (portanto invertível), pois seu gráfico passa no teste da linha horizontal. Como ilustra a Figura 1.5.12, suas inversas são

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

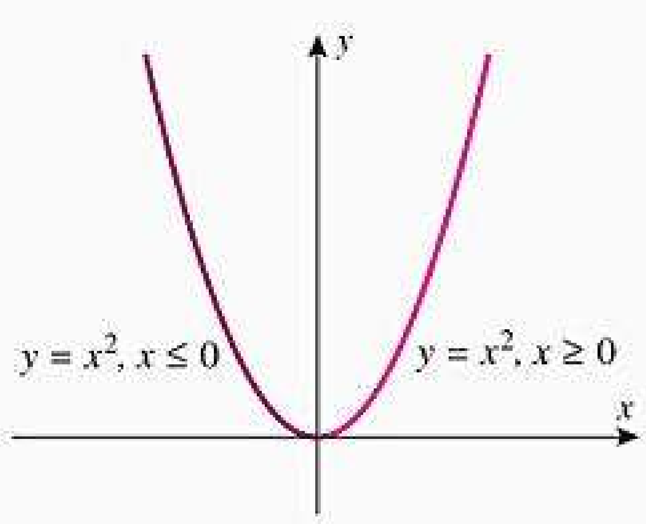


Figura 1.5.11

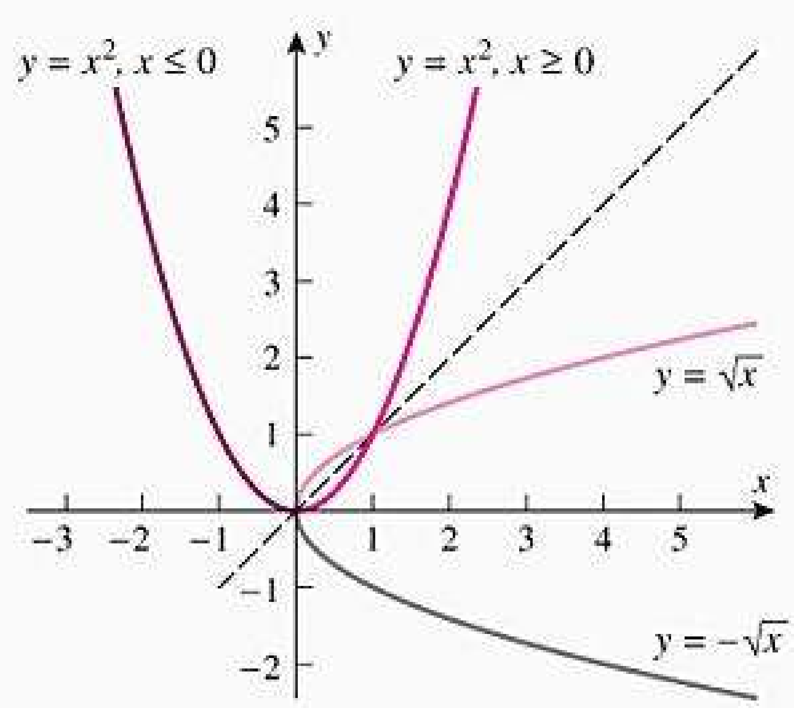


Figura 1.5.12

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Um problema comum em Trigonometria é obter um ângulo x a partir de um valor conhecido de sen x, de cos x ou de alguma outra função trigonométrica. Lembre-se de que problemas

desse tipo envolvem o cálculo de "funções arco", tais como arc sen x, arc cos x e assim por diante. Vamos terminar esta seção estudando essas funções arco do ponto de vista de funções inversas gerais.

As seis funções trigonométricas básicas não têm inversas pois seus gráficos se repetem periodicamente e, portanto, não passam no teste da reta horizontal. Para evitar esse problema, restringimos os domínios das funções trigonométricas para obter funções injetoras e depois definir as "funções trigonométricas inversas" como as inversas dessas funções restritas. A parte superior da Figura 1.5.13 mostra como impor essas restrições a sen x, cos x, tg x e sec x, e a parte inferior mostra o gráfico correspondente das funções inversas

$$\text{arc sen } x, \text{ arc cos } x, \text{ arc tg } x, \text{ arc sec } x$$

(que também poderiam ser denotadas por $\text{sen}^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\text{tg}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, prática que não será adotada aqui). As inversas de cotg x e de cossec x são de menor importância e não serão consideradas nos exercícios.

Se o leitor encontrar dificuldades para visualizar a correspondência entre as partes superior e inferior da Figura 1.5.13, deve lembrar que uma reflexão pela reta $y = x$ transforma retas verticais em retas horizontais e vice-versa, convertendo cortes com o eixo x em cortes com o eixo y e vice-versa.

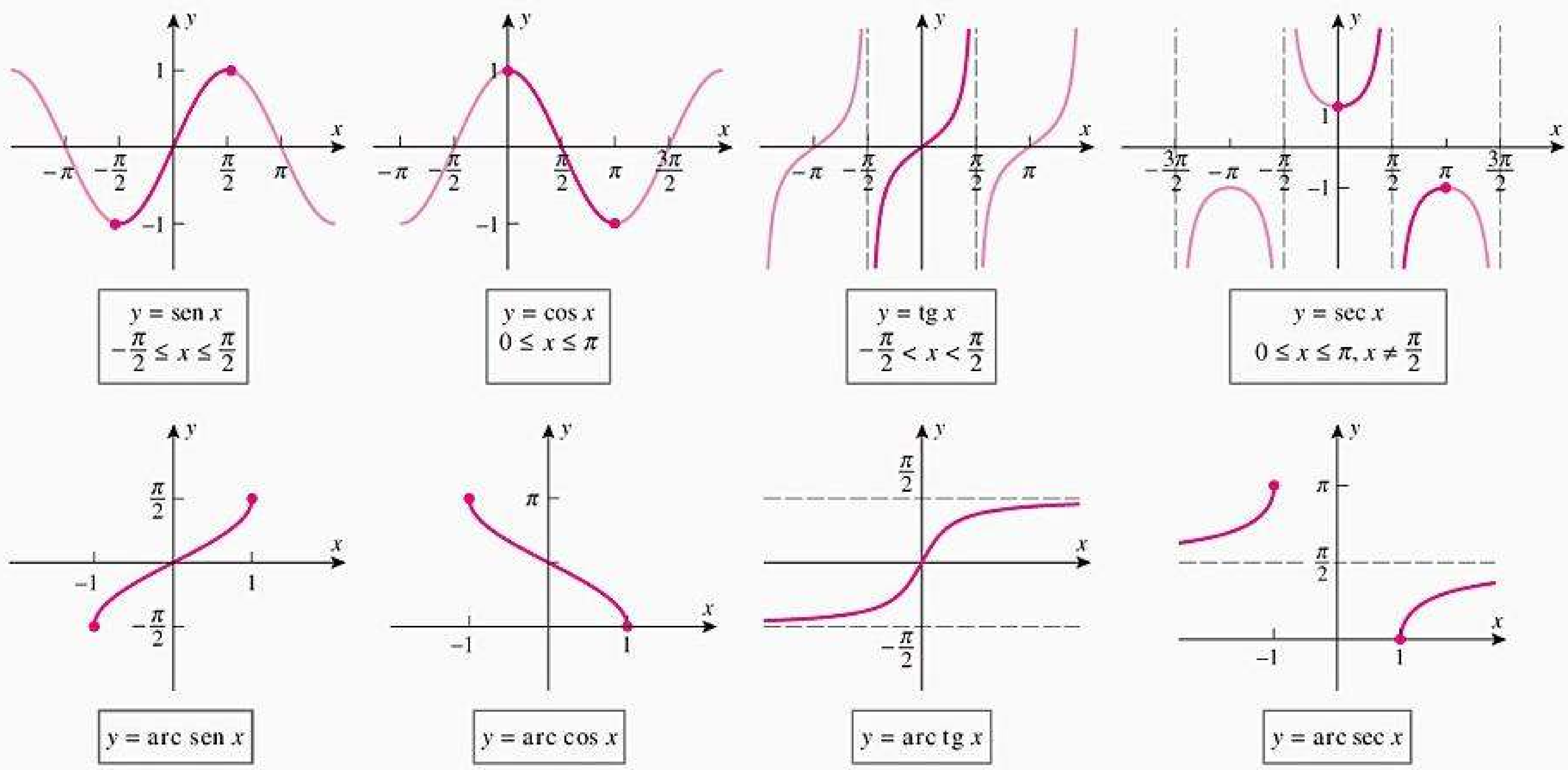


Figura 1.5.13

As definições formais seguintes resumem a discussão precedente.

1.5.6 DEFINIÇÃO A função ***arco seno***, denotada por arc sen, é definida como sendo a inversa da função seno restrita

$$\text{sen } x, \ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

1.5.7 DEFINIÇÃO A função ***arco cosseno***, denotada por arc cos, é definida como sendo a inversa da função cosseno restrita

$$\cos x, \ 0 \leq x \leq \pi$$

1.5.8 DEFINIÇÃO A função ***arco tangente***, denotada por arc tg, é definida como sendo a inversa da função tangente restrita

$$\text{tg } x, -\pi/2 < x < \pi/2$$

1.5.9 DEFINIÇÃO* A função ***arco secante***, denotada por arc sec, é definida como sendo a inversa da função secante restrita

$$\sec x, 0 \leq x \leq \pi \text{ com } x \neq \pi/2$$

A Tabela 1.5.1 resume as propriedades básicas das funções trigonométricas inversas que vimos. O leitor deve confirmar que os domínios e imagens listados nessa tabela são consistentes com os gráficos mostrados na Figura 1.5.13.

Tabela 1.5.1

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	RELAÇÕES BÁSICAS
arc sen	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	arc sen(sen x) = x se $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ sen(arc sen x) = x se $-1 \leq x \leq 1$
arc cos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	arc cos(cos x) = x se $0 \leq x \leq \pi$ cos(arc cos x) = x se $-1 \leq x \leq 1$
arc tg	$(-\infty, +\infty)$	$(-\pi/2, \pi/2)$	arc tg(tg x) = x se $-\pi/2 < x < \pi/2$ tg(arc tg x) = x se $-\infty < x < +\infty$
arc sec	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	arc sec(sec x) = x se $0 \leq x \leq \pi$, $x \neq \pi/2$ sec(arc sec x) = x se $\lvert x\rvert \geq 1$

CALCULANDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Um problema comum em Trigonometria é encontrar um ângulo cujo seno seja conhecido. Por exemplo, podemos querer encontrar um ângulo x medido em radianos, tal que

$$\text{sen } x = \tfrac{1}{2} \tag{6}$$

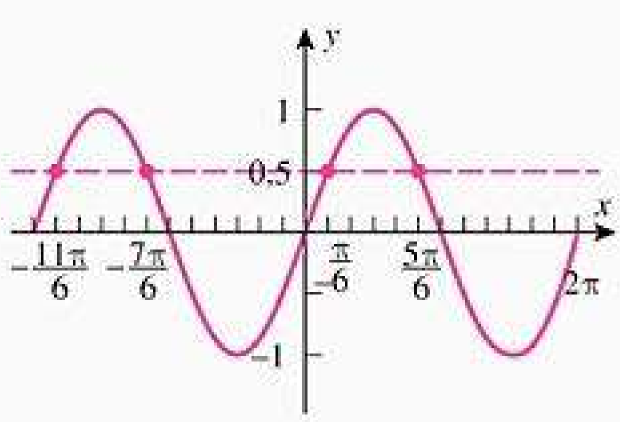


Figura 1.5.14

e, mais geralmente, para um dado valor de y no intervalo $-1 \leq y \leq 1$ podemos querer resolver a equação

$$\text{sen } x = y \tag{7}$$

Como sen x repete-se periodicamente, tais equações têm uma infinidade de soluções para x; entretanto, se resolvermos essa equação como

$$x = \text{arc sen } y$$

então isolamos a solução específica que está no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, uma vez que essa é a variação da inversa do seno. Por exemplo, a Figura 1.5.14 mostra quatro soluções da Equação (6), isto é, $-11\pi/6$, $-7\pi/6$, $\pi/6$ e $5\pi/6$. Uma delas, $\pi/6$, é a solução no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, logo

$$\text{arc sen}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi/6 \tag{8}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use o manual de seu recurso computacional para determinar como calcular inversas de senos, cossenos e tangentes e então confirme a Equação (8) numericamente, mostrando que

$$\text{arc sen } 0{,}5 \approx 0{,}523598775598... \approx \pi/6$$

* Não há um acordo universal sobre a definição de arc sec x, e alguns matemáticos preferem restringir o domínio de sec x de tal forma que $0 \leq x < \pi/2$ ou $\pi \leq x < 3\pi/2$, definição usada em algumas edições anteriores deste livro. Cada definição tem vantagens e desvantagens, mas mudamos para a definição corrente por estar de acordo com a convenção usada pelos programas *Mathematica*, *Maple* e *Derive*.

Em geral, se considerarmos $x = \text{arc sen } y$ como um ângulo medido em radianos cujo seno é y, então a restrição $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ impõe a exigência geométrica de que o ângulo x em posição padrão esteja no primeiro ou no quarto quadrantes, ou em um dos eixos adjacentes a esses quadrantes.

▶ Exemplo 8 Encontre os valores exatos de

$$\text{(a) arc sen}(1/\sqrt{2}) \qquad \text{(b) arc sen } (-1)$$

por inspeção e confirme numericamente seus resultados, usando um recurso computacional.

Solução (a) Como $\text{arc sen}\,(1/\sqrt{2}) > 0$, podemos ver $x = \text{arc sen}\,(1/\sqrt{2})$ como aquele ângulo no primeiro quadrante tal que $\text{sen}\,\theta = 1/\sqrt{2}$. Assim, $\text{arc sen}\,(1/\sqrt{2}) = \pi/4$. Podemos confirmar isso com um recurso computacional, mostrando que $\text{arc sen}\,(1/\sqrt{2}) \approx 0{,}785 \approx \pi/4$.

Se $x = \text{arc cos } y$ for visto como um ângulo medido em radianos cujo cosseno é y, em qual quadrante pode estar x? Responda a mesma questão para

$x = \text{arc tg } y$ e $x = \text{arc sec } y$.

Solução (b) Como $\text{arc sen } (-1) < 0$, podemos ver $x = \text{arc sen } (-1)$ como aquele ângulo no quarto quadrante (ou um eixo adjacente) tal que $\text{sen } x = -1$. Assim, $\text{arc sen } (-1) = -\pi/2$. Podemos confirmar isso com um recurso computacional, mostrando que $\text{arc sen } (-1) \approx -1{,}57 \approx -\pi/2$. ◀

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

A maioria das calculadoras não tem um método direto para calcular a inversa da secante. Em tal situação, a identidade

$$\text{arc sec } x = \text{arc cos } (1/x) \tag{9}$$

é útil (Exercício 50). Use essa fórmula para mostrar que

$$\text{arc sec } (2{,}25) \approx 1{,}11 \quad \text{e} \quad \text{arc sec } (-2{,}25) \approx 2{,}03$$

Se você tiver um recurso computacional (tal como um CAS) que possa achar arc sec x diretamente, use-o para conferir esses valores.

■ IDENTIDADES PARA FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Se interpretamos arc sen x como um ângulo medido em radianos cujo seno é x, e se esse ângulo for *não-negativo*, então podemos representar arc sen x geometricamente como um ângulo em um triângulo retângulo no qual a hipotenusa tem comprimento 1 e o lado oposto ao ângulo de arc sen x, comprimento x (Figura 1.5.15*a*). Pelo Teorema de Pitágoras, o lado adjacente ao ângulo arc sen x tem comprimento $\sqrt{1-x^2}$. Além disso, o ângulo oposto a arc sen x é arc cos x, uma vez que o cosseno daquele ângulo é x (Figura 1.5.15*b*). Esse triângulo motiva várias identidades úteis, envolvendo funções trigonométricas inversas que valem para $-1 \leq x \leq 1$. Por exemplo:

$$\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

$$\cos\,(\text{arc sen } x) = \sqrt{1-x^2} \tag{11}$$

$$\text{sen}\,(\text{arc cos } x) = \sqrt{1-x^2} \tag{12}$$

$$\text{tg}\,(\text{arc sen } x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{13}$$

Não se ganha nada memorizando essas identidades; o importante é compreender o *método* que foi usado para obtê-las.

Analogamente, arc tg x e arc sec x podem ser representadas como ângulos dos triângulos retângulos mostrados na Figura 1.5.15*c* e 1.5.15*d* (verifique). Esses triângulos revelam mais identidades úteis, por exemplo:

$$\sec\,(\text{arc tg } x) = \sqrt{1+x^2} \tag{14}$$

$$\text{sen}\,(\text{arc sec } x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \quad (x \geq 1) \tag{15}$$

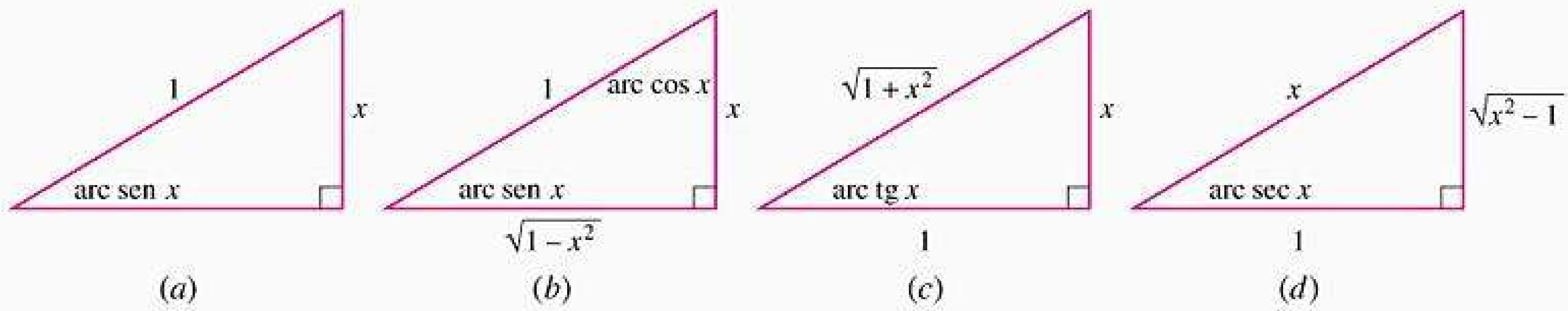


Figura 1.5.15

A técnica do triângulo nem sempre produz a forma mais geral de uma identidade. Por exemplo, no Exercício 62 pedimos para o leitor deduzir a seguinte extensão da Fórmula (15) que é válida tanto para $x \le -1$ quanto para $x \ge 1$:

$$\text{sen}\,(\text{arc sec}\,x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} \quad (|x| \ge 1) \tag{16}$$

A partir da Figura 1.5.13, observe que as inversas do seno e da tangente são funções ímpares; isto é:

$$\text{arc sen}\,(-x) = -\,\text{arc sen}\,x \quad \text{e} \quad \text{arc tg}\,(-x) = -\text{arc tg}\,x \tag{17-18}$$

► **Exemplo 9** A Figura 1.5.16 mostra um gráfico gerado por computador da função $y = \text{arc sen}\,(\text{sen}\,x)$. Poder-se-ia pensar que esse gráfico deva ser a reta $y = x$, uma vez que $\text{arc sen}\,(\text{sen}\,x) = x$. Por que isso não acontece?

Solução A relação $\text{arc sen}\,(\text{sen}\,x) = x$ é válida no intervalo $-\pi/2 \le x \le \pi/2$; logo, podemos dizer, com certeza, que os gráficos de $y = \text{arc sen}\,(\text{sen}\,x)$ e $y = x$ coincidem nesse intervalo (o que é confirmado pela Figura 1.5.16). Contudo, fora desse intervalo, a relação $\text{arc sen}\,(\text{sen}\,x) = x$ não precisa ser válida. Por exemplo, se x estiver no intervalo $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$, então a quantidade $x - \pi$ estará no intervalo $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. Assim:

$$\text{arc sen}\,[\text{sen}\,(x-\pi)] = x - \pi$$

Dessa forma, usando a identidade $\text{sen}\,(x-\pi) = -\,\text{sen}\,x$ e o fato de que arc sen é uma função ímpar, podemos expressar $\text{arc sen}\,(\text{sen}\,x)$ como

$$\text{arc sen}\,(\text{sen}\,x) = \text{arc sen}[-\text{sen}(x-\pi)] = -\text{arc sen}[\text{sen}(x-\pi)] = -(x-\pi)$$

Isso mostra que no intervalo $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$, o gráfico de $y = \text{arc sen}\,(\text{sen}\,x)$ coincide com a reta $y = -\,(x-\pi)$, que tem inclinação -1 e um corte no eixo x em $x = \pi$, o que está de acordo com a Figura 1.5.16. ◄

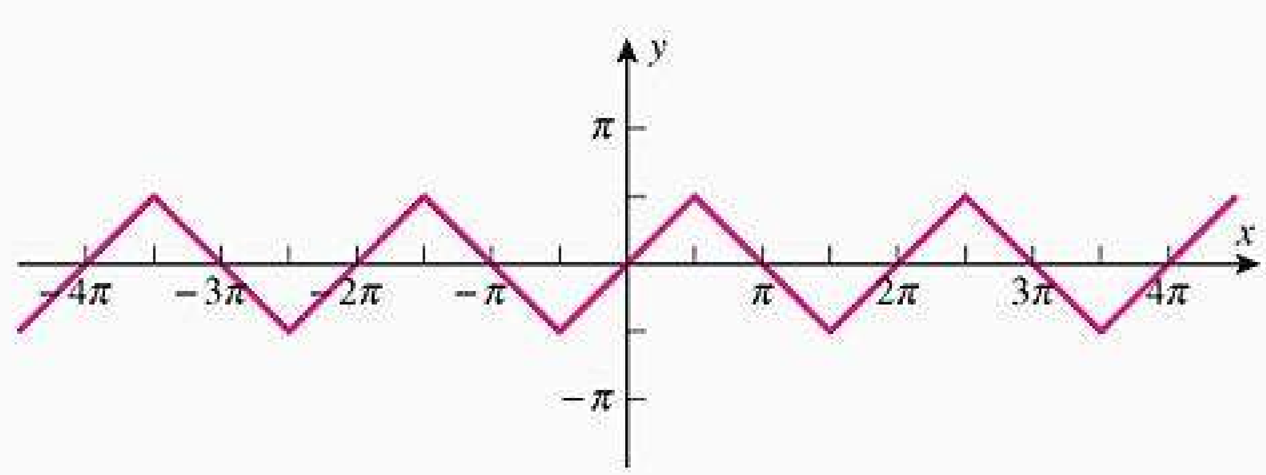


Figura 1.5.16

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.5 (*Ver página 65 para respostas.*)

1. Em cada parte, determine se a função f é injetora.
   (a) $f(t)$ é o número de pessoas na fila de um cinema no instante de tempo t.
   (b) $f(x)$ é a temperatura máxima medida (arredondada até o °C mais próximo) em uma cidade no x-ésimo dia do ano.
   (c) $f(v)$ é o peso de v centímetros cúbicos de chumbo.

2. Um estudante digita um número em uma calculadora, toma o dobro, soma 8 ao resultado, divide por 2, subtrai 3 do quociente e então toma o cubo da diferença. Se o número resultante for x, então o número original digitado pelo estudante foi ________.

3. Se $(3, -2)$ é um ponto no gráfico de uma função f ímpar invertível, então __________ e __________ são pontos no gráfico de f^{-1}.

4. Em cada parte, determine o valor exato sem utilizar recursos computacionais.
   (a) arc sen (-1) = __________
   (b) arc tg (1) = __________
   (c) arc sen $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ = __________
   (d) arc cos $\left(\frac{1}{2}\right)$ = __________
   (e) arc sec (-2) = __________

5. Em cada parte, determine o valor exato sem utilizar recursos computacionais.
   (a) arc sen (sen $\pi/7$) = __________
   (b) arc sen (sen $5\pi/7$) = __________
   (c) arc tg (tg $13\pi/6$) = __________
   (d) arc cos (cos $12\pi/7$) = __________

EXERCÍCIOS 1.5 Recurso Gráfico

1. Em (a)-(d), determine se f e g são funções inversas.
   (a) $f(x) = 4x,\ g(x) = \frac{1}{4}x$
   (b) $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = 3x - 1$
   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x-2},\ g(x) = x^3 + 2$
   (d) $f(x) = x^4,\ g(x) = \sqrt[4]{x}$

2. Verifique suas respostas para o Exercício 1 com um recurso gráfico computacional, determinando se os gráficos de f e g são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$.

3. Em cada parte, use o teste da reta horizontal para determinar se a função f é injetora.
   (a) $f(x) = 3x + 2$ (b) $f(x) = \sqrt{x-1}$
   (c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = x^3$
   (e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ (f) $f(x) = \text{sen}\, x$

4. Em cada parte, gere o gráfico da função f com um recurso gráfico computacional, e determine se f é injetora.
   (a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Em cada parte, determine se a função f definida pela tabela é injetora.

(a)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	−2	−1	0	1	2	3

(b)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	−7	6	−3	1	4

6. A face de um relógio quebrado caiu inteira no plano xy com o centro do relógio na origem e as 3 horas na direção do eixo x positivo. Quando o relógio quebrou, a ponta do ponteiro das horas parou no gráfico de $y = f(x)$, onde f é uma função que satisfaz $f(0) = 0$.
   (a) Existem algumas horas do dia que não podem ocorrer em uma tal configuração? Explique.
   (b) Como é afetada sua resposta a (a) se f deve ser uma função invertível?
   (c) Como são afetadas suas respostas a (a) e (b) se foi a ponta do ponteiro dos minutos que parou no gráfico de f?

7. (a) A figura abaixo mostra o gráfico de uma função f sobre seu domínio $-8 \le x \le 8$. Explique por que f tem uma inversa e use o gráfico para encontrar $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(-1)$ e $f^{-1}(0)$.
   (b) Encontre o domínio e a imagem de f^{-1}.
   (c) Esboce o gráfico de f^{-1}.

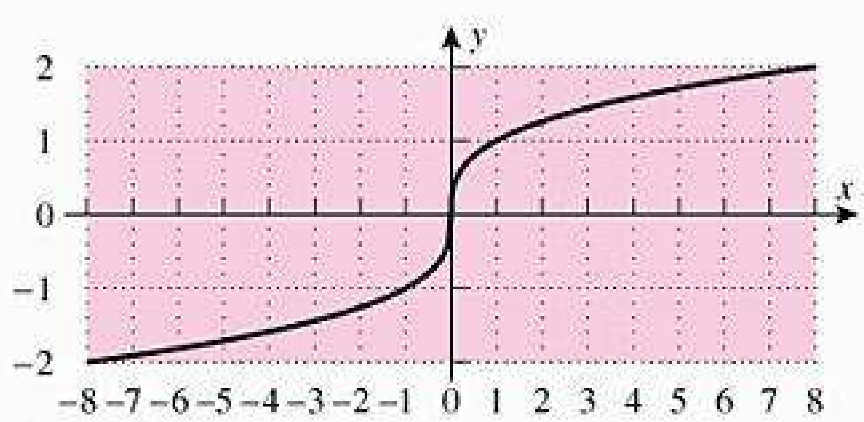


Figura Ex-7

8. (a) Explique por que a função f, cujo gráfico está na figura abaixo, não tem inversa em seu domínio $-3 \le x \le 4$.
   (b) Subdivida o domínio em três intervalos adjacentes sobre cada um dos quais a função f tem uma inversa.

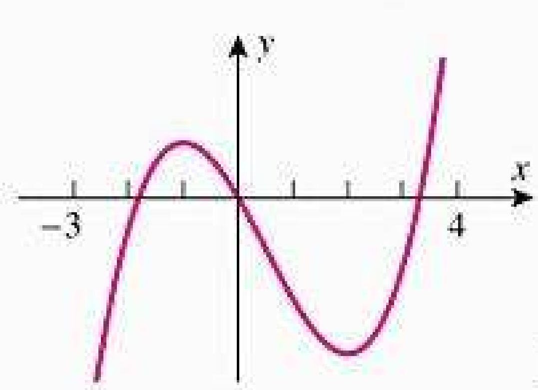


Figura Ex-8

9-17 Encontre uma fórmula para $f^{-1}(x)$.

9. $f(x) = 7x - 6$

10. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

11. $f(x) = 3x^3 - 5$

12. $f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$

13. $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

14. $f(x) = 5/(x^2+1), x \geq 0$

15. $f(x) = 3/x^2, \quad x < 0$

16. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} 5/2 - x, & x < 2 \\ 1/x, & x \geq 2 \end{cases}$

18. Obtenha uma fórmula para $p^{-1}(x)$, dado que

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

19-23 Encontre uma fórmula para $f^{-1}(x)$ e dê o domínio de f^{-1}.

19. $f(x) = (x+2)^4, \quad x \geq 0$

20. $f(x) = \sqrt{x+3}$

21. $f(x) = -\sqrt{3-2x}$

22. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2, \quad x \geq 0$

23. $f(x) = x - 5x^2, \quad x \geq 1$

ENFOCANDO CONCEITOS

24. A fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$, onde $C \geq -273{,}15$ expressa a temperatura em Fahrenheit F como uma função da temperatura em Celsius C.

(a) Encontre uma fórmula para a função inversa.

(b) Descreva o significado da função inversa.

(c) Encontre o domínio e a imagem da função inversa.

25. (a) Um metro é aproximadamente $6{,}214 \times 10^{-4}$ milhas. Encontre uma fórmula $y = f(x)$ que expresse o comprimento x em metros como uma função de mesmo comprimento y em milhas.

(b) Encontre uma fórmula para a função inversa de f.

(c) Em termos práticos, o que significa a fórmula $x = f^{-1}(y)$?

26. Seja $f(x) = x^2, x > 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Mostre que $f(g(x)) = x, x > 1$ e $g(f(x)) = x, x > 1$.

(b) Mostre que f e g *não* são inversas uma da outra provando que os gráficos dessas funções não são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$.

(c) As partes (a) e (b) se contradizem? Explique.

27. (a) Mostre que $f(x) = (3-x)/(1-x)$ é a sua própria inversa.

(b) O que o resultado de (a) diz sobre o gráfico de f?

28. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$. Encontre f^{-1} se o domínio de f for restrito a

(a) $x \geq -b/(2a)$ (b) $x \leq -b/(2a)$

29. Seja $f(x) = 2x^3 + 5x + 3$. Encontre x se $f^{-1}(x) = 1$.

30. Seja $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Encontre x se $f^{-1}(x) = 2$.

31. Prove que se $a^2 + bc \neq 0$, então o gráfico de

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

é simétrico em relação à reta $y = x$.

32. (a) Prove que se f e g forem injetoras, então a composição $(f \circ g)$ também o é.

(b) Prove que se f e g forem injetoras, então

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

33. Esboce o gráfico de uma função que é injetora em $(-\infty, +\infty)$, embora não crescente em $(-\infty, +\infty)$ e não decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

34. Prove que uma função injetora f não pode ter duas inversas diferentes.

35. Dado que $\theta = \text{arc tg}\left(\frac{4}{3}\right)$, encontre os valores exatos de sen θ, cos θ, cotg θ, sec θ e cossec θ.

36. Sabendo que $\theta = \text{arc sec } 2{,}6$, encontre o valor exato de sen θ, cos θ, tg θ, cotg θ e cossec θ.

37. Para quais valores de x é verdade que:

(a) $\text{arc cos}(\cos x) = x$ (b) $\cos(\text{arc cos } x) = x$

(c) $\text{arc tg}(\text{tg } x) = x$ (d) $\text{tg}(\text{arc tg } x) = x$

38-39 Encontre o valor exato da quantidade dada.

38. $\sec\left[\text{arc sen}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$ **39.** $\text{sen}\left[2 \text{ arc cos}\left(\frac{3}{5}\right)\right]$

40-41 Complete a identidade usando o método do triângulo (Figura 1.5.15).

40. (a) sen (arc cos x) = ? (b) tg (arc cos x) = ?

(c) cossec (arc tg x) = ? (d) sen (arc tg x) = ?

41. (a) cos (arc tg x) = ? (b) tg (arc cos x) = ?

(c) sen (arc sec x) = ? (d) cotg (arc sec x) = ?

42. (a) Use um recurso gráfico computacional ajustado para medir radianos para fazer tabelas dos valores de $y = \text{arc sen } x$ e $y = \text{arc cos } x$ para $x = -1; -0{,}8; -0{,}6;...; 0; 0{,}2;...; 1$. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

(b) Plote os pontos obtidos em (a) e use-os para esboçar os gráficos de $y = \text{arc sen } x$ e $y = \text{arc cos } x$. Confirme que seus esboços estão de acordo com aquele da Figura 1.5.13

(c) Use seu recurso computacional para fazer o gráfico $y = \text{arc sen } x$ e $y = \text{arc cos } x$; confirme que os gráficos estão de acordo com aqueles da Figura 1.5.13.

43. Em cada parte, esboce o gráfico e verifique seu trabalho com um recurso gráfico computacional.

(a) $y = \text{arc sen } 2x$ (b) $y = \text{arc tg } \frac{1}{2}x$

44-46 Use um recurso computacional para aproximar a solução da equação. Quando forem usados radianos, expresse sua resposta com quatro casas decimais; quando forem usados graus, expresse-a até o décimo de grau mais próximo. [*Nota*: Em cada parte, a solução não está na imagem da função trigonométrica inversa pertinente.]

44. (a) $\text{sen}\, x = 0{,}37,\ \pi/2 < x < \pi$
(b) $\text{sen}\, \theta = -0{,}61,\ 180° < \theta < 270°$

45. (a) $\cos x = -0{,}85,\ \pi < x < 3\pi/2$
(b) $\cos \theta = 0{,}23,\ -90° < \theta < 0°$

46. (a) $\text{tg}\, x = 3{,}16,\ -\pi < x < -\pi/2$
(b) $\text{tg}\, \theta = -0{,}45,\ 90° < \theta < 180°$

ENFOCANDO CONCEITOS

47. (a) Use um recurso computacional para calcular o valor de arc sen (arc sen 0,25) e arc sen (arc sen 0,9) e explique o que pode estar acontecendo no segundo cálculo.
(b) Para quais valores de x no intervalo $-1 \le x \le 1$ seu recurso computacional produz um valor real para a função arc sen(arc sen x) ?

48. Um jogador de futebol chuta uma bola com uma velocidade inicial de 14 m/s em um ângulo θ com o plano horizontal (ver figura abaixo). A bola cai no chão a uma distância de 18 m depois do chute. Se a resistência do ar for desprezada, então a bola terá uma trajetória parabólica e o alcance horizontal R será dado por

$$R = \frac{v^2}{g}\,\text{sen}\, 2\theta$$

onde v é a velocidade inicial da bola e g é a aceleração da gravidade. Usando $g = 9{,}8$ m/s^2, aproxime dois valores de θ, até o grau mais próximo, segundo os quais a bola poderia ter sido chutada. Qual ângulo resultaria em um tempo menor de permanência no ar? Por quê?

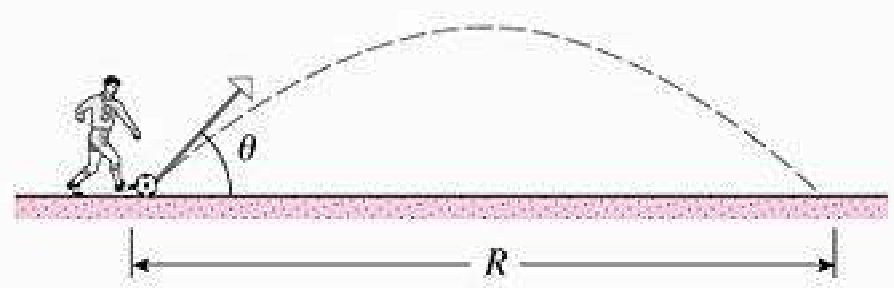


Figura Ex-48

49-50 A função arc cotg x é definida como sendo a inversa da função cotangente restrita

$$\text{cotg}\, x, \quad 0 < x < \pi$$

e a função arc cossec x é definida como sendo a inversa da função cossecante restrita

$$\text{cossec}\, x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2,\ x \neq 0$$

Use essas definições em todos os exercícios subseqüentes que envolverem essas funções.

49. (a) Esboce os gráficos de arc cotg x e arc cossec x.
(b) Obtenha o domínio e a imagem de arc cotg x e de arc cossec x.

50. Mostre que

(a) $$\text{arc cotg}\, x = \begin{cases} \text{arc tg}\,(1/x), & \text{se } x > 0 \\ \pi + \text{arc tg}\,(1/x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(b) $$\text{arc sec}\, x = \text{arc cos}\, \frac{1}{x}, \quad \text{se } |x| \ge 1$$

(c) $$\text{arc cossec}\, x = \text{arc sen}\, \frac{1}{x}, \quad \text{se } |x| \ge 1$$

51. A maioria das calculadoras científicas tem teclas somente para os valores de arc sen x, arc cos x e arc tg x. As fórmulas no Exercício 50 mostram como uma calculadora pode ser usada para obter os valores de arc cotg x, arc sec x, arc cossec x para valores positivos de x. Use essas fórmulas e uma calculadora para encontrar os valores numéricos para cada uma das funções trigonométricas inversas seguintes. Expresse suas respostas em graus, arredondados para o décimo de grau mais próximo.

(a) arc cotg 0,7 (b) arc sec 1,2 (c) arc cossec 2,3

52. Um satélite de observação terrestre tem sensores de horizonte que podem medir o ângulo θ mostrado na figura abaixo. Seja R o raio da Terra (suposta esférica) e h a distância entre o satélite e a superfície da Terra.

(a) Mostre que $\theta = \dfrac{R}{R+h}$.

(b) Obtenha θ até o grau mais próximo para um satélite que está a 10. 000 km da superfície (use $R = 6.378$ km).

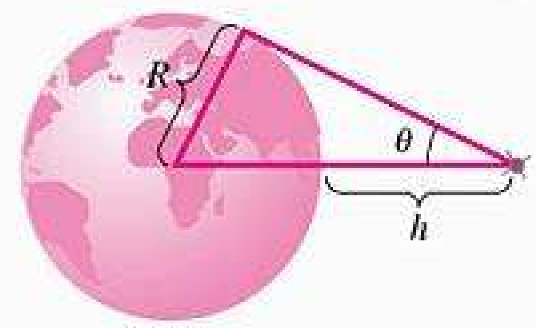


Figura Ex-52

53. O número de horas de claridade em um dado dia e em um dado ponto na superfície terrestre depende da latitude λ do ponto, do ângulo γ através do qual a Terra moveu-se em seu plano orbital, durante o período de tempo a partir do equinócio do outono (21 de março), e do ângulo de inclinação ϕ do eixo de rotação da Terra, medido a partir da eclíptica para o norte ($\phi \approx 23{,}45°$). O número de horas de claridade h pode ser aproximado pela fórmula

$$h = \begin{cases} 24, & D \ge 1 \\ 12 + \frac{2}{15}\,\text{arc sen}\, D, & |D| < 1 \\ 0, & D \le -1 \end{cases}$$

onde

$$D = \frac{\text{sen}\,\phi\ \text{sen}\,\gamma\ \text{tg}\,\lambda}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\phi\ \text{sen}^2\gamma}}$$

e arc sen D é medido em graus. Dado que Fairbanks, no Alaska, está localizada à latitude de $\lambda = 65°$N e também que $\gamma = 90°$ em 20 de junho e $\gamma = 270°$ em 20 de dezembro, aproxime

(a) o número máximo de horas de claridade em Fairbanks com uma casa decimal;

(b) o número mínimo de horas de claridade em Fairbanks com uma casa decimal.

Fonte: Este problema foi adaptado de *TEAM, A Path to Applied Mathematics*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1985.

54. A ***lei dos cossenos*** afirma que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

onde a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo e θ é o ângulo formado pelos lados a e b. Obtenha θ, até o grau mais próximo, para o triângulo com $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$.

55. Um avião está voando a uma altura constante de 3.000 pés acima da água, a uma velocidade de 400 pés/s. O piloto deve soltar um pacote de sobrevivência que deve cair na água em um ponto P conhecido. Se a resistência do ar for desprezada, então o pacote irá seguir uma trajetória parabólica, cuja equação em relação ao sistema de coordenadas na figura abaixo é

$$y = 3000 - \frac{g}{2v^2}x^2$$

onde g é a aceleração da gravidade e v é a velocidade do avião. Usando $g = 32$ pés/s^2, encontre o ângulo θ da "linha de visão" até o grau mais próximo que resultará no pacote atingindo o alvo.

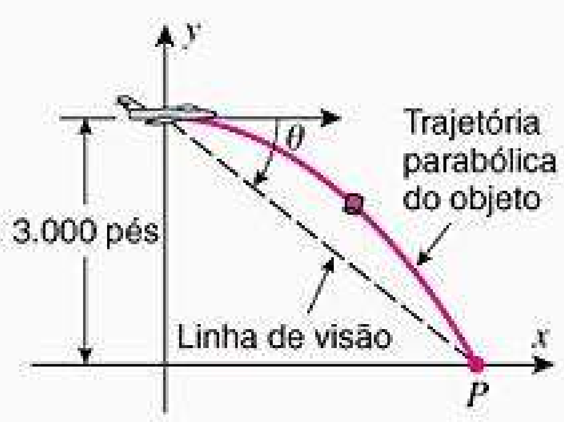


Figura Ex-55

56. Uma câmera está posicionada a x pés da base de uma rampa de lançamento de mísseis (ver figura a seguir). Se o míssil de comprimento a pés for lançado verticalmente, mostre que quando a base do míssil estiver b pés acima das lentes da câmera o ângulo θ subentendido nas lentes pelo míssil é

$$\theta = \text{arc cot}\,\frac{x}{a+b} - \text{arc cot}\,\frac{x}{b}$$

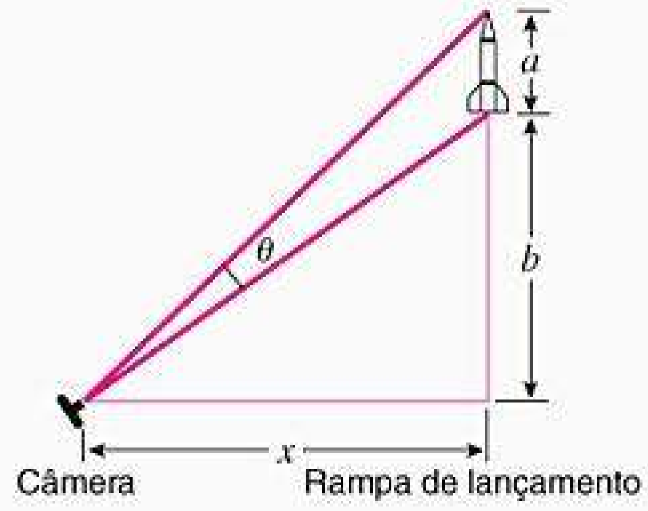


Figura Ex-56

57. Prove:

(a) $\text{arc sen}\,(-x) = -\,\text{arc sen}\,x$

(b) $\text{arc tg}\,(-x) = -\,\text{arc tg}\,x$

58. Prove:

(a) $\text{arc cos}\,(-x) = \pi - \text{arc cos}\,x$

(b) $\text{arc sec}\,(-x) = \pi - \text{arc sec}\,x$

59. Prove:

(a) $\text{arc sen}\,x = \text{arc tg}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$

(b) $\text{arc cos}\,x = \dfrac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$

60. Prove:

$$\text{arc tg}\,x + \text{arc tg}\,y = \text{arc tg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

desde que $-\pi/2 < \text{arc tg}\,x + \text{arc tg}\,y < \pi/2$. [*Sugestão*: Use uma identidade para $\text{tg}\,(\alpha+\beta)$.]

61. Use o resultado do Exercício 60 para mostrar que

(a) $\text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{3} = \pi/4$

(b) $2\,\text{arc tg}\,\frac{1}{3} + \text{arc tg}\,\frac{1}{7} = \pi/4$

62. Use as identidades (9) e (12) para obter a identidade (16).

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.5

1. (a) não é injetora (b) não é injetora (c) é injetora **2.** $\sqrt[3]{x} - 1$ **3.** $(-2, 3)$; $(2, -3)$ **4.** (a) $-\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) $\pi/3$ (d) $\pi/3$ (e) $2\pi/3$
5. (a) $\pi/7$ (b) $2\pi/7$ (c) $\pi/6$ (d) $2\pi/7$

1.6 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Quando os logaritmos foram introduzidos como uma ferramenta computacional no século XVII, eles forneceram aos cientistas daquela época um poder de cálculo até então inimaginável. Embora os computadores e as calculadoras tenham substituído as tabelas logarítmicas em cálculos numéricos, as funções logarítmicas têm aplicações de longo alcance na Matemática e nas ciências. Nesta seção vamos rever algumas propriedades de exponenciais e logaritmos e então utilizaremos nosso estudo de funções inversas para desenvolver resultados sobre funções exponenciais e logarítmicas.

EXPOENTES IRRACIONAIS

Lembre-se da Álgebra, em que as potências *inteiras* não-nulas de um dado número real não-nulo b são definidas por

$$b^n = \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ fatores}} \qquad \text{e} \qquad b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

e $b^0 = 1$ se $n = 0$. Além disso, se p/q é um número *racional* positivo dado em forma irredutível, então

$$b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} = (\sqrt[q]{b})^p \qquad \text{e} \qquad b^{-p/q} = \frac{1}{b^{p/q}}$$

Se b é negativo, então algumas potências fracionárias de b terão valores imaginários, como, por exemplo, a quantidade $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$. Para evitar essa complicação, passamos a supor em toda esta seção que $b > 0$, mesmo se isso não for explicitado.

Existem vários métodos para definir potências *irracionais*, tais como

$$2^{\pi}, \quad 3^{\sqrt{2}}, \quad \pi^{-\sqrt{7}}$$

Uma abordagem consiste em definir as potências irracionais de b por meio de aproximações sucessivas usando potências racionais de b. Por exemplo, para definir 2^{π}, considere a representação decimal de π:

$$3{,}1415926...$$

A partir dessa decimal podemos formar uma seqüência de racionais que fica cada vez mais próxima de π, a saber:

$$3{,}1; \quad 3{,}14; \quad 3{,}141; \quad 3{,}1415; \quad 3{,}14159$$

e dessa seqüência podemos formar uma seqüência de potências *racionais* de 2:

$$2^{3,1}; \quad 2^{3,14}; \quad 2^{3,141}; \quad 2^{3,1415}; \quad 2^{3,14159}$$

Tabela 1.6.1

x	2^x
3	8,000000
3,1	8,574188
3,14	8,815241
3,141	8,821353
3,1415	8,824411
3,14159	8,824962
3,141592	8,824974
3,1415926	8,824977

Como os expoentes dos termos dessa seqüência se aproximam cada vez mais de π, parece razoável que os próprios termos também se aproximem sucessivamente de algum número. É esse o número que *definimos* como sendo 2^{π}. Isso está ilustrado na Tabela 1.6.1, que construímos usando uma calculadora. A tabela sugere que, até a quarta casa decimal, o valor de 2^{π} é

$$2^{\pi} \approx 8{,}8250 \tag{1}$$

Com essa noção de potências irracionais, observamos, sem provar, que as seguintes leis de exponenciação familiares valem para todos os valores reais de p e de q:

$$b^p b^q = b^{p+q}, \quad \frac{b^p}{b^q} = b^{p-q}, \quad \left(b^p\right)^q = b^{pq}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use uma calculadora para conferir os resultados da Tabela 1.6.1 e então confira (1) usando a calculadora para calcular 2^{π} diretamente.

A FAMÍLIA DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Uma função da forma $f(x) = b^x$, em que $b > 0$, é denominada ***função exponencial de base b***. Alguns exemplos são:

$$f(x) = 2^x, \quad f(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x, \quad f(x) = \pi^x$$

Note que uma função exponencial tem uma base constante e um expoente variável. Assim, funções tais como $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^{\pi}$ não seriam classificadas como funções exponenciais, uma vez que têm uma base variável e um expoente constante.

A Figura 1.6.1 mostra que o gráfico de $y = b^x$ tem uma de três formas gerais, dependendo do valor de b. Observe nessa figura que o valor de b^x cresce com x crescente se $b > 1$, decresce com x decrescente se $0 < b < 1$, e é constante se $b = 1$. Todos os gráficos passam pelo ponto (0, 1), pois $b^0 = 1$.

Se $b > 1$, então, à medida que percorremos o gráfico de $y = b^x$ da esquerda para a direita, os valores de b^x crescem sem parar, enquanto percorrendo o gráfico da direita para a esquerda os valores de b^x decrescem em direção a zero, sem nunca atingi-lo. Analogamente, se $0 < b < 1$, então, à medida que percorremos o gráfico de b^x da esquerda para a direita, os valores de b^x decrescem em direção a zero, sem nunca atingi-lo, enquanto percorrendo o gráfico da direita para a esquerda os valores de b^x crescem sem parar.

Os gráficos de alguns membros típicos da família de funções exponenciais aparecem na Figura 1.6.2. Essa figura mostra que o gráfico de $y = (1/b)^x$ é a reflexão do gráfico de $y = b^x$ em torno do eixo y. Isso ocorre pois, substituindo x por $-x$ na equação $y = b^x$, obtemos

$$y = b^{-x} = (1/b)^x$$

A figura também dá a entender que, quanto maior a base $b > 1$, mais rapidamente a função $f(x) = b^x$ cresce para $x > 0$.

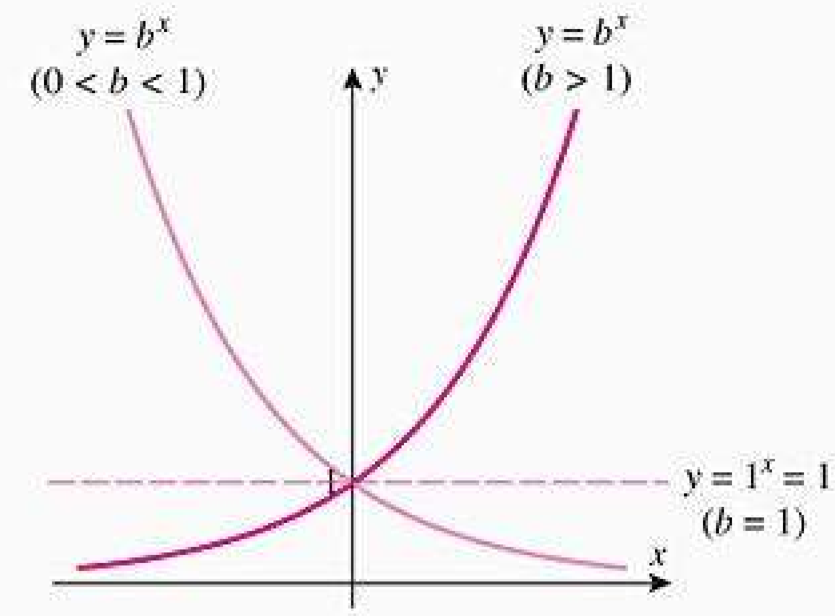


Figura 1.6.1

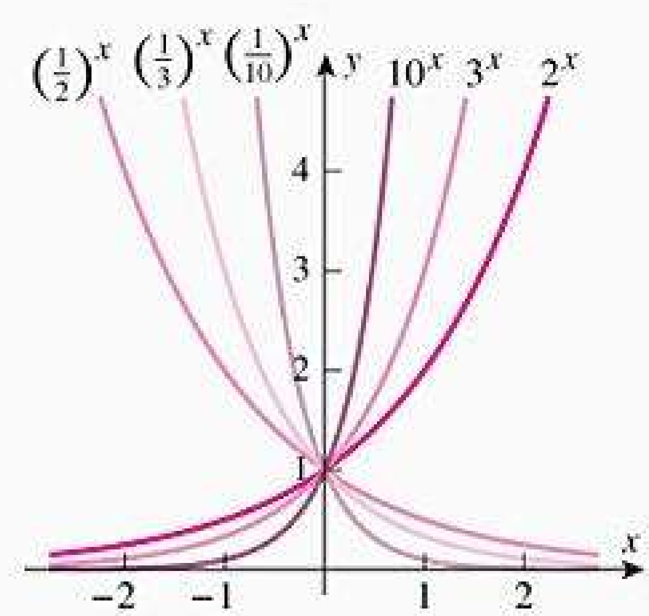


Figura 1.6.2 A família $y = b^x$ $(b > 0)$

Se $b > 0$, então $f(x) = b^x$ está bem definida e tem um valor real para cada valor real de x, de modo que o domínio natural de cada função exponencial é $(-\infty, +\infty)$. Se $b > 0$ e $b \neq 0$, então, como vimos anteriormente, o gráfico de $y = b^x$ cresce sem parar à medida que o percorremos em um sentido e decresce em direção a zero, sem nunca atingi-lo, à medida que o percorremos no outro sentido. Isso implica que a imagem de $f(x) = b^x$ é $(0, +\infty)$.*

► **Exemplo 1** Esboce o gráfico da função $f(x) = 1 - 2^x$ e encontre seu domínio e imagem.

Solução Comece com o gráfico de $y = 2^x$. Reflita esse gráfico no eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$, depois translade o gráfico obtido uma unidade para cima para obter o gráfico de $y = 1 - 2^x$ (Figura 1.6.3). A reta tracejada na terceira parte da Figura 1.6.3 é uma assíntota horizontal do gráfico. Deve ficar claro a partir do gráfico que o domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e a imagem é $(-\infty, 1)$. ◄

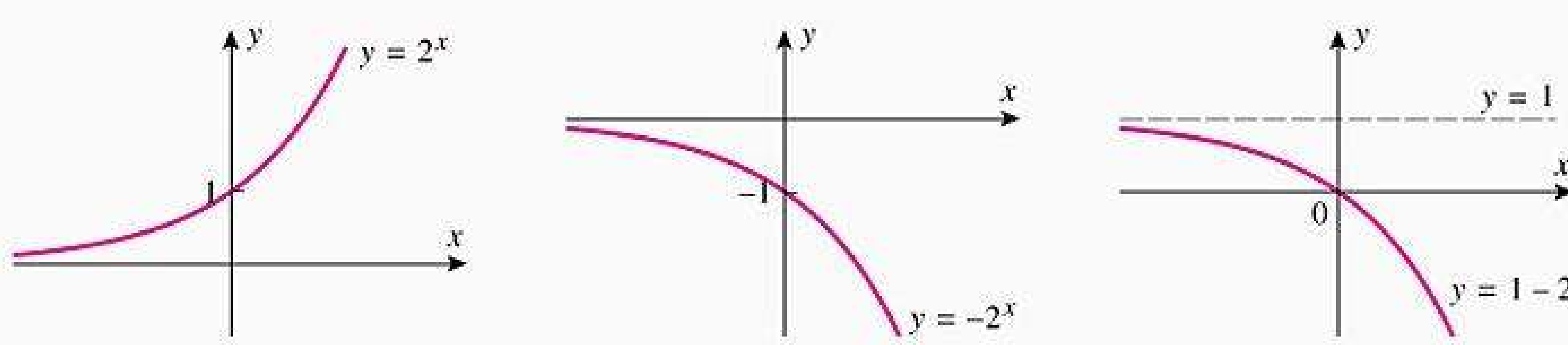


Figura 1.6.3

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

Dentre todas as bases possíveis para as funções exponenciais, há uma em particular que desempenha um papel especial no Cálculo. Essa base, denotada pela letra e, é um certo número irracional cujo valor até a sexta casa decimal é

$$e \approx 2{,}718282 \tag{2}$$

O uso da letra e é uma homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (biografia à página 3), ao qual é creditado o reconhecimento da importância matemática dessa constante.

* Estamos supondo, sem demonstrar, que o gráfico de $y = b^x$ seja uma curva sem quebras, lacunas ou buracos.

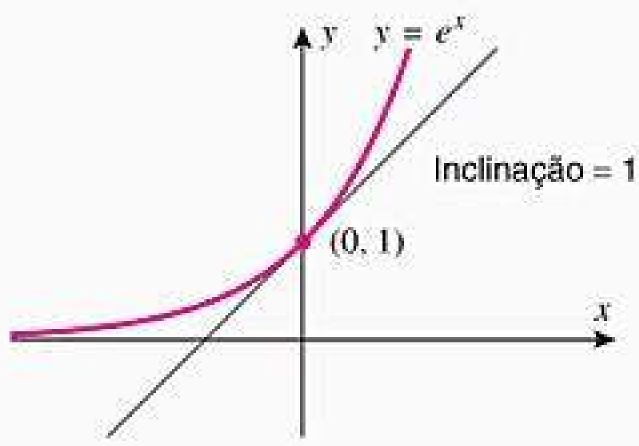


Figura 1.6.4 A reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ em (0, 1) tem inclinação 1.

Essa base é importante no Cálculo porque, como veremos adiante, $b = e$ é a única base para a qual a inclinação da reta tangente* à curva $y = b^x$ em qualquer ponto P da curva é igual à coordenada y do ponto P. Assim, por exemplo, a reta tangente a $y = e^x$ em (0, 1) tem inclinação igual a 1 (Figura 1.6.4).

A função $f(x) = e^x$ é denominada ***função exponencial natural***. Como o número e está entre 2 e 3, o gráfico de $y = e^x$ se encaixa entre os gráficos de $y = 2^x$ e de $y = 3^x$, como mostra a Figura 1.6.5. Para simplificar a tipografia, a função exponencial natural também é dada por exp(x), caso em que a relação $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ deve ser expressa por

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

O recurso computacional do leitor deve ter comandos ou teclas para aproximar e e traçar o gráfico da função exponencial natural. Leia seu manual para ver como fazer isso e use o recurso para confirmar (2) e gerar os gráficos da Figura 1.6.5.

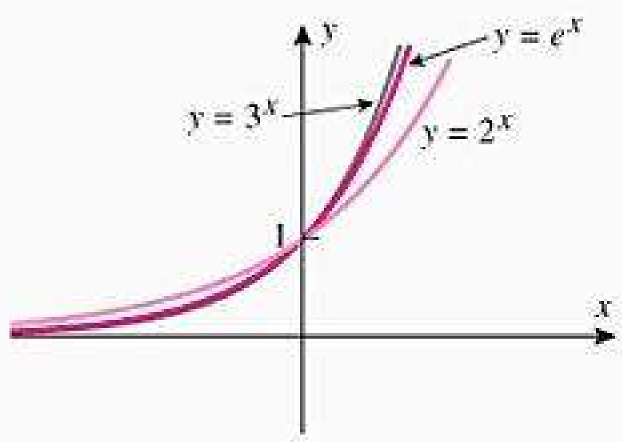


Figura 1.6.5

A constante e também aparece no contexto do gráfico da equação

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad (3)$$

Como mostramos na Figura 1.6.6, $y = e$ é uma assíntota horizontal desse gráfico. Disso decorre que o valor de e pode ser aproximado com a precisão desejada calculando (3) para x suficientemente grande em valor absoluto (Tabela 1.6.2).

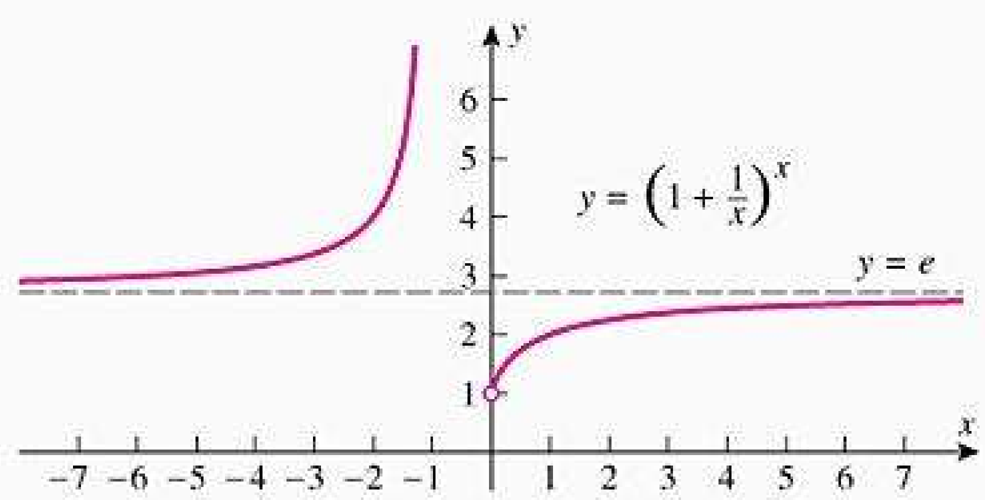


Figura 1.6.6

Tabela 1.6.2
APROXIMAÇÕES DE e POR $(1 + 1/x)^x$ PARA VALORES CRESCENTES DE x

x	$1 + \frac{1}{x}$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2	≈2,000000
10	1,1	2,593742
100	1,01	2,704814
1000	1,001	2,716924
10.000	1,0001	2,718146
100.000	1,00001	2,718268
1.000.000	1,000001	2,718280

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Lembre-se da Álgebra, em que um logaritmo é um expoente. Mais precisamente, se $b > 0$ e $b \neq 1$, para um valor positivo de x a expressão

$$\log_b x$$

(que se lê: "o logaritmo de x na base b") denota aquele expoente ao qual devemos elevar b para obter x. Assim, por exemplo:

$$\log_{10}100 = 2, \quad \log_{10}(1/1000) = -3, \quad \log_2 16 = 4, \quad \log_b 1 = 0, \quad \log_b b = 1$$

$10^2 = 100$ | $10^{-3} = 1/1000$ | $2^4 = 16$ | $b^0 = 1$ | $b^1 = b$

Os logaritmos com base 10 são denominados ***logaritmos comuns*** e, muitas vezes, são escritos sem referência alguma à base. Assim, o símbolo $\log x$ em geral significa $\log_{10} x$.

A função $f(x) = \log_b x$ é denominada ***função logarítmica de base b***.

* A definição precisa de reta tangente será discutida adiante. Por enquanto, basta a intuição do leitor.

As funções logarítmicas também podem ser interpretadas como inversas das funções exponenciais. Para ver isso, observe na Figura 1.6.1 que, se $b > 0$ e $b \neq 1$, então o gráfico de $f(x) = b^x$ passa no teste da reta horizontal, de modo que b^x tem uma inversa. Podemos encontrar uma fórmula para essa inversa com variável independente x resolvendo a equação

$$y = b^y$$

para y como uma função de x. Mas essa equação afirma que y é o logaritmo de x na base b, de modo que podemos reescrevê-la como

$$y = \log_b x$$

Assim, estabelecemos o seguinte resultado:

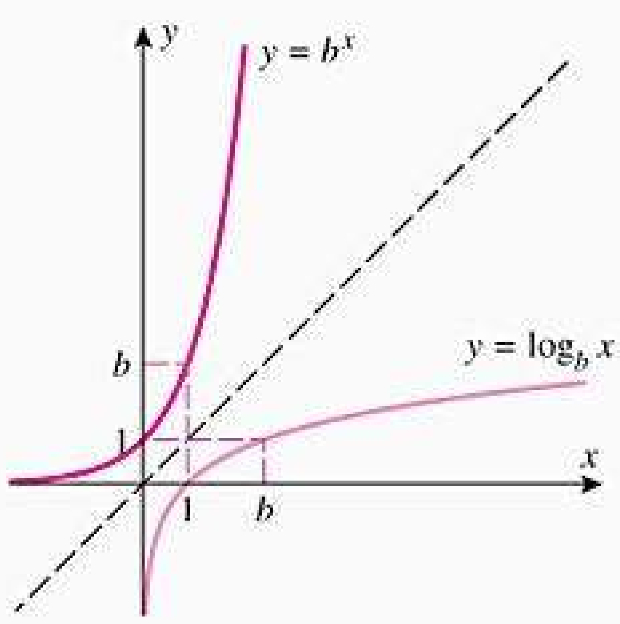


Figura 1.6.7

> **1.6.1 TEOREMA** *Se $b > 0$ e $b \neq 1$, então b^x e $\log_b x$ são funções inversas.*

Segue desse teorema que os gráficos de $y = b^x$ e $y = \log_b x$ são reflexões um do outro pela reta $y = x$ (ver Figura 1.6.7 para o caso em que $b > 1$). A Figura 1.6.8 mostra o gráfico de $y = \log_b x$ para vários valores de b. Observe que todos esses gráficos passam pelo ponto $(1, 0)$.

O logaritmo mais importante nas aplicações é o de base e, que é denominado ***logaritmo natural***, já que a função $\log_e x$ é a inversa da função exponencial natural e^x. É comum denotar o logaritmo natural de x por $\ln x$ (que costuma ser lido como "ele ene de xis") em vez de $\log_e x$. Por exemplo:

$\ln 1 = 0,$	$\ln e = 1,$	$\ln 1/e = -1,$	$\ln(e^2) = 2$
uma vez que $e^0 = 1$	uma vez que $e^1 = e$	uma vez que $e^{-1} = 1/e$	uma vez que $e^2 = e^2$

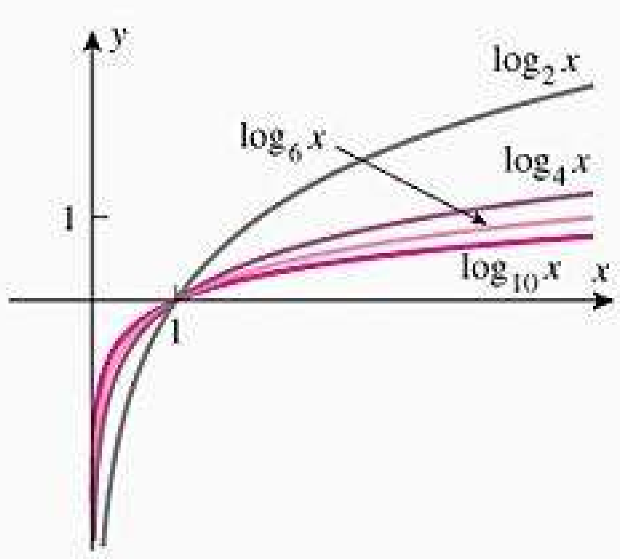


Figura 1.6.8 A família $y = \log_b x$ $(b > 1)$.

Em geral,

$$y = \ln x \quad \text{se, e somente se,} \quad x = e^y$$

Como mostramos na Tabela 1.6.3, a relação inversa entre b^x e $\log_b x$ dá uma correspondência entre algumas propriedades básicas dessas funções.

Tabela 1.6.3

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

PROPRIEDADE DE b^x	PROPRIEDADE DE $\log_b x$
$b^0 = 1$	$\log_b 1 = 0$
$b^1 = b$	$\log_b b = 1$
Imagem é $(0, +\infty)$	Domínio é $(0, +\infty)$
Domínio é $(-\infty, +\infty)$	Imagem é $(-\infty, +\infty)$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use seu recurso gráfico para gerar os gráficos de $y = \ln x$ e de $y = \log x$.

Também segue das propriedades de cancelamento de funções inversas [ver (3) na Seção 1.5] que

$$\begin{aligned} \log_b(b^x) &= x \quad \text{para todos os valores reais de } x \\ b^{\log_b x} &= x \quad \text{para } x > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

No caso especial em que $b = e$, essas equações tornam-se

$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \quad \text{para todos os valores reais de } x \\ e^{\ln x} &= x \quad \text{para } x > 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Em outras palavras, as funções b^x e $\log_b x$ cancelam o efeito uma da outra quando compostas em qualquer ordem; por exemplo:

$$\log 10^x = x, \quad 10^{\log x} = x, \quad \ln e^x = x, \quad e^{\ln x} = x, \quad \ln e^5 = 5, \quad e^{\ln \pi} = \pi$$

RESOLVENDO EQUAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

As seguintes propriedades algébricas dos logaritmos devem ser familiares de seus estudos anteriores.

1.6.2 TEOREMA (***Propriedades Algébricas dos Logaritmos***) Se $b > 0$, $b \neq 0$, $a > 0$, $c > 0$ e r é um número real qualquer, então:

(a) $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$ — Propriedade do produto

(b) $\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$ — Propriedade do quociente

(c) $\log_b(a^r) = r \log_b a$ — Propriedade da potência

(d) $\log_b(1/c) = -\log_b c$ — Propriedade do recíproco

As expressões da forma $\log_b(u + v)$ e $\log_b(u - v)$ não têm nenhuma simplificação útil em termos de $\log_b u$ e $\log_b v$. Em particular,

$$\log_b(u + v) \neq \log_b(u) + \log_b(v)$$
$$\log_b(u - v) \neq \log_b(u) - \log_b(v)$$

Essas propriedades são freqüentemente usadas para expandir um único logaritmo em somas, em diferenças e em múltiplos de outros logaritmos e, inversamente, para condensar somas, diferenças e múltiplos de logaritmos em um único logaritmo. Por exemplo:

$$\log \frac{xy^5}{\sqrt{z}} = \log xy^5 - \log \sqrt{z} = \log x + \log y^5 - \log z^{1/2} = \log x + 5 \log y - \tfrac{1}{2} \log z$$

$$5 \log 2 + \log 3 - \log 8 = \log 32 + \log 3 - \log 8 = \log \frac{32 \cdot 3}{8} = \log 12$$

$$\tfrac{1}{3} \ln x - \ln(x^2 - 1) + 2 \ln(x + 3) = \ln x^{1/3} - \ln(x^2 - 1) + \ln(x + 3)^2 = \ln \frac{\sqrt[3]{x}(x + 3)^2}{x^2 - 1}$$

As relações inversas entre as funções logarítmicas e exponenciais fornecem os seguintes resultados úteis para resolver equações que envolvam a exponencial e o logaritmo natural:

$y = e^x$ é equivalente a $x = \ln y$ se $y > 0$ e x é qualquer número real. (6)

Em geral, se $b > 0$ e $b \neq 1$, então

$y = b^x$ é equivalente a $x = \log_b y$ se $y > 0$ e x é qualquer número real. (7)

Uma equação da forma $\log_b x = k$ pode ser resolvida para x reescrevendo-a na forma $x = b^k$, e uma equação da forma $b^x = k$ pode ser resolvida reescrevendo-a na forma $x = \log_b k$. Alternativamente, a equação $b^x = k$ pode ser resolvida tomando um logaritmo *qualquer* de ambos lados (mas geralmente log ou ln) e aplicando a parte (c) do Teorema 1.6.2. Essas idéias estão ilustradas no exemplo a seguir.

► Exemplo 2 Encontre x tal que

(a) $\log x = \sqrt{2}$ (b) $\ln(x + 1) = 5$ (c) $5^x = 7$

Solução (a) Convertendo a equação para a forma exponencial, obtém-se

$$x = 10^{\sqrt{2}} \approx 25{,}95$$

Solução (b) Convertendo a equação para a forma exponencial, obtém-se

$$x + 1 = e^5 \quad \text{ou} \quad x = e^5 - 1 \approx 147{,}41$$

Solução (c) Tomando o logaritmo natural de ambos os lados e usando a propriedade da potência de logaritmos, obtém-se

$$x \ln 5 = \ln 7 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\ln 7}{\ln 5} \approx 1{,}21 ◀$$

▶ Exemplo 3 Um satélite que requer 7 watts de potência para operar em plena capacidade está equipado com uma fonte de potência de radioisótopos cuja saída em watts é dada pela equação

$$P = 75e^{-t/125}$$

onde t é o tempo em dias que a fonte é usada. Por quanto tempo o satélite pode operar na capacidade máxima?

Solução A potência P decairá para 7 watts quando

$$7 = 75e^{-t/125}$$

A solução para t é como segue:

$$\begin{aligned}
7/75 &= e^{-t/125}\\
\ln(7/75) &= \ln(e^{-t/125})\\
\ln(7/75) &= -t/125\\
t &= -125 \ln(7/75) \approx 296{,}4
\end{aligned}$$

logo, o satélite pode operar na capacidade máxima por cerca de 296 dias. ◀

Aqui está um exemplo mais complicado.

▶ Exemplo 4 Resolva $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$ para x.

Solução Multiplicando ambos os lados da equação por 2, temos

$$e^x - e^{-x} = 2$$

ou, de forma equivalente,

$$e^x - \frac{1}{e^x} = 2$$

Multiplicando ambos os lados por e^x, temos

$$e^{2x} - 1 = 2e^x \quad \text{ou} \quad e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

Isto é, de fato, uma equação quadrática disfarçada, como pode ser visto reescrevendo-a na forma

$$(e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0$$

e fazendo-se $u = e^x$ para obter

$$u^2 - 2u - 1 = 0$$

Resolvendo para u pela fórmula quadrática, temos

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

ou, uma vez que $u = e^x$,

$$e^x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Mas e^x não pode ser negativa, portanto descartaremos o valor negativo $1 - \sqrt{2}$; assim,

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \sqrt{2}\\
\ln e^x &= \ln(1 + \sqrt{2})\\
x &= \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0{,}881 ◀
\end{aligned}$$

■ FÓRMULA DE MUDANÇA DE BASE DE LOGARITMOS

Geralmente, as calculadoras científicas fornecem teclas para calcular logaritmos comuns e naturais, mas não têm tecla para calcular logaritmos em outras bases. Contudo, isso não é uma deficiência grave porque é possível expressar um logaritmo com uma base qualquer em termos de logaritmos com uma outra base qualquer (ver Exercício 40). Por exemplo, a fórmula a seguir expressa um logaritmo com base b em termos de logaritmos naturais:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \tag{8}$$

Podemos deduzir esse resultado fazendo $y = \log_b x$, do qual temos $b^y = x$. Tomando o logaritmo natural de ambos os lados dessa equação, obtemos $y \ln b = \ln x$, a partir do que segue-se (8).

► Exemplo 5 Use uma calculadora para calcular $\log_2 5$ expressando esse logaritmo em termos de logaritmos naturais.

Solução A partir de (8), obtemos

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2{,}321928 \blacktriangleleft$$

■ ESCALAS LOGARÍTMICAS NA CIÊNCIA E NA ENGENHARIA

Os logaritmos são usados na ciência e na Engenharia para tratar com quantidades cujas unidades variam sobre um conjunto excessivamente amplo de valores. Por exemplo, a "altura" de um som pode ser medido pela sua ***intensidade*** I (em watts por metro quadrado), a qual está relacionada com a energia transmitida pela onda sonora – quanto maior a intensidade, maior a energia transmitida e mais alto o som é captado pelo ouvido humano. Contudo, unidades de intensidade são difícies de controlar porque variam sobre um enorme conjunto de valores. Por exemplo, o som no limiar da audição humana tem uma intensidade em torno de 10^{-12}W/m^2, um cochicho abafado tem uma intensidade de cerca de 100 vezes o limiar da audição, e a turbina de um avião a jato a 50 metros tem uma intensidade de cerca de 1.000.000.000.000 = 1.012 vezes o limiar da audição. Para ver como os logaritmos podem ser usados para reduzir essa amplitude, observe que se

$$y = \log x$$

então, aumentando x por um *fator* de 10, *adiciona-se* 1 unidade a y, uma vez que

$$\log 10x = \log 10 + \log x = 1 + y$$

Os físicos e os engenheiros aproveitam as vantagens dessa propriedade para medir a intensidade em termos do ***nível do som*** $\boldsymbol{\beta}$, o qual é definido por

$$\beta = 10 \log(I/I_0)$$

onde $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 é a intensidade de referência próxima ao limiar da audição humana. A unidade de β é o ***decibel*** (dB), assim denotada em homenagem ao inventor do telefone Alexander Graham Bell. Com essa escala de medida, *multiplicando* a intensidade I por um fator de 10, *adicionam-se* 10 dB ao nível de som β (verifique). Isso resulta em uma escala mais tratável do que a intensidade para medir a altura do som (Tabela 1.6.4). Algumas outras escalas logarítmicas familiares são ***a escala Richter***, usada para medir a intensidade de terremotos, e a ***escala* pH**, usada para medir a acidez na Química; ambas serão discutidas nos exercícios.

Tabela 1.6.4

β (dB)	I/I_0
0	$10^0 = 1$
10	$10^1 = 10$
20	$10^2 = 100$
30	$10^3 = 1.000$
40	$10^4 = 10.000$
50	$10^5 = 100.000$
⋮	⋮
120	$10^{12} = 1.000.000.000.000$



Pete Townshend, do grupo The Who, sofreu permanente redução da audição, devido ao alto nível de decibéis da música de sua banda.

► Exemplo 6 Em 1976, o grupo de rock The Who estabeleceu um recorde para a intensidade de som de um show: 120 dB. Por comparação, um martelo pneumático posicionado no

mesmo lugar do The Who poderia ter produzido um som de 92 dB. Qual é a razão da intensidade do som do The Who em relação à intensidade de som de um martelo pneumático?

Solução Sejam I_1 e β_1 (=120 dB) a intensidade e o nível do som do The Who, e I_2 e β_2 (= 92 dB) a intensidade e o nível de som do martelo. Então,

$$I_1 / I_2 = (I_1 / I_0)(I_2 / I_0)$$
$$\log (I_1 / I_2) = \log(I_1 / I_0) - \log(I_2 / I_0)$$
$$10 \log(I_1 / I_2) = 10 \log(I_1 / I_0) - 10 \log (I_2 / I_0)$$
$$10 \log(I_1 / I_2) = \beta_1 - \beta_2 = 120 - 92 = 28$$
$$\log (I_1 / I_2) = 2{,}8$$

Logo, $I_1 / I_2 = 10^{2,8} \approx 631$, o que nos diz que a intensidade do som do The Who era 631 vezes maior do que a de um martelo pneumático! ◄

■ CRESCIMENTO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICO

Os padrões de crescimento de e^x e $\ln x$ ilustrados na Tabela 1.6.5 são dignos de ser mencionados. Ambas as funções crescem quando x cresce, mas seus crescimentos são consideravelmente diferentes – e^x cresce extremamente rápido, enquanto o crescimento de $\ln x$ é extremamente vagaroso. Por exemplo, em $x = 10$ o valor de e^x está acima de 22.000, mas em $x = 1.000$ o valor de $\ln x$ nem sequer atinge 7.

Tabela 1.6.5

x	e^x	$\ln x$
1	2,72	0,00
2	7,39	0,69
3	20,09	1,10
4	54,60	1,39
5	148,41	1,61
6	403,43	1,79
7	1096,63	1,95
8	2980,96	2,08
9	8103,08	2,20
10	22026,47	2,30
100	$2{,}69 \times 10^{43}$	4,61
1000	$1{,}97 \times 10^{434}$	6,91

Diremos que uma função ***cresce sem cota*** com x crescente se os valores de $f(x)$ acabam excedendo qualquer número positivo M especificado (não importa quão grande) à medida que x cresce sem parar. A Tabela 1.6.5 sugere veementemente que $f(x) = e^x$ cresce sem cota, o que é consistente com o fato de que a imagem dessa função é $(0, +\infty)$. De fato, se escolhermos qualquer número positivo M, então teremos $e^x = M$ quando $x = \ln M$, e como os valores de e^x crescem quando x cresce, teremos

$$e^x > M \quad \text{se} \quad x > \ln M$$

(Figura 1.6.9). Não é evidente a partir da Tabela 1.6.5 se $\ln x$ cresce sem cota com x crescente, porque os valores crescem muito lentamente, mas sabemos que isso ocorre porque a imagem dessa função é $(-\infty, +\infty)$. Para verificar isso algebricamente, tomemos um número M positivo qualquer. Temos $\ln x = M$ para $x = e^M$ e, como os valores de $\ln x$ crescem com x crescente, resulta

$$\ln x > M \quad \text{se} \quad x > e^M$$

(Figura 1.6.10).

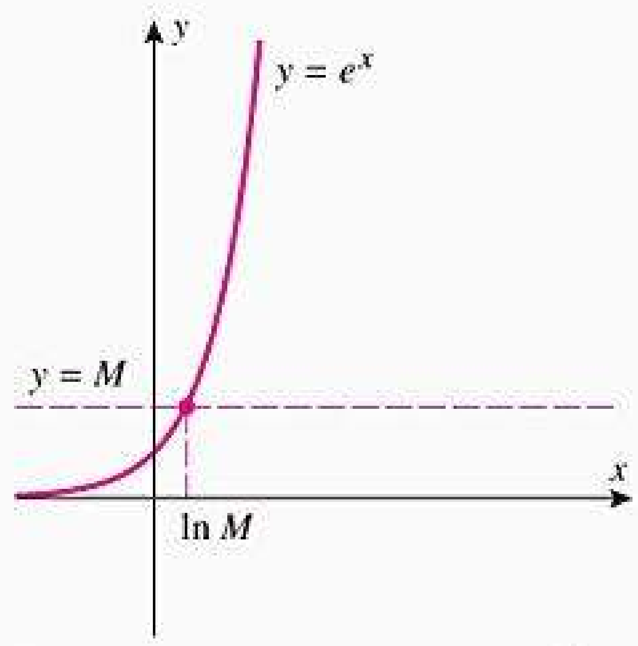


Figura 1.6.9 O valor de $y = e^x$ excederá um valor positivo M arbitrário para $x > \ln M$.

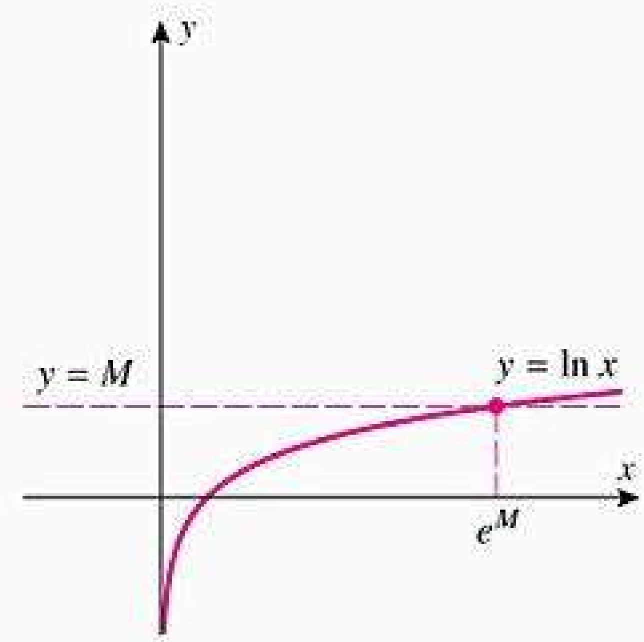


Figura 1.6.10 O valor de $y = \ln x$ excederá um valor positivo M arbitrário para $x > e^M$.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.6 (*Ver página 76 para respostas.*)

(Ver página 76 para respostas.)

1. A função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tem domínio ______________ e imagem ______________.
2. A função $y = \ln(1 - x)$ tem domínio ______________ e imagem ______________.
3. Expresse como uma potência de 4:
   (a) 1 (b) 2 (c) $\frac{1}{16}$ (d) $\sqrt{8}$ (e) 5
4. Resolva cada equação em relação a x.
   (a) $e^x = \frac{1}{2}$ (b) $10^{3x} = 1.000.000$
   (c) $7e^{3x} = 56$
5. Resolva cada equação em relação a x.
   (a) $\ln x = 3$ (b) $\log(x - 1) = 2$
   (c) $2 \log x - \log(x + 1) = \log 4 - \log 3$

EXERCÍCIOS 1.6 Recurso Gráfico

1-2 Simplifique a expressão sem usar uma calculadora.

1. (a) $-8^{2/3}$ (b) $(-8)^{2/3}$ (c) $8^{-2/3}$
2. (a) 2^{-4} (b) $4^{1,5}$ (c) $9^{-0,5}$

3-4 Use uma calculadora para aproximar a expressão. Arredonde sua resposta até quatro casas decimais.

3. (a) $2^{1,57}$ (b) $5^{-2,1}$
4. (a) $\sqrt[5]{24}$ (b) $\sqrt[8]{0,6}$

5-6 Encontre o valor exato da expressão sem usar uma calculadora.

5. (a) $\log_2 16$ (b) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$
   (c) $\log_4 4$ (d) $\log_9 3$
6. (a) $\log_{10}(0,001)$ (b) $\log_{10}(10^4)$
   (c) $\ln(e^3)$ (d) $\ln(\sqrt{e})$

7-8 Use a calculadora para aproximar a expressão. Arredonde sua resposta até quatro casas decimais.

7. (a) $\log 23,2$ (b) $\ln 0,74$
8. (a) $\log 0,3$ (b) $\ln \pi$

9-10 Use as propriedades de logaritmos do Teorema 1.6.2 para reescrever a expressão em termos de r, s e t onde $r = \ln a$, $s = \ln b$ e $t = \ln c$.

9. (a) $\ln a^2\sqrt{bc}$ (b) $\ln \dfrac{b}{a^3c}$
10. (a) $\ln \dfrac{\sqrt[3]{c}}{ab}$ (b) $\ln \sqrt{\dfrac{ab^3}{c^2}}$

11-12 Expanda o logaritmo em termos de somas, de diferenças e de múltiplos de logaritmos mais simples.

11. (a) $\log(10x\sqrt{x-3})$ (b) $\ln \dfrac{x^2 \operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{x^2+1}}$
12. (a) $\log \dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{\cos 5x}$ (b) $\ln \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3+5}}$

13-15 Reescreva a expressão como um único logaritmo.

13. $4 \log 2 - \log 3 + \log 16$
14. $\frac{1}{2}\log x - 3\log(\operatorname{sen} 2x) + 2$
15. $2\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln x - \ln(\cos x)$

16-25 Resolva para x sem usar uma calculadora.

16. $\log_{10}(1 + x) = 3$
17. $\log_{10}(\sqrt{x}) = -1$
18. $\ln(x^2) = 4$
19. $\ln(1/x) = -2$
20. $\log_3(3^x) = 7$
21. $\log_5(5^{2x}) = 8$
22. $\log_{10} x^2 + \log_{10} x = 30$
23. $\log_{10} x^{3/2} - \log_{10}\sqrt{x} = 5$
24. $\ln 4x - 3\ln(x^2) = \ln 2$
25. $\ln(1/x) + \ln(2x^3) = \ln 3$

26-31 Resolva para x sem usar uma calculadora. Use o logaritmo natural sempre que for necessário usar um logaritmo.

26. $3^x = 2$
27. $5^{-2x} = 3$
28. $3e^{-2x} = 5$
29. $2e^{3x} = 7$
30. $e^x - 2xe^x = 0$
31. $xe^{-x} + 2e^{-x} = 0$

32-33 Reescreva a equação dada como uma equação quadrática em u, onde $u = e^x$; então resolva para x.

32. $e^{2x} - e^x = 6$
33. $e^{-2x} - 3e^{-x} = -2$

ENFOCANDO CONCEITOS

34-36 Esboce o gráfico da equação sem usar um recurso gráfico computacional.

34. (a) $y = 1 + \ln(x - 2)$ (b) $y = 3 + e^{x-2}$
35. (a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$ (b) $y = \ln|x|$
36. (a) $y = 1 - e^{-x+1}$ (b) $y = 3\ln\sqrt[3]{x-1}$

37. Use uma calculadora e a fórmula de mudança de base (8) para encontrar os valores de $\log_2 7,35$ e $\log_5 0,6$ arredondando até a quarta casa decimal.

38-39 Faça o gráfico das funções na mesma tela de um recurso gráfico computacional. [Use a fórmula de mudança de base (8) quando necessário.]

38. $\ln x, \quad e^x, \quad \log x, \quad 10^x$

39. $\log_2 x, \quad \ln x, \quad \log_5 x, \quad \log x$

40. (a) Deduza a fórmula geral para a mudança de base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

(b) Use o resultado de (a) para encontrar o valor exato de $(\log_2 81)(\log_3 32)$, sem usar uma calculadora.

41. Use um recurso gráfico computacional para estimar onde os gráficos de $y = (1,3)^x$ e $y = \log_{1,3} x$ se intersectam.

42. O déficit público D dos Estados Unidos, em bilhões de dólares, foi modelado como $D = 0{,}051517(1{,}1306727)^x$, onde x é o número de anos a partir de 1900. Com base nesse modelo, quando o déficit atingiu pela primeira vez 1 trilhão de dólares?

ENFOCANDO CONCEITOS

43. (a) A curva na figura anexa é o gráfico de uma função exponencial? Explique seu raciocínio.

(b) Encontre a equação de uma função exponencial que passe pelo ponto (4, 2).

(c) Encontre a equação de uma função exponencial que passe pelo ponto $(2, \frac{1}{4})$.

(d) Use um recurso computacional para gerar o gráfico de uma função exponencial que passe pelo ponto (2, 5).

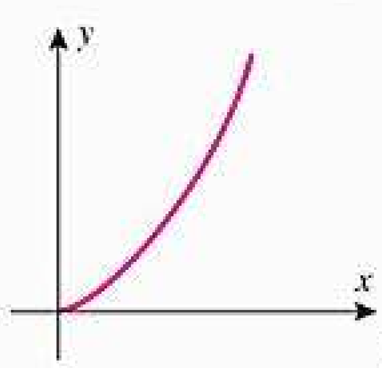


Figura Ex-43

44. (a) Faça uma conjectura sobre a forma geral do gráfico de $y = \log(\log x)$ e esboce o gráfico dessa equação e de $y = \log x$ no mesmo sistema de coordenadas.

(b) Confira seu trabalho em (a) com um recurso gráfico computacional.

45. Encontre o erro na seguinte "prova" de que $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$. Multiplique ambos os lados da desigualdade $3 > 2$ por $\log \frac{1}{2}$ para obter

$$3 \log \tfrac{1}{2} > 2 \log \tfrac{1}{2}$$
$$\log \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 > \log \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$\log \tfrac{1}{8} > \log \tfrac{1}{4}$$
$$\tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{4}$$

46. Prove as quatro propriedades algébricas dos logaritmos do Teorema 1.6.2.

47. Se o equipamento no satélite do Exemplo 3 requer 15 watts para operar corretamente, qual é a duração operacional da fonte de energia?

48. A equação $Q = 12e^{-0{,}055t}$ dá a massa Q em gramas do potássio radioativo 42 que irá restar de uma quantidade inicial após t horas de decaimento radioativo.

(a) Quantos gramas havia inicialmente?

(b) Quantos gramas permanecem depois de 4 horas?

(c) Quanto tempo irá levar para reduzir pela metade a quantidade inicial de potássio radioativo 42?

49. A acidez de uma substância é medida pelo valor de seu pH, o qual é definido pela fórmula

$$\text{pH} = -\log[H^+]$$

onde o símbolo $[H^+]$ denota a concentração de íons de hidrogênio, medida em moles por litro. A água destilada tem um pH igual a 7; uma substância é chamada *ácida* se tiver pH < 7 e *básica* se tiver pH > 7. Encontre o pH de cada uma das seguintes substâncias e estabeleça se é ácida ou básica.

	SUBSTÂNCIA	$[H^+]$
(a)	Sangue arterial	$3{,}9 \times 10^{-8}$ mol/L
(b)	Tomates	$6{,}3 \times 10^{-5}$ mol/L
(c)	Leite	$4{,}0 \times 10^{-7}$ mol/L
(d)	Café	$1{,}2 \times 10^{-6}$ mol/L

50. Use a definição de pH do Exercício 49 para encontrar a $[H^+]$ da solução que tem pH igual a

(a) 2, 44 (b) 8, 06

51. A altura percebida β de um som em decibéis (dB) está relacionada com sua intensidade I em watts/metro quadrado (W/m²) pela equação

$$\beta = 10 \log (I/I_0)$$

onde $I_0 = 10^{-12}$W/m². Os danos ao ouvido médio ocorrem a partir de 90 dB ou mais. Encontre o nível de decibéis de cada um dos seguintes sons e estabeleça se causará dano à audição.

	SOM	I
(a)	Avião a jato (a 150 m de distância)	$1{,}0 \times 10^2$ W/m²
(b)	Música de *rock* amplificada	1,0 W/m²
(c)	Liquidificador	$1{,}0 \times 10^{-4}$ W/m²
(d)	TV (volume médio a 3 metros de distância)	$3{,}2 \times 10^{-5}$ W/m²

52-54 Use a definição de níveis de decibéis de um som (veja o Exercício 51).

52. Se um som for três vezes tão intenso quanto o outro, quanto maior será seu nível em decibéis?

53. De acordo com uma fonte, o barulho dentro de um carro em movimento está em torno de 70 dB, enquanto um liquidificador gera 93 dB. Encontre a razão da intensidade do barulho do liquidificador com a do automóvel.

54. Suponha que o nível de decibéis de um eco é $\frac{2}{3}$ do nível de decibéis do som original. Se cada eco resulta em outro eco, quantos ecos serão ouvidos a partir de um som de 120 dB, dado que o ouvido humano médio pode ouvir até no mínimo 10 dB?

55. Na ***escala Richter***, a magnitude M de um terremoto está relacionada com a energia liberada E, em joules (J), pela equação

$$\log E = 4{,}4 + 1{,}5\,M$$

(a) Encontre a energia E do terremoto de San Francisco de 1906, que registrou $M = 8{,}2$ na escala Richter.

(b) Se a energia liberada de um terremoto for 10 vezes a de outro, quanto maior será a sua magnitude na escala Richter?

56. Suponha que as magnitudes de dois terremotos difiram por 1 unidade na escala Richter. Encontre a razão entre as energias liberadas pelo terremoto maior em relação ao menor. [*Nota*: Ver o Exercício 55 para a terminologia.]

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.6

1. $(-\infty, +\infty)$; $(0, +\infty)$ **2.** $(-\infty, 1)$; $(-\infty, +\infty)$ **3.** (a) 4^0 (b) $4^{1/2}$ (c) 4^{-2} (d) $4^{3/4}$ (e) $4^{\log_4 5}$ **4.** (a) $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ (b) 2 (c) $\ln 2$ **5.** (a) e^3 (b) 101 (c) 2

1.7 MODELOS MATEMÁTICOS

Nesta seção discutiremos a idéia de "modelagem matemática", que é o procedimento que os matemáticos e os cientistas utilizam para descrever matematicamente os fenômenos físicos. Em particular, explicaremos o método dos "mínimos quadrados", que é uma técnica matemática usada para obter as funções que melhor descrevem um conjunto de dados de observação.

■ MODELOS MATEMÁTICOS

Um ***modelo matemático*** de uma lei física é uma descrição dessa lei na linguagem da Matemática. Tais modelos tornam possível a utilização de métodos matemáticos para dedução de resultados sobre o mundo físico que não sejam evidentes ou que nunca tenham sido observados. Por exemplo, a possibilidade de colocar um satélite artificial em órbita ao redor da Terra foi deduzida matematicamente a partir do modelo de Mecânica formulado por Isaac Newton, praticamente 200 anos antes do lançamento do *Sputnik*, e Albert Einstein (1879-1955) formulou, em 1915, um modelo relativístico da Mecânica que explicou o avanço no periélio do planeta Mercúrio, que não foi confirmado por medições físicas até 1967.

Em uma situação de modelagem típica, um cientista deseja obter uma relação matemática entre duas variáveis x e y usando um conjunto de n pares ordenados de medições

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3), \ldots,\ (x_n, y_n) \qquad (1)$$

que estabelecem uma relação entre valores correspondentes das variáveis. Distinguimos entre dois tipos de fenômenos físicos: os ***fenômenos determinísticos***, em que cada valor de x determina um valor de y, e os ***fenômenos probabilísticos***, em que não é determinado de maneira única o valor de y associado a um valor específico de x. Por exemplo, se y é a quantidade de alongamento que uma força x provoca em uma mola, então cada valor de x determina um único y e, portanto, constitui um modelo determinístico. Por outro lado, se y é o peso de uma pessoa cuja altura é x, então y não está determinado de maneira única por x, já que pessoas com mesma altura podem ter pesos diferentes. Mesmo assim, existe uma "correlação" entre peso e altura, que faz com que seja mais provável que uma pessoa alta pese mais, portanto, isso é um fenômeno probabilístico. Vamos nos ocupar unicamente de fenômenos determinísticos.

Em um modelo determinístico, a variável y é uma função da variável x, e o objetivo é encontrar uma fórmula $y = f(x)$ que melhor descreva os dados. Uma maneira de modelar um conjunto de dados determinísticos é procurar uma função f, denominada ***função interpoladora***, cujo gráfico passe por todos os pontos de dados. Embora as funções interpoladoras sejam apropriadas em certas situações, elas não dão conta de maneira adequada de erros de medi-

ção. Por exemplo, suponha que a relação entre x e y seja sabidamente linear, mas que os dados obtidos por instrumentos de medição com limitações de precisão e por variações aleatórias nas condições experimentais sejam os fornecidos na Figura 1.7.1*a*. Poderíamos usar um aplicativo para encontrar um polinômio de grau 10 cujo gráfico passa precisamente por todos os pontos de dados (Figura 1.7.1*b*). Contudo, um tal modelo polinomial não consegue transmitir a relação de linearidade subjacente aos dados. Uma abordagem melhor é procurar uma equação linear $y = mx + b$ cujo gráfico descreva melhor a relação linear entre os dados, mesmo que esse gráfico não passe por todos (ou qualquer um) dos pontos de dados (Figura 1.7.1*c*).

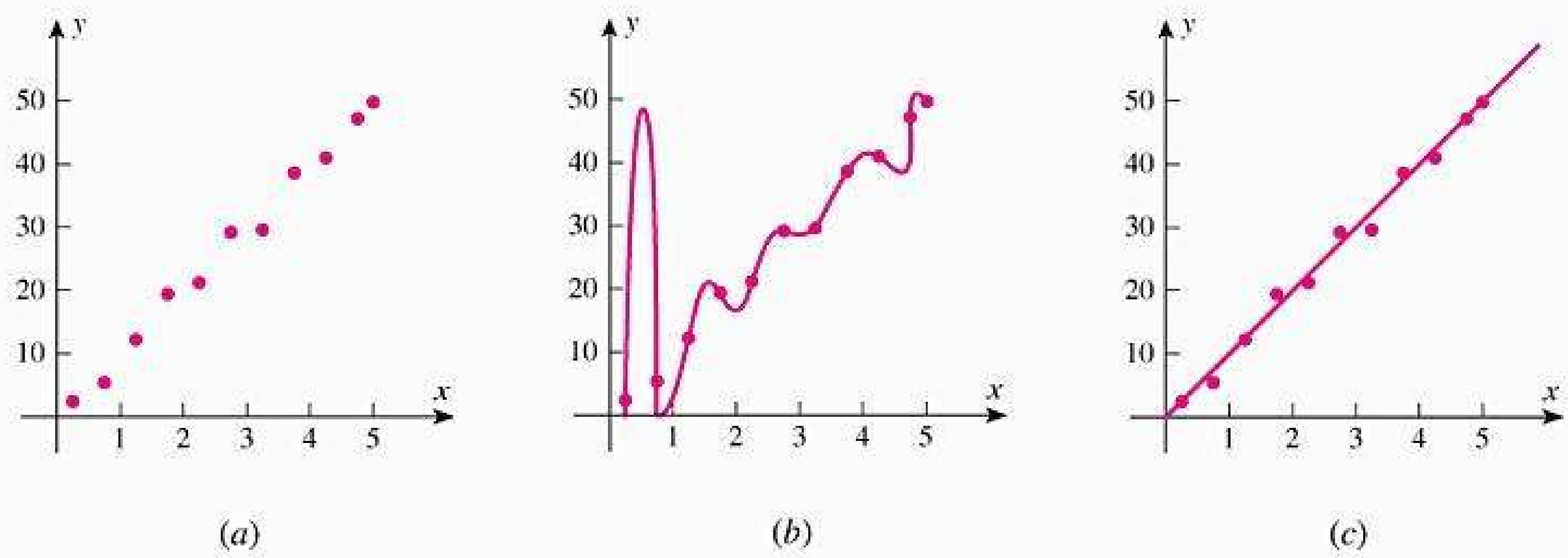


Figura 1.7.1

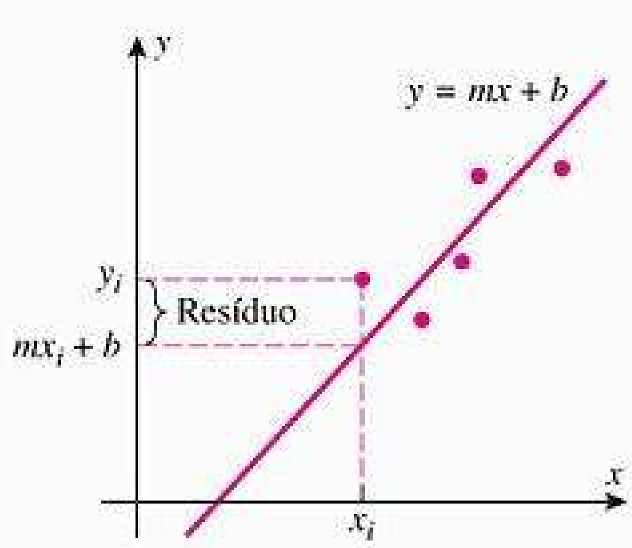


Figura 1.7.2

MODELOS LINEARES

Os métodos mais importantes para obter modelos lineares são baseados na seguinte idéia: dado qualquer modelo linear $y = mx + b$ proposto, trace um segmento de reta vertical conectando cada ponto de dados (y_i, y_i) com a reta proposta e considere as diferenças $y_i - y$ (Figura 1.7.2). Essas diferenças, denominadas ***resíduos***, podem ser interpretadas como os "erros" que resultam ao utilizar a reta para modelar os dados. Pontos acima da reta apresentam erros positivos, pontos abaixo apresentam erros negativos e pontos na reta não têm erro.

Uma maneira de escolher um modelo linear é procurar aquela reta $y = mx + b$ para a qual a soma dos resíduos é nula, a justificativa sendo que assim os erros positivos e negativos se cancelam. Contudo, não é difícil construir modelos em que esse procedimento produz modelos inaceitavelmente pobres, de modo que, por razões que não podemos discutir aqui, o método mais comum de encontrar um modelo linear é procurar aquela reta $y = mx + b$ para a qual *a soma dos quadrados* dos resíduos é a menor possível. Essa reta é denominada ***reta de regressão*** ou ***reta de melhor ajuste de mínimos quadrados***, ou simplesmente ***reta de mínimos quadrados***.

A maioria das calculadoras gráficas, dos sistemas computacionais simbólicos e dos programas de planilhas fornece métodos para obter retas de regressão. Para acompanhar os exemplos desta seção será necessário que o leitor disponha de algum desses recursos computacionais.

É possível calcular uma reta de regressão mesmo nos casos em que os dados não possuam um padrão linear aparente. Desse modo, é importante ter um método quantitativo para determinar se um modelo linear é apropriado para os dados. A medida de linearidade de dados mais comum é o ***coeficiente de correlação***, que, seguindo a tradição, é denotado por r. Embora uma discussão detalhada de coeficientes de correlação esteja além do alcance deste livro, aqui temos alguns fatos básicos:

- Os valores de r estão no intervalo $-1 \leq r \leq 1$, onde r tem o mesmo sinal da inclinação da reta de regressão.
- Se r é igual a 1 ou a -1, então os pontos de dados estão todos sobre uma reta, de modo que um modelo linear é um ajuste perfeito para os dados.
- Se $r = 0$, então os pontos de dados não exibem tendência linear alguma e um modelo linear é inapropriado para os dados.

Quanto mais próximo r estiver de 1 ou de -1, mais próximos ficam os pontos de dados da reta de regressão e mais apropriada é a reta de regressão como um modelo para esses dados. Quanto mais próximo r estiver de 0, mais dispersos estão os pontos de dados e menos apropriada é a reta de regressão como um modelo para esses dados (Figura 1.7.3).

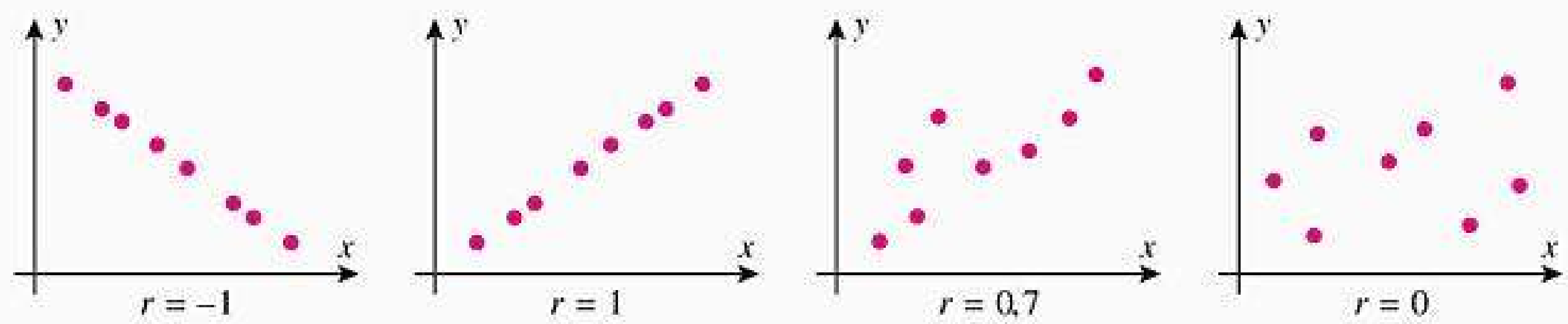


Figura 1.7.3

Enunciado de maneira menos precisa, podemos dizer que o valor de r^2 é uma medida da percentagem dos pontos de dados que caem em uma "faixa linear mais estreita". Assim, $r = 0{,}5$ significa que 25% dos pontos de dados caem em uma faixa linear mais estreita e $r = 0{,}9$ significa que 81% dos pontos caem em uma faixa linear mais estreita. (Uma explicação precisa do que significa "faixa linear mais estreita" requer idéias da Estatística.)

Tabela 1.7.1

TEMPERATURA T (°C)	PRESSÃO p (atm)
0	2,54
50	3,06
100	3,46
150	4,00
200	4,41

► Exemplo 1 A Tabela 1.7.1 fornece um conjunto de pontos de dados que relacionam a pressão p em atmosferas (atm) e a temperatura T (em °C) de uma quantidade fixa de dióxido de carbono em um cilindro fechado. O gráfico associado na Figura 1.7.4*a* sugere que existe uma relação linear entre a pressão e a temperatura.

(a) Use um recurso computacional para encontrar a reta de mínimos quadrados. Se o recurso fornecer o coeficiente de correlação, encontre-o.

(b) Use o modelo obtido em (a) para prever a pressão quando a temperatura for de 250 °C.

(c) Use o modelo obtido em (a) para prever a temperatura na qual a pressão do gás será nula.

Solução (a) A reta de mínimos quadrados é dada por $p = 0{,}00936T + 2{,}558$ (Figura 1.7.4*b*) com coeficiente de correlação $r = 0{,}998979$.

Solução (b) Se $T = 250$, então $p = (0{,}00936)(250) + 2{,}558 = 4{,}898$ (atm).

Solução (c) Resolvendo a equação $0 = p = 0{,}00936T + 2{,}558$, obtemos $T \approx -273{,}291$°C. ◄

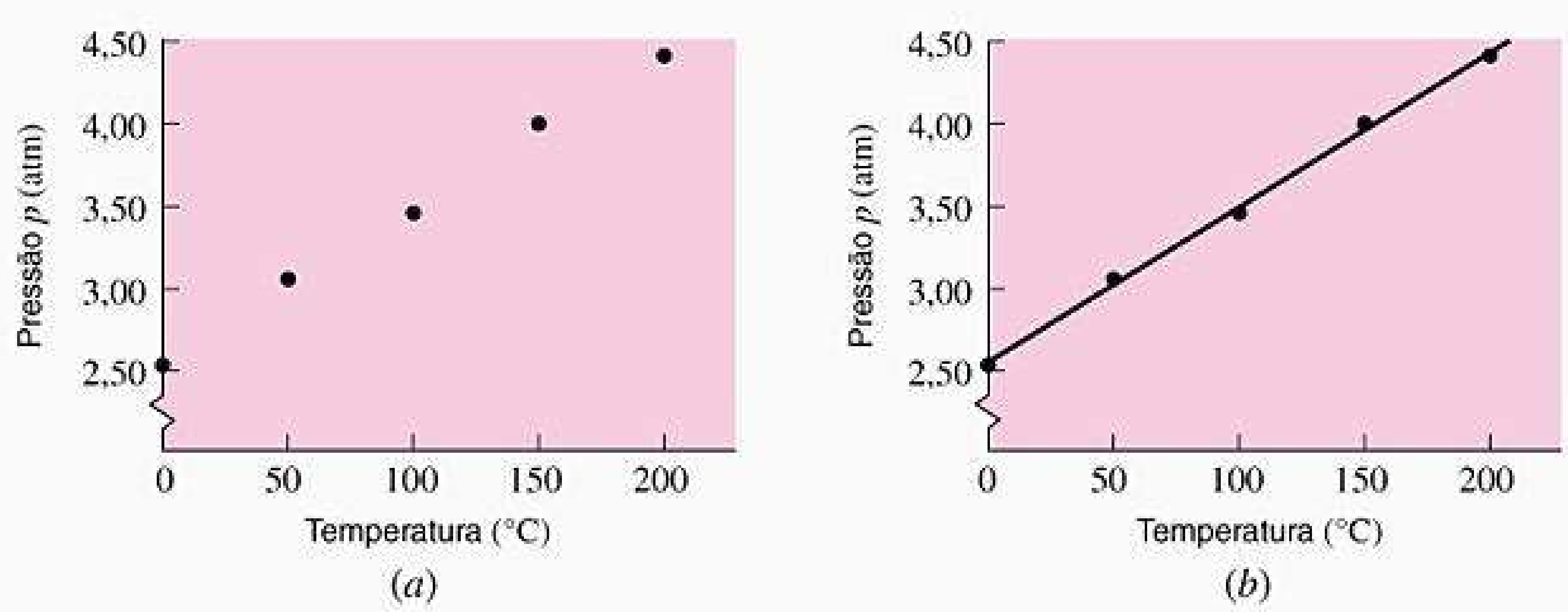


Figura 1.7.4

Nem sempre é conveniente (ou necessário) obter uma reta de mínimos quadrados para criar um modelo de um fenômeno linear. Em alguns casos, são suficientes métodos mais elementares. Aqui temos um exemplo.

▶ Exemplo 2 A Figura 1.7.5*a* mostra um gráfico de temperatura *versus* altitude transmitido pela nave espacial *Magellan*, quando entrou na atmosfera de Vênus em outubro de 1991. O gráfico sugere fortemente que há uma relação linear entre temperatura e altitude para altitudes entre 35 e 60 km.

(a) Use o gráfico transmitido pela *Magellan* para encontrar um modelo linear de temperatura *versus* altitude na atmosfera de Vênus que seja válido entre 35 e 60 km de altitude.

(b) Use o modelo obtido em (a) para estimar a temperatura na superfície de Vênus e discuta as hipóteses feitas para obter a estimativa.

Solução (a) Seja T a temperatura em kelvins e h a altitude em quilômetros. Vamos, primeiro, estimar a inclinação m da parte linear do gráfico, depois estimar as coordenadas de um ponto (h_1, T_1) nos dados daquela parte e, então, usar a forma ponto-inclinação da reta

$$T - T_1 = m(h - h_1) \qquad (2)$$

O gráfico passa aproximadamente pelo ponto (60, 250), assim vamos tomar $h_1 \approx 60$ e $T_1 \approx 250$. Na Figura 1.7.5*b,* esboçamos uma reta que aproxima a parte linear dos dados. Usando a intersecção da reta com os lados da malha, estimamos a inclinação em

$$m \approx \frac{100 - 490}{78 - 30} = -\frac{390}{48} = -8{,}125 \text{ K/km}$$

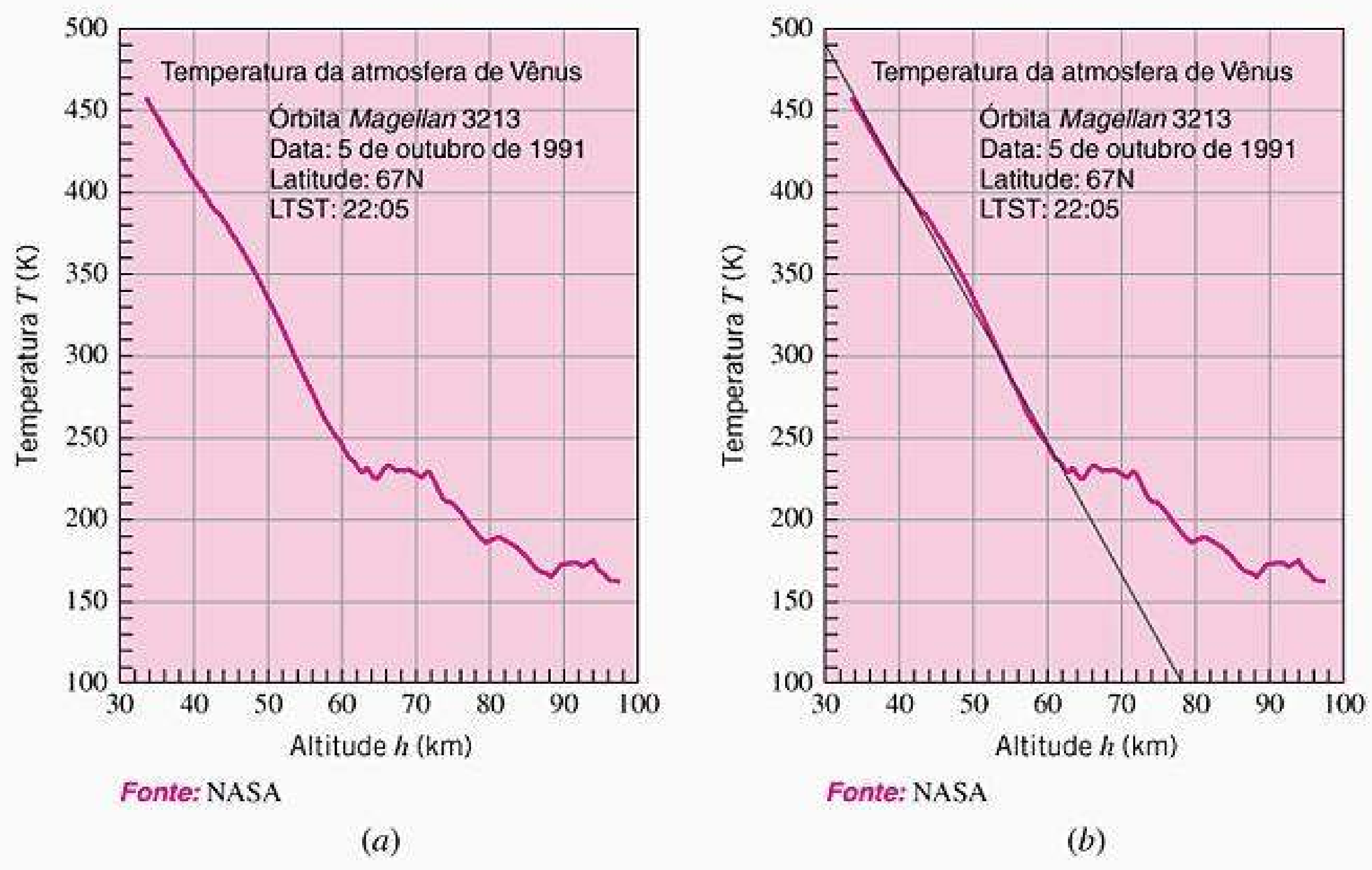


Figura 1.7.5

No melhor dos casos, o método do Exemplo 2 é grosseiro, uma vez que depende da obtenção de estimativas aproximadas de dados numéricos de um gráfico. Mesmo assim, o resultado final é muito bom, pois as informações recentes da NASA dão a tempertaura na superfície de Vênus em cerca de 740 K (o suficiente para derreter chumbo).

Substituindo nossas estimativas de h_1, T_1 e m em (2), obtemos a equação

$$T - 250 = -8{,}125(h - 60)$$

ou, de forma equivalente,

$$T = -8{,}125h + 737{,}5 \tag{3}$$

Solução (b) A nave espacial *Magellan* interrompeu a transmissão de dados a uma altitude de aproximadamente 35 km. Assim, não podemos estar certos de que o modelo linear se aplique a altitudes mais baixas. Todavia, *supondo* que o modelo seja válido para altitudes mais baixas, podemos aproximar a temperatura na superfície de Vênus, fazendo $h = 0$ em (3). Obtemos $T \approx 737{,}5$ K (464,32°C). ◄

■ MODELANDO COM FUNÇÕES QUADRÁTICAS E TRIGONOMÉTRICAS

Embora os modelos lineares sejam simples, nem sempre são apropriados. Pode ocorrer, por exemplo, que a forma gráfica dos dados ou alguma lei conhecida sugiram um modelo quadrático $y = ax^2 + bx + c$. A maioria das calculadoras gráficas, dos sistemas computacionais simbólicos e dos programas de planilhas fornece métodos para obter uma ***curva quadrática de regressão*** para um conjunto de pontos de dados que minimize a soma dos quadrados dos resíduos.

Tabela 1.7.2

TEMPO t (s)	ALTURA h (cm)
0,008333	98,4
0,025	96,9
0,04167	95,1
0,05833	92,9
0,075	90,8
0,09167	88,1
0,10833	85,3
0,125	82,1
0,14167	78,6
0,15833	74,9

► Exemplo 3 Para estudar as equações do movimento de um corpo em queda, um estudante de um laboratório de Física colhe os dados da Tabela 1.7.2, que mostra a altura de um corpo em vários instantes de tempo ao longo de um intervalo de 0,15 segundo. Se a resistência do ar for ignorada, e se a aceleração da gravidade for considerada constante, então leis conhecidas da Física afirmam que a altura h deveria ser uma função quadrática do tempo t. Isso é consistente com a Figura 1.7.6*a*, em que os pontos de dados esboçados sugerem a forma de uma parábola invertida.

(a) Determine a curva quadrática de recessão para os dados na Tabela 1.7.2.

(b) De acordo com o modelo obtido em (a), quando o objeto atinge o solo?

Solução (a) Usando a rotina de regressão quadrática de uma calculadora, obtemos que a curva quadrática que melhor ajusta os dados da Tabela 1.7.2 tem equação

$$h = 99{,}02 - 73{,}21t - 499{,}13t^2$$

A Figura 1.7.6*b* mostra os pontos de dados e o gráfico dessa função quadrática no mesmo sistema de eixos. Parece que temos um ajuste excelente entre os dados e a nossa curva.

Solução (b) Resolvendo a equação $0 = h = 99{,}02 - 73{,}21t - 499{,}13t^2$, vemos que o objeto atingirá o solo em $t \approx 0{,}38$ s. ◄

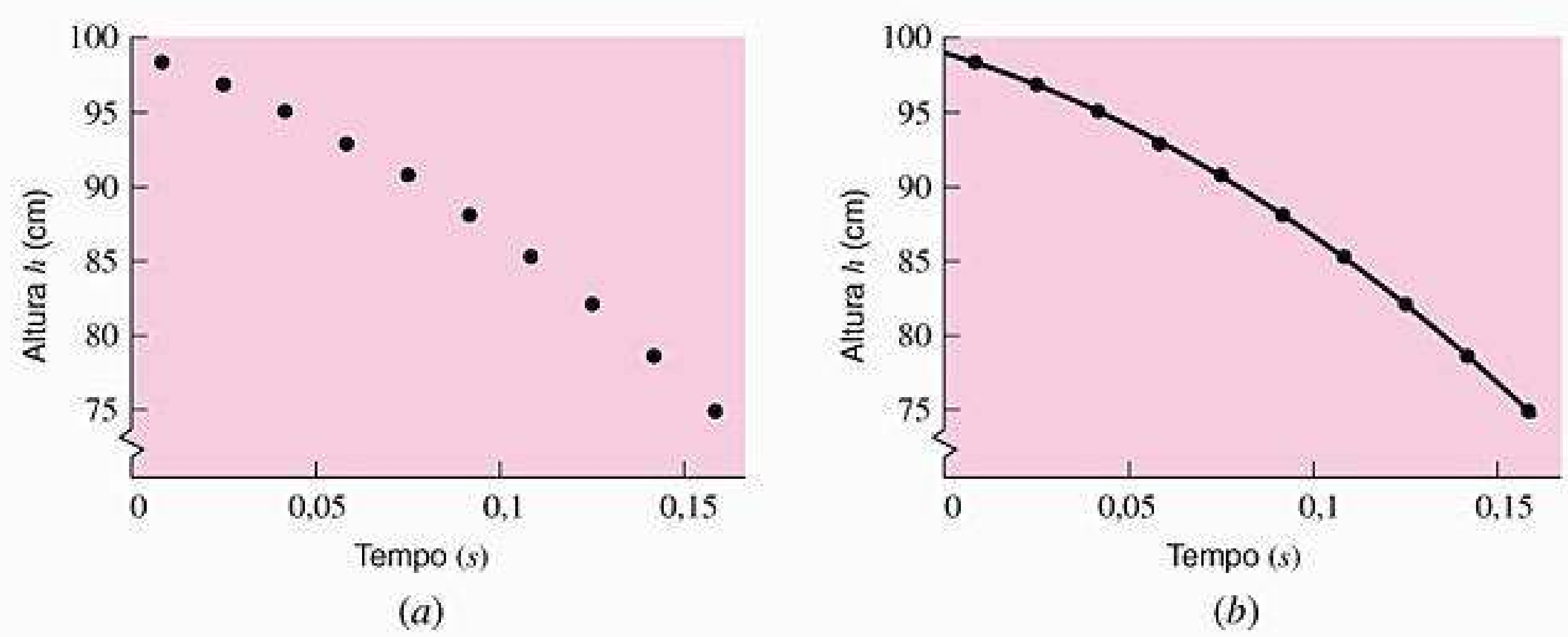


Figura 1.7.6

As funções trigonométricas $y = A$ sen $(Bx - C)$ e $y = A \cos(Bx - C)$ são particularmente úteis para modelar fenômenos periódicos.

► Exemplo 4 A Figura 1.7.7*a* fornece uma tabela e um gráfico dos dados de temperatura registrados em um período de 24 horas na cidade de Filadélfia, EUA.* Encontre uma função que modele os dados e faça um gráfico conjunto dos dados e da função.

Solução O padrão dos dados sugere que a relação entre a temperatura T e o tempo t pode ser modelada por uma função senoidal que foi transladada horizontal e verticalmente, de modo que procuramos por uma equação do tipo

$$T = D + A \text{ sen } [Bt - C] = D + A \text{ sen } \left[B\left(t - \frac{C}{B}\right)\right] \tag{4}$$

Uma vez que a temperatura mais alta é de 95°F e a mais baixa é de 75°F, tomamos $2A = 20$, ou $A = 10$. O ponto médio entre as temperaturas mais alta e mais baixa é 85°F, portanto temos um deslocamento vertical de $D = 85$. O período parece ser da ordem de 24, logo $2\pi/B = 24$ ou $B = \pi/12$. O deslocamento horizontal parece ser cerca de 10 (verifique), portanto $C/B = 10$. Substituindo esses valores em (4), resulta a equação

$$T = 85 + 10 \text{ sen } \left[\frac{\pi}{12}(t - 10)\right] \tag{5}$$

cujo gráfico aparece na Figura 1.7.7*b*. ◄

TEMPERATURAS EM FILADÉLFIA
DE 1 DA MANHÃ ATÉ A MEIA-NOITE EM 27 DE AGOSTO DE 1993
(t = HORAS APÓS A MEIA-NOITE E T = TEMPERATURA EM GRAUS FAHRENHEIT)

	ANTES DO MEIO-DIA		DEPOIS DO MEIO-DIA	
	t	T	t	T
1:00	1	78°	13	91°
2:00	2	77°	14	93°
3:00	3	77°	15	94°
4:00	4	76°	16	95°
5:00	5	76°	17	93°
6:00	6	75°	18	92°
7:00	7	75°	19	89°
8:00	8	77°	20	86°
9:00	9	79°	21	84°
10:00	10	83°	22	83°
11:00	11	87°	23	81°
12:00	12	90°	24	79°

Fonte: *Philadelphia Inquirer*, 28 August 1993.

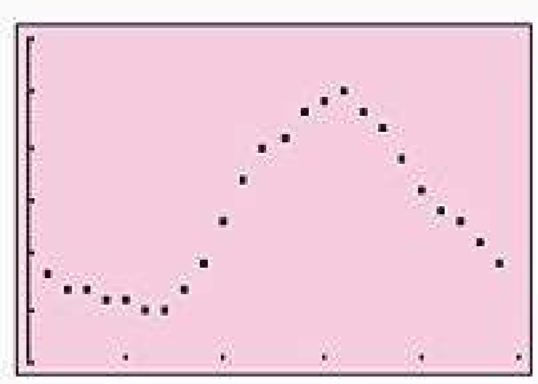
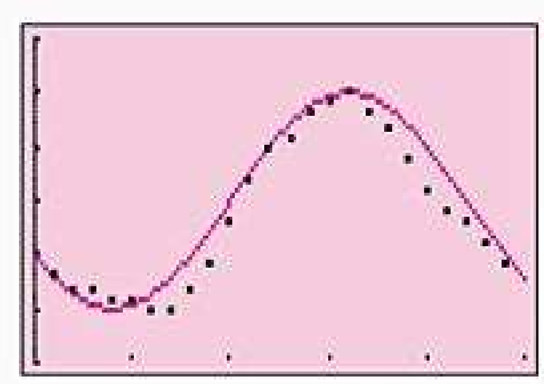


Gráfico dos dados
[0, 25] × [70, 100]
t T

(*a*)



Modelo para os dados
$T = 85 + 10 \text{ sen}[(\pi/12)(t - 10)]$
[0, 25] × [70, 100]
t T

(*b*)

Figura 1.7.7

* Este exemplo foi baseado no artigo "Everybody Talks About It! – Weather Investigations", por Gloria S. Dion and Iris Brann Fetta, *The Mathematics Teacher*, Vol. 89, Nº 2, February 1996, p. 160-165.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Observe que a Equação (5) neste exemplo *não foi* obtida minimizando a soma dos quadrados dos resíduos; em vez disso, usamos o recurso gráfico da calculadora para ver que o modelo proposto deu um ajuste *razoável* dos dados. Usando um aplicativo específico, podemos mostrar que a curva da forma $T = D + A \text{ sen } (Bt - C)$ que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos para os dados na Figura 1.7.7 é dada por

$$y = 84{,}2037 + 9{,}5964 \text{ sen } (0{,}2849t - 2{,}9300)$$

Use seu recurso computacional para comparar o gráfico dessa curva com o gráfico de (5).

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.7 *(Ver página 86 para respostas.)*

1. Em cada parte, dê um modelo apropriado (linear, quadrático, trigonométrico) para uma coleção de pontos de dados (x, y) para os quais se aplica a situação dada.
   (a) y é a distância percorrida no tempo x por um automóvel acelerando a uma taxa constante: __________.
   (b) y é a velocidade no tempo x de um automóvel acelerando a uma taxa constante: __________.
   (c) y é a altura de um homem com x centímetros de altura: __________.
   (d) y é a fração da Lua iluminada x dias depois do início do ano: __________.

2. Para o conjunto de dados $\{(-1, 0), (0, 0), (1, 2), (3, 3)\}$ e a reta $y = x + 1$, a soma dos quadrados dos resíduos é __________.

3. Suponha que um conjunto de dados tenha um modelo linear com coeficiente de correlação 0,5 e que um segundo conjunto de dados tenha um modelo linear com coeficiente de correlação $-0{,}75$. Qual dos dois modelos parece ser mais apropriado para ajustar o conjunto de dados correspondente?

4. Considere um conjunto de dados que consiste nos pontos $(0, -1)$ e $(0, 1)$. Seja L a reta $y = mx + b$.
   (a) A soma dos quadrados dos resíduos dos dois pontos a L é __________.
   (b) Se L minimiza a soma dos quadrados dos resíduos dos dois pontos, então $b =$ __________.

EXERCÍCIOS 1.7 Recurso Gráfico

1. Uma das duas retas esboçadas na figura abaixo é a reta de regressão. Qual delas?

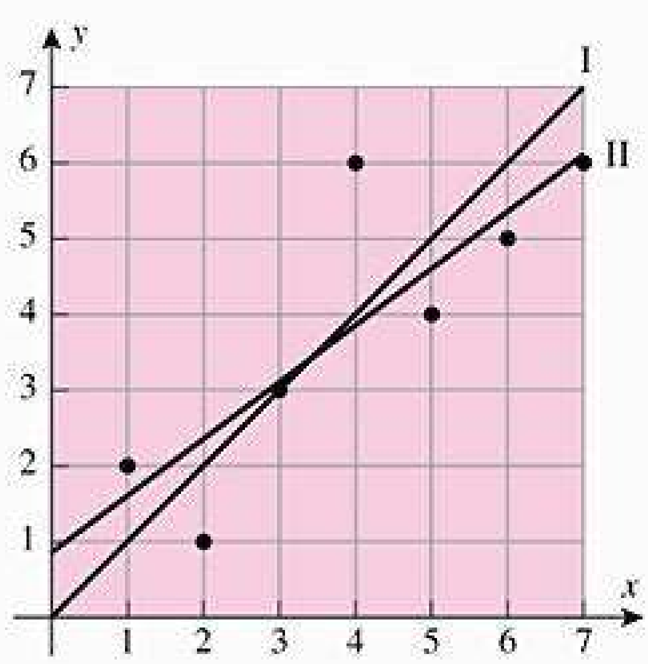


Figura Ex-1

2. Em cada parte, determine se um modelo (linear, quadrático ou trigonométrico) pode descrever razoavelmente o gráfico de dados da figura a seguir.

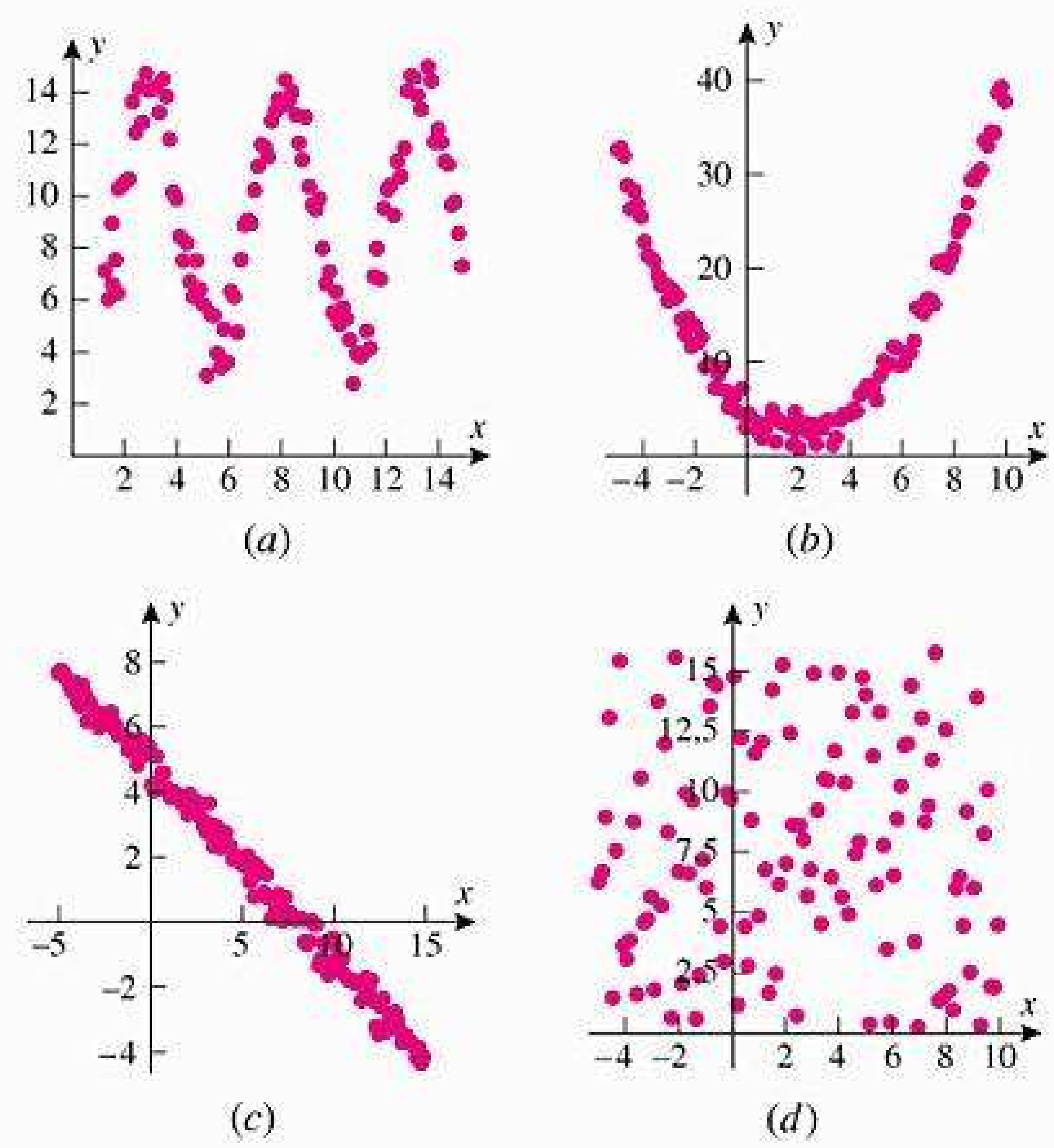


Figura Ex-2

3. A Tabela 1.1.1 fornece dados das velocidades máximas classificatórias das 500 milhas de Indianápolis de 1987 a 2004. Encontre a reta de mínimos quadrados desses dados. Qual é o coeficiente de correlação? Esboce a reta de mínimos quadrados em um gráfico dos pontos de dados.

4. Um recipiente de 25 litros contém 150 g de O_2. A pressão p desse gás é medida em várias temperaturas T, conforme a tabela abaixo.

(a) Determine a reta de mínimos quadrados para os dados da tabela.

(b) Use o modelo obtido em (a) para uma estimativa da pressão do gás à temperatura de −50°C.

Tabela Ex-4

TEMPERATURA T (°C)	PRESSÃO p (atm)
0	4,18
50	4,96
100	5,74
150	6,49
200	7,26

5. Um recipiente de 20 litros contém 100 g de N_2. A pressão p desse gás é medida em várias temperaturas T, conforme a tabela abaixo.

(a) Encontre a reta de mínimos quadrados para essa coleção de pontos de dados. Se seu recurso computacional fornecer coeficiente de correlação, encontre-o.

(b) Use o modelo obtido em (a) para prever a pressão do gás à temperatura de −50°C.

(c) Use o modelo obtido em (a) para prever a temperatura à qual a pressão do gás será nula.

Tabela Ex-5

TEMPERATURA T (°C)	PRESSÃO p (atm)
0	3,99
25	4,34
50	4,70
75	5,08
100	5,45

6. Um recipiente de 40 litros contém 20 g de H_2. A pressão p desse gás é medida em várias temperaturas T, conforme a tabela a seguir.

(a) Encontre a reta de mínimos quadrados para essa coleção de pontos de dados. Se seu recurso computacional fornecer coeficiente de correlação, encontre-o.

(b) Use o modelo obtido em (a) para prever a temperatura à qual a pressão do gás será nula.

(c) Encontre aproximadamente a temperatura do gás na qual um aumento de 10°C acarreta um aumento de 5% na pressão.

Tabela Ex-6

TEMPERATURA T (°C)	PRESSÃO p (atm)
0	5,55
30	6,13
60	6,75
90	7,35
120	7,98

7. A ***resistividade*** de um metal é uma medida do quanto um arame feito dele resiste ao fluxo de uma corrente elétrica. (A verdadeira *resistência* do arame dependerá tanto da resistividade do metal quanto das dimensões do arame.) Uma unidade comum de resistividade é o ohm-metro ($\Omega \cdot$ m). Experimentos mostram que, baixando a temperatura de um metal, também baixa sua resistividade. A tabela abaixo fornece a resistividade do cobre a várias temperaturas.

(a) Encontre a reta de mínimos quadrados para essa coleção de pontos de dados.

(b) Use o modelo obtido em (a) para prever a temperatura à qual a resistividade do cobre será nula.

Tabela Ex-7

TEMPERATURA T (°C)	RESISTIVIDADE ($10^{-8}\ \Omega \cdot$ m)
−100	0,82
−50	1,19
0	1,54
50	1,91
100	2,27
150	2,63

8. A tabela abaixo fornece a resistividade do tungstênio a várias temperaturas.

(a) Encontre a reta de mínimos quadrados para essa coleção de pontos de dados.

(b) Use o modelo obtido em (a) para prever a temperatura à qual a resistividade do tungstênio será nula.

Tabela Ex-8

TEMPERATURA T (°C)	RESISTIVIDADE ($10^{-8}\ \Omega \cdot$ m)
−100	2,43
−50	3,61
0	4,78
50	5,96
100	7,16
150	8,32

9. A tabela a seguir fornece a medida em centímetros da distensão de uma mola por vários pesos nela pendurados.

(a) Use regressão linear para expressar a medida da distensão da mola em função do peso pendurado.

(b) Use o modelo obtido em (a) para determinar o peso necessário para distender a mola por 8 cm.

Tabela Ex-9

PESO (kgf)	DISTENSÃO (cm)
0	0
2	0,99
4	2,01
6	2,99
8	4,00
10	5,03
12	6,01

10. A tabela abaixo fornece a medida em centímetros da distensão de uma mola por vários pesos nela pendurados.

(a) Use regressão linear para expressar a medida da distensão da mola em função do peso pendurado.

(b) Suponha que a mola tenha sido distendida por uma certa medida por um peso tal que, adicionando mais 5 kgf ao peso, dobre a medida da distensão da mola. Use o modelo obtido em (a) para determinar a medida da distensão original da mola.

Tabela Ex-10

PESO (kgf)	DISTENSÃO (cm)
0	0
1	0,73
2	1,50
3	2,24
4	3,02
5	3,77

11. A tabela abaixo fornece a altura (em pés e polegadas) e o número de rebotes por minuto das jogadoras da equipe de basquete feminino do Davidson College, nos EUA, que jogaram mais de 100 minutos durante a temporada de 2002-2003. (Na medida de comprimento de pés e polegadas, padrão nos EUA, 12 polegadas correspondem a 1 pé.)

(a) Encontre a reta de mínimos quadrados desses dados. Se seu recurso computacional fornecer coeficiente de correlação, encontre-o.

(b) Esboce a reta de mínimos quadrados em um gráfico dos pontos de dados.

(c) A reta de mínimos quadrados é um bom modelo para esses dados? Explique.

Tabela Ex-11

ALTURA	REBOTES POR MINUTO
6'0"	0,132
6'0"	0,252
5'6"	0,126
5'10"	0,139
6'2"	0,227
6'3"	0,299
6'0"	0,170
5'5"	0,071
6'2"	0,222

12. A tabela abaixo fornece a altura (em pés e polegadas) e o peso (em libras) dos jogadores da equipe de basquete masculino do Davidson College, nos EUA, na temporada de 2002-2003.

(a) Encontre a reta de mínimos quadrados desses dados. Se seu recurso computacional fornecer coeficiente de correlação, encontre-o.

(b) Esboce a reta de mínimos quadrados em um gráfico dos pontos de dados.

(c) Use esse modelo para prever o peso do novo jogador de 7'00" de altura dessa equipe.

Tabela Ex-12

ALTURA	PESO
6'2"	185
6'6"	215
6'1"	175
6'1"	180
6'6"	210
5'10"	175
6'9"	210
6'1"	180

ALTURA	PESO
6'5"	210
6'4"	185
6'5"	190
6'3"	180
6'8"	235
6'8"	215
6'10"	235

ENFOCANDO CONCEITOS

13. Um conjunto de dados consiste nos três pontos (0, 0), (1, 0) e (1, 1).

(a) Para esse conjunto de dados e a reta $y = x + b$, expresse a soma dos quadrados dos resíduos como uma função do parâmetro b.

(b) Usando a resposta de (a), encontre a reta de inclinação 1 para a qual a soma dos quadrados dos resíduos é um mínimo.

14. Um conjunto de dados consiste em dois pontos distintos com a mesma coordenada x. Explique por que há uma infinidade de retas de regressão para esse conjunto de dados. Todas essas retas de regressão têm algo em comum. O que é?

15. Um conjunto de dados consiste em três pontos distintos, dois dos quais têm a mesma coordenada x. Explique como usar sua resposta ao Exercício 14 para encontrar a reta de regressão para esse conjunto de dados.

16. Um conjunto de dados consiste em quatro pontos que constituem os vértices de um trapézio com dois lados paralelos ao eixo y. Explique como usar sua resposta ao Exercício 14 para encontrar a reta de regressão para esse conjunto de dados.

17. (A Idade do Universo) No começo do século XX, o astrônomo Edwin P. Hubble (1889-1953) notou uma relação inesperada entre a velocidade radial de uma galáxia e sua distância d de um ponto de referência (por exemplo, a Terra). Essa relação, conhecida agora como ***lei de Hubble***, estabelece que as galáxias estão se afastando com uma velocidade v diretamente proporcional à distância d. Isso se expressa geralmente como $v = Hd$, onde H, conhecida como ***constante de Hubble***, é a constante de proporcionalidade. Na aplicação

dessa fórmula é usual expressar v em quilômetros por segundo (km/s) e d em milhões de anos-luz (Mly); dessa forma, H tem unidades de km/s/Mly. A figura abaixo mostra uma plotagem original obtida por Hubble e seu colaborador Milton L. Humason (1891-1972) da direção geral da reta da relação velocidade-distância.

(a) Use a direção geral da reta na plotagem para estimar a constante de Hubble.

(b) Uma estimativa da idade do Universo pode ser obtida supondo que as galáxias movem-se com uma velocidade constante v, caso em que v e d estão relacionadas por $d = vt$. Supondo que o Universo começou com um "big-bang", após o qual iniciou sua expansão, mostre que o Universo tem aproximadamente $1{,}5 \times 10^{10}$ anos de idade. [Use a conversão 1 Mly $\approx 9{,}04 \times 10^{18}$ km e tome $H = 20$ km/s/Mly, o que está de acordo com as estimativas correntes de H, que o colocam entre 15 e 27 km/s/Mly. (Observe que as estimativas atuais são significativamente menores do que as que resultam dos dados de Hubble).]

(c) Em um modelo mais realístico do Universo, a velocidade v deveria decrescer com o tempo. Qual é o efeito disso em sua estimativa em (b)?

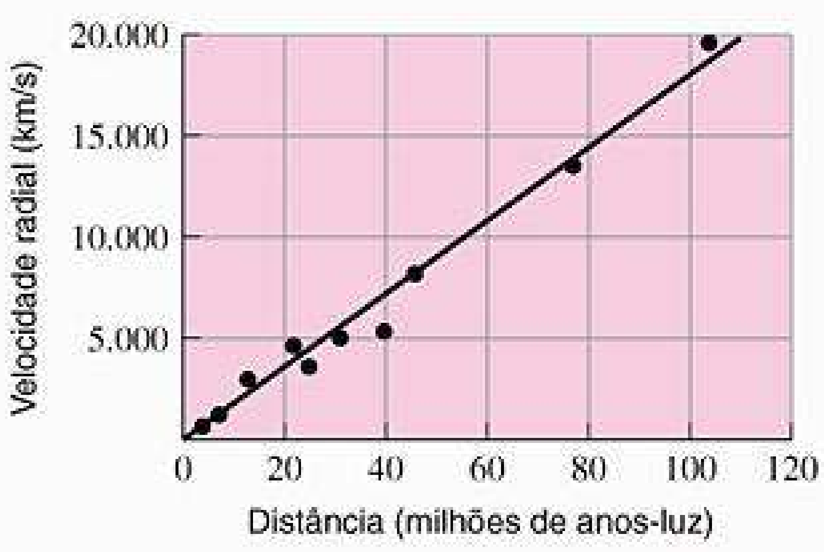


Figura Ex-17

18. A tabela abaixo fornece dados da população dos EUA em intervalos de 10 anos de 1790 a 1850. Use um modelo de regressão quadrática para modelar a população dos EUA como função do tempo desde 1790. Qual é a previsão do modelo obtido para a população no ano de 2000? Quão precisa é essa previsão?

Tabela Ex-18

ANO t	POPULAÇÃO P (em milhões)
1790	3,9
1800	5,3
1810	7,2
1820	9,6
1830	12
1840	17
1850	23

Fonte: *The World Almanac.*

19. A tabela abaixo fornece o número de minutos com luz do dia com incrementos de 10 dias, previstos para a cidade de Davidson, na Carolina do Norte, EUA, durante o ano de 2000. Encontre uma função que modele os dados dessa tabela e faça o esboço do gráfico dessa função junto com os pontos de dados.

Tabela Ex-19

DIA	LUZ DO DIA (min)	DIA	LUZ DO DIA (min)
10	716	190	986
20	727	200	975
30	744	210	961
40	762	220	944
50	783	230	926
60	804	240	905
70	826	250	883
80	848	260	861
90	872	270	839
100	894	280	817
110	915	290	795
120	935	300	774
130	954	310	755
140	969	320	738
150	982	330	723
160	990	340	712
170	993	350	706
180	992	360	706

20. A tabela abaixo fornece a fração iluminada da Lua (como é vista da Terra) à meia-noite, observada em intervalos de 2 dias durante os 60 primeiros dias de 1999. Encontre uma função que modele os dados dessa tabela e faça o esboço do gráfico dessa função junto com os pontos de dados.

Tabela Ex-20

DIA	ILUMINAÇÃO	DIA	ILUMINAÇÃO
2	1	32	1
4	0,94	34	0,93
6	0,81	36	0,79
8	0,63	38	0,62
10	0,44	40	0,43
12	0,26	42	0,25
14	0,12	44	0,10
16	0,02	46	0,01
18	0	48	0,01
20	0,07	50	0,11
22	0,22	52	0,29
24	0,43	54	0,51
26	0,66	56	0,73
28	0,85	58	0,90
30	0,97	60	0,99

21. A tabela a seguir fornece dados sobre a relação entre a distância d percorrida em metros e o tempo decorrido t em segundos para um objeto largado perto da superfície da Terra. Faça um

gráfico da distância como função do tempo e dê um palpite sobre uma função tipo raiz quadrada que forneça um modelo razoável para t em termos de d. Use um recurso gráfico para confirmar que seu palpite foi razoável.

Tabela Ex-21

d (metros)	0	2,5	5	10	15	20	25
t (segundos)	0	0,7	1,0	1,4	1,7	2	2,3

22. (a) A tabela a seguir fornece dados de cinco luas do planeta Saturno. Nela, RAIO indica o *raio orbital* da lua, ou seja, a distância média r entre a lua e Saturno, e ÓRBITA indica o *tempo de órbita* da lua, ou seja, o tempo t em dias que a lua leva para uma órbita completa em torno de Saturno. Para cada par de dados, calcule $tr^{-3/2}$ e use seu resultado para obter um modelo razoável para r como uma função de t.

(b) Use o modelo obtido em (a) para estimar o raio orbital da lua Enceladus, dado que seu tempo de órbita é de $t \approx 1{,}370$ dia.

(c) Use o modelo obtido em (a) para estimar o tempo de órbita da lua Tethys, dado que seu raio orbital é de $r \approx 2{,}9467 \times 10^5$ km.

Tabela Ex-22

LUA	RAIO (100.000 km)	ÓRBITA (dias)
1980S28	1,3767	0,602
1980S27	1,3935	0,613
1980S26	1,4170	0,629
1980S3	1,5142	0,694
1980S1	1, 5147	0,695

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.7

1. (a) quadrática (b) linear (c) linear (d) trigonométrica **2.** 2 **3.** O modelo com coeficiente de correlação −0,75 **4.** (a) $2b^2 + 2$ (b) 0

1.8 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Até aqui, nosso estudo tem focalizado gráficos de funções. Porém, como tais gráficos devem passar pelo teste da reta vertical, isso exclui curvas com auto-intersecções e até mesmo algumas curvas básicas como os círculos. Nesta seção, vamos estudar um método alternativo de descrição algébrica de curvas que não está sujeito a uma restrição tão severa como o teste da reta vertical.

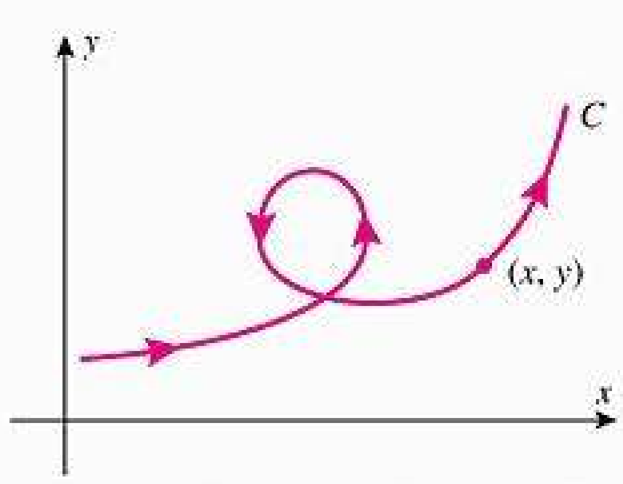
Este material está colocado aqui como uma opção paramétrica adiantada. Ele pode, porém, ser adiado até o Capítulo 11, se a preferência for essa.

■ EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Suponha que uma partícula move-se ao longo de uma curva C no plano xy, de tal modo que suas coordenadas x e y, como funções do tempo, são

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

Dizemos que estas são as ***equações paramétricas*** do movimento da partícula e nos referimos a C como a ***trajetória*** da partícula ou o ***gráfico*** das equações (Figura 1.8.1). A variável t é denominada ***parâmetro*** das equações.



Uma partícula em movimento com trajetória C

Figura 1.8.1

▶ Exemplo 1 Esboce a trajetória no intervalo $0 \le t \le 10$ da partícula cujas equações paramétricas do movimento são

$$x = t - 3\ \text{sen}\ t,\ y = 4 - 3\cos t \qquad (1)$$

Solução Uma forma de esboçar a trajetória é escolher uma sucessão representativa de instantes, marcar os pontos com as coordenadas correspondentes (x, y) e, depois, conectá-los por

uma curva lisa. A trajetória na Figura 1.8.2 foi obtida dessa forma a partir da Tabela 1.8.1, na qual as coordenadas aproximadas da partícula são dadas em incrementos de 1 unidade no tempo. Observe que na figura não há um eixo t; os valores de t aparecem somente como legenda nos pontos plotados e, mesmo assim, são geralmente omitidos, a não ser que seja particularmente importante enfatizar a localização da partícula em instantes específicos. ◀

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Leia o manual de seu recurso gráfico para aprender como fazer gráficos de equações paramétricas e, então, gere a trajetória do Exemplo 1. Explore o comportamento da partícula além do instante $t = 10$.

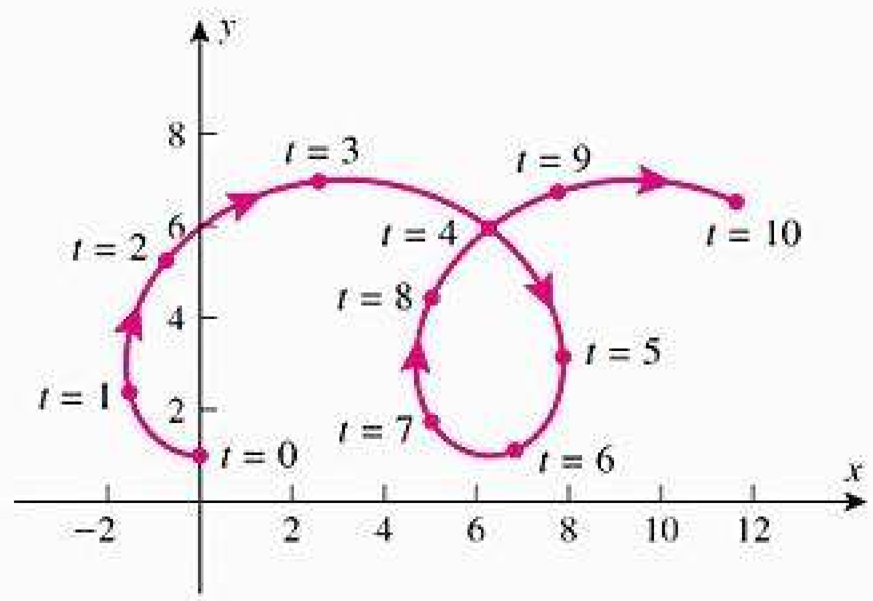


Figura 1.8.2

Tabela 1.8.1

t	x	y
0	0,0	1,0
1	–1,5	2,4
2	–0,7	5,2
3	2,6	7,0
4	6,3	6,0
5	7,9	3,1
6	6,8	1,1
7	5,0	1,7
8	5,0	4,4
9	7,8	6,7
10	11,6	6,5

Embora seja mais comum que as equações paramétricas apareçam em problemas de movimento com o tempo como parâmetro, elas também surgem em outros contextos. Assim, exceto quando o problema exija que nas equações o parâmetro t na equação

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

represente o tempo, ele deve ser visto simplesmente como uma variável independente que varia sobre algum intervalo de números reais. (Na verdade, não há necessidade de usar a letra t para o parâmetro; qualquer letra não-reservada para outro propósito poderia ser usada.) Se nenhuma restrição sobre o parâmetro for estabelecida explicitamente ou estiver subentendida pelas equações, então deve-se entender que ele varia de $-\infty$ a $+\infty$. Para indicar que um parâmetro t está restrito a um intervalo $[a, b]$,vamos escrever

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

▶ **Exemplo 2** Encontre o gráfico das equações paramétricas

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t\ (0 \leq t \leq 2\pi) \tag{2}$$

Solução Uma maneira de encontrar o gráfico é eliminar o parâmetro t, notando que

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Assim, o gráfico está contido no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Esse resultado pode também ser deduzido geometricamente, interpretando t como o ângulo varrido por uma reta radial da origem ao ponto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ no círculo unitário (Figura 1.8.3). À medida que t cresce de 0 até 2π, o ponto descreve o círculo no sentido anti-horário, começando em $(1, 0)$ quando $t = 0$ e completando uma revolução inteira quando $t = 2\pi$. Podem-se obter diferentes partes do círculo variando o intervalo no qual varia o parâmetro. Por exemplo:

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \leq t \leq \pi) \tag{3}$$

representa simplesmente o semicírculo superior na Figura 1.8.3. ◀

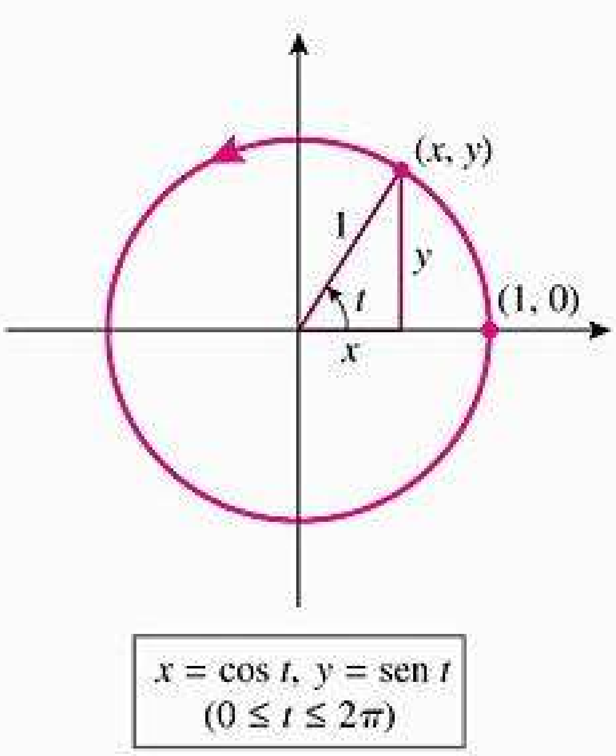


Figura 1.8.3

■ ORIENTAÇÃO

O sentido segundo o qual o gráfico de um par de equações paramétricas é percorrido à medida que o parâmetro cresce é denominado ***sentido do parâmetro crescente***, ou, então, ***orientação***

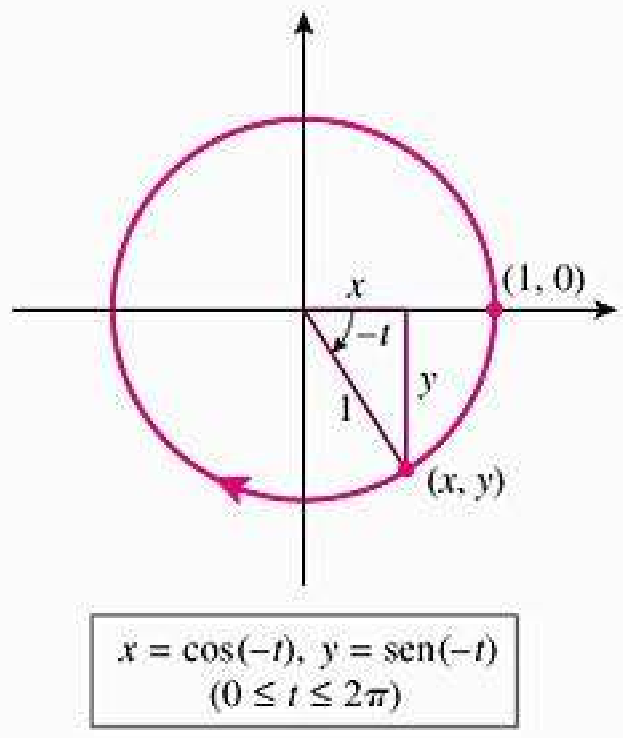


Figura 1.8.4

imposta à curva pelas equações. Dessa forma, fazemos uma distinção entre uma ***curva***, que é um conjunto de pontos, e uma ***curva paramétrica***, que é uma curva com uma orientação que lhe é imposta por um conjunto de equações paramétricas. Por exemplo, vimos no Exemplo 2 que o círculo representado parametricamente por (2) é percorrido no sentido anti-horário à medida que t cresce; logo, tem *orientação anti-horária*. Conforme pode ser visto nas Figuras 1.8.2 e 1.8.3, a orientação de uma curva pode ser indicada por setas.

Para obter equações paramétricas para o círculo unitário com *orientação horária*, podemos substituir t por $-t$ em (2) e usar as identidades $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$. Isso dá lugar a

$$x = \cos t, \quad y = -\operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

Agora, o círculo é percorrido no sentido horário por um ponto que começa em (1, 0) quando $t = 0$ e completa uma revolução inteira quando $t = 2\pi$ (Figura 1.8.4).

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Quando se usa uma calculadora para fazer os gráficos de equações paramétricas, a orientação pode, freqüentemente, ser determinada observando o sentido em que o gráfico é traçado na tela. Entretanto, muitos computadores fazem isso tão rapidamente que fica muito difícil discernir a orientação. Veja se o seu recurso gráfico permite confirmar que (3) tem uma orientação anti-horária.

► Exemplo 3 Faça o gráfico da curva paramétrica

$$x = 2t - 3, \quad y = 6t - 7$$

eliminando o parâmetro e indique a orientação do gráfico.

Solução Para eliminar o parâmetro, vamos resolver a primeira equação para t como uma função de x, e então substituir essa expressão de t na segunda equação:

$$t = \left(\tfrac{1}{2}\right)(x + 3)$$

$$y = 6\left(\tfrac{1}{2}\right)(x + 3) - 7$$

$$y = 3x + 2$$

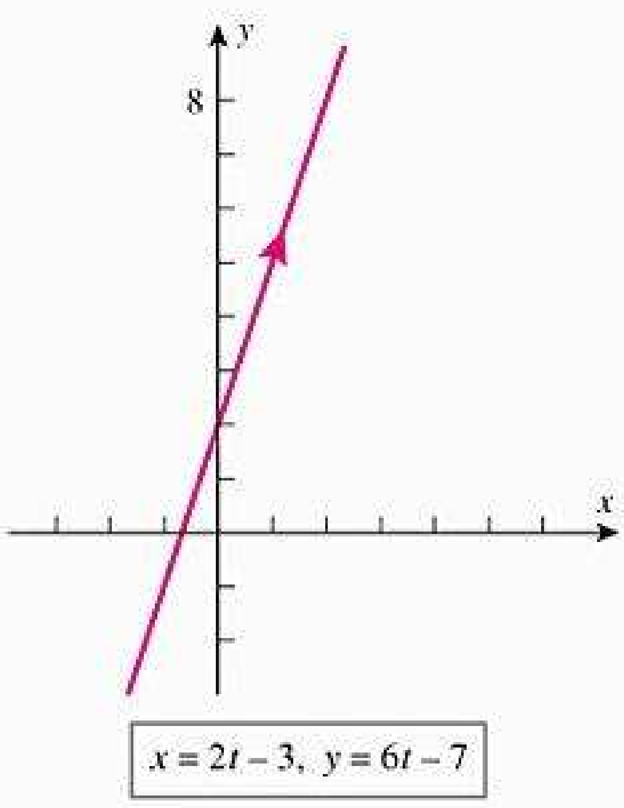


Figura 1.8.5

Assim, o gráfico é uma reta com inclinação 3 e corte no eixo y em 2. Para encontrar a orientação, devemos olhar as equações originais; o sentido de t crescente pode ser deduzida observando que x cresce quando t cresce, *ou* observando que y cresce quando t cresce. Qualquer das duas informações nos diz que a reta é percorrida da esquerda para a direita, conforme indicado na Figura 1.8.5. ◄

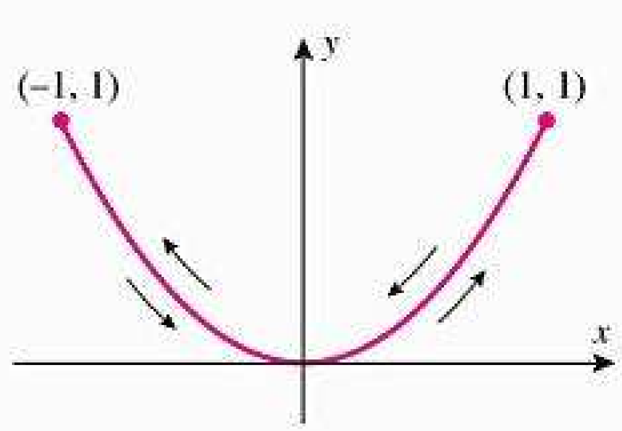


Figura 1.8.6

Nem todas as equações paramétricas produzem curvas com orientações definidas; se as equações forem malcomportadas, então o ponto, ao percorrer a curva, pode pular esporadicamente ou mover-se para frente e para trás, sem determinar um sentido definido. Por exemplo, se

$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$$

então o ponto (x, y) move-se ao longo da parábola $y = x^2$. Porém, o valor de x varia periodicamente entre −1 e 1, e portanto o ponto (x, y) também vai para frente e para trás, ao longo da parábola entre os pontos (−1, 1) e (1, 1) (conforme mostra a Figura 1.8.6). Mais adiante no livro vamos discutir restrições que eliminam esse comportamento estranho, mas por ora simplesmente evitaremos tais complicações.

■ FUNÇÕES ORDINÁRIAS EXPRESSAS PARAMETRICAMENTE

Uma equação $y = f(x)$ pode ser expressa na forma paramétrica, introduzindo o parâmetro $t = x$; isso dá lugar às equações paramétricas $x = t$, $y = f(t)$. Por exemplo, a parte da curva $y = \cos x$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ pode ser expressa parametricamente como

$$x = t, y = \cos t \;\; (-2\pi \le t \le 2\pi)$$

(Figura 1.8.7).

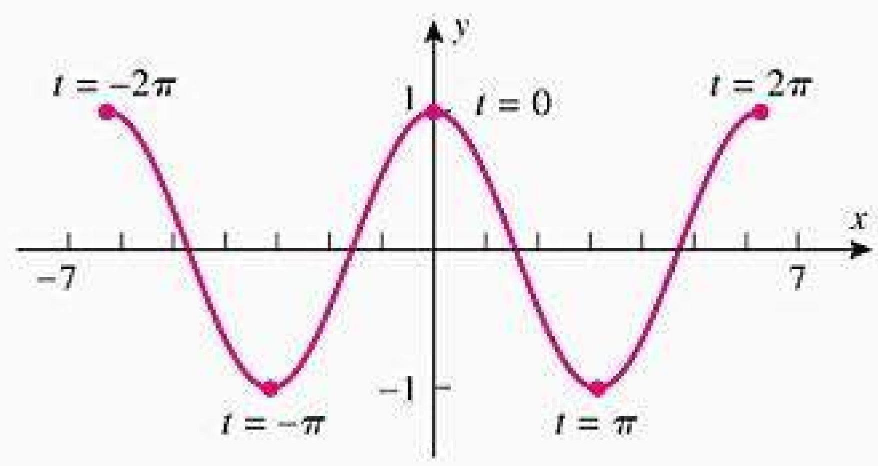
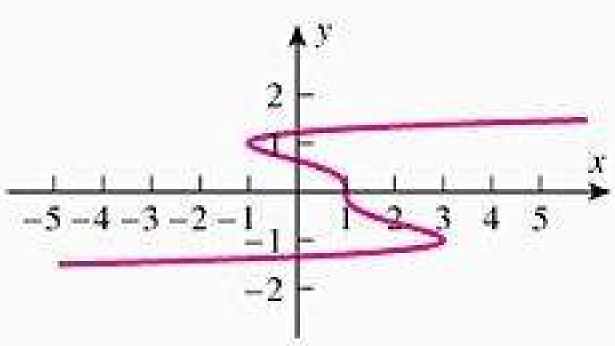


Figura 1.8.7

CURVAS PARAMÉTRICAS GERADAS COM RECURSOS GRÁFICOS

Muitos recursos gráficos permitem que façamos gráficos de equações da forma $y = f(x)$, mas não os da forma $x = g(y)$. Às vezes, somos capazes de reescrever $x = g(y)$ na forma $y = f(x)$, mas se isso for inconveniente ou impossível, então podemos fazer o gráfico de $x = g(y)$ introduzindo um parâmetro $t = y$ e expressando a equação parametricamente como $x = g(t)$, $y = t$. (Às vezes, devemos experimentar vários intervalos de t para produzir um gráfico completo.)



$x = 3t^5 - 5t^3 + 1,\ y = t$
$-1{,}5 \le t \le 1{,}5$

Figura 1.8.8

► Exemplo 4 Use um recurso computacional para fazer o gráfico da equação

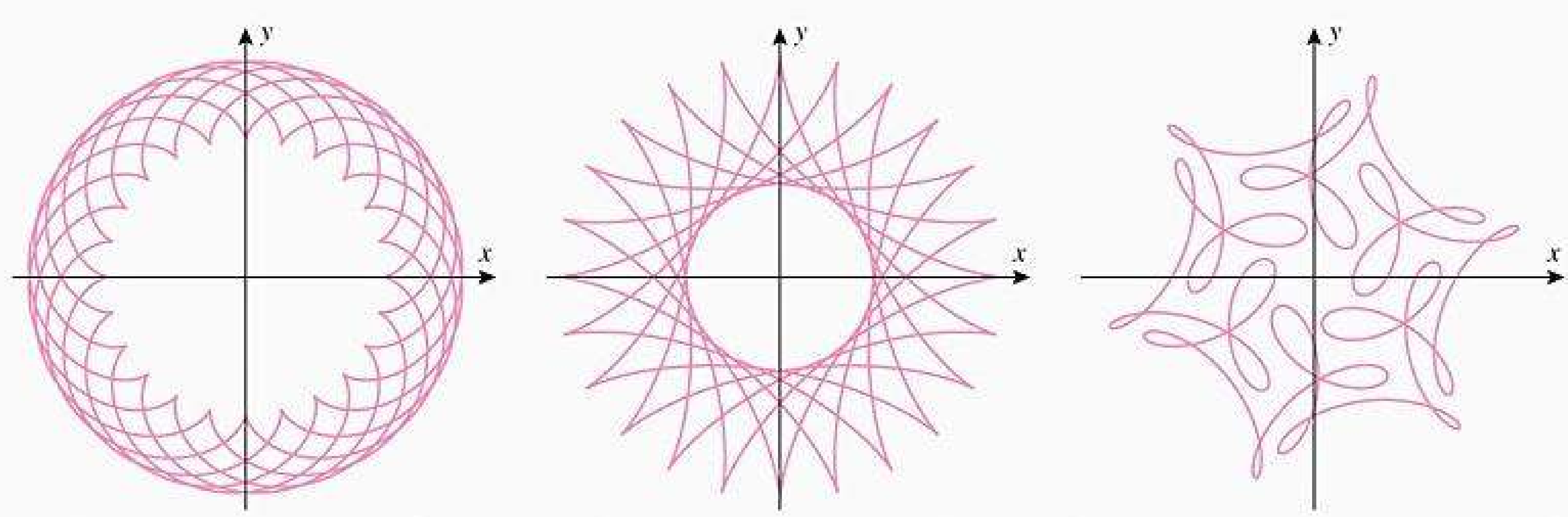
$$x = 3y^5 - 5y^3 + 1.$$

Solução Se $t = y$ é o parâmetro, então a equação pode ser escrita na forma paramétrica como

$$x = 3t^5 - 5t^3 + 1, \quad y = t$$

A Figura 1.8.8 mostra o gráfico dessas equações para $-1{,}5 \le t \le 1{,}5$. ◄

Algumas curvas paramétricas são tão complexas que é praticamente impossível visualizá-las sem algum tipo de recurso gráfico. A Figura 1.8.9 mostra três dessas curvas.



$x = 31\cos t - 7\cos(31/7)t$ $y = 31\,\text{sen}\, t - 7\,\text{sen}(31/7)t$ $(0 \le t \le 14\pi)$	$x = 17\cos t + 7\cos(17/7)t$ $y = 17\,\text{sen}\, t - 7\,\text{sen}(17/7)t$ $(0 \le t \le 14\pi)$	$x = \cos t + (1/2)\cos 7t + (1/3)\,\text{sen}\, 17t$ $y = \text{sen}\, t + (1/2)\,\text{sen}\, 7t + (1/3)\cos 17t$ $(0 \le t \le 2\pi)$

Figura 1.8.7

GRÁFICOS DE FUNÇÕES INVERSAS USANDO RECURSOS GRÁFICOS

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Teste sua habilidade com seu recurso gráfico gerando algumas curvas paramétricas que lhe pareçam interessantes ou bonitas.

A maioria dos recursos gráficos computacionais não consegue traçar o gráfico de funções inversas diretamente. Contudo, existe uma maneira de traçar gráficos de funções inversas expressando-os parametricamente. Para ver como isso pode ser feito, suponha que estejamos interessados no gráfico da inversa de uma função injetora f. Sabemos que a equação $y = f(x)$ pode ser expressa parametricamente por

$$x = t,\ y = f(t) \tag{4}$$

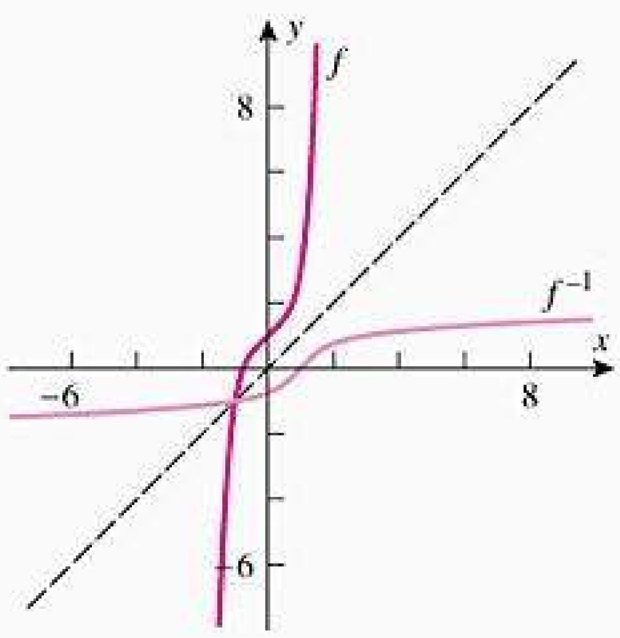


Figura 1.8.10

e sabemos que o gráfico de f^{-1} pode ser obtido trocando x com y, já que isso reflete o gráfico de f pela reta $y = x$. Assim, por (4), o gráfico de f^{-1} pode ser representado parametricamente por

$$x = f(t), \quad y = t \tag{5}$$

Por exemplo, a Figura 1.8.10 mostra o gráfico de $f(x) = x^5 + x + 1$ e o de sua inversa gerados com um recurso gráfico. O gráfico de f foi gerado com as equações paramétricas

$$x = t, \quad y = t^5 + t + 1$$

e o gráfico de f^{-1} foi gerado com as equações paramétricas

$$x = t^5 + t + 1, \quad y = t$$

TRANSLAÇÃO

Se uma curva paramétrica C é dada pelas equações $x = f(t)$, $y = g(t)$, então a adição de uma constante a $f(t)$ translada a curva C na direção x, e a adição de uma constante a $g(t)$ translada a curva na direção y. Assim, um círculo de raio r, com centro em (x_0, y_0), pode ser representado parametricamente por

$$x = x_0 + r\cos t, \quad y = y_0 + r \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi) \tag{6}$$

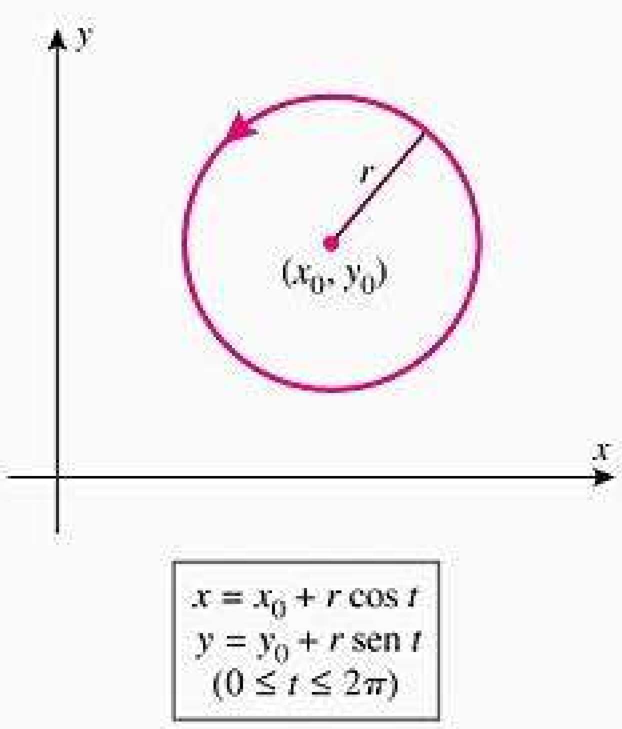


Figura 1.8.11

(Figura 1.8.11). Se for o caso, podemos eliminar o parâmetro dessas equações notando que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (r\cos t)^2 + (r \operatorname{sen} t)^2 = r^2$$

Assim, obtivemos a conhecida equação em coordenadas retangulares para um círculo de raio r e centro em (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{7}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use a capacidade paramétrica de seu recurso gráfico computacional para gerar um círculo de raio 5 e centro em (3, −2).

MUDANDO AS ESCALAS

Se uma curva paramétrica C é dada pelas equações $x = f(t)$, $y = g(t)$, então a multiplicação de $f(t)$ por uma constante alonga ou comprime C na direção x, enquanto a multiplicação de $g(t)$ por uma constante alonga ou comprime C na direção y. Por exemplo, é de se esperar que as equações paramétricas

$$x = 3\cos t, \quad y = 2 \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

representem uma elipse com centro na origem, uma vez que o gráfico dessas equações resulta do alongamento do círculo unitário

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

por um fator de 3 na direção x e um fator de 2 na direção y. Em geral, se a e b forem constantes positivas, então as equações paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi) \tag{8}$$

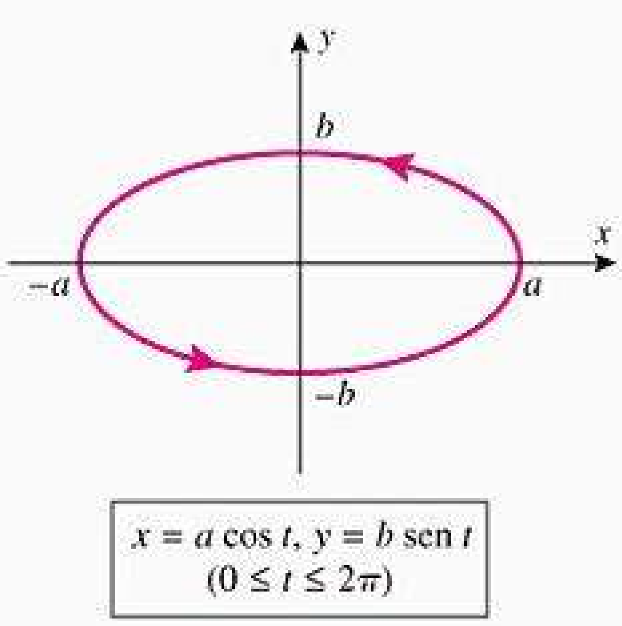


Figura 1.8.12

representam uma elipse, centrada na origem, e que se estende entre $-a$ e a no eixo x e entre $-b$ e b no eixo y (Figura 1.8.12). Os números a e b são os ***semi-eixos*** da elipse. Se for o caso, podemos eliminar o parâmetro t em (8) e reescrever as equações em coordenadas retangulares como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use a capacidade paramétrica de seu recurso para gerar uma elipse centrada na origem e se estendendo entre −4 e 4 na direção x e entre −3 e 3 na direção y. Gere uma elipse com as mesmas dimensões, porém transladada de tal forma que seu centro esteja no ponto (2, 3).

CURVAS DE LISSAJOUS

Em meados da década de 1850, o físico francês Jules Antoine Lissajous (1822-1880) ficou interessado em equações paramétricas da forma

$$y = \text{sen } at, \quad y = \text{sen } bt \tag{10}$$

ao estudar vibrações que combinam dois movimentos senoidais perpendiculares. A primeira equação em (10) descreve uma oscilação senoidal na direção x com freqüência $a/2\pi$, enquanto a segunda descreve uma oscilação senoidal na direção y com freqüência $b/2\pi$. Se a/b for um número racional, então o efeito combinado das oscilações é um movimento periódico ao longo de uma trajetória denominada ***curva de Lissajous***. A Figura 1.8.13 mostra algumas curvas de Lissajous representativas.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Com seu recurso gráfico, gere algumas curvas de Lissajous e veja também se é possível determinar quando cada uma das curvas na Figura 1.8.13 começa a se repetir.

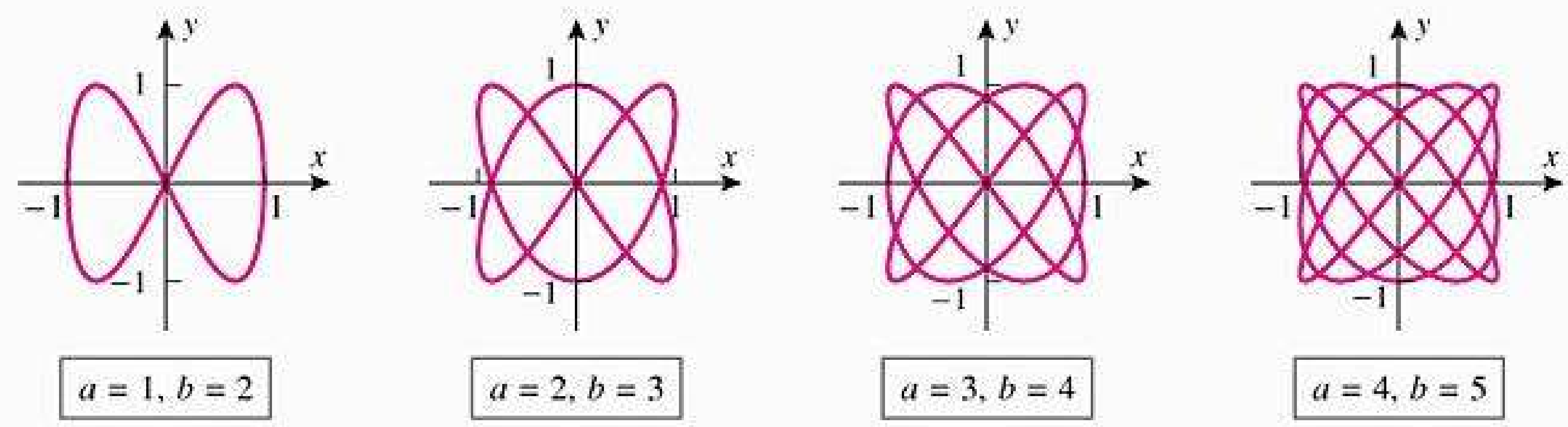


Figura 1.8.13

CICLÓIDES

Se uma roda rola em linha reta ao longo de uma estrada plana, então um ponto na beirada da roda irá descrever uma curva chamada ***ciclóide*** (Figura 1.8.14). Essa curva tem uma história fascinante que vamos comentar daqui a pouco; mas, primeiro, vamos mostrar como obter as equações paramétricas para ela. Para isso, vamos supor que a roda tenha um raio a e que irá rolar ao longo do eixo x positivo de um sistema de cordenadas. Seja $P(x, y)$ o ponto da beirada que irá descrever a ciclóide, e vamos supor P inicialmente na origem. Vamos considerar como nosso parâmetro o ângulo θ varrido pela reta radial até P, à medida que a roda rola (Figura 1.8.14). É padrão aqui considerar θ positivo, mesmo que gerado por uma rotação horária.

O movimento de P é uma combinação do movimento do centro da roda, paralelo ao eixo x, e a rotação de P em torno do centro. À medida que a reta radial varre um ângulo, o ponto P percorre um arco de comprimento $a\theta$, e a roda move-se por uma distância $a\theta$ ao longo do eixo x (por quê?). Assim, conforme sugere a Figura 1.8.15, o centro move-se para o ponto $(a\theta, a)$ e as coordenadas de $P(x, y)$ são

$$x = a\theta - a \text{ sen } \theta, \quad y = a - a \cos \theta \tag{11}$$

Essas são equações da ciclóide em termos do parâmetro θ.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use seu recurso gráfico para gerar dois "arcos" da ciclóide descrita por um ponto na beirada de uma roda de raio 1.

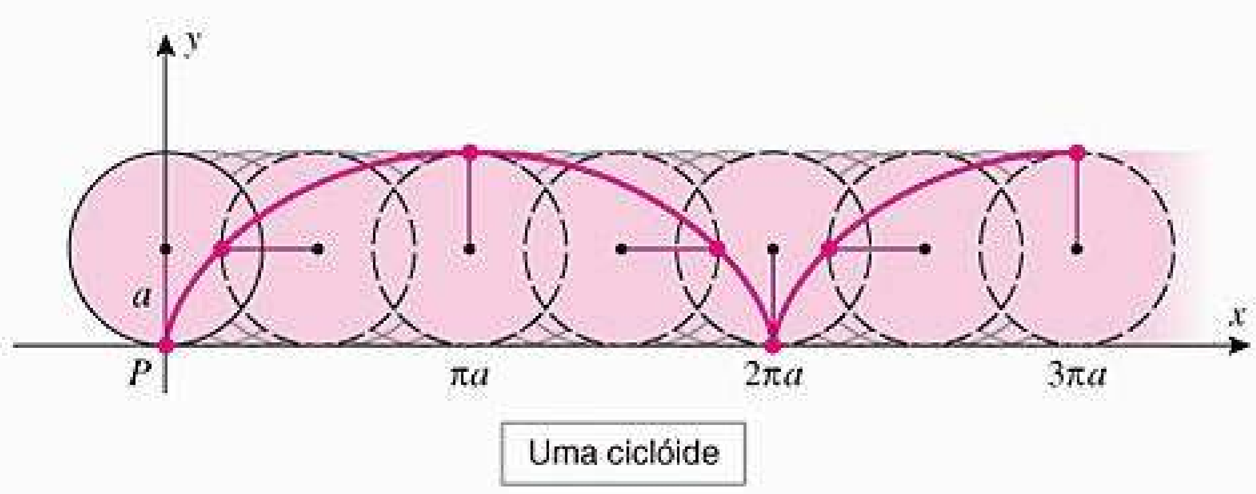


Figura 1.8.14

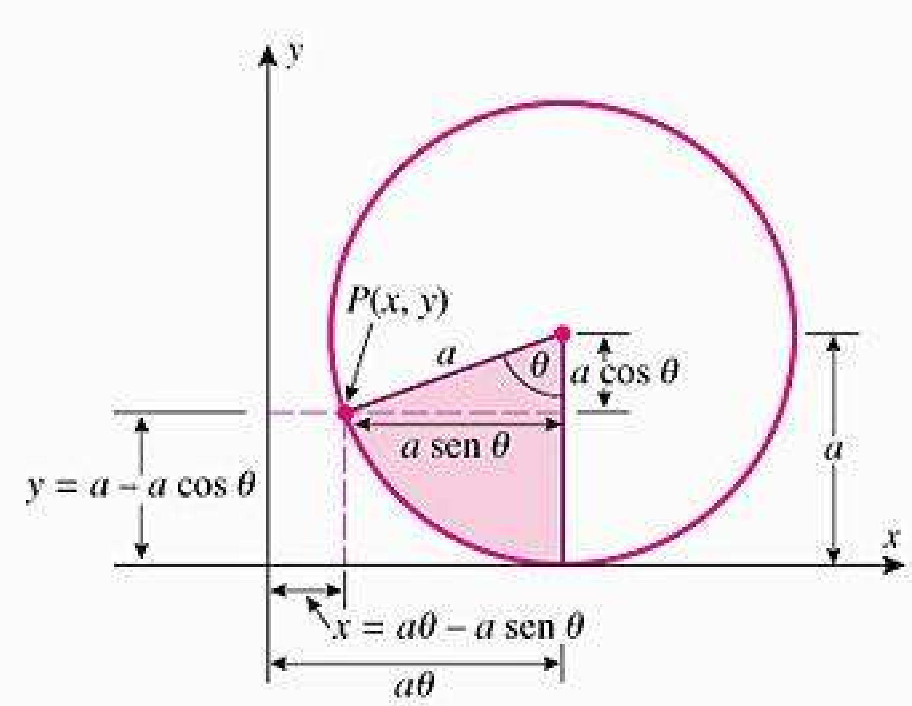


Figura 1.8.15

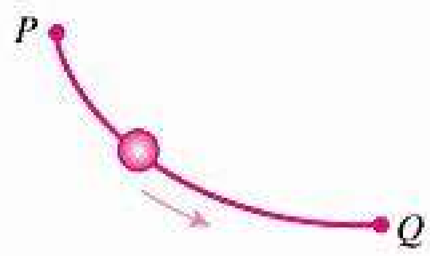
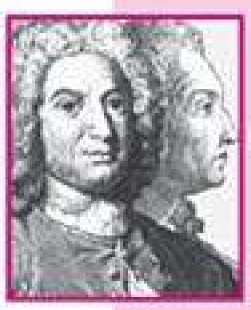


Figura 1.8.16

O PAPEL DA CICLÓIDE NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A ciclóide é de interesse por fornecer a solução de dois problemas matemáticos famosos: o ***problema da braquistócrona*** (em grego significa "o menor tempo") e o ***problema da tautócrona*** (em grego significa "tempos iguais"). O problema da braquistócrona consiste em determinar a forma de um fio ao longo do qual uma conta pode deslizar de um ponto P a Q, não diretamente abaixo, no menor tempo. O problema da tautócrona consiste em determinar a forma de um fio ligando P a Q de tal forma que duas contas saem de quaisquer dois pontos entre P e Q e chegam em Q no mesmo intervalo de tempo. A solução de ambos os problemas vem a ser uma ciclóide invertida (Figura 1.8.16).

Em junho de 1696, Johann Bernoulli propôs o problema da braquistócrona como um desafio para outros matemáticos. A princípio, alguém poderia conjecturar que a forma do fio deveria ser a de uma linha reta, uma vez que essa forma resulta na menor distância de P a Q. Porém, a ciclóide invertida permite que a conta caia mais rapidamente no começo, adquirindo velocidade inicial suficiente para atingir Q no menor tempo, mesmo que percorrendo uma distância maior. O problema foi resolvido por Newton e Leibniz, bem como por Johann Bernoulli e por seu irmão mais velho, Jakob; já havia sido formulado e resolvido *incorretamente* anos antes por Galileu, que pensou ser a resposta um arco circular.

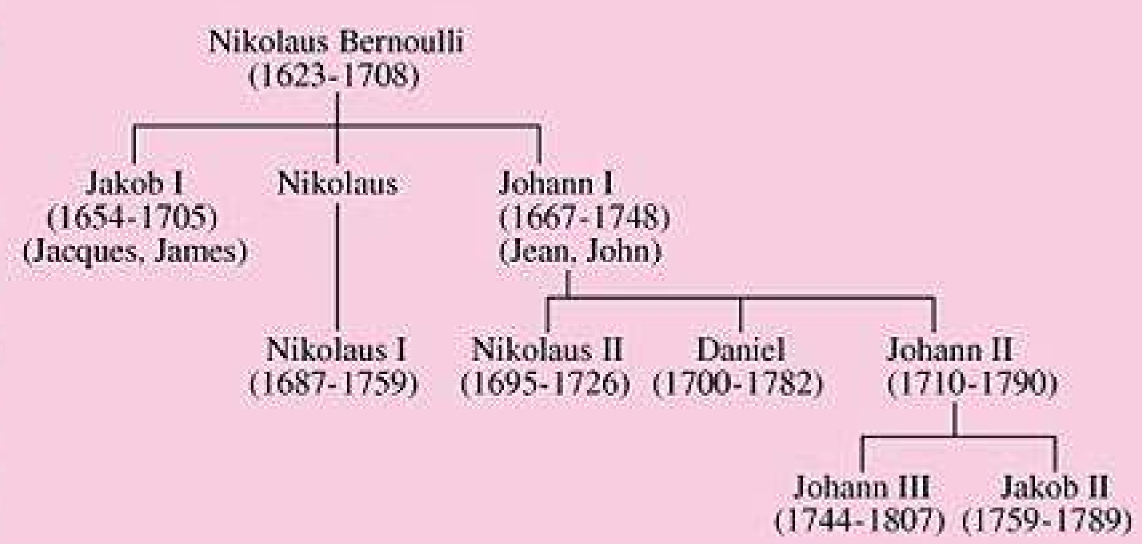


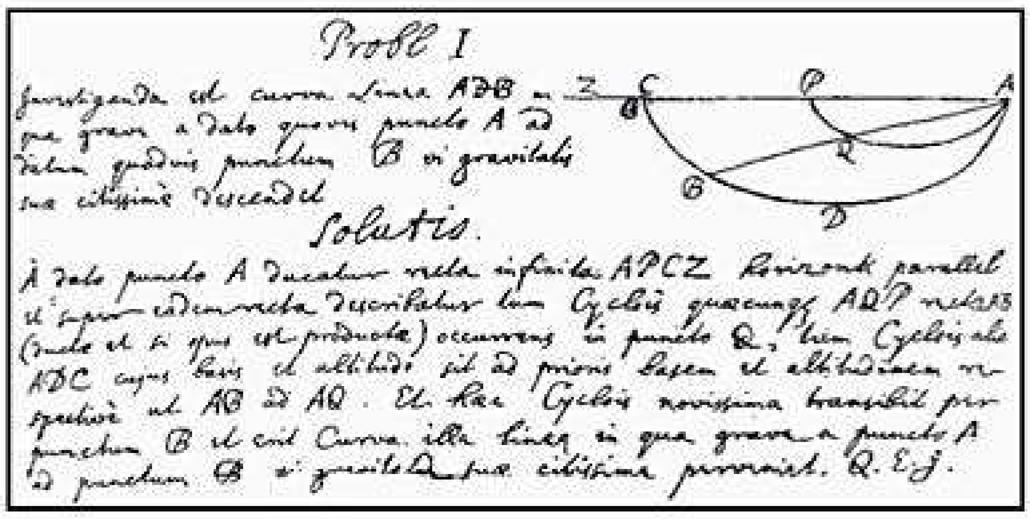
Bernoulli Uma surpreendente família suíça, que inclui várias gerações de destacados matemáticos e cientistas. Nikolaus Bernoulli (1623-1708), um farmacêutico, fugiu de Antuérpia para escapar de perseguição religiosa, estabelecendo-se em Basel, na Suíça. Lá, teve três filhos: Jakob I (também chamado Jacques ou James), Nikolaus e Johann I (também chamado Jean ou John). Os algarismos romanos são usados para distinguir os vários membros da família com o mesmo nome (veja a árvore da família ao fim do quadro). Depois de Newton e de Leibniz, os irmãos Bernoulli, Jakob I e Johann I são considerados por alguns como os mais importantes fundadores do Cálculo. Jakob I era autodidata em Matemática. Seu pai o queria estudando Teologia, mas ele se voltou para a Matemática e, em 1686, tornou-se professor na Universidade de Basel. Quando começou a trabalhar em Matemática, nada sabia a respeito dos trabalhos de Newton e de Leibniz. Posteriormente, passou a conhecer os resultados de Newton, mas uma vez que muito pouco do trabalho de Leibniz foi publicado, muitos de seus resultados foram duplicados por Jakob.

O irmão mais novo de Jakob, Johann I, foi incentivado por seu pai a entrar para o comércio. Porém, voltou-se para a Medicina e estudou Matemática sob a orientação do irmão mais velho. Mais tarde, tornou-se professor de Matemática em Gröningen, na Holanda, e, então, com a morte do irmão em 1705, sucedeu-lhe como professor de Matemática em Basel. Durante suas vidas, os irmãos Jakob I e Johann I cultivaram uma paixão mútua por criticar o trabalho um do outro, o que, freqüentemente, virava disputas feias. Leibniz tentou mediar essas dicussões, mas Jakob, melindrado com o intelecto superior de Leibniz, acusava-o de tomar partido de Johann e, assim, acabava por constranger Leibniz nas brigas. Os irmãos, com freqüência, trabalhavam no mesmo problema colocado como desafio mútuo. Johann, interessado em ganhar fama, usava, muitas vezes, meios inescrupulosos para aparecer como o criador dos resultados do irmão. Jakob, ocasionalmente, revidava. Dessa forma, é, muitas vezes, difícil determinar quem merece os créditos por muitos resultados. Entretanto, ambos deram grandes contribuições ao desenvolvimento do Cálculo. Além de seu trabalho em Cálculo, Jakob ajudou a estabelecer os princípios fundamentais em Probabilidade, inclusive a Lei dos Grandes Números, que é uma pedra fundamental da teoria moderna da Probabilidade.

Entre os outros membros da família Bernoulli, Daniel, filho de Johann I, é o mais famoso. Ele foi professor de Matemática na Academia de S. Petersburgo, na Rússia, e, posteriormente, professor de Anatomia e, mais tarde, de Física, em Basel. Ele trabalhou com Cálculo e Probabilidade, mas é mais conhecido por seu trabalho em Física. Uma lei básica do fluxo de fluidos, chamada de princípio de Bernoulli, tem seu nome em sua homenagem. Ele ganhou por 10 vezes o prêmio anual da Academia Francesa por seus trabalhos sobre cordas vibrantes, marés e teoria cinética dos gases.

Johann II sucedeu seu pai como professor de Matemática em Basel. Suas pesquisas enfocaram a teoria do calor e do som. Nikolaus I foi matemático e erudito em leis, tendo trabalhado em Probabilidade e em séries. Recomendado por Leibniz, foi nomeado professor de Matemática em Pádua e depois seguiu para Basel como professor de Lógica e, posteriormente, de Direito. Nikolaus II foi professor de Jurisprudência na Suíça e, mais tarde, professor de Matemática na Academia de S. Petersburgo. Johann III foi professor de Matemática e Astronomia em Berlim, e Jakob II sucedeu seu tio Daniel como professor de Matemática na Academia de S. Petersburgo. Realmente, uma família incrível!





A solução do problema da braquistócrona por Newton com sua própria caligrafia.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.8 (*Ver página 96 para respostas.*)

1. Encontre equações paramétricas de um círculo de raio 2 centrado em (3, 5).

2. Encontre equações paramétricas da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3. O gráfico da curva descrita pelas equações paramétricas $x = 4t - 1$, $y = 3t + 2$ é uma reta com inclinação __________ e corte no eixo y dado por __________.

4. Suponha que uma curva paramétrica C é dada pelas equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ para $0 \le t \le 1$. Encontre equações paramétricas para C que invertam o sentido de percurso da curva percorrida quando o parâmetro cresce de 0 a 1.

5. Se $f(x)$ é uma função injetora, então equações paramétricas da curva $y = f^{-1}(x)$ são dadas por $x =$ __________ e $y = t$.

EXERCÍCIOS 1.8 ⌒ Recurso Gráfico

1. (a) Por eliminação do parâmetro, esboce a trajetória no intervalo de tempo $0 \le t \le 5$ de uma partícula cujas equações paramétricas do movimento são

$$x = t - 1, \quad y = t + 1$$

(b) Indique em seu esboço o sentido do movimento.

(c) Faça uma tabela das coordenadas x e y da partícula nos instantes $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(d) Marque na curva a posição da partícula nos instantes de (c) e rotule as posições com os valores de t.

2. (a) Por eliminação do parâmetro, esboce a trajetória no intervalo de tempo $0 \le t \le 1$ de uma partícula cujas equações paramétricas do movimento são

$$x = \cos(\pi t), \quad y = \operatorname{sen}(\pi t)$$

(b) Indique o sentido do movimento em seu esboço.

(c) Faça uma tabela das coordenadas x e y da partícula nos instantes $t = 0$; 0,25; 0,5; 0,75 e 1.

(d) Marque a posição da partícula sobre a curva nos instantes dados em (c) e rotule essas posições com os valores de t.

3-12 Esboce a curva por eliminação do parâmetro e indique o sentido de t crescente.

3. $x = 3t - 4, \quad y = 6t + 2$

4. $x = t - 3, \quad y = 3t - 7 \quad (0 \le t \le 3)$

5. $x = 2\cos t, \quad y = 5\operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

6. $x = \sqrt{t}, \quad y = 2t + 4$

7. $x = 3 + 2\cos t, \quad y = 2 + 4\operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

8. $x = \sec t, \quad y = \operatorname{tg} t \quad (\pi \le t \le 3\pi/2)$

9. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (-\pi/2 \le t \le \pi/2)$

10. $x = 4t + 3, \quad y = 16t^2 - 9$

11. $x = 2\operatorname{sen}^2 t, \quad y = 3\cos^2 t \ (0 \le t \le \pi/2)$

12. $x = \sec^2 t, \quad y = \operatorname{tg}^2 t \ (-\pi/2 < t < \pi/2)$

13-18 Encontre as equações paramétricas da curva e confira seu trabalho gerando a curva com um recurso gráfico.

⌒ **13.** Um círculo de raio 5, centrado na origem e orientado no sentido horário.

⌒ **14.** A parte do círculo $x^2 + y^2 = 1$ que está no terceiro quadrante orientada no sentido anti-horário.

⌒ **15.** Uma reta vertical intercectando o eixo x em $x = 2$, orientada para cima.

⌒ **16.** A elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$, orientada no sentido anti-horário.

⌒ **17.** A parte da parábola $x = y^2$ ligando $(1, -1)$ e $(1, 1)$, orientada de baixo para cima.

⌒ **18.** O círculo de raio 4, centrado em $(1, -3)$, orientado no sentido anti-horário.

⌒ **19.** (a) Use seu recurso gráfico para gerar a trajetória de uma partícula cujas equações do movimento no intervalo de tempo $0 \le t \le 5$ são

$$x = 6t - \tfrac{1}{2}t^3, \quad y = 1 + \tfrac{1}{2}t^2$$

(b) Faça uma tabela das coordenadas x e y da partícula, nos instantes $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(c) Em que instantes a partícula está sobre o eixo y?

(d) Durante qual intervalo de tempo temos $y < 5$?

(e) Em que instante a coordenada x da partícula atinge um máximo?

20. (a) Use um recurso gráfico para gerar a trajetória de um aviãozinho de papel cujas equações do movimento para $t \geq 0$ são

$$x = t - 2 \text{ sen } t, \quad y = 3 - 2 \cos t$$

(b) Supondo que o avião voe em uma sala na qual o chão está em $y = 0$, explique por que ele não se arrebenta no chão. [Para simplificar, ignore o tamanho físico do avião, tratando-o como uma partícula.]

(c) Qual deve ser a altura do forro para garantir que o avião não toque ou se arrebente nele?

21-22 Faça o gráfico da equação usando um recurso gráfico.

21. (a) $x = y^2 + 2y + 1$

(b) $x = \text{sen } y, -2\pi \leq y \leq 2\pi$

22. (a) $x = y + 2y^3 - y^5$

(b) $x = \text{tg } y, -\pi/2 < y < \pi/2$

23. (a) Por eliminação do parâmetro, mostre que as equações

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)t$$

representam uma reta passando pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

(b) Mostre que se $0 \leq t \leq 1$, então as equações em (a) representam o segmento de reta ligando os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) orientado na direção de (x_0, y_0) para (x_1, y_1).

(c) Use o resultado de (b) para encontrar as equações paramétricas do segmento de reta que liga os pontos $(1, -2)$ e $(2, 4)$ orientado de $(1, -2)$ para $(2, 4)$.

(d) Use o resultado de (b) para encontrar as equações paramétricas de (c), porém com o segmento orientado de $(2, 4)$ para $(1, -2)$.

24. Use o resultado do Exercício 23 para encontrar:

(a) as equações paramétricas do segmento de reta que liga os pontos $(-3, -4)$ e $(-5, 1)$, orientado de $(-3, -4)$ para $(-5, 1)$.

(b) as equações paramétricas do segmento de reta traçado de $(0, b)$ a $(a, 0)$, orientado de $(0, b)$ para $(a, 0)$.

25. (a) Suponha que o segmento de reta do ponto $P(x_0, y_0)$ ao ponto $Q(x_1, y_1)$ seja representado parametricamente por

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)t \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

e que $R(x, y)$ é o ponto no segmento de reta correspondente a um valor especificado de t (*ver* a figura a seguir). Mostre que $t = r/q$, onde r é a distância de P a R e q é a distância de P a Q.

(b) Que valor de t representa o ponto médio entre P e Q?

(c) Que valor de t representa o ponto que está a 3/4 do caminho de P a Q?

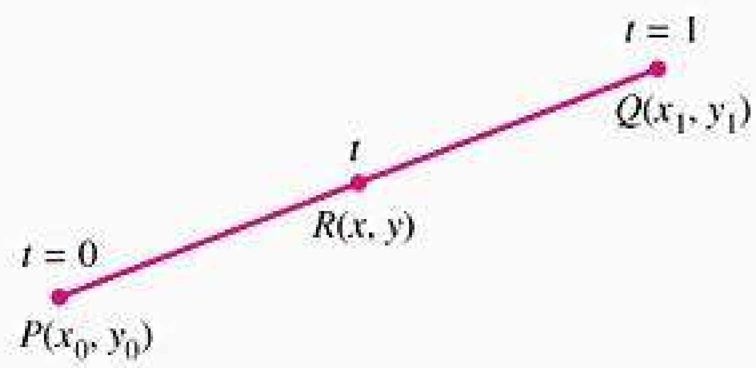


Figura Ex-25

26. Encontre as equações paramétricas para o segmento de reta que liga os pontos $P(2, -1)$ e $Q(3, 1)$ e use o resultado do Exercício 25 para encontrar:

(a) o ponto médio entre P e Q.

(b) o ponto que está a 1/4 do caminho entre P e Q.

(c) o ponto que está a 3/4 do caminho entre P e Q.

ENFOCANDO CONCEITOS

27. Em cada parte, combine as equações paramétricas com uma das curvas rotuladas de (I)-(VI) e explique seu raciocínio.

(a) $x = \sqrt{t}, \quad y = \text{sen } 3t$ (b) $x = 2 \cos t, \quad y = 3 \text{ sen } t$

(c) $x = t \cos t, \quad y = t \text{ sen } t$

(d) $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}, \quad y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$

(e) $x = \dfrac{t^3}{1 + t^2}, \quad y = \dfrac{2t^2}{1 + t^2}$

(f) $x = \frac{1}{2} \cos t, \quad y = \text{sen } 2t$

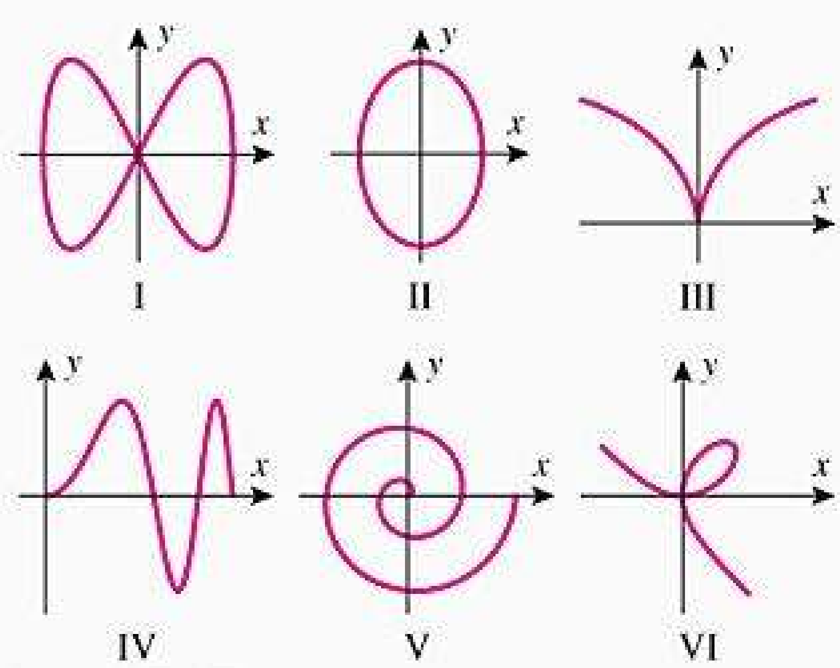


Figura Ex-27

28. Use um recurso gráfico para gerar as curvas no Exercício 27 e, em cada caso, identifique a orientação.

29. Explique por que a curva paramétrica

$$x = t^2, \quad y = t^4 \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

não tem uma orientação definida.

30. (a) Nas partes (a) e (b) do Exercício 25, obtivemos equações paramétricas para um segmento de reta no qual o parâmetro varia de $t = 0$ a $t = 1$. Às vezes, é desejável ter equações paramétricas para um segmento de reta nas quais o parâmetro varia em algum outro intervalo, digamos $t_0 \leq t \leq t_1$. Use as idéias do Exercício 23 para mostrar que o segmento

e reta igan nt x_0, y_0 e x_1, y_1 e er re re enta arametricamente r

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}, \qquad (t_0 \le t \le t_1)$$
$$y = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

b De ue rma egment e tá rienta

c Enc ntre a e uação aramétrica ara egment e reta traça e 3, −1 a 1, 4 uan t aria e 1 até 2 e c nfira eu re u ta c m um recur gráfic

31. a P r e iminaçã arâmetr , m tre ue e a e c nã rem amb nu , entã gráfic a e uaçõe aramétrica

$$x = at + b, \quad y = ct + d \quad t_0 \le t \le t_1$$

é um egment e reta

b E b ce a cur a arametrica

$$x = 2t - 1, \quad y = t + 1 \quad 1 \le t \le 2$$

e in i ue ua rientaçã

32. a ue cê e izer bre a reta E ercíci 31 e a u c ma nã amb rem nu

b ue re re entam a e uaçõe uan a e c rem amb nu

33-36 e um recur gráfic e e uaçõe arametrica ara e ibir gráfic e f e f^{-1} na me ma te a

33. f x $= x^3 + 0{,}2x - 1, \quad -1 \le x \le 2$

34. f x $= \sqrt{x^2 + 2} + x, \quad -5 \le x \le 5$

35. f x = c c $0{,}5x$, $0 \le x \le 3$

36. f x $= x +$ en x, $0 \le x \le$

37. cur a arametrica em er efini a r arte , u an órmu a i erente ara i erente a re arâmetr E b ce a cur a ue é re re enta a r arte e a e uaçõe arametrica

$$\begin{cases} x = 2t, & y = 4t^2 \quad \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right) \\ x = 2 - 2t, & y = 2t \quad \left(\frac{1}{2} \le t \le 1\right) \end{cases}$$

38. Enc ntre a e uaçõe arametrica ara retângu a figura abai , u n ue e e é traça n enti anti h rári uan t aria e 0 a 1, c meçan em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ uan $t = 0$ *Sugestão*: e re ente retângu r arte , azen t ariar e 0 até $\frac{1}{4}$ n rimeir a , e $\frac{1}{4}$ até $\frac{1}{2}$ n egun , e a im r iante

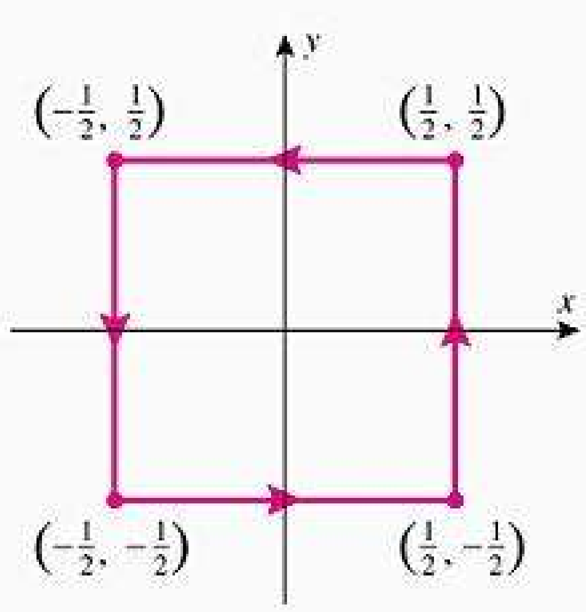


Figura Ex-38

39. a Enc ntre a e uaçõe arametrica a e i e centra a na rigem e c m c rte n ei a r 4, 0 , −4, 0 , 0, 3 e 0, −3

b Enc ntre a e uaçõe arametrica a e i e ue re u ta tran a an a e i e e a , e rma ue eu centr e te a em −1, 2

c nfirme eu re u ta e a e b u an um recur gráfic

40. rem m trar mai a iante n i r ue e um r éti é i ara a ní e , c m uma e ci a e inicia e v_0 me tr r egun , a um ângu α c m a h riz nta , e en e reza a a re i tência ar, entã ua içã a ó t egun ançament , em re açã a i tema e c r ena a a figura abai é:

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

n e $g \approx$, m/ ^{2}

a tre ue a tra etória é uma aráb a atra é a e imina çã arâmetr

b E b ce a tra etória uan $\alpha = 30°$ e $v_0 = 1\,000$ m/

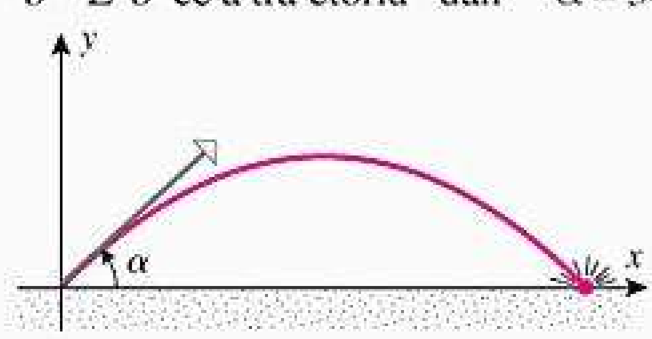


Figura Ex-40

41. m r éti é i ara r um canhã a um ângu $\alpha = 45°$, c m uma e ci a e inicia e $v_0 =$ 00 m/

a Enc ntre a e uaçõe arametrica a tra etória r éti em re açã a i tema e c r ena a a Figura E 40

b ua é a a tura má ima atingi a e r éti

c ua é a i tância erc rri a h riz nta mente e r éti

42. m braç r b tiza , e enha ara ir u er ície ana e um aut mó e , c n i te em ua ha te re a uma na u tra ma ha te m e e ara rente e ara trá h riz nta mente, en uant a egun a, c m a a m a a e iment na nta, m e e ara cima e ara bai er Figura E 42

a Su nha ue a ha te h riz nta r bô m e e e ta rma ue a c r ena a x centr i r n in tan te t é $x = 25$ en πt e ue a ha te ertica m e e e ta rma ue a c r ena a y centr i r n in tan te t é $y = 12{,}5$ en πt Faça gráfic a tra etória centr i r

b Su nha ue a c r ena a x e y e a ã $x = 25$ en πat e $y = 12{,}5$ en πbt, na uai a c n tante a e b em er c ntr a a r graman braç r b tiza Faça gráfi c a tra etória centr i r e $a = 4$ e $b = 5$

c n e tigue a tra etória re u tante em b e ária e c ha e a e b.

43. De cre a a amí ia e cur a re u tante a e uaçõe ara métrica

$$x = a\,c \quad t + h, \ y = b \ \text{en}\ t + k \quad 0 \le t \le 2\pi$$

uan

a h e k ã fi , ma a e b ariam

(b) a e b são fixos, mas h e k variam.

(c) $a = 1$ e $b = 1$, mas h e k variam e satisfazem $h = k + 1$.

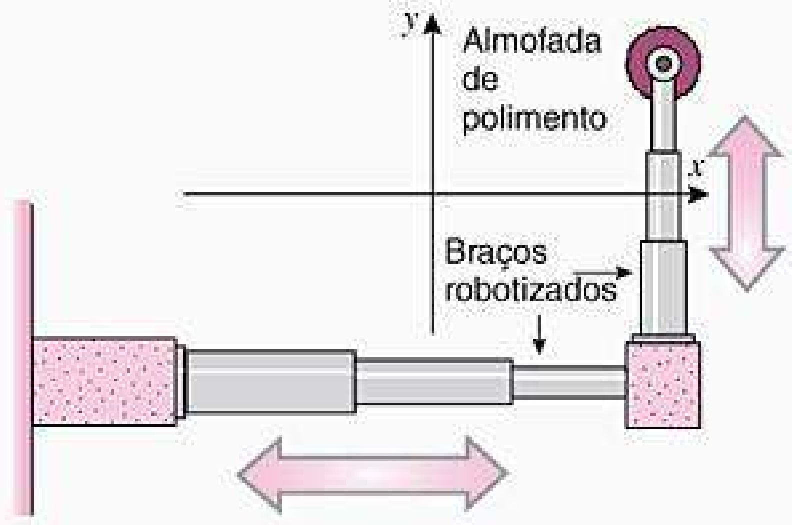


Figura Ex-42

44. A ***hipociclóide*** é uma curva descrita por um ponto P sobre uma circunferência de um círculo que rola dentro de um círculo maior, fixo. Suponha que o círculo fixo tenha raio a e seja centrado na origem, e que o círculo que rola tenha raio b. Seja ϕ o ângulo mostrado na figura a seguir, supondo que quando $\phi = 0$, o ponto P está em $(a, 0)$. Mostre que a hipociclóide gerada é dada pelas equações paramétricas

$$x = (a-b)\cos\phi + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\phi\right)$$
$$y = (a-b)\operatorname{sen}\phi - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\phi\right)$$

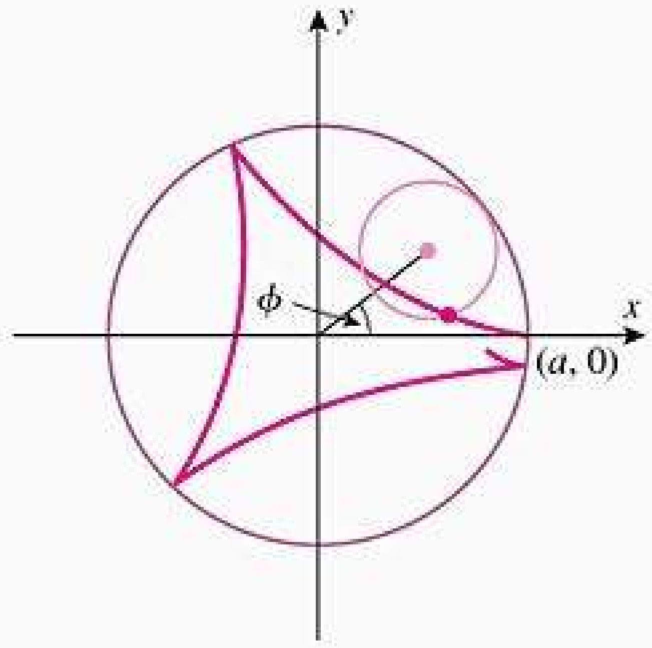


Figura Ex-44

45. Se $b = \frac{1}{4}a$, no Exercício 44, a curva resultante é chamada de hipociclóide de quatro cúspides.

(a) Esboce essa curva.

(b) Mostre que a curva é dada pelas equações paramétricas
$$x = a\cos^3\phi, \quad y = a\operatorname{sen}^3\phi$$

(c) Mostre que a curva é dada pela equação
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$
em coordenadas retangulares.

46. (a) Use um recurso gráfico para estudar como variam as curvas da família
$$x = 2a\cos^2 t, \quad y = 2a\cos t\operatorname{sen} t \quad (-2\pi < t < 2\pi)$$
quando a varia de 0 a 5.

(b) Confirme algebricamente sua conclusão.

(c) Escreva um breve parágrafo relatando o que encontrou.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 1.8

1. $x = 3 + 2\cos t$, $y = 5 + 2\operatorname{sen} t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ **2.** $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ **3.** $\frac{3}{4}$; 2,75
4. $x = f(1-t)$, $y = g(1-t)$ **5.** $f(t)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

Recurso Gráfico

1. Esboce o gráfico da função
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \le -5 \\ \sqrt{25 - x^2}, & -5 < x < 5 \\ x - 5, & x \ge 5 \end{cases}$$

2. Use os gráficos das funções f e g na figura ao lado para resolver os seguintes problemas.

(a) Encontre os valores de $f(-2)$ e $g(3)$.

(b) Para quais valores de x, $f(x) = g(x)$?

(c) Para quais valores de x, $f(x) < 2$?

(d) Quais são o domínio e a imagem de f?

(e) Quais são o domínio e a imagem de g?

(f) Encontre os zeros de f e g.

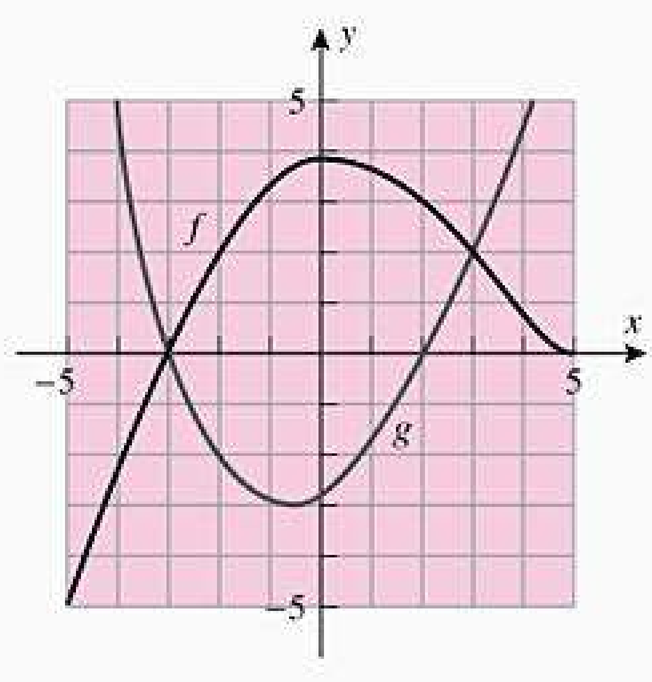


Figura Ex-2

3. Um copo cheio de água a uma temperatura de 11°C é colocado em uma sala, que está à temperatura constante de 21°C.

Faça um gráfico aproximado que descreva razoavelmente a temperatura da água no copo como uma função do tempo decorrido.

4. Suponha que queiramos pintar a tampa de uma mesa circular. Encontre uma fórmula que expresse a quantidade de tinta necessária como uma função do raio da tampa e discuta todas as hipóteses utilizadas para encontrar a fórmula.

5. Um contêiner de base quadrada e lados retangulares sem tampa tem um volume de 8 metros cúbicos. O material da base custa \$5 por metro quadrado e o dos lados, \$2 por metro quadrado.

(a) Encontre uma fórmula que expresse o custo total desses materiais como uma função do comprimento do lado da base.

(b) Qual é o domínio da função custo obtida em (a)?

6. Uma bola com raio de 15 cm recebe uma camada uniforme de plástico.

(a) Expresse o volume de plástico como uma função da espessura da camada.

(b) Qual é o domínio da função volume obtida em (a)?

7. Uma caixa fechada deve ser feita de um pedaço de papelão com 180 cm por 300 cm, tirando fora quatro quadrados de mesmo tamanho (veja a figura abaixo), dobrando ao longo das retas tracejadas e encaixando para dentro as duas abas da tampa.

(a) Encontre uma fórmula que expresse o volume da caixa como uma função do comprimento dos lados dos quadrados cortados.

(b) Encontre uma desigualdade que especifique o domínio da função em (a).

(c) Use o gráfico da função volume para estimar as dimensões da caixa com o maior volume.

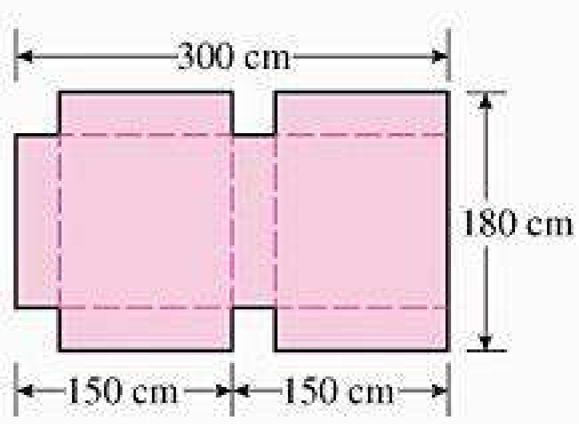


Figura Ex-7

8. Denote por C o gráfico de $y = 1/x$, para $x > 0$.

(a) Expresse a distância entre o ponto $P(1, 0)$ e um ponto Q de C como uma função da coordenada x de Q.

(b) Qual é o domínio da função distância obtida em (a)?

(c) Use o gráfico da função distância obtida em (a) para estimar o ponto Q de C que está mais próximo do ponto P.

9. Esboce o gráfico da equação $x^2 - 4y^2 = 0$.

10. Obtenha o gráfico de $f(x) = x^4 - 24x^3 - 25x^2$ em duas janelas de inspeção distintas, cada uma delas ilustrando uma propriedade diferente de f. Identifique cada uma das duas janelas e uma característica do gráfico de f que esteja bem exemplificada na janela.

11. Complete a tabela a seguir.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	−1	2	1	3	−2	−3	4	−4
$g(x)$	3	2	1	−3	−1	−4	4	−2	0
$(f \circ g)(x)$									
$(g \circ f)(x)$									

12. Sejam $f(x) = -x^2$ e $g(x) = 1/\sqrt{x}$. Encontre fórmulas para $f \circ g$ e $g \circ f$ e o domínio natural de cada composta.

13. Dado que $f(x) = x^2+1$ e $g(x) = 3x + 2$, encontre todos os valores de x de modo que $f(g(x)) = g(f(x))$.

14. Sejam $f(x) = (2x - 1)/(x + 1)$ e $g(x) = 1/(x-1)$.

(a) Encontre $f(g(x))$.

(b) O domínio natural da função $h(x) = (3 - x)/x$ é o mesmo da função $f \circ g$? Explique.

15. Dado que

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = x^2 - 1$$

Encontre uma fórmula para $f \circ g \circ h$ e dê o domínio dessa composta.

16. Dado que $f(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 2x^2 + 4x + 1$, encontre uma função g tal que $f(g(x)) = h(x)$.

17. Em cada parte, classifique a função como par, ímpar ou nenhuma das duas.

(a) $x^2 \operatorname{sen} x$ (b) $\operatorname{sen}^2 x$

(c) $x + x^2$ (d) $\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$

18. (a) Escreva uma equação para o gráfico obtido refletindo o gráfico de $y = |x - 1|$ pelo eixo y, então distendendo-o verticalmente por um fator de 2 e depois transladando-o para baixo 3 unidades e, por fim, refletindo o gráfico pelo eixo x.

(b) Faça um esboço dos gráficos original e final.

19. Em cada parte, descreva a família de curvas.

(a) $(x - a)^2 + (y - a^2)^2 = 1$

(b) $y = a + (x - 2a)^2$

20. Encontre uma equação para uma parábola que passe pelos pontos (2, 0), (8, 18) e (−8, 18).

21. Suponha que a tempertaura mínima esperada em Anchorage, no Alasca (em °F), seja modelada pela equação

$$T = 50 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 101) + 25$$

onde t está em dias e $t = 0$ corresponde a 1° de janeiro.

(a) Esboce o gráfico de T *versus* t para $0 \le t \le 365$.

(b) Use o modelo para prever quando ocorrerá o dia mais frio do ano.

(c) Com base no modelo, quantos dias durante o ano se espera ter uma temperatura abaixo de 0°F ?

22. A figura a seguir mostra um modelo para a variação das marés em um ponto interno da baía de San Francisco durante um período de 24 horas. Encontre uma equação da forma

$y = y_0 + y_1$ en $at + b$ ara m e , u n ue $t = 0$ c rre n a à meia n ite

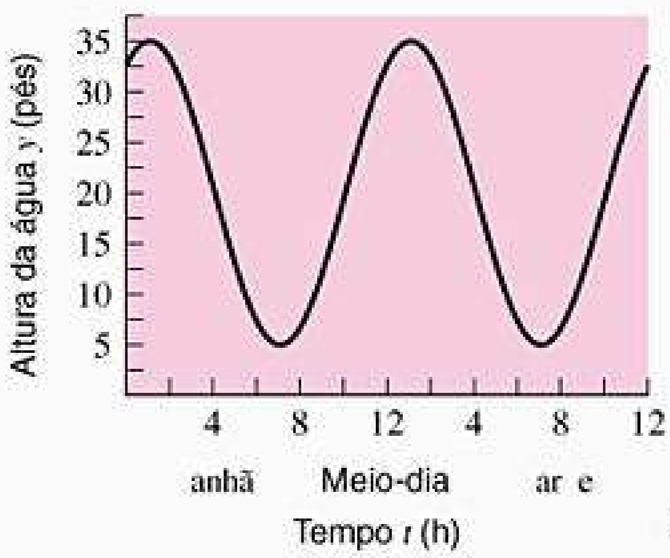


Figura Ex-22

23. figura em ane m tra gráfic a e uações $y = 1 + 2$ en x e $y = 2$ en $x/2$ + 2 c $x/2$ ara $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ Sem uti izar um recur c m utaci na , i entifi ue ca a uma a ua cur a e a ua e uaçã e enc ntre a c r ena a nt A, B, C e D in ica E i ue eu raci cíni

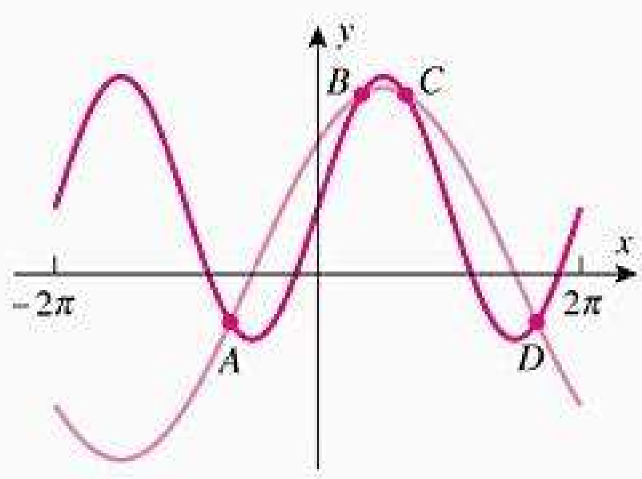


Figura Ex-23

24. re i tência e étrica R em hm Ω ara um fi e meta ur e tá re aci na a c m ua tem ertaura T em ° e a ór mu a

$$R = R_0 \quad 1 + kT$$

na ua R_0 e k ã c n tante iti a

a Faça um e b ç à mã gráfic e R *versus* T e e i ue ignifica ge métric e R_0 e k ara eu gráfic

b Em te ria, a re i tência R e um fi e meta ur cai ara zer uan a tem ertaura atinge zer ab ut $T = -273°$ ue in rmaçã i á bre k

c ma âm a a c m fi ament e tung têni tem uma re i tência e 1,1 Ω a uma tem eratura e 20° ue in rma çã i á bre R_0 fi ament

ua tem eratura fi ament e tung têni tem uma re i tência e 1,5 Ω

25. a Dê c n ições b a uai ua unções , f e g, erã in er a , untamente c m e em gerai e a unções

b De cre a a re açã entre gráfic e $y = f$ x e $y = g$ x uan f e g ã unções in er a

c ua é a re açã entre míni e a imagen e un ções in er a f e g

uai c n ições e em e tar ati eita ara ue f tenha uma in er a Dê a gun e em e unções ue nã têm in er a

26. a Dê a re trições bre míni e en x, c x, tg x e ec x ue ã im ta ara azer e a unções in et ra na efiniçõe e arc en x, arc c x, arc tg x e arc ec x

b E b ce gráfic a unções trig n métrica re trita em a e ua in er a

27. Em ca a arte, enc ntre f^{-1} x e a in er a e i tir

a f x = $x^3 - 1$ b f x = $x^2 - 2x + 1$

c f x = e^{x} $^2 + 1$ f x = $x + 2$ / $x - 1$

e $f(x) =$ en$\left(\dfrac{1 - 2x}{x}\right)$, $\dfrac{2}{4 + \pi} \leq x \leq \dfrac{2}{4 - \pi}$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 3 \text{ arc tg } x}$$

28. Se a f x = $ax + b$ / $cx + d$ uai ã a c n ições bre a, b, c e d ue garantem a e i tência e f^{-1} Enc ntre f^{-1} x

29. Em ca a arte, enc ntre a r numéric e at a e re ã a a

a c arc c 4/5 + arc en 5/13

b en arc en 4/5 + arc c 5/13

30. Em ca a arte, e b ce gráfic e erifi ue eu traba h c m um recur c m utaci na

a f x = 3 arc en $x/2$

b f x = arc c $x - \pi/2$

c f x = 2 arc tg $-3x$

f x = arc c x + arc en x

31. Su nha ue gráfic e $y =$ g x tenha i e enha c m e ca a iguai e 1 cm r uni a e em amba a ireçõe x e y Se um be ur ui er caminhar a ng gráfic até a cançar uma a tura e 0, metr acima ei x, uant ui ômetr à ireita a rigem terá e e ia a

32. Su nha ue gráfic e $y = 10^x$ tenha i e enha c m e ca a iguai e 1 cm r uni a e em amba a ireçõe x e y Se um be ur ui er caminhar a ng gráfic até a cançar a a tura e 100 ui ômetr acima ei x, uant centímetr à ireita a rigem terá e e ia a

33. E re e a eguinte unçã c m uma unçã raci na e x:

$$3 \text{ n } e^{2x} \; e^{x \; 3} + 2 \text{ e } \quad \text{n } 1$$

34. Su nha ue $y = Ce^{kt}$, n e C e k ã c n tante , e e a $Y =$ n y tre ue gráfic e Y *versus* t é uma reta, e ê ua inc i naçã e c rte c m ei Y

35. a E b ce a cur a $y = \pm e^{-x/2}$ e $y = e^{-x/2}$ en $2x$ ara $-\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$ n me m i tema e c r ena a e erifi ue eu traba h u an um recur gráfic c m utaci na

b Enc ntre t c rte n ei x a cur a $y = e^{-x/2}$ en $2x$ n inter a a e ache a c r ena a x e t n t n e e a cur a inter ecta a cur a $y = \pm e^{-x/2}$

36. Um pacote de suprimentos médicos cai de um helicóptero diretamente para baixo de pára-quedas em uma área remota. A velocidade v do pacote t segundos após começar a cair é dada em pés por segundo por $v = 24{,}61(1 - e^{-1{,}3t})$.

(a) Faça o gráfico de v *versus* t.

(b) Mostre que o gráfico tem uma assíntota horizontal $v = c$.

(c) A constante c é denominada ***velocidade terminal***. Explique qual o sentido prático dela.

(d) O pacote pode realmente atingir sua velocidade terminal? Explique.

(e) Quanto tempo leva para o pacote atingir 98% de sua velocidade terminal?

37. Um grupo de 20 ovelhas é solto para reprodução em uma área preservada no Colorado. Espera-se que, com um controle cuidadoso, o número N de ovelhas após t anos seja dado pela fórmula

$$N = \frac{220}{1 + 10(0{,}83^t)}$$

e que a população de ovelhas seja capaz de manter-se sem supervisão, depois de atingido o número de 80 ovinos.

(a) Faça o gráfico de N *versus* t.

(b) Por quantos anos o estado do Colorado deverá manter o controle sobre os ovinos?

(c) O ambiente da área suporta quantos ovinos? [*Sugestão*: Examine o gráfico de N *versus* t para valores grandes de t.]

38. Um forno é pré-aquecido e, então, mantém uma temperatura constante. Uma batata é colocada nele para assar. Suponha que a temperatura T (em °F) da batata t minutos após é dada por $T = 400 - 325(0{,}97^t)$. A batata seá considerada assada quando sua temperatura estiver entre 260°F e 280°F.

(a) Durante qual intervalo de tempo a batata será considerada como assada?

(b) Quanto tempo leva para a temperatura da batata atingir 95% da temperatura do forno?

(b) Quanto tempo leva para a diferença entre as temperaturas da batata e do forno cair para a metade?

39. (a) Mostre que os gráficos de $y = \ln x$ e $y = x^{0{,}2}$ se cruzam.

(b) Aproxime a(s) solução(ões) da equação $x = x^{0{,}2}$ com três casas decimais.

40. (a) Mostre que para $x > 0$ e $k \neq 0$ as equações

$$x^k = e^x \quad \text{e} \quad \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{k}$$

têm as mesmas soluções.

(b) Use o gráfico de $y = (\ln x) / x$ para determinar os valores de k para os quais a equação $x^k = e^x$ tem duas soluções positivas distintas.

(c) Aproxime as soluções positivas de $x^8 = e^x$.

41. Um problema importante que é resolvido com Cálculo é o de encontrar uma boa aproximação linear de uma função $f(x)$ perto de um valor x particular. Uma abordagem possível (não a melhor) é obter amostras dos valores da função perto do valor x especificado, encontrar a reta de regressão dessa amostragem e transladar a reta de regressão para que passe pelo ponto do gráfico $y = f(x)$ correspondente ao valor x. Considere $f(x) = x^2$ sen x.

(a) Faça uma tabela dos valores de $(x, f(x))$ para $x = 1{,}9$; 1,92; 1,94;...; 2,1.

(b) Encontre uma reta de regressão dos dados de (a).

(c) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(2, f(2))$ e que é paralela à reta de regressão.

(d) Usando um recurso computacional e uma janela que contenha o ponto $(2, f(2))$, trace o gráfico de $y = f(x)$ e da reta obtida em (c). Como se comportam os dois gráficos quando usar um *zoom* na vizinhança do ponto $(2, f(2))$?

[*Nota:* A melhor aproximação linear de $y = x^2$ sen x na vizinhança de $x = 2$ é dada por $y \approx 1{,}9726x - 0{,}308015$. Adiante veremos como utilizar as ferramentas do Cálculo para obter essa resposta.]

42. Uma extensão do problema da aproximação linear é encontrar uma boa aproximação polinomial de uma função $f(x)$ perto de um valor x particular. Uma abordagem possível (não a melhor) é obter amostras dos valores da função perto do valor x especificado, aplicar regressão polinomial a essa amostragem e transladar a curva de regressão para que passe pelo ponto do gráfico $y = f(x)$ correspondente ao dado valor x. Considere $f(x) = \cos x$.

(a) Faça uma tabela dos valores de $(x, f(x))$ para $x = -0{,}1$; $-0{,}08$; $-0{,}06$;...; 0,1.

(b) Use regressão quadrática para modelar os dados de (a) com um polinômio quadrático.

(c) Translade a função do modelo quadrático de (b) para obter uma função quadrática que passe pelo ponto $(0, f(0))$.

(d) Usando um recurso computacional e uma janela que contenha o ponto $(0, f(0))$, trace o gráfico de $y = f(x)$ e do polinômio obtido em (c). Como se comportam os dois gráficos quando usar um *zoom* na vizinhança do ponto $(0, f(0))$?

[*Nota:* A melhor aproximação quadrática de $y = \cos x$ na vizinhança de $x = 0$ é dada por $y \approx -0{,}5x^2 + 1$. No Capítulo 10 veremos como utilizar as ferramentas do Cálculo para obter essa resposta.]

43. A Tabela Ex-43 (ver p.100) dá o nível de água (em metros acima do nível médio mínimo) no Cabo Hatteras, na Carolina do Norte, EUA, medido a cada duas horas, começando à meia-noite de 1º de julho de 1999. Por que deveríamos esperar um ajuste de uma função trigonométrica a esses dados? Encontre uma função que modele esses dados e faça o gráfico dessa função junto com um diagrama dos dados.

44. Um professor quer usar as notas das provas parciais de área como uma previsão das notas finais em uma pequena turma de estudos avançados para a qual leciona uma vez por ano. As notas parciais e as nota finais da turma do ano passado estão listadas na Tabela Ex-44.

(a) Encontre o modelo de regressão linear que expressa a nota final em termos da nota parcial.

(b) Suponha que um aluno deste ano tenha obtido uma nota parcial 8,8. Use o modelo obtido em (a) para prever a nota final desse aluno.

Tabela Ex-43

HORA	NÍVEL DA ÁGUA (m)
0	0,526
2	0,157
4	0,161
6	0,486
8	0,779
10	0,740
12	0,412
14	0,141
16	0,260
18	0,633
20	1,015
22	1,021
24	0,670
26	0,231
28	0,128
30	0,345
32	0,697
34	0,821
36	0,534
38	0,192
40	0,141
42	0,426
44	0,849
46	1,032
48	0,765
50	0,281
52	0,042
54	0,157
56	0,587
58	0,777
60	0,620
62	0,241
64	0,045
66	0,195
68	0,613
70	0,945

Tabela Ex-44

NOTA PARCIAL	NOTA FINAL
7,8	7,8
9,4	9,1
7,8	7,6
8,4	8,2
9,5	9,2
9,6	9,3
7,7	7,5

45. Encontre equações paramétricas para a parte do círculo $x^2 + y^2 = 2$ que está fora do primeiro quadrante, orientado no sentido anti-horário. Confira sua resposta gerando a curva com um recurso gráfico.

46. (a) Suponha que as equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ descrevam a curva C para t crescente, de 0 a 1. Encontre equações paramétricas que descrevam a mesma curva C, mas agora no sentido oposto, para t crescente, de 0 a 1.

(b) Confira seu trabalho usando a capacidade de esboçar equações paramétricas de seu recurso gráfico para gerar o segmento de reta entre (1, 2) e (4, 0) em ambos os sentidos com t crescente, de 0 a 1.

47. Esboce a curva determinada pelas equações paramétricas

$$x = t\cos(2\pi t), \quad y = t\,\text{sen}(2\pi t)$$

e confira seu resultado com um recurso gráfico.

48. Considere $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x + \ln x$, $0 < x < \pi/2$.

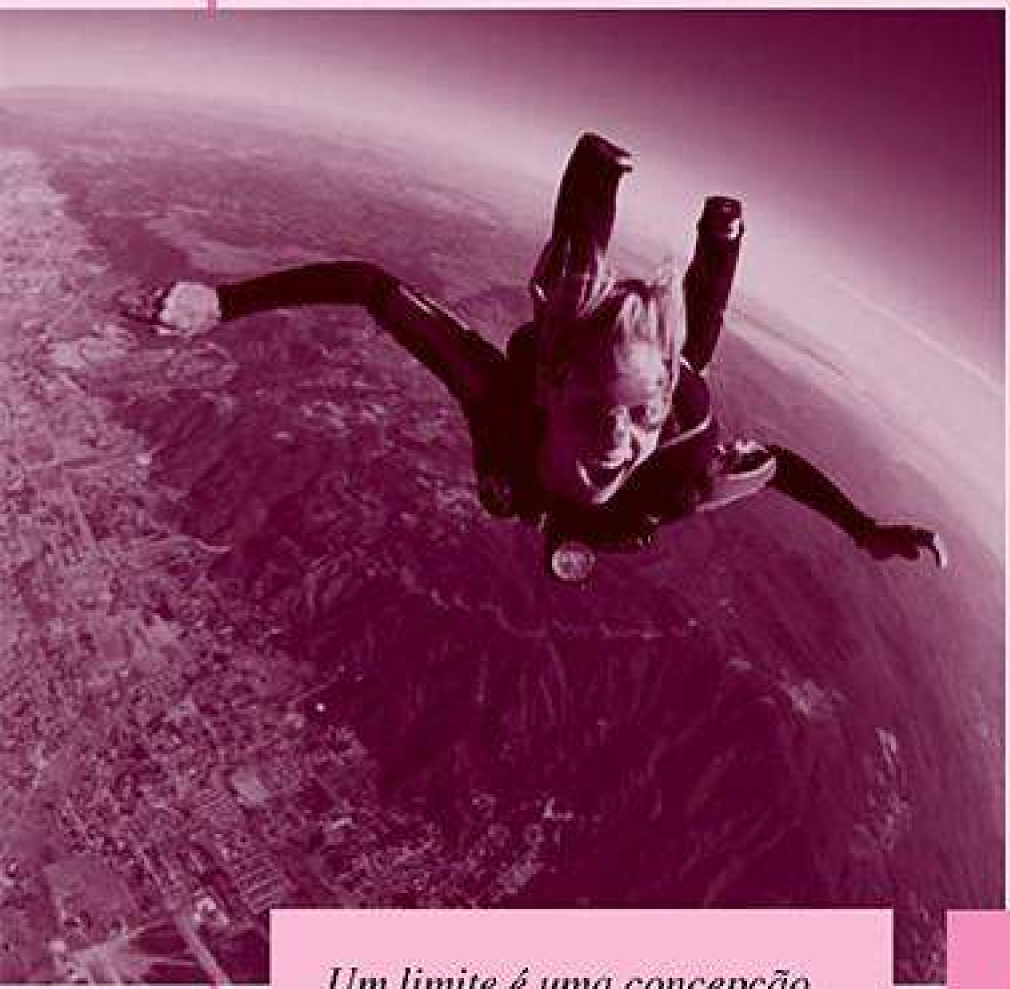
(a) Explique por que f é injetora.

(b) Use um recurso gráfico e equações paramétricas para exibir os gráficos de f e f^{-1} na mesma janela. Quais são as assíntotas de cada gráfico?

Expandindo o Horizonte do Cálculo

Os ecologistas usam modelos matemáticos baseados no processo de iteração para prever o crescimento e o declínio de populações animais. Para aprender mais sobre esse processo e suas aplicações, e para aplicar a Matemática aprendida neste capítulo, visite a página

www.bookman.com.br



LIMITES E CONTINUIDADE

Um limite é uma concepção peculiar e fundamental, cujo uso na prova de proposições da Geometria Superior não pode ser suplantado por qualquer outra combinação de hipóteses e definições.

—William Whewell
Filósofo da Ciência

O desenvolvimento do Cálculo no século XVII por Newton e Leibniz forneceu aos cientistas seu primeiro entendimento real do que significa uma "taxa de variação instantânea", tal como a velocidade ou a aceleração. Uma vez entendida conceitualmente essa idéia, seguiram-se métodos computacionais eficientes e a Ciência deu um salto quântico para frente. A pedra fundamental sobre a qual se apóia a idéia de taxa de variação é o conceito de "limite", uma idéia tão importante que agora todos os demais conceitos do Cálculo se baseiam nela.

Neste capítulo desenvolveremos o conceito de limite em etapas, procedendo de uma noção informal e intuitiva para uma definição matemática precisa. Também desenvolveremos teoremas e procedimentos para calcular limites e concluiremos o capítulo usando os limites para estudar curvas "contínuas".

Foto: ***A resistência do ar impede que a velocidade do pára-quedista aumente indefinidamente. A velocidade tende a uma velocidade limite, chamada "velocidade terminal".***

2.1 LIMITES (UMA ABORDAGEM INTUITIVA)

O conceito de "limite" é o alicerce sobre o qual estão baseados todos os demais conceitos de Cálculo. Nesta seção estudaremos os limites informalmente, com o objetivo de desenvolver uma intuição para as idéias básicas. Nas três seções seguintes enfocaremos os métodos computacionais e as definições precisas.

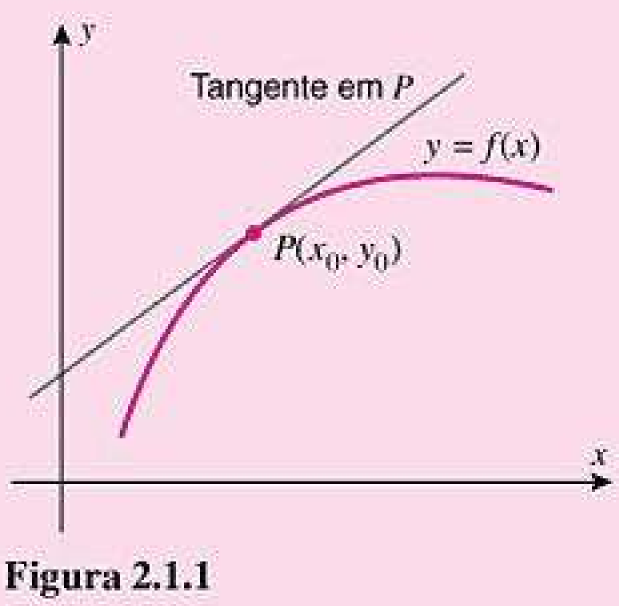


Figura 2.1.1

Muitas das idéias básicas do Cálculo tiveram sua origem nos dois problemas geométricos seguintes.

O PROBLEMA DA RETA TANGENTE Dada uma função f e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu gráfico, encontre uma equação da reta que é tangente ao gráfico em P (Figura 2.1.1).

O PROBLEMA DA ÁREA Dada uma função f, encontre a área entre o gráfico de f e um intervalo $[a, b]$ no eixo x (Figura 2.1.2).

Tradicionalmente, a parte do Cálculo que se originou do problema da reta tangente é denominada Cálculo Diferencial, e a que foi originada do problema da área é denominada

Cálculo Integral. Contudo, veremos mais adiante que o problema da reta tangente e o da área estão tão estreitamente relacionados que a distinção entre o Cálculo Diferencial e Integral é bastante artificial.

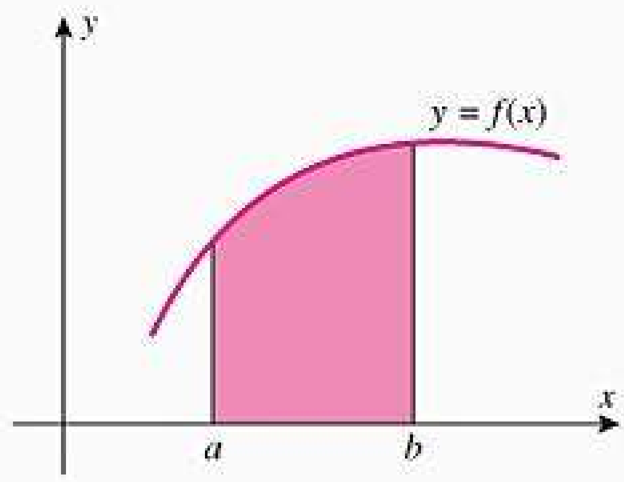


Figura 2.1.2

■ RETAS TANGENTES E LIMITES

Em Geometria plana, dizemos que uma reta é *tangente* a um círculo se o encontrar precisamente em um ponto (Figura 2.1.3*a*). Entretanto, essa definição não é apropriada para curvas mais gerais. Por exemplo, na Figura 2.1.3*b*, a reta encontra a curva exatamente uma vez, mas obviamente não a consideraríamos uma reta tangente, e na Figura 2.1.3*c*, a reta parece ser tangente à curva, entretanto, intersecta-a mais de uma vez.

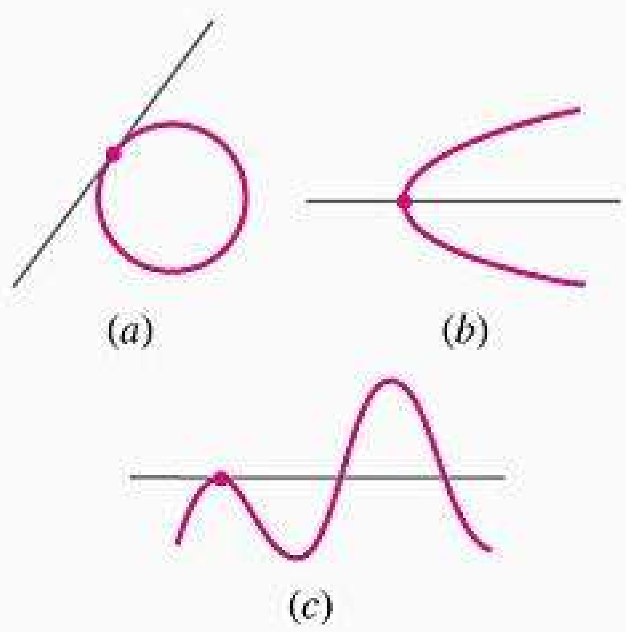


Figura 2.1.3

Para obter uma definição de reta tangente que se aplique a curvas que não sejam círculos, devemos ver a reta tangente de outra maneira. Com essa finalidade, suponha que estejamos interessados na reta tangente a uma curva em um ponto P no plano xy e que Q é um ponto qualquer que pertence à curva e é distinto de P. A reta que passa por P e Q é denominada ***reta secante*** à curva em P. A intuição sugere que, se movermos o ponto Q em direção a P, então a reta secante irá girar em direção a uma *posição limite*. A reta nessa posição limite é o que consideraremos ser a ***reta tangente*** em P (Figura 2.1.4*a*). Como sugerido na Figura 2.1.4*b*, esse novo conceito de reta tangente coincide com o conceito tradicional quando aplicado a círculos.

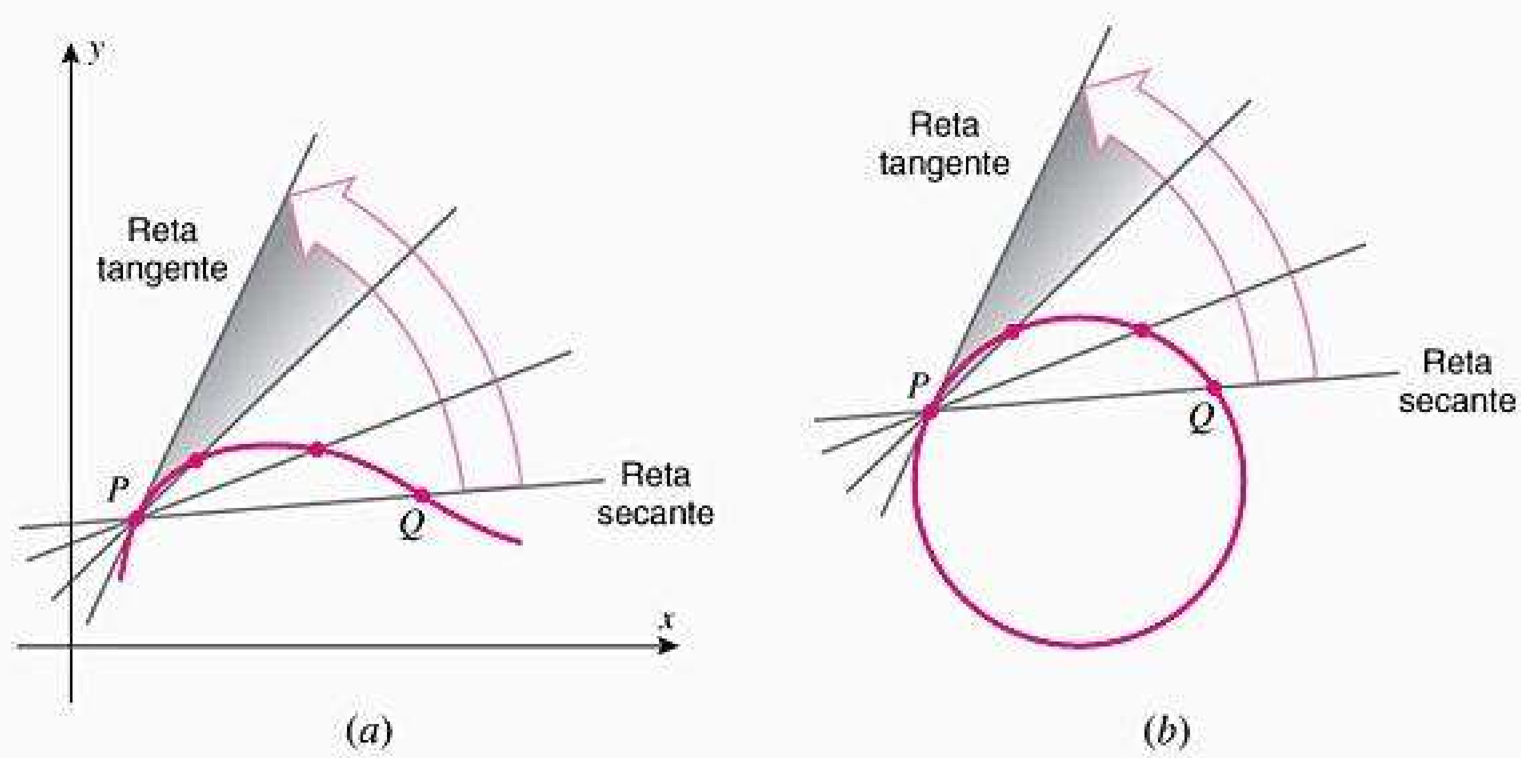


Figura 2.1.4

► Exemplo 1 Encontre uma equação para a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

Solução Se conseguirmos encontrar a inclinação m_{tg} da reta tangente em P, então poderemos usar o ponto P e a fórmula ponto-inclinação de uma reta (Apêndice F da internet) para escrever a equação da reta tangente como

$$y - 1 = m_{tg}\,(x - 1) \tag{1}$$

Para encontrar a inclinação m_{tg}, considere a reta secante por P e um ponto $Q(x, x^2)$ na parábola que é distinto de P. A inclinação m_{sec} dessa secante é

Por que estamos exigindo que P e Q sejam distintos?

$$m_{sec} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \tag{2}$$

A Figura 2.1.4*a* sugere que se, agora, permitirmos que Q se mova sobre a parábola e se aproxime mais e mais de P, então a posição limite da reta secante por P e Q coincidirá com a reta tangente em P. Isso, por sua vez, sugere que o valor de m_{sec} irá se aproximar mais e mais do valor de m_{tg} à medida que Q se move em direção a P sobre a curva. Contudo, dizer

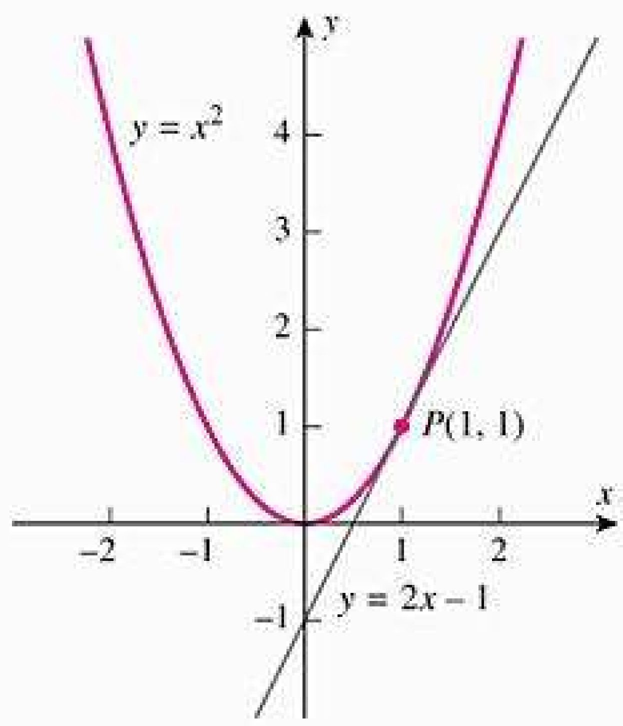


Figura 2.1.5

que $Q(x, x^2)$ se aproxima mais e mais de $P(1, 1)$ é algebricamente equivalente a dizer que x se aproxima mais e mais de 1. Assim, o problema de encontrar m_{tg} se reduz a encontrar o "valor limite" de m_{sec} na Fórmula (2) à medida que x se aproxima mais e mais de 1 (mas sempre com $x \neq 1$ para garantir que P e Q permaneçam distintos).

Já que $x \neq 1$, podemos reescrever (2) como

$$m_{sec} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = x + 1$$

a partir do qual é evidente que m_{sec} se aproxima mais e mais de 2 quando x se aproxima mais e mais de 1. Assim, $m_{tg} = 2$ e (1) implica que a equação da reta tangente é

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = 2x - 1$$

A Figura 2.1.5 mostra o gráfico de $y = x^2$ e dessa reta tangente. ◀

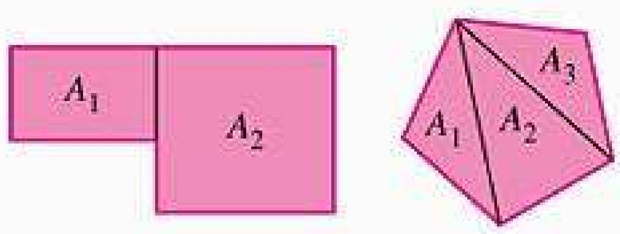


Figura 2.1.6

■ ÁREAS E LIMITES

Assim como a noção geral de reta tangente leva ao conceito de *limite*, o mesmo acontece com a noção geral de área. Para regiões planas, com contornos formados por linhas retas, as áreas podem muitas vezes ser calculadas subdividindo-se a região em retângulos ou triângulos, e somando-se as áreas das partes constituintes (Figura 2.1.6). Todavia, para regiões cujo contorno é curvo, como a da Figura 2.1.7*a*, é necessária uma abordagem mais geral. Uma dessas abordagens é começar aproximando a área da região com um certo número de retângulos inscritos de larguras iguais sob a curva, e somar as áreas desses retângulos (Figura 2.1.7*b*). A intuição sugere que, se repetirmos esse processo de aproximação com cada vez mais retângulos, então eles tenderão a preencher os vazios sob a curva e a aproximação ficará cada vez mais próxima da área exata sob a curva (Figura 2.1.7*c*). Isso sugere que podemos definir a área sob a curva como sendo o valor limite dessas aproximações. Essa idéia será considerada com mais detalhes adiante, mas aqui queremos ressaltar mais uma vez o papel do conceito de limite.

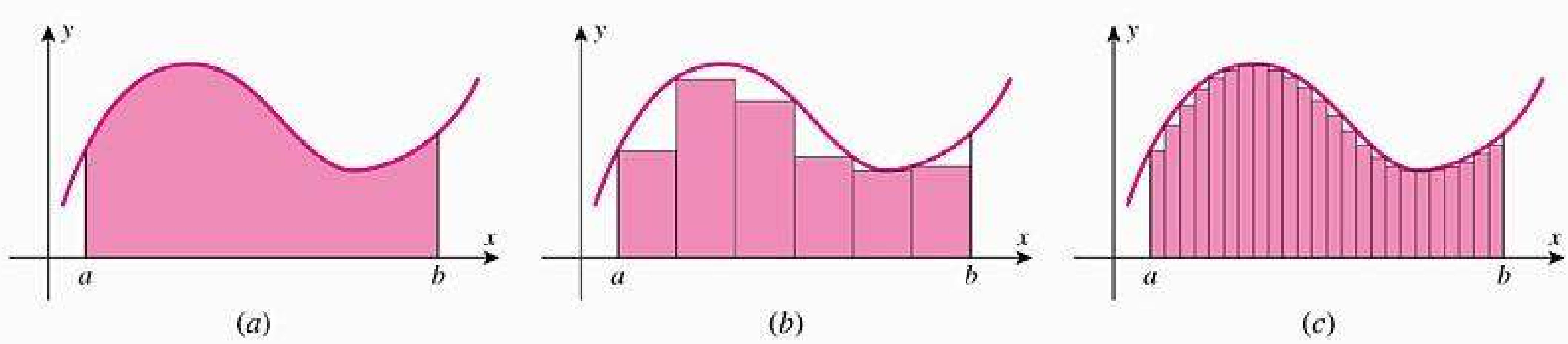


Figura 2.1.7

■ NÚMEROS DECIMAIS E LIMITES

Os limites também ocorrem no contexto familiar de números decimais. Por exemplo, a expansão decimal da fração $\frac{1}{3}$ é

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots \tag{3}$$

na qual os pontos indicam que o dígito 3 se repete indefinidamente. Embora o leitor possa nunca ter pensado em decimais dessa maneira, podemos escrever (3) como

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \tag{4}$$

que é uma soma de "infinitas" parcelas. Conforme será discutido com maiores detalhes mais adiante, interpretamos (4) como significando que a sucessão de somas finitas

$$0{,}3, \quad 0{,}3 + 0{,}03, \quad 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003, \quad 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003, \ldots$$

se aproxima mais e mais de um valor limite de $\frac{1}{3}$, à medida que incluímos mais e mais parcelas. Assim, os limites ocorrem até no contexto familiar das representações decimais de números reais.

LIMITES

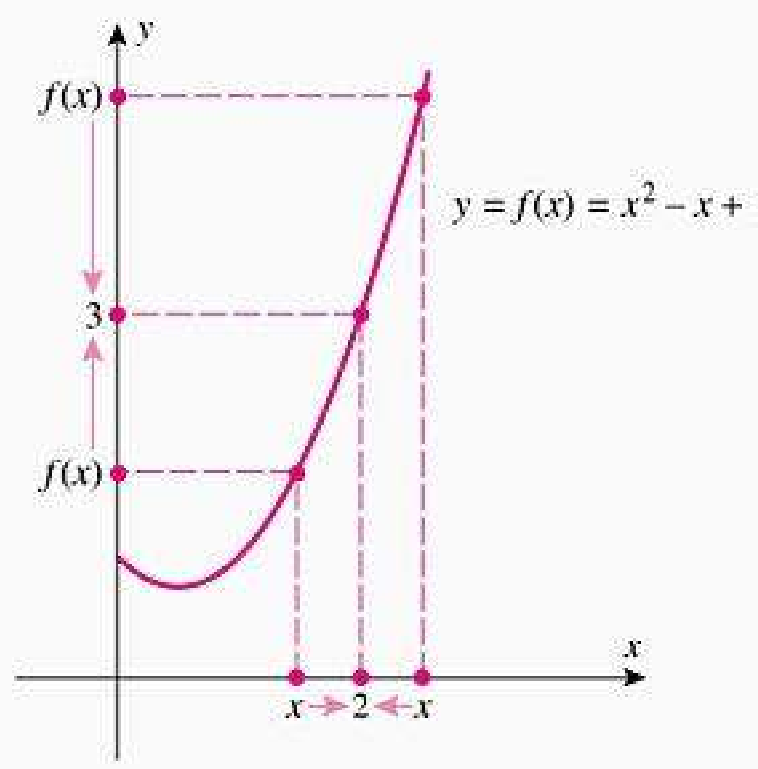
Agora que já vimos como os limites aparecem em várias situações, vamos nos concentrar no conceito de limite.

O uso mais básico de limites é descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor. Por exemplo, examinemos o comportamento da função

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

quando x está cada vez mais próximo de 2. Fica evidente, a partir do gráfico e da tabela na Figura 2.1.8, que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de 3 à medida que escolhermos os valores de x cada vez mais próximos de 2, por qualquer um dos lados, esquerdo ou direito. Descrevemos isso dizendo que o "limite de $x^2 - x + 1$ é 3 quando x tende a 2 por qualquer um dos lados", e escrevemos

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3 \tag{5}$$



x	1,0	1,5	1,9	1,95	1,99	1,995	1,999	2	2,001	2,005	2,01	2,05	2,1	2,5	3,0
$f(x)$	1,000000	1,750000	2,710000	2,852500	2,970100	2,985025	2,997001		3,003001	3,015025	3,030100	3,152500	3,310000	4,750000	7,000000

Lado esquerdo → ← Lado direito

Figura 2.1.8

Isso nos leva à idéia geral seguinte.

> Já que estamos exigindo que x seja diferente de a em (6), o valor de f em a não tem relação alguma com o limite L, tampouco se f está ou não definida em a. O limite descreve o comportamento de f perto de a, mas não em a.

2.1.1 LIMITES (DE UM PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ puderem ser tornados tão próximos quanto queiramos de L, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas não iguais a a), então escreveremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{6}$$

que deve ser lido como "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L", ou "$f(x)$ tende a L quando x tende a a". A expressão (6) também pode ser escrita como

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to a \tag{7}$$

► Exemplo 2 Use evidência numérica para conjecturar o valor de

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \tag{8}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso gráfico para gerar o gráfico da equação $y = f(x)$ para a função dada por (9). Encontre uma janela contendo $x = 1$ na qual todos os valores de $f(x)$ estão a menos de 0,5 de $y = 2$ e uma outra na qual todos os valores de $f(x)$ estão a menos de 0,1 de $y = 2$.

Solução Embora a função

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \tag{9}$$

não esteja definida em $x = 1$, isso não tem relação alguma com o limite. A Tabela 2.1.1 apresenta valores amostrais de x se aproximando de 1 de ambos os lados. Nos dois casos, os correspondentes valores de $f(x)$, calculados até a sexta casa decimal, parecem estar se aproximando mais e mais de 2, e portanto conjecturamos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$$

Isso é consistente com o gráfico de f, mostrado na Figura 2.1.9. Na próxima seção mostraremos como obter esse resultado algebricamente. ◄

Tabela 2.1.1

x	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0	1,00001	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,994987	1,999500	1,999950	1,999995		2,000005	2,000050	2,000500	2,004988

Lado esquerdo → ← Lado direito

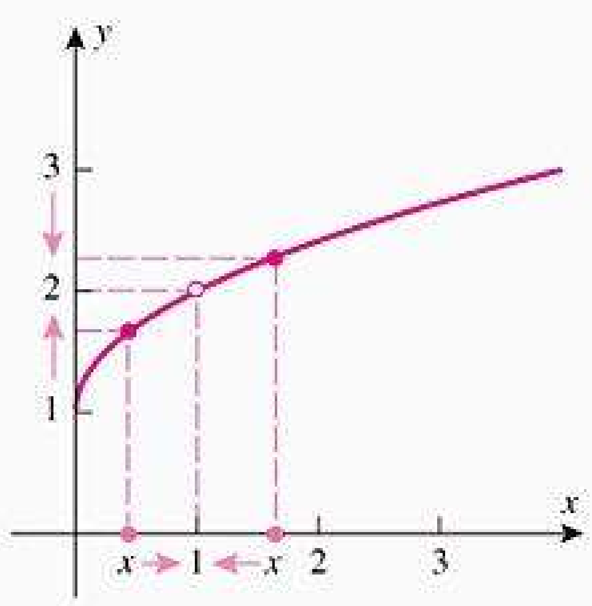


Figura 2.1.9

► Exemplo 3 Use evidência numérica para conjecturar o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \tag{10}$$

Solução Com a ajuda de uma calculadora ajustada para o modo radianos, obtemos a Tabela 2.1.2. Os dados da tabela sugerem que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \tag{11}$$

O resultado é consistente com o gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, mostrado na Figura 2.1.10. Adiante, neste capítulo, daremos um argumento geométrico para provar a validade de nossa conjectura. ◄

Tabela 2.1.2

x (RADIANOS)	$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
±1,0	0,84147
±0,9	0,87036
±0,8	0,89670
±0,7	0,92031
±0,6	0,94107
±0,5	0,95885
±0,4	0,97355
±0,3	0,98507
±0,2	0,99335
±0,1	0,99833
±0,01	0,99998

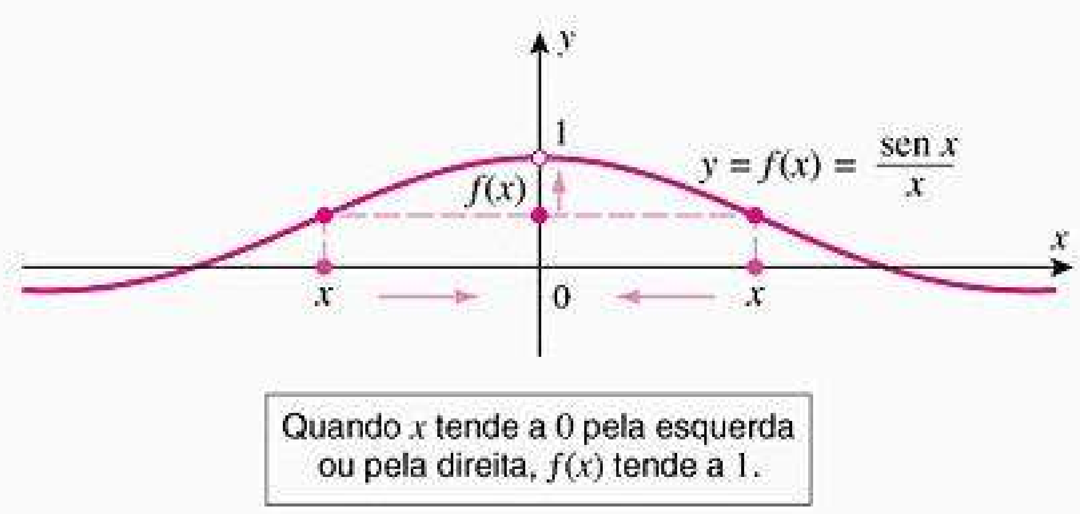


Figura 2.1.10

■ ARMADILHAS DE AMOSTRAGEM

A evidência numérica pode, às vezes, levar a conclusões erradas sobre os limites, por causa de erros de arredondamento ou porque os valores amostrais escolhidos não revelam o verdadeiro comportamento do limite. Por exemplo, poderíamos concluir *erroneamente* da Tabela 2.1.3 que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Use uma evidência numérica para determinar se o limite em (11) muda quando x é medido em graus.

é zero. O fato de que isso não está correto é evidenciado pelo gráfico de f dado na Figura 2.1.11. O gráfico revela que os valores de f oscilam entre -1 e 1, com velocidade crescente à medida que $x \to 0$ e, portanto, não se aproximam de um limite. Os dados na tabela nos iludiram porque ocorre que os valores selecionados de x são todos pontos de corte do eixo x com o gráfico de f. Isso chama a atenção para o fato de que é necessário dispor de métodos alternativos para corroborar limites conjecturados a partir de evidências numéricas.

Tabela 2.1.3

x	$\frac{\pi}{x}$	$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$
$x = \pm 1$	$\pm\pi$	$\operatorname{sen}(\pm\,\pi) = 0$
$x = \pm 0{,}1$	$\pm 10\pi$	$\operatorname{sen}(\pm\,10\pi) = 0$
$x = \pm 0{,}01$	$\pm 100\pi$	$\operatorname{sen}(\pm\,100\pi) = 0$
$x = \pm 0{,}001$	$\pm 1000\pi$	$\operatorname{sen}(\pm\,1000\pi) = 0$
$x = \pm 0{,}0001$	$\pm 10.000\pi$	$\operatorname{sen}(\pm\,10.000\pi) = 0$
⋮	⋮	⋮

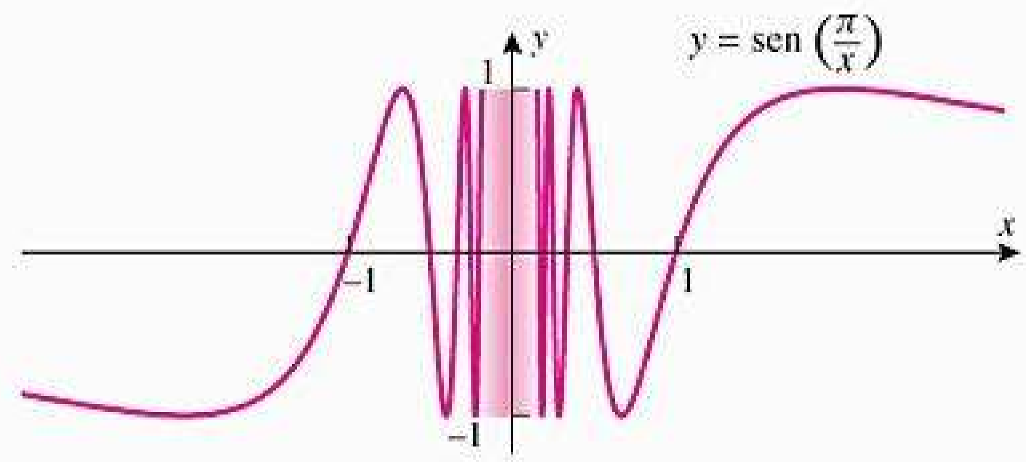


Figura 2.1.11

■ LIMITES LATERAIS

Costuma-se dizer que (6) é o ***limite bilateral***, porque requer que os valores de $f(x)$ fiquem cada vez mais próximos de L quando x tende a a por qualquer um dos dois lados. Contudo, algumas funções exibem diferentes comportamentos em cada um dos lados de um ponto a, e nesse caso é necessário distinguir se x está próximo de a do lado esquerdo ou do lado direito, para fins de examinar o comportamento no limite. Por exemplo, considere a função

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{12}$$

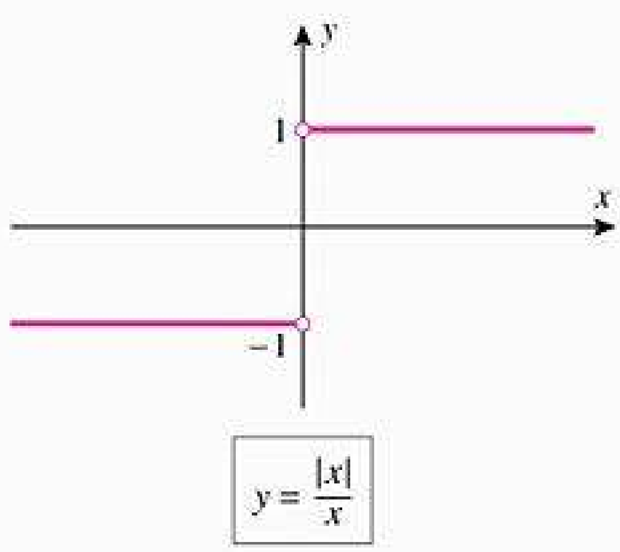


Figura 2.1.12

(Figura 2.1.12). Quando x aproxima-se de 0 do lado *direito*, os valores de $f(x)$ tendem ao limite 1 (na realidade, eles são exatamente iguais a 1 para todos esses x), e quando x tende a 0 pela *esquerda*, os valores de $f(x)$ aproximam-se do limite -1. Denotamos esses limites escrevendo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \tag{13}$$

Com essa notação, o índice superior "+" indica um limite à direita e o índice superior "–" indica um limite à esquerda.

Isso leva à idéia geral de ***limites laterais***.

Assim como ocorre com os limites bilaterais, os limites laterais em (14) e (15) também podem ser escritos como

$f(x) \to L$ com $x \to a^+$

e

$f(x) \to L$ com $x \to a^-$

respectivamente.

2.1.2 LIMITES LATERAIS (PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de L quanto queiramos desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas maiores do que a), então escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \tag{14}$$

e se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de L quanto queiramos desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas menores do que a), então escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \tag{15}$$

A expressão (14) é lida como "L é o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita" ou "$f(x)$ tende a L quando x tende a a pela direita". Analogamente, a expressão (15) é lida como "L é o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda" ou "$f(x)$ tende a L quando x tende a a pela esquerda".

■ A RELAÇÃO ENTRE LIMITES LATERAIS E LIMITES BILATERAIS

De um modo geral, não há garantia de que uma função tenha um limite bilateral em um ponto dado; ou seja, os valores de $f(x)$ podem não se aproximar mais e mais de um único número real L quando $x \to a$. Nesse caso, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \textit{\textbf{não existe}}$$

(e analogamente para limites laterais).

Para que exista o limite bilateral de uma função $f(x)$ em um ponto a, os valores de $f(x)$ devem tender a algum número real L quando x tende a a, e esse número deve ser o mesmo, independentemente de x tender a a pela esquerda ou pela direita. Isso sugere o resultado seguinte, que enunciamos sem prova formal.

> **2.1.3 A RELAÇÃO ENTRE LIMITES LATERAIS E BILATERAIS** O limite bilateral de uma função $f(x)$ existe em um ponto a se, e somente se, existirem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor; isto é,
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

► Exemplo 4 Explique por que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

não existe.

Solução Quando x tende a 0, os valores de $f(x) = |x|/x$ tendem a -1 pela esquerda e a 1 pela direita [ver (13)]. Assim, os limites laterais em 0 não são iguais. ◄

► Exemplo 5 Para as funções na Figura 2.1.13, encontre os limites laterais e bilaterais em $x = a$ se eles existirem.

Solução As funções nas três figuras têm os mesmos limites laterais quando $x \to a$, uma vez que as funções são idênticas, exceto em $x = a$. Esses limites são:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = 1$$

Em todos os três casos, o limite bilateral não existe quando $x \to a$, pois os limites laterais não são iguais. ◄

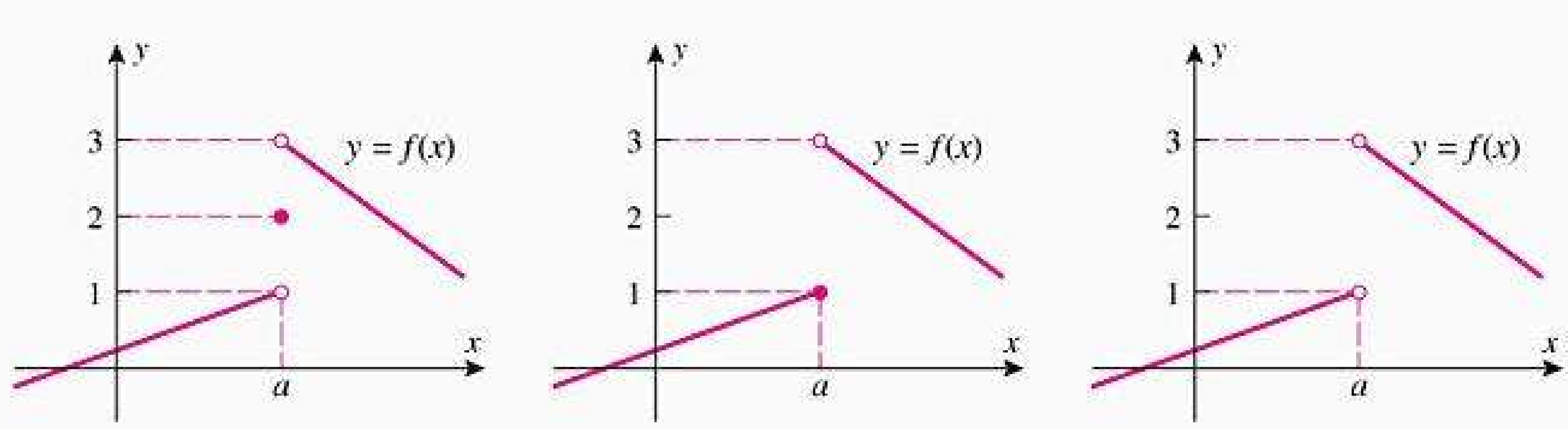


Figura 2.1.13

► Exemplo 6 Para as funções na Figura 2.1.14, encontre os limites laterais e bilaterais em $x = a$ se eles existirem.

Solução Como no exemplo precedente, o valor de f em $x = a$ não tem nada a ver com o limite quando $x \to a$. Assim, em todos os três casos temos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = 2$$

Como os limites laterais são iguais, o limite bilateral existe e

$$\lim_{x \to a} f(x) = 2 \blacktriangleleft$$

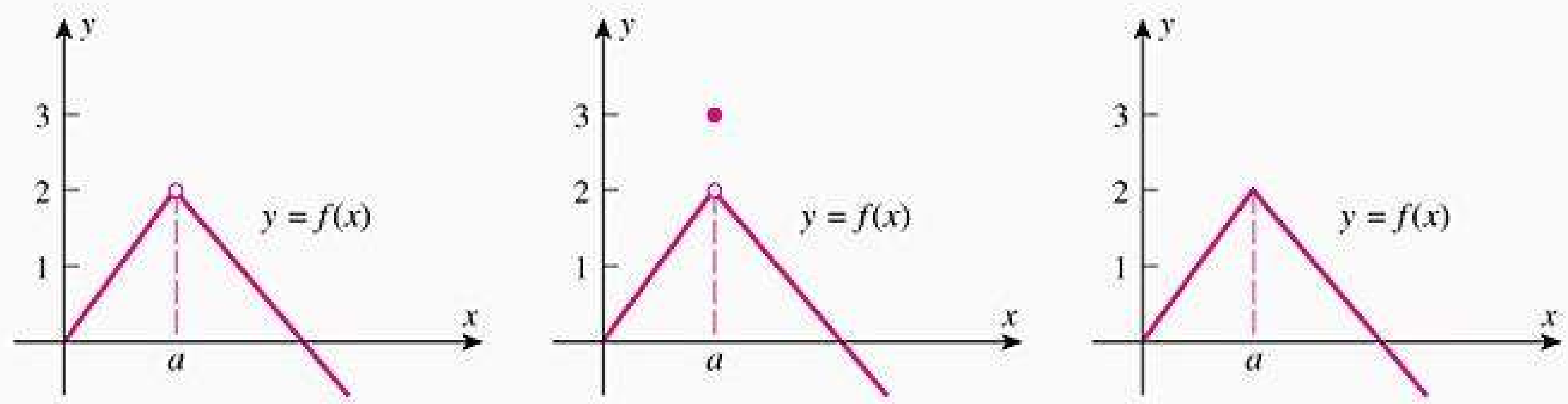


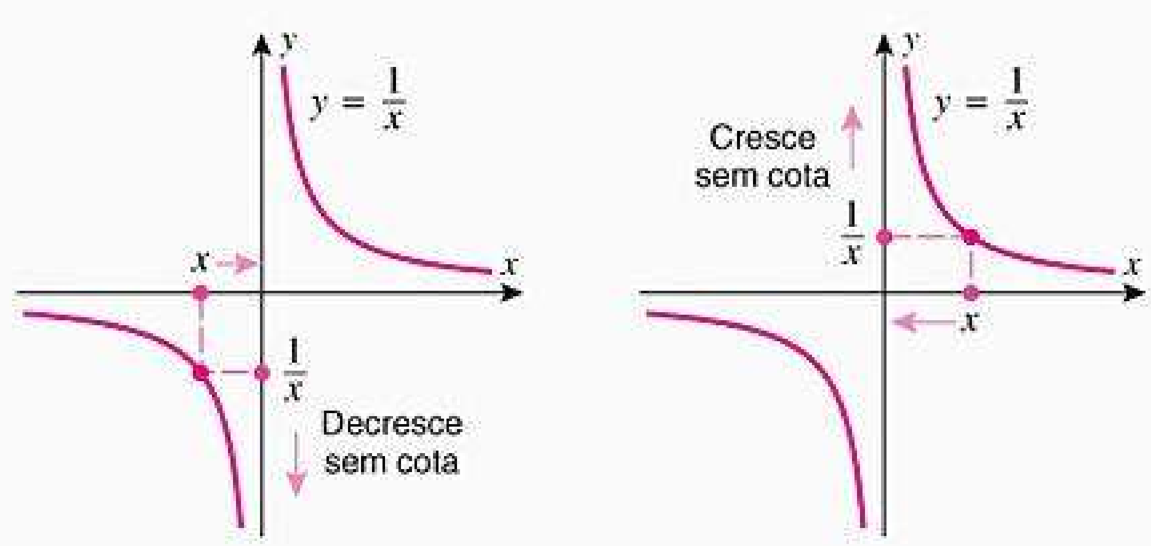
Figura 2.1.14

■ LIMITES INFINITOS

Às vezes, os limites laterais ou bilaterais não existem porque os valores da função crescem ou decrescem sem cotas. Por exemplo, considere o comportamento da função $f(x) = 1/x$ para os valores de x perto de 0. É evidente, a partir da tabela e do gráfico na Figura 2.1.15, que, à medida que tomamos os valores de x cada vez mais próximos de 0 pela direita, os valores de $f(x) = 1/x$ são positivos e crescem sem cota; e, à medida que tomamos os valores de x cada vez mais próximos de 0 pela esquerda, os valores de $f(x) = 1/x$ são negativos e decrescem sem cota. Esses comportamentos finais são descritos escrevendo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais; eles simplesmente descrevem maneiras particulares pelas quais os limites deixam de existir. Não cometa o erro de manipular esses símbolos usando as regras da Álgebra. Por exemplo, não está correto escrever $(+\infty) - (+\infty) = 0$.



x	−1	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001	0	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
$\frac{1}{x}$	−1	−10	−100	−1000	−10.000		10.000	1000	100	10	1

Lado esquerdo → ← Lado direito

Figura 2.1.15

2.1.4 LIMITES INFINITOS (PONTO DE VISTA INFORMAL) As expressões

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

significam que $f(x)$ cresce sem cota quando x tende a a pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Se ambas são verdadeiras, então escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Analogamente, as expressões

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

significam que $f(x)$ decresce sem cota quando x tende a a pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Se ambas são verdadeiras, então escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

► **Exemplo 7** Para as funções na Figura 2.1.16, descreva os limites em $x = a$ na notação de limite apropriada.

Solução (a) Na Figura 2.1.16*a*, a função cresce sem cota quando x tende a a pela direita, e decresce sem cota quando x tende a a pela esquerda. Então,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

Solução (b) Na Figura 2.1.16*b*, a função cresce sem cota quando x tende a a pela direita e pela esquerda. Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

Solução (c) Na Figura 2.1.16*c*, a função decresce sem cota quando x tende a a pela direita, e cresce sem cota quando x tende a a pela esquerda. Então,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{-1}{x-a} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{-1}{x-a} = +\infty$$

Solução (d) Na Figura 2.1.16*d*, a função decresce sem cota quando x tende a a pela esquerda e pela direita. Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{-1}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a^+} \frac{-1}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a^-} \frac{-1}{(x-a)^2} = -\infty$$ ◄

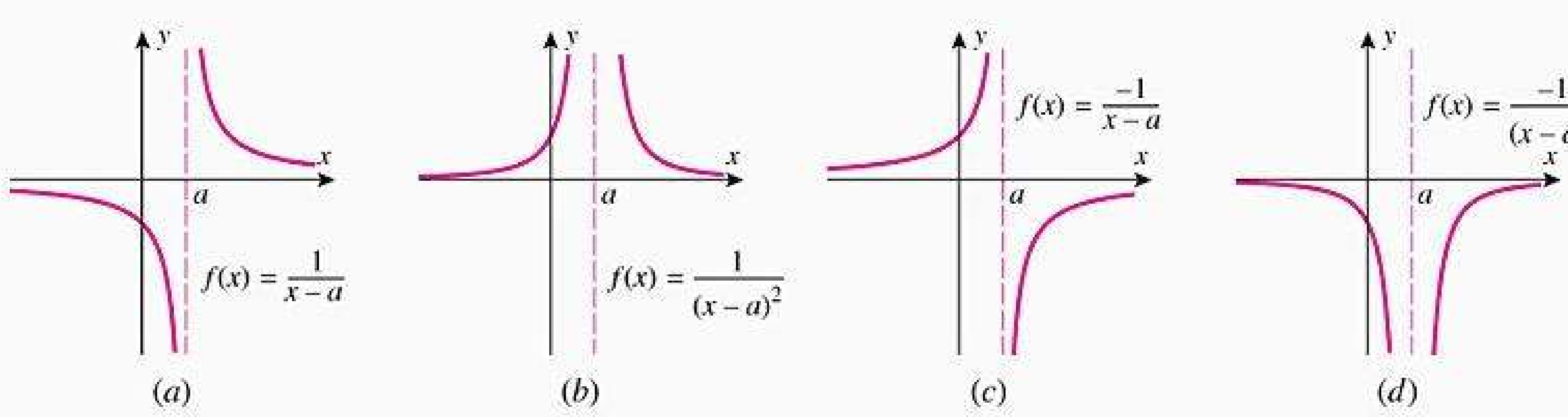


Figura 2.1.16

■ ASSÍNTOTAS VERTICAIS

A Figura 2.1.17 ilustra geometricamente o que acontece quando ocorre uma das seguintes situações:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Em cada caso, o gráfico de $y = f(x)$ ou sobe ou desce sem cota, ajustando-se mais e mais à reta vertical $x = a$ à medida que x tende a a pelo lado indicado no limite. A reta $x = a$ é denominada ***assíntota vertical*** da curva $y = f(x)$. (O termo assíntota deriva do grego *asymptotos*, que significa "que não pode coincidir".)

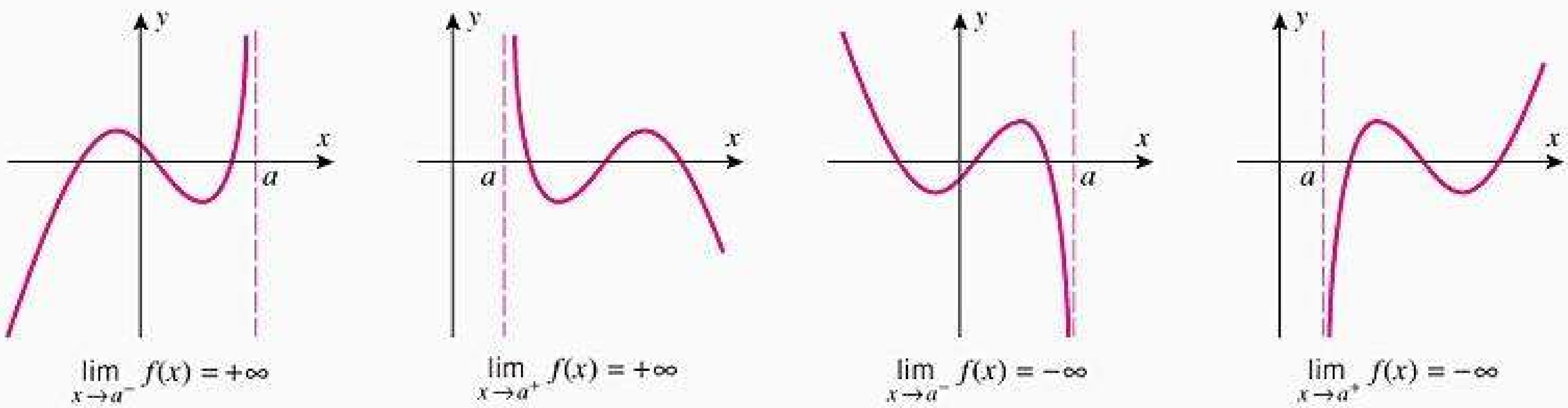


Figura 2.1.17

▶ **Exemplo 8** Em referência à Figura 1.6.8, vemos que o eixo y é uma assíntota vertical de $y = \log_b x$ se $b > 1$, já que

$$\lim_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$$

e, em referência à Figura 1.4.11, vemos que $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} \quad ◀ \qquad (16)$$

Encontre as expressões dos limites à esquerda e à direita em cada uma das duas assíntotas da função dada em (16).

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.1 (*Ver página 113 para respostas.*)

1. Suponha que a função f tenha a propriedade de que a distância entre $f(x)$ e 3 não é maior do que $|x|$, para qualquer número real x. A partir disso, podemos concluir que $f(x) \to$ ________ quando $x \to$ __________.

2. Use o gráfico de $y = f(x)$ $(-\infty < x < 3)$ a seguir para determinar os limites.
   (a) $\lim_{x \to 0} f(x) =$ ________
   (b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ ________
   (c) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ ________
   (d) $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ ________

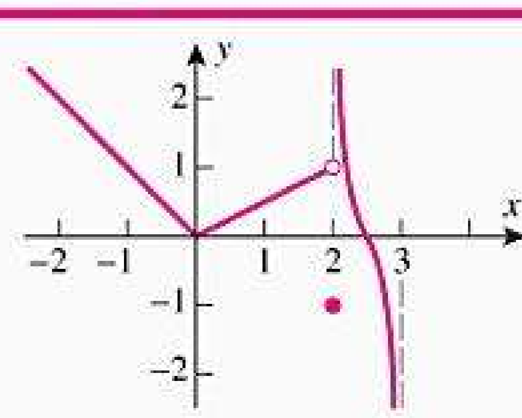


Figura Ex-2

3. A inclinação da reta secante por $P(2, 4)$ e $Q(x, x^2)$ da parábola $y = x^2$ é $m_{sec} = x + 2$. Segue que a inclinação da reta tangente a essa parábola no ponto P é __________.

EXERCÍCIOS 2.1 Recurso Gráfico C CAS

1-6 Em cada um destes exercícios, faça hipóteses razoáveis sobre o gráfico da função indicada fora da região esboçada.

1. Para a função F cujo gráfico está na figura a seguir, obtenha
   (a) $\lim_{x \to -2^-} F(x)$ (b) $\lim_{x \to -2^+} F(x)$
   (c) $\lim_{x \to -2} F(x)$ (d) $F(-2)$

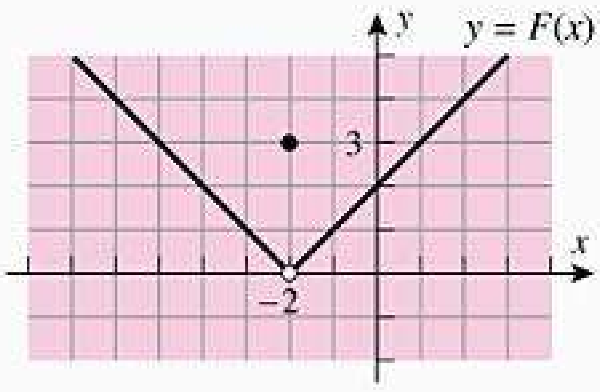


Figura Ex-1

2. Para a função ø cujo gráfico está na figura abaixo, obtenha:

(a) $\lim_{x \to 4^-} \phi(x)$ (b) $\lim_{x \to 4^+} \phi(x)$

(c) $\lim_{x \to 4} \phi(x)$ (d) $\phi(4)$

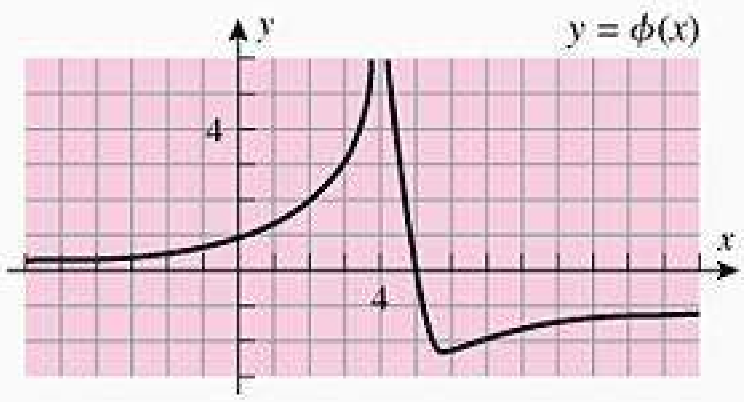


Figura Ex-2

3. Para a função f cujo gráfico está na figura abaixo, obtenha:

(a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (d) $f(3)$

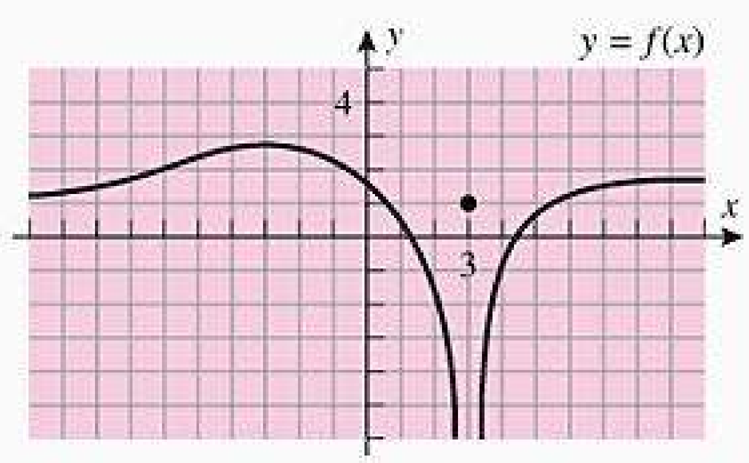


Figura Ex-3

4. Para a função f cujo gráfico está na figura abaixo, obtenha:

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (d) $f(0)$

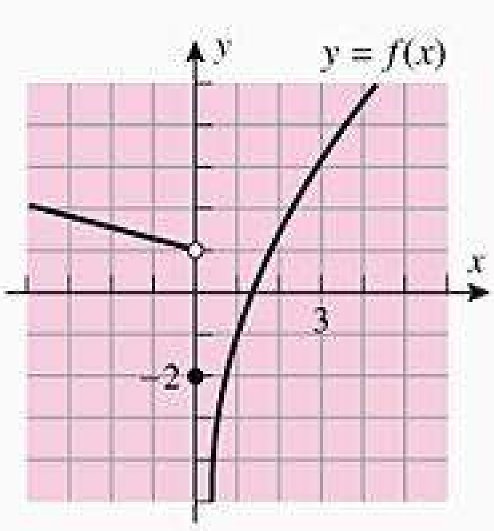


Figura Ex-4

5. Considere a função g cujo gráfico está na figura a seguir. Para quais valores de x_0, com $-7 \le x_0 \le 4$, existe $\lim_{x \to x_0} g(x)$?

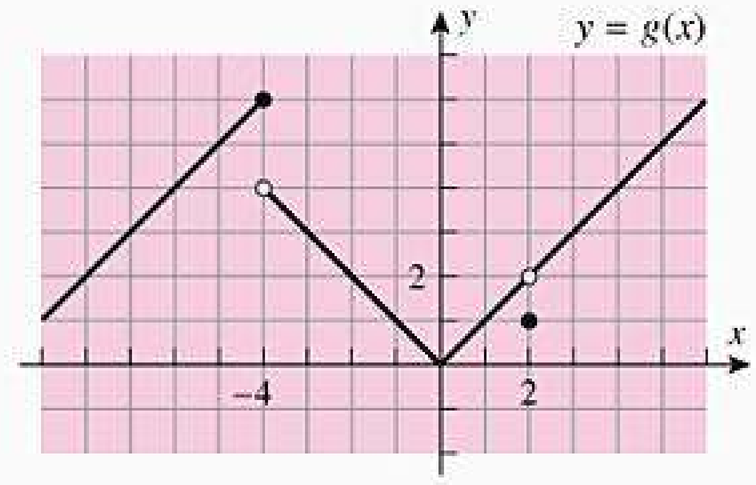


Figura Ex-5

6. Considere a função f cujo gráfico está na figura abaixo. Para que valores de x_0, com $-9 \le x_0 \le 4$, existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$?

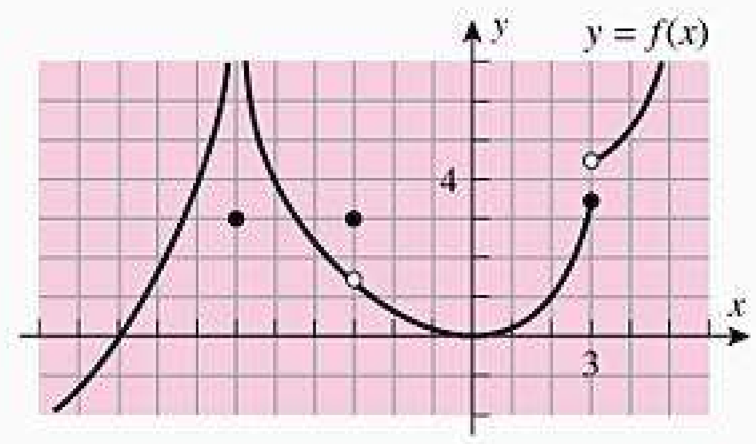


Figura Ex-6

ENFOCANDO CONCEITOS

7-12 Esboce um gráfico possível de uma função f com as propriedades especificadas. (São possíveis muitas soluções diferentes.)

7. (i) o domínio de f é $[-1, 1]$
(ii) $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$
(iii) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

8. (i) o domínio de f é $[-2, 1]$
(ii) $f(-2) = f(0) = f(1) = 0$
(iii) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

9. (i) o domínio de f é $(-\infty, 0]$
(ii) $f(-2) = f(0) = 1$
(iii) $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$

10. (i) o domínio de f é $(0, +\infty)$
(ii) $f(1) = 0$
(iii) o eixo y é uma assíntota vertical do gráfico de f
(iv) $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$

11. (i) $f(-3) = f(0) = f(2) = 0$
(ii) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$
(iii) $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

12. (i) $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$
(ii) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$
(iii) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

13-16 (i) Dê um palpite sobre o limite (se existir) calculando a função nos pontos especificados. (ii) Confirme suas conclusões sobre o limite desenhando o gráfico da função sobre um intervalo adequado. (iii) Use um CAS para encontrar o limite. [*Nota*: Para as funções trigonométricas, assegure-se de que a calculadora esteja no modo radiano.]

C **13.** (a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$; $x = 2;\ 1{,}5;\ 1{,}1; 1{,}01;\ 1{,}001;\ 0;\ 0{,}5;\ 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999$

(b) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x^3-1}$; $x = 2\,;\ 1{,}5;\ 1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ 1{,}0001$

(c) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x^3-1}$; $x = 0;\ 0{,}5;\ 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999$

C **14.** (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $x = \pm 0{,}25; \pm 0{,}1; \pm 0{,}001; \pm 0{,}0001$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x}$; $x = 0{,}25;\ 0{,}1;\ 0{,}001;\ 0{,}0001$

(c) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x}$; $x = -0{,}25; -0{,}1; -0{,}001; -0{,}0001$

C **15.** (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$; $x = \pm 0{,}25; \pm 0{,}1; \pm 0{,}001; \pm 0{,}0001$

(b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\cos x}{x+1}$; $x = 0;\ -0{,}5; -0{,}9; -0{,}99; -0{,}999; -1{,}5; -1{,}1; -1{,}01; -1{,}001$

C **16.** (a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{x+1}$; $x = 0; -0{,}5; -0{,}9; -0{,}99; -0{,}999; -1{,}5; -1{,}1; -1{,}01; -1{,}001$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(2x)}$; $x = \pm 0{,}25; \pm 0{,}1; \pm 0{,}001; \pm 0{,}0001$

17-20 Modifique o argumento do Exemplo 1 para encontrar a equação da reta tangente ao gráfico especificado no ponto dado.

17. O gráfico de $y = x^2$ em $(-1, 1)$.

18. O gráfico de $y = x^2$ em $(0, 0)$.

19. O gráfico de $y = x^4$ em $(1, 1)$.

20. O gráfico de $y = x^4$ em $(-1, 1)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

21. (a) Seja

$$f(x) = (1 + x^2)^{1{,}1/x^2}$$

Faça um gráfico de f na janela

$$[-1, 1] \times [2{,}5; 3{,}5]$$

e use sua calculadora para fazer uma conjectura sobre o limite de $f(x)$ quando $x \to 0$.

(b) Faça um gráfico de f na janela

$$[-0{,}001; 0{,}001] \times [2{,}5; 3{,}5]$$

e use sua calculadora para fazer uma conjectura sobre o limite de $f(x)$ quando $x \to 0$.

(c) Faça um gráfico de f na janela

$$[-0{,}000001; 0{,}000001] \times [2{,}5; 3{,}5]$$

e use sua calculadora para fazer uma conjectura sobre o limite de $f(x)$ quando $x \to 0$.

(d) Mais adiante teremos condições de mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{1{,}1/x^2} \approx 3{,}00416602$$

Qual é o defeito que os gráficos obtidos nos itens anteriores revelam sobre o uso de evidência numérica para fazer conjecturas sobre limites?

O erro de arredondamento é uma fonte de imprecisão nos cálculos feitos em calculadoras e computadores. Uma outra fonte de erro, a ***subtração catastrófica***, ocorre quando dois números aproximadamente iguais são subtraídos, e o resultado é usado como parte de outro cálculo. Por exemplo, pelo cálculo manual, temos

$$(0{,}123456789012345 - 0{,}123456789012344) \times 10^{15} = 1$$

Entretanto, uma calculadora produz um valor 0 para esse cálculo se ela puder armazenar apenas 14 casas decimais, pois os números são idênticos até a 14ª casa decimal. A subtração catastrófica pode, às vezes, ser evitada pelo rearranjo algébrico das fórmulas, mas a melhor defesa é estar atento à sua ocorrência. Tenha cuidado no próximo exercício.

C **22.** (a) Seja

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Faça uma conjectura sobre o limite de f quando $x \to 0^+$ calculando $f(x)$ nos pontos $x = 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001$.

(b) Calcule $f(x)$ nos pontos $x = 0{,}000001; 0{,}0000001; 0{,}00000001; 0{,}000000001; 0{,}0000000001$; e faça outra conjectura.

(c) Que falha isso revela sobre o uso da evidência numérica para fazer conjecturas sobre limites?

(d) Use um CAS para mostrar que o valor exato do limite é $\frac{1}{6}$.

23. (a) A Figura Ex-23 mostra duas representações diferentes do gráfico da função do Exercício 22, ambas geradas pelo *Mathematica*. O que está acontecendo?

(b) Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos e veja se ocorre o mesmo problema.

(c) É de se esperar que um problema semelhante ocorra na vizinhança de $x = 0$ para a função

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}?$$

Verifique se isso ocorre.

24. Na Teoria Especial de Relatividade, a massa m de um objeto em movimento é uma função $m = m(v)$ da velocidade v do objeto. A Figura Ex-24, em que c denota a velocidade da luz, exibe algumas das características qualitativas dessa função.

(a) Qual é a interpretação física de m_0?

(b) Qual é o $\lim_{v\to c^-} m(v)$? Qual é o significado físico desse limite?

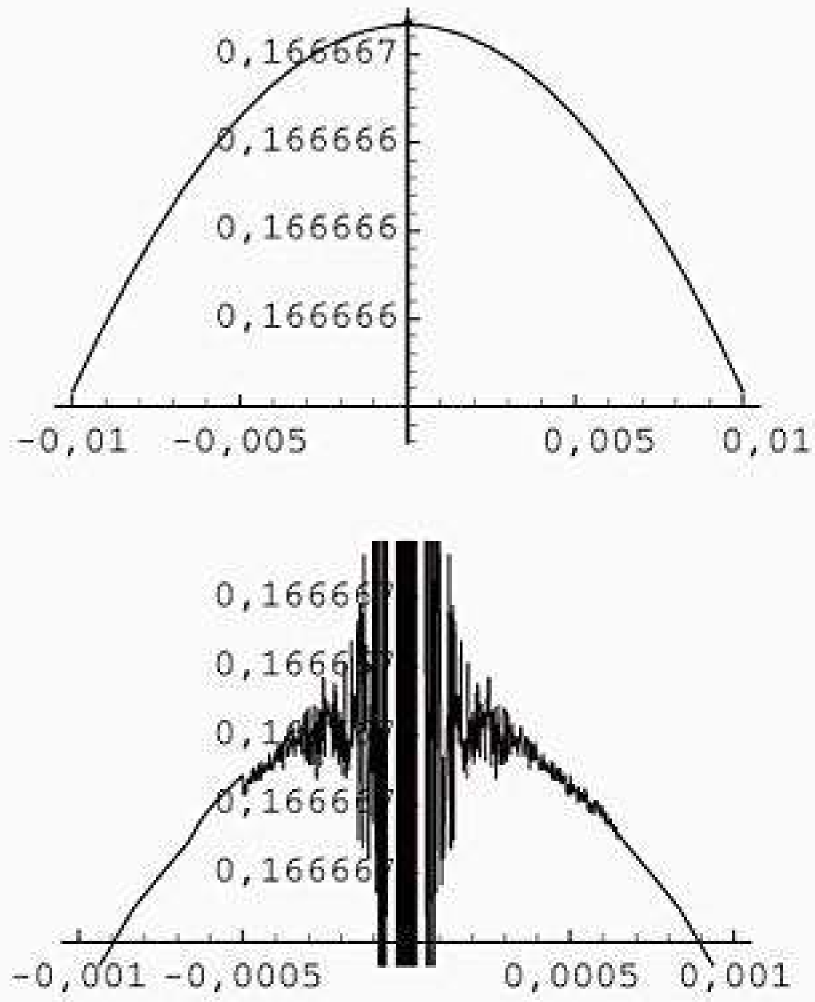


Gráfico gerado pelo Mathematica

Figura Ex-23

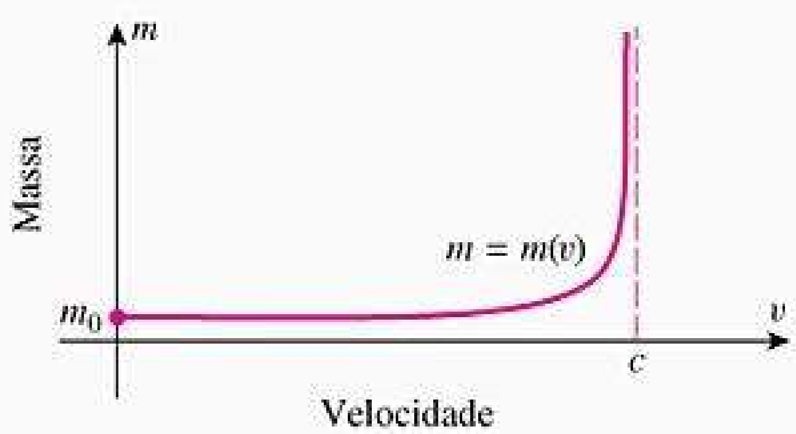


Figura Ex-24

25. Na Teoria Especial de Relatividade, o comprimento l de um bastão curto em movimento longitudinal é uma função $l = l(v)$ do comprimento l do bastão. A figura abaixo, em que c denota a velocidade da luz, exibe algumas das características qualitativas dessa função.

(a) Qual é a interpretação física de l_0?

(b) Qual é o $\lim_{v \to c^-} l(v)$? Qual é o significado físico desse limite?

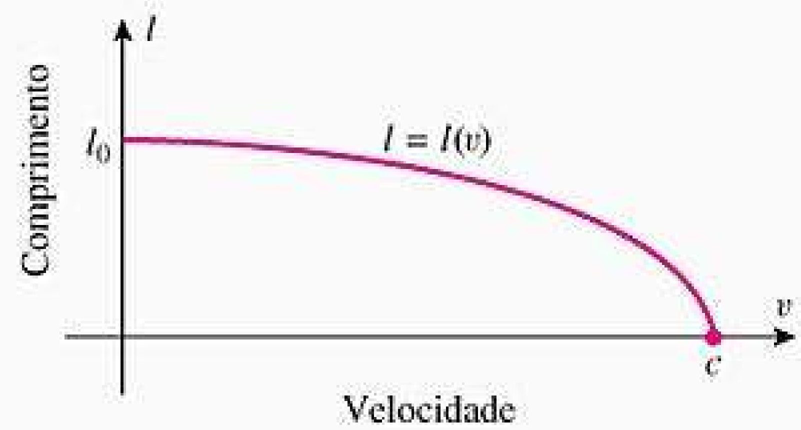


Figura Ex-25

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.1

1. 3; 0 **2.** (a) 0 (b) 1 (c) $+\infty$ (d) $-\infty$ **3.** 4

2.2 CALCULANDO LIMITES

Nesta seção discutiremos técnicas algébricas para calcular limites de muitas funções. Esses resultados serão baseados no desenvolvimento informal do conceito de limite discutido na seção precedente. Uma dedução mais formal desses resultados será possível depois da Seção 2.4.

ALGUNS LIMITES BÁSICOS

Nossa estratégia para encontrar algebricamente os limites tem duas partes:

- Primeiro, estabelecemos os limites de algumas funções simples.
- Então, desenvolvemos um repertório de teoremas que nos capacitarão a usar esses limites como "blocos de construção" para encontrar limites de funções mais complicadas.

Começamos com o seguinte resultado básico, que está ilustrado na Figura 2.2.1.

2.2.1 TEOREMA *Sejam a e k dois números reais.*

(a) $\lim_{x \to a} k = k$ (b) $\lim_{x \to a} x = a$ (c) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ (d) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

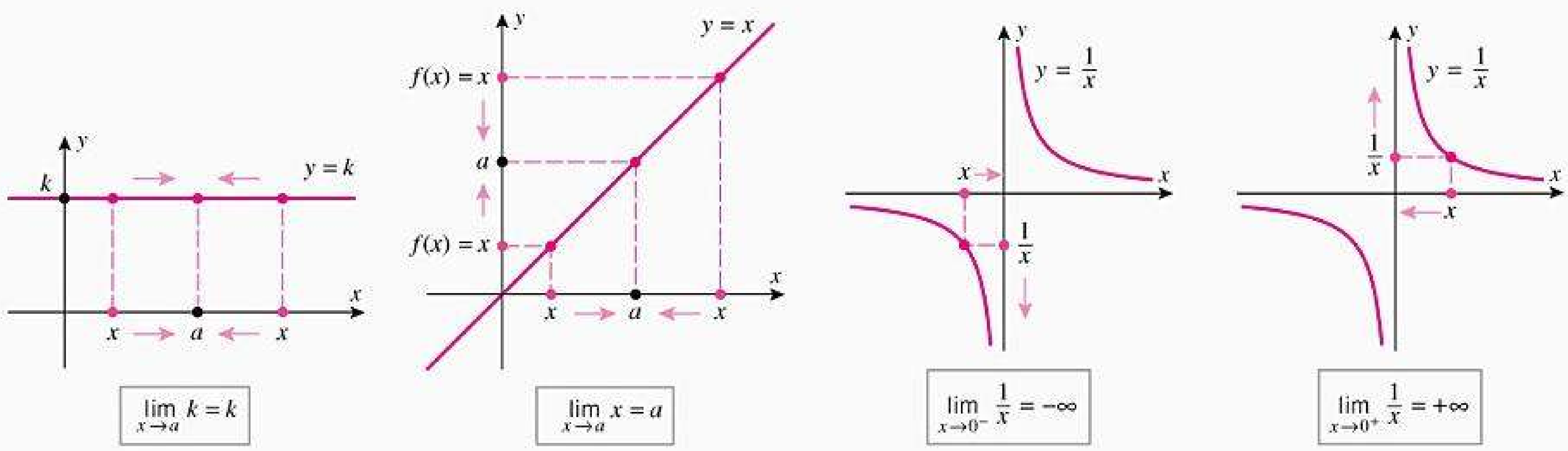


Figura 2.2.1

▶ Exemplo 1 Se $f(x) = k$ é uma função constante, então os valores de $f(x)$ permanecem fixos enquanto k e x variam, o que explica por que $f(x) \to k$ quando $x \to a$ para todos os valores de a. Por exemplo:

$$\lim_{x \to -25} 3 = 3, \qquad \lim_{x \to 0} 3 = 3, \qquad \lim_{x \to \pi} 3 = 3 \quad ◀$$

▶ Exemplo 2 Se $f(x) = x$, então quando $x \to a$, também deve valer que $f(x) \to a$. Por exemplo:

$$\lim_{x \to 0} x = 0, \qquad \lim_{x \to -2} x = -2, \qquad \lim_{x \to \pi} x = \pi \quad ◀$$

Não confunda o tamanho algébrico de um número com sua proximidade de zero. Para números positivos, quanto menor o número, mais próximo está de zero, mas para números negativos, quanto maior o número, mais próximo está de zero. Por exemplo, –2 é maior do que –4, mas está mais próximo de zero.

▶ Exemplo 3 O leitor deve saber de sua experiência com frações que, para um numerador não-nulo fixo, quanto mais próximo de 0 está o denominador, maior é o valor absoluto da fração. Esse fato e os dados da Tabela 2.2.1 sugerem por que $1/x \to +\infty$ quando $x \to 0^+$ e por que $1/x \to -\infty$ quando $x \to 0^-$. ◀

Tabela 2.2.1

	VALORES						CONCLUSÃO
x	–1	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001	···	Quando $x \to 0^-$ o valor de $1/x$ decresce sem cota.
$1/x$	–1	–10	–100	–1000	–10.000	···	
x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	···	Quando $x \to 0^+$ o valor de $1/x$ cresce sem cota.
$1/x$	1	10	100	1000	10.000	···	

O seguinte teorema, parte do qual está provado no Apêndice C do Volume 2, será nossa ferramenta básica para determinar algebricamente os limites.

2.2.2 TEOREMA *Seja a um número real e suponha que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

Ou seja, os limites existem e têm valores L_1 e L_2, respectivamente. Então:

(a) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

(b) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$

(c) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L_1 L_2$

(d) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, *desde que $L_2 \neq 0$*

(e) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, *desde que $L_1 > 0$ se n for par.*

Além disso, essas afirmações também valem para os limites laterais quando $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.

Esse teorema pode ser enunciado informalmente como segue:

(*a*) *O limite da soma é a soma dos limites.*

(*b*) *O limite da diferença é a diferença dos limites.*

(*c*) *O limite do produto é o produto dos limites.*

(*d*) *O limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador não seja zero.*

(*e*) *O limite da raiz enésima é a raiz enésima do limite.*

No caso especial da parte (*c*), em que $f(x) = k$ é uma função constante, temos

$$\lim_{x \to a} (kg(x)) = \lim_{x \to a} k \cdot \lim_{x \to a} g(x) = k \lim_{x \to a} g(x) \tag{1}$$

e analogamente para limites laterais. Esse resultado pode ser reformulado assim:

Um fator constante pode ser movido para fora de um símbolo de limite.

Embora as partes (*a*) e (*c*) do Teorema 2.2.2 tenham sido enunciadas para duas funções, os resultados valem para um número finito qualquer de funções. Além disso, as várias partes do teorema podem ser usadas combinadas para reformular expressões que envolvam limites.

▶ Exemplo 4

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x) + 2h(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) + 2 \lim_{x \to a} h(x)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)h(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)\left(\lim_{x \to a} h(x)\right)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^3 = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^3$$ Tome $g(x) = h(x) = f(x)$ na última equação

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n$$ A extensão do Teorema 2.2.2(c) em que há n fatores, cada um dos quais é $f(x)$

$$\lim_{x \to a} x^n = \left(\lim_{x \to a} x\right)^n = a^n$$ Aplique o resultado anterior com $f(x) = x$ ◀

■ LIMITES DE POLINÔMIOS E FUNÇÕES RACIONAIS QUANDO $x \to a$

▶ Exemplo 5 Encontre $\lim_{x \to 5} (x^2 - 4x + 3)$.

Solução

$$\lim_{x \to 5} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \to 5} x^2 - \lim_{x \to 5} 4x + \lim_{x \to 5} 3$$ Teorema 2.2.2(a), (b)

$$= \lim_{x \to 5} x^2 - 4 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 3$$ Constantes saem para fora de limites

$$= 5^2 - 4(5) + 3$$ Última parte do Exemplo 4

$$= 8$$ ◀

Observe que, no Exemplo 5, ocorreu que o limite do polinômio $p(x) = x^2 - 4x + 3$ com $x \to 5$ é exatamente igual a $p(5)$. Isso não é acidental. O próximo resultado mostra que, em geral, o limite de um polinômio $p(x)$ quando $x \to a$ é igual ao valor do polinômio em a. Sabendo disso, podemos reduzir os cálculos de limites de polinômios para o simples cálculo do valor do polinômio no ponto apropriado.

2.2.3 TEOREMA *Para qualquer polinômio*

$$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

e qualquer número real a

$$\lim_{x \to a} p(x) = c_0 + c_1a + \cdots + c_na^n = p(a)$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\lim_{x \to a} p(x) = \lim_{x \to a} \left(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n\right)$$

$$= \lim_{x \to a} c_0 + \lim_{x \to a} c_1x + \cdots + \lim_{x \to a} c_nx^n$$

$$= \lim_{x \to a} c_0 + c_1 \lim_{x \to a} x + \cdots + c_n \lim_{x \to a} x^n$$

$$= c_0 + c_1a + \cdots + c_na^n = p(a)$$ ■

► Exemplo 6 Encontre $\lim\limits_{x\to 1}(x^7 - 2x^5 + 1)^{35}$.

Solução A função considerada é um polinômio (por quê?), de modo que o limite pode ser obtido calculando o valor do polinômio em $x = 1$. Isso dá

$$\lim_{x\to 1}(x^7 - 2x^5 + 1)^{35} = 0 \blacktriangleleft$$

Lembre que uma função racional é um quociente de dois polinômios. O próximo exemplo ilustra como os Teoremas 2.2.2(*d*) e 2.2.3 podem, às vezes, ser usados em combinação para calcular limites de funções racionais.

► Exemplo 7 Encontre $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3 + 4}{x - 3}$.

Solução

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x^3 + 4}{x - 3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + 4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x - 3)} \qquad \boxed{\text{Teorema 2.2.2}(d)}$$

$$= \frac{5\cdot 2^3 + 4}{2 - 3} = -44 \qquad \boxed{\text{Teorema 2.2.3}} \blacktriangleleft$$

O método utilizado no último exemplo não funciona com funções racionais em que o limite do denominador é nulo, porque o Teorema 2.2.2(*d*) não é aplicável. Há dois casos a considerar: aquele em que o limite do denominador é zero e o do numerador não é zero, e aquele em que ambos os limites, o do denominador e o do numerador, são iguais a zero. Se o limite do denominador é zero mas o limite do numerador não é, podemos provar que o limite da função racional não existe e que ocorre uma das seguintes situações:

- O limite poderá ser $-\infty$.
- O limite poderá ser $+\infty$.
- O limite poderá ser $-\infty$ de um lado e $+\infty$ do outro.

A Figura 2.2.2 ilustra essas três possibilidades graficamente para funções racionais da forma $1/(x - a)$, $1/(x - a)^2$ e $1/(x - a)^2$.

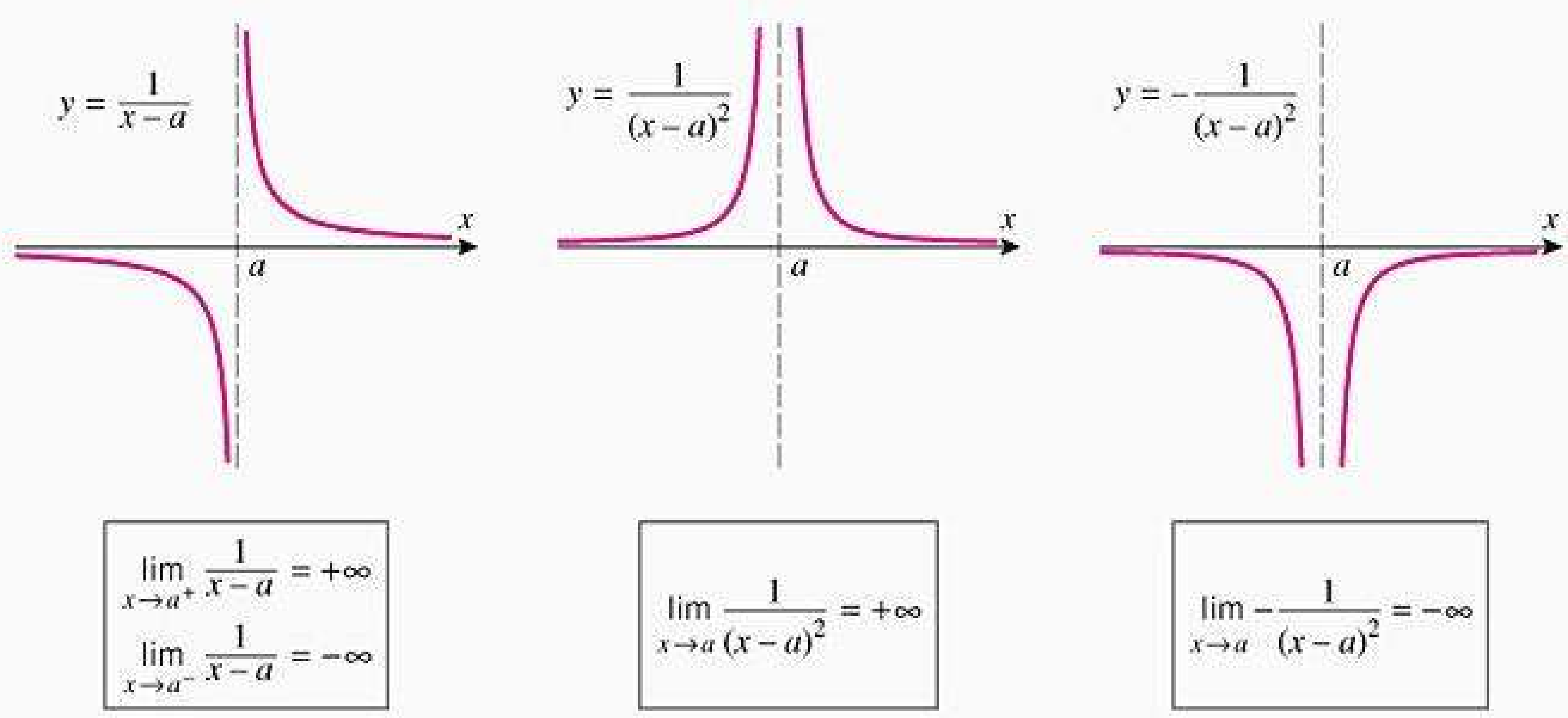


Figura 2.2.2

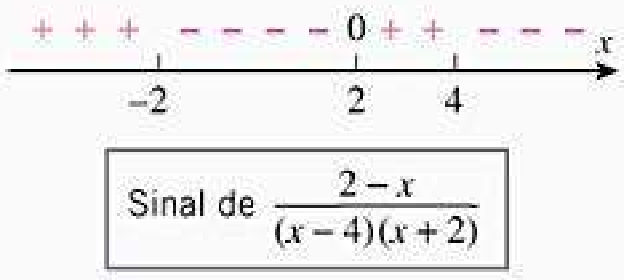


Figura 2.2.3

▶ Exemplo 8 Encontre

(a) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-x}{(x-4)(x+2)}$

Solução Em todas as três partes, o limite do numerador é −2 e o do denominador, 0; logo, o limite da razão não existe. Para sermos mais específicos, necessitamos analisar o sinal da razão, o qual é dado na Figura 2.2.3 e é determinado pelos sinais de $2-x$, $x-4$ e $x+2$. (O método do ponto de teste, discutido no Apêndice D da internet, fornece uma maneira simples de obter o sinal da razão.) Segue a partir da figura que, quando x se aproxima de 4 pela direita, a razão é sempre negativa; quando x se aproxima de 4 pela esquerda, a razão acaba sendo positiva. Assim,

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} = +\infty$$

Como os limites laterais têm sinais opostos, só podemos concluir que o limite bilateral não existe. ◀

No caso em que $p(x)/q(x)$ é uma função racional para a qual $p(a)=0$ e $q(a)=0$, o numerador e o denominador necessariamente possuem um ou mais fatores comuns de $x-a$. Nesse caso, o limite de $p(x)/q(x)$ quando $x \to a$ pode ser encontrado cancelando todos os fatores comuns de $x-a$ e usando um dos métodos considerados anteriormente para encontrar o limite da função simplificada. Aqui temos alguns exemplos.

No Exemplo 9, a função simplificada $x+2$ está definida em $x=2$, mas não a função original. Contudo, isso não tem efeito sobre o limite quando x se aproxima de 2, já que as duas funções são idênticas para $x \neq 2$.

▶ Exemplo 9 Encontre $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Solução Como 2 é um zero tanto do numerador como do denominador, ambos compartilham um fator comum $x-2$. O limite pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4 \quad ◀$$

▶ Exemplo 10 Encontre

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x+8}{x^2+x-12}$ (c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-10x+25}$

Solução (a) O numerador e o denominador têm um zero em $x=3$; logo, há um fator comum de $x-3$. Então

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-3) = 0$$

Solução (b) O numerador e o denominador têm um zero em $x=-4$; logo, há um fator comum de $x-(-4)=x+4$. Então

$$\lim_{x\to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12} = \lim_{x\to -4} \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to -4} \frac{2}{x-3} = -\frac{2}{7}$$

Solução (c) O numerador e o denominador têm um zero em $x=5$; logo, há um fator comum de $x-5$. Então

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-10x+25} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)(x-5)} = \lim_{x\to 5} \frac{x+2}{x-5}$$

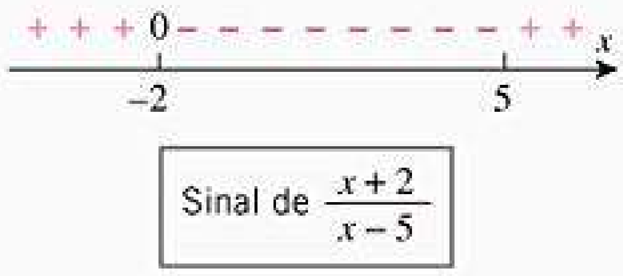


Figura 2.2.4

Contudo,

$$\lim_{x\to 5}(x+2) = 7 \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 5}(x-5) = 0$$

portanto

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x^2-10x+25} = \lim_{x\to 5}\frac{x+2}{x-5}$$

não existe. Mais precisamente, a análise de sinais na Figura 2.2.4 implica que

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{x^2-3x-10}{x^2-10x+25} = \lim_{x\to 5^+}\frac{x+2}{x-5} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{x^2-3x-10}{x^2-10x+25} = \lim_{x\to 5^-}\frac{x+2}{x-5} = -\infty \quad ◀$$

Discuta os erros lógicos na afirmação seguinte: uma forma indeterminada do tipo 0/0 deve ter um limite igual a zero porque zero dividido por qualquer coisa é igual a zero.

Um quociente $f(x)/g(x)$ em que o numerador e o denominador têm ambos um limite zero quando $x \to a$ é denominado ***forma indeterminada do tipo* 0/0**. O problema com esses limites é que é difícil dizer por inspeção se o limite existe e, se existir, seu valor. Dito informalmente, isso ocorre porque há duas influências conflitantes em jogo: o valor de $f(x)/g(x)$ tenderia a zero quando $f(x)$ tendesse a 0 se $g(x)$ permanecesse fixado em algum valor não-nulo, enquanto o valor desse quociente tenderia a crescer ou decrescer sem cota quando $g(x)$ tendesse a 0 se $f(x)$ permanecesse fixado em algum valor não-nulo. No entanto, com ambos $f(x)$ e $g(x)$ tendendo a zero, o comportamento desse quociente depende de precisamente como essas tendências conflitantes se cancelam uma à outra para as particulares funções f e g sob consideração.

Às vezes, os limites de formas indeterminadas do tipo 0/0 podem ser encontrados por meio de simplificação algébrica, como nos dois casos anteriores, mas freqüentemente isso não funciona e precisamos usar outros métodos. Esses métodos serão estudados em seções posteriores.

O teorema a seguir resume nossa observação sobre limites de funções racionais.

2.2.4 TEOREMA *Sejam*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

uma função racional e a um número real qualquer.

(a) Se $q(a) \neq 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(b) Se $q(a) = 0$ mas $p(a) \neq 0$, então $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe.

■ LIMITES ENVOLVENDO RADICAIS

▶ Exemplo 11 Encontre $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Solução No Exemplo 2 da Seção 2.1 utilizamos evidência numérica para conjecturar que esse limite é 2. Aqui vamos confirmar isso algebricamente. Como esse limite é uma forma indeterminada do tipo 0/0, precisamos construir uma estratégia para torná-lo evidente, caso exista. Uma tal estratégia é racionalizar o denominador da função. Assim, obtemos

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1 \quad (x \neq 1)$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2 \blacktriangleleft$$

■ LIMITES DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

Para funções que são definidas por partes, é melhor obter o limite bilateral em um ponto no qual a fórmula muda encontrando primeiro os limites laterais no ponto.

► Exemplo 12 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x+2), & x < -2 \\ x^2 - 5, & -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x + 13}, & x > 3 \end{cases}$$

Encontre

$$\text{(a) } \lim_{x \to -2} f(x) \qquad \text{(b) } \lim_{x \to 0} f(x) \qquad \text{(c) } \lim_{x \to 3} f(x)$$

Solução (a) Determinaremos o limite bilateral solicitado considerando primeiro os limites laterais correspondentes. Para cada limite lateral, devemos usar a parte da fórmula que é aplicável no intervalo sobre o qual x varia. Por exemplo, quando x tende a -2 pela esquerda, a parte aplicável da fórmula é

$$f(x) = \frac{1}{x + 2}$$

e quando x tende a -2 pela direita, a parte aplicável da fórmula perto de -2 é

$$f(x) = x^2 - 5$$

Assim,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 5) = (-2)^2 - 5 = -1$$

do que segue que $\lim_{x \to -2} f(x)$ não existe.

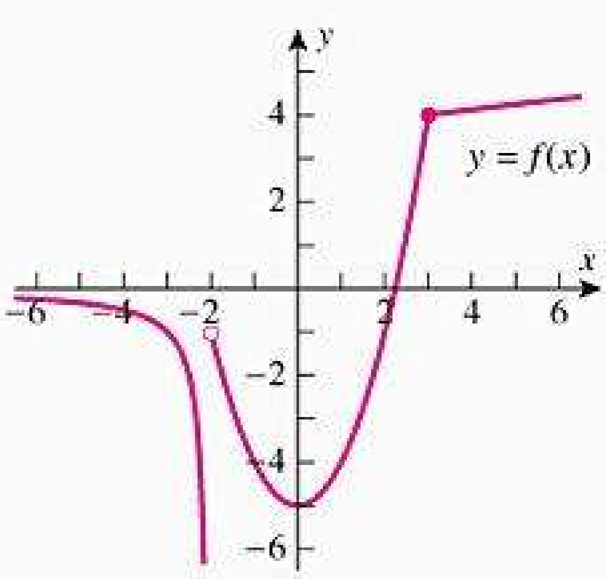


Figura 2.2.5

Solução (b) A parte aplicável da fórmula é $f(x) = x^2 - 5$ em ambos os lados de 0, portanto não há necessidade de considerar limites laterais. Vemos diretamente que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - 5) = 0^2 - 5 = -5$$

Solução (c) Usando as partes aplicáveis da fórmula de $f(x)$, obtemos

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 5) = 3^2 - 5 = 4$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x + 13} = \sqrt{\lim_{x \to 3^+} (x + 13)} = \sqrt{3 + 13} = 4$$

Como os dois limites laterais são iguais, temos

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

Observamos que os cálculos dos limites em (a), (b) e (c) são consistentes com o gráfico de f na Figura 2.2.5. ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.2 *(Ver página 122 para respostas.)*

1. Em cada parte, encontre o limite sem fazer contas.

(a) $\lim_{x\to 8} 7 =$ ______ (b) $\lim_{y\to 3^+} 12y =$ ______

(c) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} =$ ______ (d) $\lim_{w\to 5} \frac{w}{|w|} =$ ______

(e) $\lim_{z\to 1^-} \frac{1}{1-z} =$ ______

2. Sabendo que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 2$, encontre os limites que existirem.

(a) $\lim_{x\to a} [3f(x) + 2g(x)] =$ ______

(b) $\lim_{x\to a} \frac{2f(x)+1}{1-f(x)g(x)} =$ ______

(c) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{f(x)+3}}{g(x)} =$ ______

(d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{4-[g(x)]^2} =$ ______

3. Encontre os limites.

(a) $\lim_{x\to -1} (x^3 + x^2 + x)^{101} =$ ______

(b) $\lim_{x\to 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} =$ ______

(c) $\lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} =$ ______

(d) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} =$ ______

4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

Encontre os limites que existirem.

(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ ______

(b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ ______

(c) $\lim_{x\to 1} f(x) =$ ______

EXERCÍCIOS 2.2

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to a} g(x) = -4, \quad \lim_{x\to a} h(x) = 0$$

encontre os limites que existirem. Se o limite não existe, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to a} [f(x) + 2g(x)]$

(b) $\lim_{x\to a} [h(x) - 3g(x) + 1]$

(c) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$

(d) $\lim_{x\to a} [g(x)]^2$

(e) $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$

(f) $\lim_{x\to a} \frac{2}{g(x)}$

(g) $\lim_{x\to a} \frac{3f(x) - 8g(x)}{h(x)}$

(h) $\lim_{x\to a} \frac{7g(x)}{2f(x) + g(x)}$

2. Use os gráficos de f e g na figura a seguir para encontrar os limites que existam. Se o limite não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0^+} [f(x) + g(x)]$ (d) $\lim_{x\to 0^-} [f(x) + g(x)]$

(e) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{1+g(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2} \frac{1+g(x)}{f(x)}$

(g) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{f(x)}$ (h) $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{f(x)}$

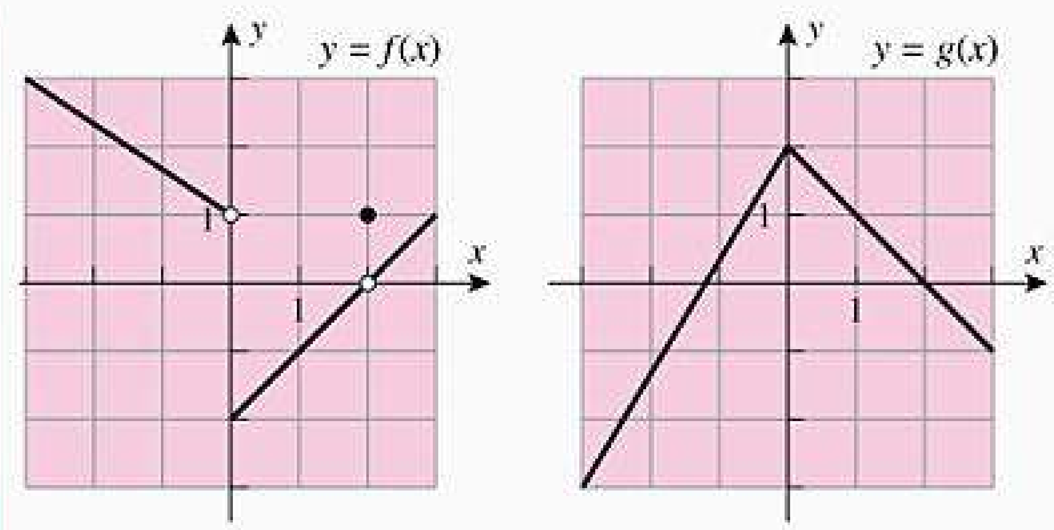


Figura Ex-2

3-30 Encontre os limites.

3. $\lim_{x\to 2} x(x-1)(x+1)$

4. $\lim_{x\to 3} x^3 - 3x^2 + 9x$

5. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x}{x+1}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{6x-9}{x^3-12x+3}$

7. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^4-1}{x-1}$

8. $\lim_{t\to -2} \frac{t^3+8}{t+2}$

9. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$

10. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$

11. $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{x+1}$

12. $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}$

13. $\lim_{t\to 2} \frac{t^3+3t^2-12t+4}{t^3-4t}$

14. $\lim_{t\to 1} \frac{t^3+t^2-5t+3}{t^3-3t+2}$

15. $\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3}$

16. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x-3}$

17. $\lim_{x\to 3} \frac{x}{x-3}$

18. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4}$

19. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x^2 - 4}$

20. $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 4}$

21. $\lim_{y \to 6^+} \frac{y + 6}{y^2 - 36}$

22. $\lim_{y \to 6^-} \frac{y + 6}{y^2 - 36}$

23. $\lim_{y \to 6} \frac{y + 6}{y^2 - 36}$

24. $\lim_{x \to 4^+} \frac{3 - x}{x^2 - 2x - 8}$

25. $\lim_{x \to 4^-} \frac{3 - x}{x^2 - 2x - 8}$

26. $\lim_{x \to 4} \frac{3 - x}{x^2 - 2x - 8}$

27. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{|2 - x|}$

28. $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{|x - 3|}$

29. $\lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

30. $\lim_{y \to 4} \frac{4 - y}{2 - \sqrt{y}}$

31. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ 3x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

Encontre

(a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3} f(x)$

32. Seja

$$g(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ t - 2, & t < 0 \end{cases}$$

Encontre

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

ENFOCANDO CONCEITOS

33. Seja

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

(a) Encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

(b) Esboce o gráfico de $y = f(x)$.

34. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}, & x \neq -3 \\ k, & x = -3 \end{cases}$$

(a) Determine k de modo que $f(-3) = \lim_{x \to -3} f(x)$

(b) Com k tomando o valor $\lim_{x \to -3} f(x)$, mostre que $f(x)$ pode ser expresso como um polinômio.

35. (a) Explique por que os seguintes cálculos estão incorretos.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$$
$$= +\infty - (+\infty) = 0$$

(b) Mostre que $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

36. Encontre $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$.

37-38 Primeiro racionalize o numerador e depois encontre o limite.

37. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

38. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$

39. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios, e suponha $q(x_0) = 0$. Discuta o comportamento do gráfico de $y = p(x)/q(x)$ na vizinhança do ponto $x = x_0$. Dê exemplos que apóiem suas conclusões.

40. Seja

$$f(x) = \frac{(a + b)x + (a - b)|x|}{2x}$$

Supondo que a e b sejam constantes, encontre

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

(c) todos os valores de a e b, tais que $\lim_{x \to 0} f(x)$ exista.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.2

1. (a) 7 (b) 36 (c) −1 (d) 1 (e) $+\infty$ **2.** (a) 7 (b) −3 (c) 1 (d) não existe **3.** (a) −1 (b) 0 (c) $+\infty$ (d) 8
4. (a) 2 (b) 0 (c) não existe

2.3 LIMITES NO INFINITO; COMPORTAMENTO FINAL DE UMA FUNÇÃO

Até aqui estivemos ocupados com limites que descrevem o comportamento de uma função $f(x)$ quando x tende a algum número real a. Nesta seção vamos nos ocupar com o comportamento de $f(x)$ quando x cresce ou decresce sem parar.

LIMITES NO INFINITO E ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Se os valores de uma variável x crescem sem parar, então escrevemos $x \to +\infty$, e se os valores de x decrescem sem parar, então escrevemos $x \to -\infty$. Algumas vezes, dizemos que o

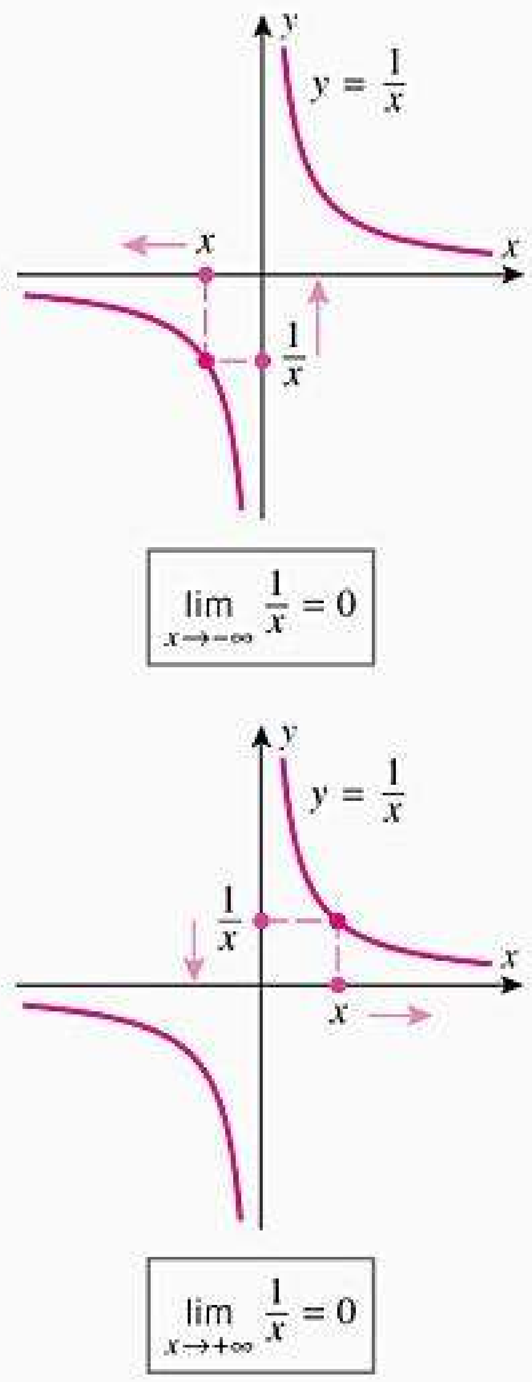


Figura 2.3.1

comportamento final de uma função $f(x)$ é o comportamento da função quando x cresce ou decresce sem parar. Por exemplo,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{1-2}$$

estão ilustrados numericamente na Tabela 2.3.1 e geometricamente na Figura 2.3.1.

Tabela 2.3.1

	VALORES						CONCLUSÃO
x	−1	−10	−100	−1000	−10.000	···	Quando $x \to -\infty$, o valor de $1/x$ cresce tendendo a 0.
$1/x$	−1	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001	···	
x	1	10	100	1000	10.000	···	Quando $x \to +\infty$, o valor de $1/x$ decresce tendendo a 0.
$1/x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	···	

Em geral, utilizamos a notação a seguir.

2.3.1 LIMITES NO INFINITO (PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número L à medida que x cresce sem parar, então escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \to L \text{ quando } x \to +\infty \tag{3}$$

Analogamente, se os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de um número L à medida que x decresce sem parar, então escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \to L \text{ quando } x \to -\infty \tag{4}$$

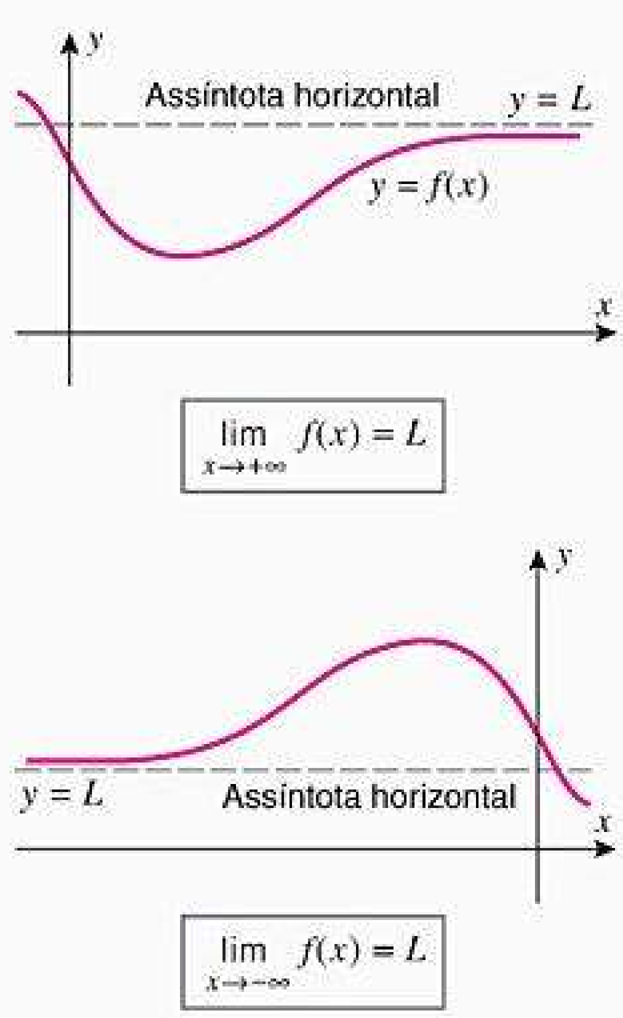


Figura 2.3.2

A Figura 2.3.2 ilustra o comportamento final de uma função f quando

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

No primeiro caso, o gráfico de f se aproxima tanto quanto queiramos da reta $y = L$ quando x cresce sem parar, e, no segundo caso, o gráfico de f se aproxima tanto quanto queiramos da reta $y = L$ quando x decresce sem parar. Se ocorrer um desses limites, dizemos que a reta $y = L$ é uma ***assíntota horizontal*** do gráfico de f.

► Exemplo 1 Segue de (1) e de (2) que $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(x) = 1/x$ tanto no sentido positivo quanto no negativo. Isso é consistente com o gráfico de $y = 1/x$ mostrado na Figura 2.3.1. ◄

► Exemplo 2 A Figura 2.3.3 mostra o gráfico de $f(x) = \text{arc tg } x$. Como sugere esse gráfico, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \text{arc tg } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \text{arc tg } x = -\frac{\pi}{2} \tag{5-6}$$

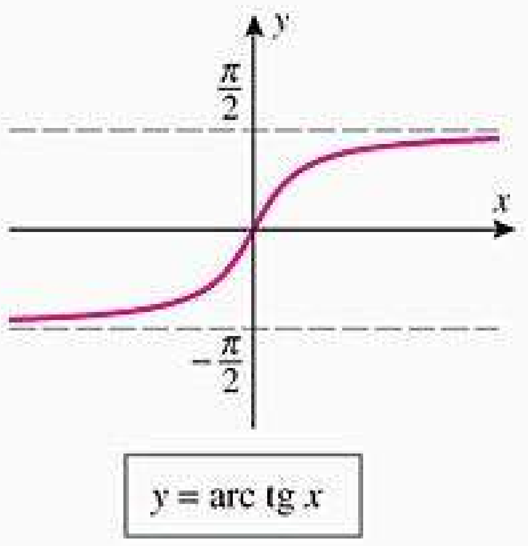


Figura 2.3.3

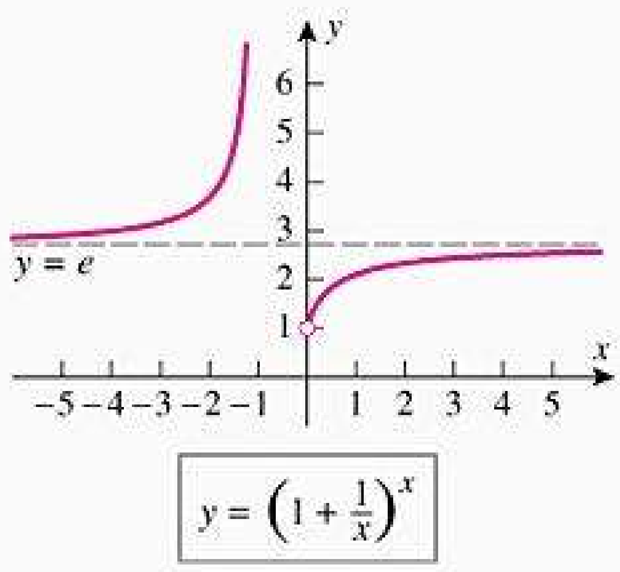


Figura 2.3.4

de modo que a reta $y = \pi/2$ é uma assíntota horizontal para f no sentido positivo e a reta $y = -\pi/2$ é uma assíntota horizontal para f no sentido negativo. ◄

► Exemplo 3 A Figura 2.3.4 mostra o gráfico de $f(x) = (1 + 1/x)^x$. Como sugere esse gráfico, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{7-8}$$

de modo que a reta $y = e$ é uma assíntota horizontal para f tanto no sentido positivo quanto no negativo. ◄

■ REGRAS DE LIMITES PARA LIMITES NO INFINITO

Pode ser mostrado que as leis de limite do Teorema 2.2.2 passam sem modificações para limites em $+\infty$ e $-\infty$. Além disso, segue pelos mesmos argumentos desenvolvidos na Seção 2.2 que, se n é um inteiro positivo, então

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)^n \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x)\right)^n \tag{9-10}$$

desde que existam os limites indicados de $f(x)$. Também segue que constantes podem ser tiradas para fora do símbolo de limite para limites no infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} kf(x) = k \lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \lim_{x \to -\infty} kf(x) = k \lim_{x \to -\infty} f(x) \tag{11-12}$$

desde que existam os limites indicados de $f(x)$.

Finalmente, se $f(x) = k$ é uma função constante, então os valores de f não mudam quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, de modo que

$$\lim_{x \to +\infty} k = k \qquad \lim_{x \to -\infty} k = k \tag{13-14}$$

► Exemplo 4

(a) Segue de (1), (2), (9) e (10) que, se n é um inteiro positivo, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\right)^n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}\right)^n = 0$$

(b) Segue de (7) e (9) que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e} \quad ◄$$

■ LIMITES INFINITOS NO INFINITO

Da mesma maneira que limites em um número real a, os limites no infinito podem deixar de existir por vários motivos. Uma possibilidade é que os valores de $f(x)$ cresçam ou decresçam sem cota quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Utilizaremos a notação seguinte para descrever essa situação.

2.3.2 LIMITES INFINITOS NO INFINITO (UM PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ crescem sem cota quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, então escrevemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

conforme o caso. Se os valores de $f(x)$ decrescem sem cota quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, então escrevemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

conforme o caso.

LIMITES DE x^n QUANDO $x \to \pm\infty$

Na Figura 2.3.5, ilustramos o comportamento no infinito dos polinômios da forma x^n para $n = 1, 2, 3$ e 4, que são casos especiais do seguinte resultado geral:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ +\infty, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \qquad (15\text{-}16)$$

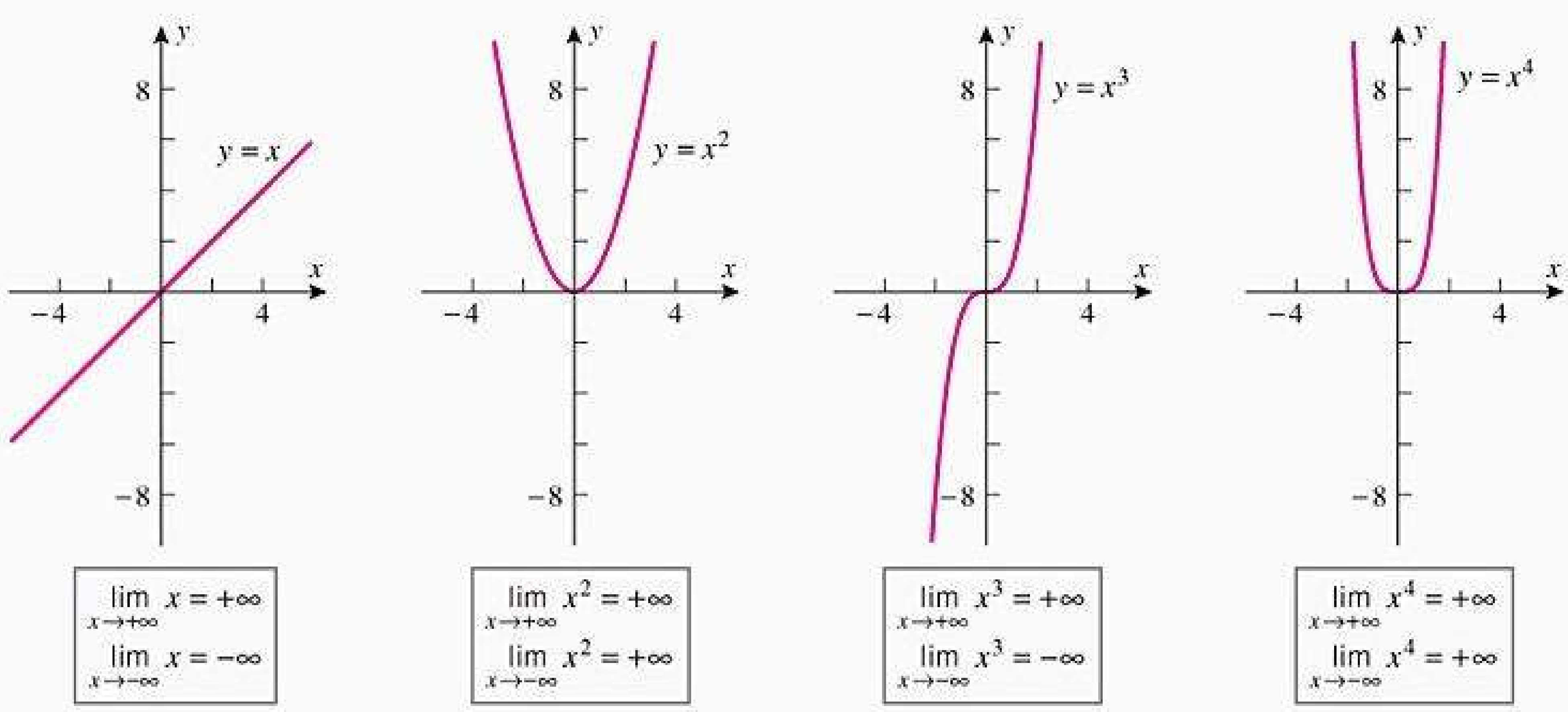


Figura 2.3.5

A multiplicação de x^n por um número real positivo não afeta os limites (15) e (16), mas a multiplicação por um número real negativo inverte os sinais.

▶ Exemplo 5

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^5 = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} 2x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} -7x^6 = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} -7x^6 = -\infty \quad ◀$$

LIMITES DE POLINÔMIOS QUANDO $x \to \pm\infty$

Há um princípio útil sobre polinômios que, informalmente, afirma que:

O comportamento final de um polinômio coincide com o comportamento final de seu termo de maior grau.

Mais precisamente, se $c_n \neq 0$, então

$$\lim_{x \to -\infty} (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) = \lim_{x \to -\infty} c_n x^n \tag{17}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) = \lim_{x \to +\infty} c_n x^n \tag{18}$$

Podemos motivar esses resultados colocando em evidência o x de potência mais alta do polinômio e examinando o limite da expressão fatorada. Assim,

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = x^n \left(\frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \cdots + c_n \right)$$

Quando $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$, segue a partir de (1) e (2) que todos os termos com potência positiva de x no denominador aproximam-se de 0; logo, (17) e (18) são, certamente, plausíveis.

► Exemplo 6

$$\lim_{x \to -\infty} (7x^5 - 4x^3 + 2x - 9) = \lim_{x \to -\infty} 7x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-4x^8 + 17x^3 - 5x + 1) = \lim_{x \to -\infty} -4x^8 = -\infty \quad ◄$$

■ LIMITES DE FUNÇÕES RACIONAIS QUANDO $x \to \pm\infty$

Uma técnica para determinar o comportamento final de uma função racional consiste em dividir cada termo do numerador e do denominador pela maior potência de x que ocorra no denominador, depois do que o comportamento final pode ser determinado usando resultados que já foram estabelecidos. Aqui temos alguns exemplos.

► Exemplo 7 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8}$.

Solução Divida o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que aparece no denominador, isto é, $x^1 = x$. Obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \dfrac{5}{x}}{6 - \dfrac{8}{x}} \qquad \boxed{\text{Divida cada termo por } x}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{5}{x}\right)}{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(6 - \frac{8}{x}\right)} \qquad \boxed{\text{O limite de um quociente é o quociente dos limites}}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x}}{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 6 - \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x}} \qquad \boxed{\text{O limite de uma soma é a soma dos limites}}$$

$$= \frac{3 + 5 \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{6 - 8 \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{3+0}{6+0} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\text{Uma constante sai para fora de um limite: fórmulas (2) e (13)}} \quad ◄$$

▶ Exemplo 8 Encontre $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5}$.

Solução Divida cada termo no numerador e no denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador, a saber, x^3. Obtemos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^3}}$$ Divida cada termo por x^3

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{5}{x^3}\right)}$$ O limite de um quociente é o quociente dos limites

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \to -\infty} 2 - \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^3}}$$ O limite de uma diferença é a diferença dos limites

$$= \frac{4 \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}{2 - 5 \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{0 - 0}{2 - 0} = 0$$ Uma constante pode ser tirada para fora do símbolo de limite: Fórmula (14) e Exemplo 4 ◀

▶ Exemplo 9 Encontre $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{1 - 3x}$.

Solução Divida cada termo no numerador e no denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador, a saber, $x^1 = x$. Obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{1 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 2x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 3} \tag{19}$$

Nesse caso não podemos argumentar que o limite do quociente é o quociente dos limites porque o limite do numerador não existe. Contudo, temos

$$\lim_{x \to +\infty} 5x^2 - 2x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 3\right) = -3$$

Assim, o numerador do lado direito de (19) tende a $+\infty$ e o denominador tem um limite negativo finito. Concluímos disso que o quociente tende a $-\infty$; ou seja,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{1 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 2x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 3} = -\infty$$ ◀

■ UM MÉTODO RÁPIDO PARA ENCONTRAR LIMITES DE FUNÇÕES RACIONAIS QUANDO $x \to +\infty$ OU $x \to -\infty$

Como o comportamento final de um polinômio coincide com o comportamento final de seu termo de maior grau, é razoável concluir que:

> *O comportamento final de uma função racional coincide com o comportamento final do quociente do termo de maior grau do numerador dividido pelo termo de maior grau do denominador.*

▶ Exemplo 10 Use a observação precedente para calcular os limites dos Exemplos 7, 8 e 9.

Solução

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{1-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3}{(-3x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{5}{3}x^2\right) = -\infty \blacktriangleleft$$

■ LIMITES ENVOLVENDO RADICAIS

▶ Exemplo 11 Encontre $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}$.

Solução

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

O limite de uma raiz enésima é a raiz enésima do limite ◀

▶ Exemplo 12 Encontre

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$$

Em ambos os casos, seria prático manipular a função de forma que as potências de x se tornassem potências de $1/x$. Isso pode ser obtido dividindo-se o numerador e o denominador por $|x|$ e usando o fato de que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Solução (a) Quando $x \to +\infty$, os valores de x tornam-se positivos; logo, podemos substituir $|x|$ por x onde for conveniente. Obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}}{\dfrac{3x-6}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{3x-6}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{3-\dfrac{6}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty} \left(3-\dfrac{6}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}}{\lim_{x\to+\infty} \left(3-\dfrac{6}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\left(\lim_{x\to+\infty} 1\right) + \left(2 \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}\right)}}{\left(\lim_{x\to+\infty} 3\right) - \left(6 \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+(2\cdot 0)}}{3-(6\cdot 0)} = \frac{1}{3}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Segue do Exemplo 12 que a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$$

tem uma assíntota dada por $y = \frac{1}{3}$ no sentido positivo e uma assíntota dada por $y = -\frac{1}{3}$ no sentido negativo. Confirme isso usando algum recurso gráfico.

Solução (b) Quando $x \to -\infty$, os valores de x tornam-se negativos; logo, podemos substituir $|x|$ por $-x$ onde for conveniente. Obtemos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}}{\dfrac{3x-6}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{3x-6}{(-x)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{-3+\dfrac{6}{x}} = -\frac{1}{3} \blacktriangleleft$$

► Exemplo 13 Encontre

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^6+5} - x^3)$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^6+5x^3} - x^3)$

Solução Os gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x^6+5} - x^3$ e $g(x) = \sqrt{x^6+5x^3} - x^3$ para $x \geq 0$ aparecem na Figura 2.3.6. A partir deles, podemos conjecturar que os limites solicitados são 0 e $\frac{5}{2}$, respectivamente. Para confirmar isso, tratamos cada função como uma fração com um denominador igual a 1 e racionalizamos o numerador.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^6+5} - x^3) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^6+5} - x^3)\left(\frac{\sqrt{x^6+5}+x^3}{\sqrt{x^6+5}+x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^6+5)-x^6}{\sqrt{x^6+5}+x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{x^6+5}+x^3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{5}{x^3}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^6}}+1} \qquad \boxed{\sqrt{x^6} = x^3 \text{ para } x > 0}$$

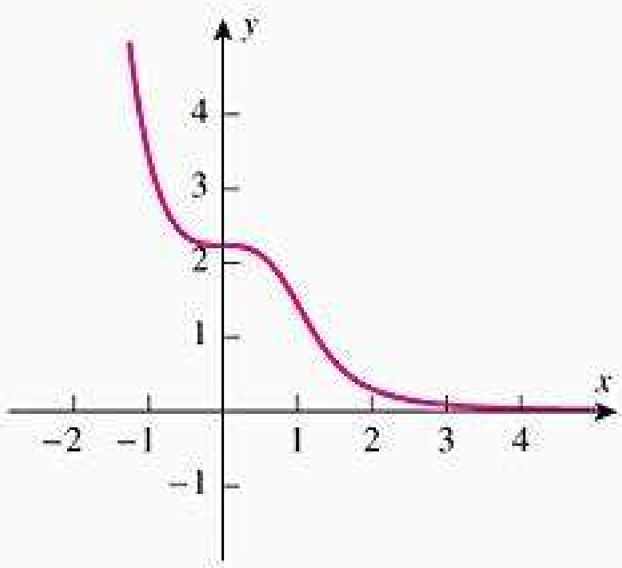
$$= \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^6+5x^3} - x^3) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^6+5x^3} - x^3)\left(\frac{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3}{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^6+5x^3)-x^6}{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3}{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3}$$

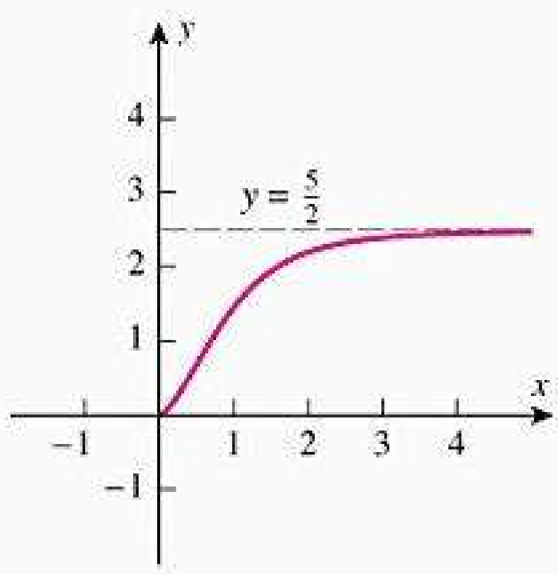
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^3}}+1} \qquad \boxed{\sqrt{x^6} = x^3 \text{ para } x > 0}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2} \blacktriangleleft$$



$y = \sqrt{x^6+5} - x^3$

(*a*)



$y = \sqrt{x^6+5x^3} - x^3, x \geq 0$

(*b*)

Figura 2.3.6

Observamos na Seção 2.1 que as regras usuais da Álgebra não podem ser aplicadas aos símbolos $+\infty$ e $-\infty$. A parte (b) do Exemplo 13 ilustra este fato: os termos $\sqrt{x^6+5x^3}$ e x^3 tendem a $+\infty$ quando $x \to +\infty$, mas sua diferença não tende a zero.

■ COMPORTAMENTO FINAL DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Considere a função $f(x) = \text{sen } x$, cujo gráfico aparece na Figura 2.3.7. Para essa função, os limites quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ deixam de existir, não porque $f(x)$ cresça ou decresça sem cota, mas porque esses valores variam entre -1 e 1 sem se aproximar de algum número real

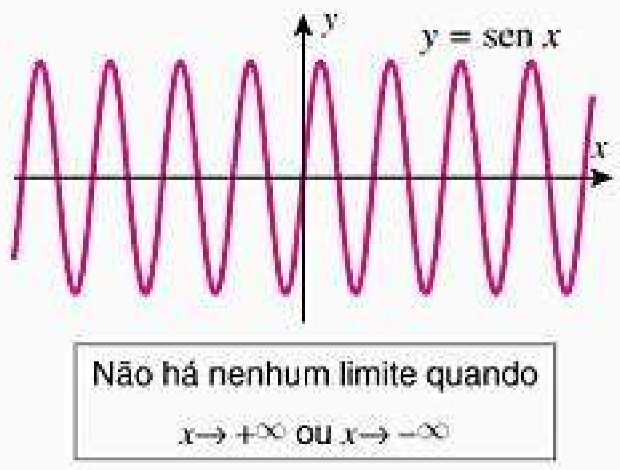


Figura 2.3.7

específico. Em geral, as funções trigonométricas deixam de possuir limites quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, por causa da periodicidade. Não existe notação para denotar esse tipo específico de comportamento.

Na Seção 1.6 mostramos que ambas as funções e^x e $\ln x$ crescem sem cota quando $x \to +\infty$ (Figuras 1.6.9 e 1.6.10). Assim, na notação de limite, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \tag{20-21}$$

Para referência futura, também listamos os seguintes limites, que são consistentes com os gráficos das Figuras 2.3.8:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \tag{22-23}$$

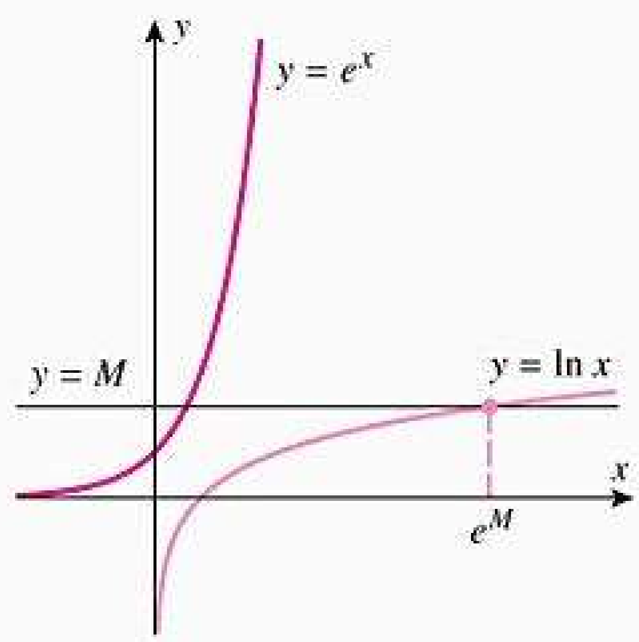


Figura 2.3.8

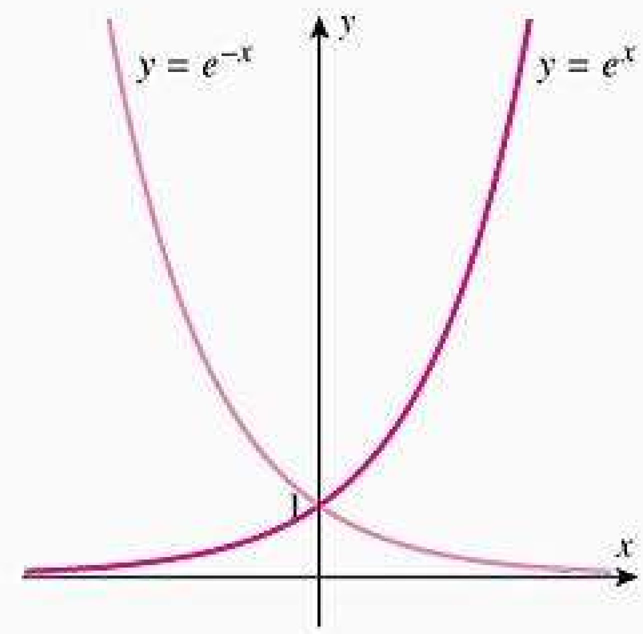


Figura 2.3.9

Finalmente, os limites seguintes podem ser deduzidos observando que o gráfico de $y = e^{-x}$ é a reflexão do gráfico de $y = e^x$ pelo eixo y (Figura 2.3.9).

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \tag{24-25}$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.3 (*Ver página 134 para respostas.*)

1. Encontre os limites.

(a) $\lim_{x \to -\infty} (-3) =$ ______

(b) $\lim_{h \to +\infty} (-2h) =$ ______

(c) $\lim_{y \to -\infty} \frac{y}{|y|} =$ ______

(d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} =$ ______

(e) $\lim_{z \to -\infty} (3 - z) =$ ______

(f) $\lim_{h \to -\infty} \left(5 - \frac{1}{h}\right) =$ ______

(g) $\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} =$ ______

2. Encontre os limites que existirem.

(a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x}{4x^2 - 3} =$ ______

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x} =$ ______

(c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} =$ ______

3. Dado que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -3$$

encontre os limites que existirem.

(a) $\lim_{x \to +\infty} [3f(x) - g(x)] =$ ______

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$ ______

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2f(x) + 3g(x)}{3f(x) + 2g(x)} =$ ______

(d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{10 - f(x)g(x)} =$ ______

4. Considere os gráficos de sen x, cos x, tg x, sec x, cossec x, cotg x, ln x, e^x, e^{-x}, 2^x e $(0,5)^x$. Qual deles, se algum, tem uma assíntota horizontal?

EXERCÍCIOS 2.3 Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

1-4 Em cada um destes exercícios, faça hipóteses razoáveis sobre o gráfico da função indicada fora da região esboçada.

1. Para a função g do gráfico abaixo, encontre

(a) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

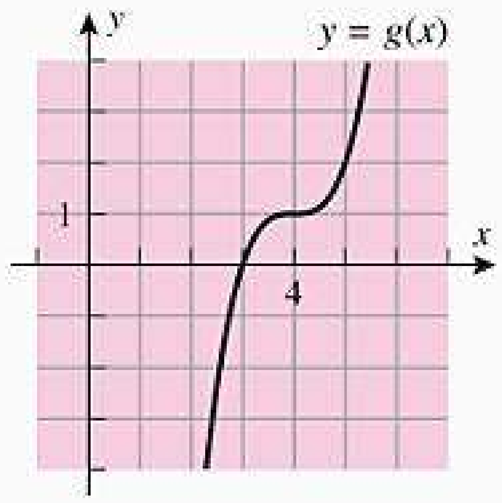


Figura Ex-1

2. Para a função ø do gráfico abaixo, encontre:

(a) $\lim_{x \to -\infty} \phi(x)$ (b) $\lim_{x \to -\infty} \phi(x)$

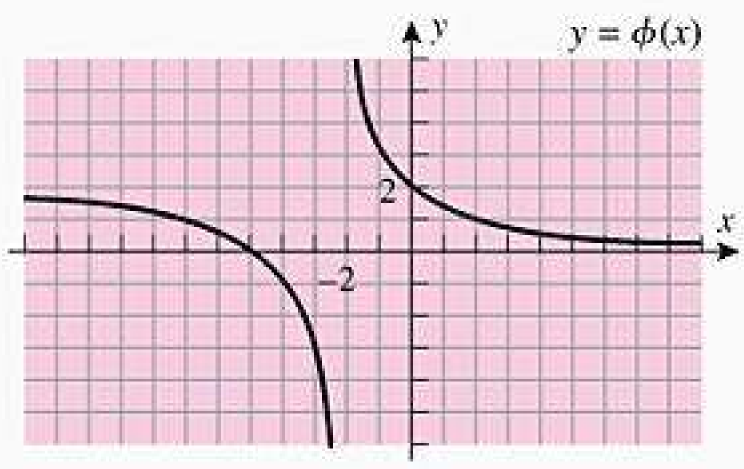


Figura Ex-2

3. Para a função ø do gráfico abaixo, encontre:

(a) $\lim_{x \to -\infty} \phi(x)$ (b) $\lim_{x \to +\infty} \phi(x)$

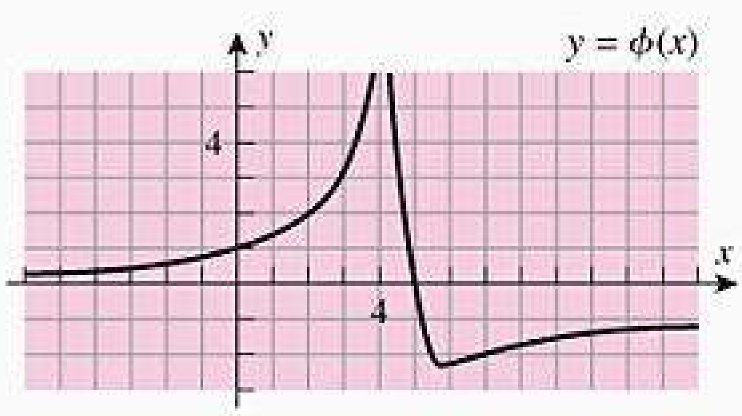


Figura Ex-3

4. Para a função G do gráfico a seguir, encontre:

(a) $\lim_{x \to -\infty} G(x)$ (b) $\lim_{x \to +\infty} G(x)$

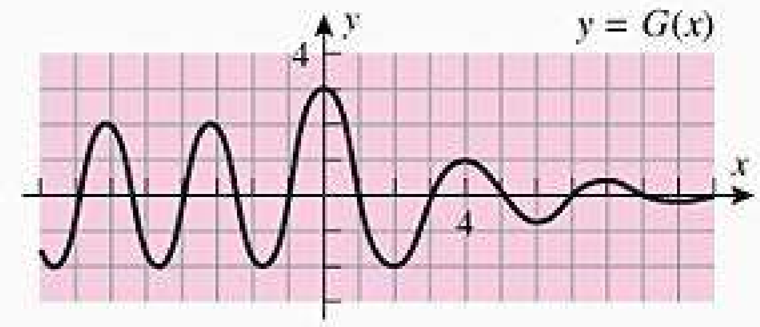


Figura Ex-4

5. Dado que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -5, \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

encontre os limites que existirem. Se o limite não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + 3g(x)]$

(b) $\lim_{x \to +\infty} [h(x) - 4g(x) + 1]$

(c) $\lim_{x \to +\infty} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to +\infty} [g(x)]^2$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}$ (f) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3}{g(x)}$

(g) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3h(x) + 4}{x^2}$ (h) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{6f(x)}{5f(x) + 3g(x)}$

6. Dado que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 7 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = -6$$

encontre os limites que existirem. Se o limite não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to -\infty} [2f(x) - g(x)]$ (b) $\lim_{x \to -\infty} [6f(x) + 7g(x)]$

(c) $\lim_{x \to -\infty} [x^2 + g(x)]$ (d) $\lim_{x \to -\infty} [x^2 g(x)]$

(e) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{f(x)g(x)}$ (f) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

(g) $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + \dfrac{g(x)}{x}\right]$ (h) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{xf(x)}{(2x + 3)g(x)}$

7-28 Encontre os limites.

7. $\lim_{x \to +\infty} (1 + 2x - 3x^5)$ **8.** $\lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 100x + 5)$

9. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}$ **10.** $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{5 - x}$

11. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 1}{2x - 5}$ **12.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 4x}{2x^2 + 3}$

13. $\lim_{y \to -\infty} \dfrac{3}{y + 4}$ **14.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - 12}$

15. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ **16.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 + 7}{3x^2 - x}$

17. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2 + 3x - 5x^2}{1 + 8x^2}}$ **18.** $\lim_{s \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3s^7 - 4s^5}{2s^7 + 1}}$

19. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$ **20.** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$

21. $\lim_{y \to -\infty} \dfrac{2 - y}{\sqrt{7 + 6y^2}}$ **22.** $\lim_{y \to +\infty} \dfrac{2 - y}{\sqrt{7 + 6y^2}}$

23. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + x}}{x^2 - 8}$

24. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + x}}{x^2 - 8}$

25. $\lim_{x \to +\infty} \frac{7 - 6x^5}{x + 3}$

26. $\lim_{t \to -\infty} \frac{5 - 2t^3}{t^2 + 1}$

27. $\lim_{t \to +\infty} \frac{6 - t^3}{7t^3 + 3}$

28. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 4x^3}{1 - x^2 + 7x^3}$

ENFOCANDO CONCEITOS

29. Suponha que uma partícula esteja sendo acelerada por uma força constante. As duas curvas $v = n(t)$ e $v = e(t)$ da figura abaixo fornecem as curvas de velocidade instantânea *versus* tempo para a partícula conforme previstas, respectivamente, pela Física clássica e pela Teoria da Relatividade Especial. O parâmetro c representa a velocidade da luz. Usando a linguagem de limites, descreva as diferenças nas previsões a longo prazo das duas teorias.

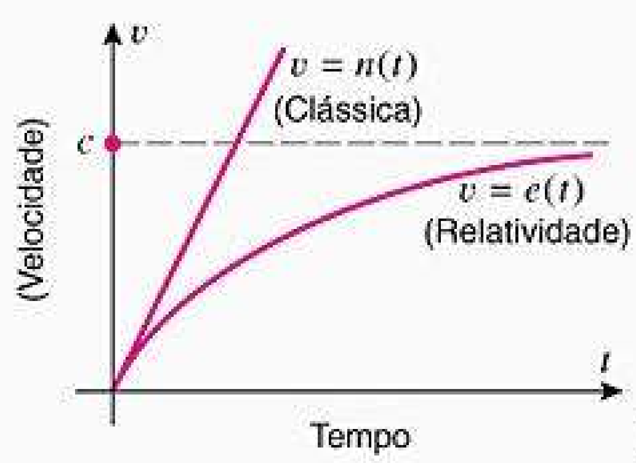


Figura Ex-29

30. Seja $T = f(t)$ a temperatura de uma batata cozida t minutos depois de retirada de um forno quente. A figura abaixo mostra a curva da temperatura *versus* tempo para a batata, onde r denota a temperatura ambiente.

(a) Qual é o significado físico de $\lim_{t \to 0^+} f(t)$?

(b) Qual é o significado físico de $\lim_{t \to +\infty} f(t)$?

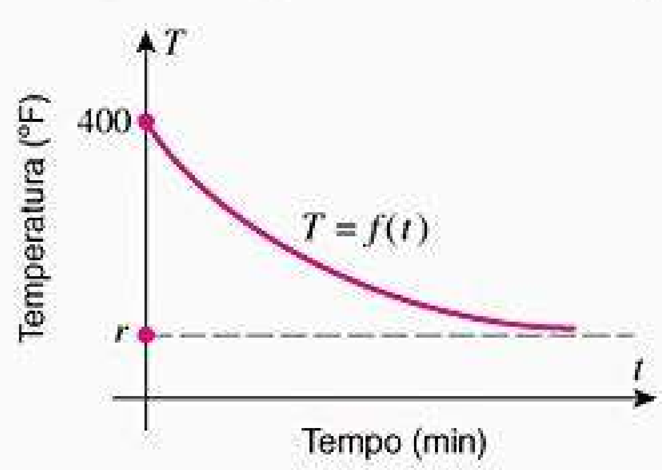


Figura Ex-30

31. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5, & x < 0 \\ \dfrac{3 - 5x^3}{1 + 4x + x^3}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Encontre

(a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

32. Seja

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{2 + 3t}{5t^2 + 6}, & t < 1.000.000 \\ \dfrac{\sqrt{36t^2 - 100}}{5 - t}, & t > 1.000.000 \end{cases}$$

Encontre

(a) $\lim_{t \to -\infty} g(t)$ (b) $\lim_{t \to +\infty} g(t)$

33-36 Encontre os limites.

33. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$

34. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x)$

35. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x)$

36. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$

37. Discuta os limites de $p(x) = (1 - x)^n$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ para valores inteiros positivos de n.

38. Sejam $p(x) = (1 - x)^n$ e $q(x) = (1 - x)^m$. Discuta os limites de $p(x)/q(x)$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ para valores inteiros positivos de m e n.

39. Seja $p(x)$ um polinômio de grau n. Discuta os limites de $p(x)/x^m$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ para valores inteiros positivos de m.

40. Em cada parte, encontre exemplos de polinômios $p(x)$ e $q(x)$ que satisfaçam a condição dada e tais que $p(x) \to +\infty$ e $q(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 1$ (b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty$ (d) $\lim_{x \to +\infty} [p(x) - q(x)] = 3$

41. Supondo que m e n sejam inteiros positivos, encontre

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2 + 3x^n}{1 - x^m}$$

[*Sugestão*: A resposta dependerá dos casos $m < n$, $m = n$ ou $m > n$.]

42. Encontre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n}{d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m}$$

onde $c_n \neq 0$ e $d_m \neq 0$. [*Sugestão*: A resposta dependerá dos casos $m < n$, $m = n$ ou $m > n$.]

43-58 Encontre os limites.

43. $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x}$

44. $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$

45. $\lim_{x \to 0^+} e^{\operatorname{cossec} x}$

46. $\lim_{x \to 0^-} e^{\operatorname{cossec} x}$

47. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

48. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

49. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

50. $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

51. $\lim_{x \to 1^-} \ln(1 - x)$

52. $\lim_{x \to 0} \ln(1 - \cos x)$

53. $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2}{x}\right)$

54. $\lim_{x \to \pi/2^-} \ln(\operatorname{tg} x)$

55. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2x}{\ln 3x}$

56. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1/x)}{1 + \ln 3x}$

57. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 1) - \ln(x + 1)$

58. $\lim_{x \to +\infty} \ln(3x + 1) - \ln(2x^2 + 1)$

ENFOCANDO CONCEITOS

59. Suponha que a velocidade v (em pés/s) de um pára-quedista t segundos depois de saltar de um avião seja dada pela equação $v = 190(1 - e^{-0{,}168t})$.

(a) Faça o gráfico de v *versus* t.

(b) Calculando um limite apropriado, mostre que o gráfico de v *versus* t tem uma assíntota horizontal $v = c$ para uma constante c apropriada.

(c) Qual é o significado físico da constante c em (b)?

60. A população p dos EUA no ano t pode ser modelada (em milhões) pela função

$$p = \frac{50371{,}7}{151{,}3 + 181{,}626e^{-0{,}031636(t-1950)}}$$

(a) Com base nesse modelo, qual foi a população dos EUA em 1950?

(b) Faça um gráfico de p *versus* t para o período de 200 anos que vai de 1950 até 2150.

(c) Calculando um limite apropriado, mostre que o gráfico de p *versus* t tem uma assíntota horizontal $p = c$ para uma constante c apropriada.

(d) Qual é o significado da constante c em (b) para a previsão da população por meio desse modelo?

61. Suponha que $f(x)$ denote uma função tal que

$$\lim_{t \to 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$$

O que pode ser dito sobre os limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)?$$

62. (a) Suponha que $f(x)$ denote uma função tal que

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = L$$

O que pode ser dito sobre o limite

$$\lim_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)?$$

(b) Suponha que $f(x)$ denote uma função tal que

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = L$$

O que pode ser dito sobre o limite

$$\lim_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)?$$

63-70 Encontre os limites.

63. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^x}$

64. $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x+1|^x}{|x|^x}$

65. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$

66. $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$

67. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^x}{x^x}$

68. $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x-1|^x}{|x|^x}$

69. $\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

70. $\lim_{x \to -\infty} \left(|x| + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

71-78 Encontre os limites. [*Sugestão*: O resultado do Exercício 62 pode ser útil em alguns desses limites.]

71. $\lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{1/x}$

72. $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$

73. $\lim_{x \to 0^-} (1 - x)^{1/x}$

74. $\lim_{x \to 0^+} (1 - x)^{1/x}$

75. $\lim_{x \to 0^-} (1 + 2x)^{3/x}$

76. $\lim_{x \to 0^+} (1 + 2x)^{3/x}$

77. $\lim_{x \to 0^-} (1 - 2x)^{3/x}$

78. $\lim_{x \to 0^+} (1 - 2x)^{3/x}$

79-84 A noção de assíntota pode ser estendida para incluir curvas não necessariamente retas. Especificamente, dizemos que as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são ***assintóticas quando x → +∞*** se

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

e ***assintóticas quando x → −∞*** se

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

Informalmente, duas curvas são assintóticas quando $x \to +\infty$ se permanecerem tão próximas quanto queiramos para valores suficientemente grandes de x. Analogamente, duas curvas são assintóticas quando $x \to -\infty$ se permanecerem tão próximas quanto queiramos para números negativos x de magnitude suficientemente grande. Por exemplo, se

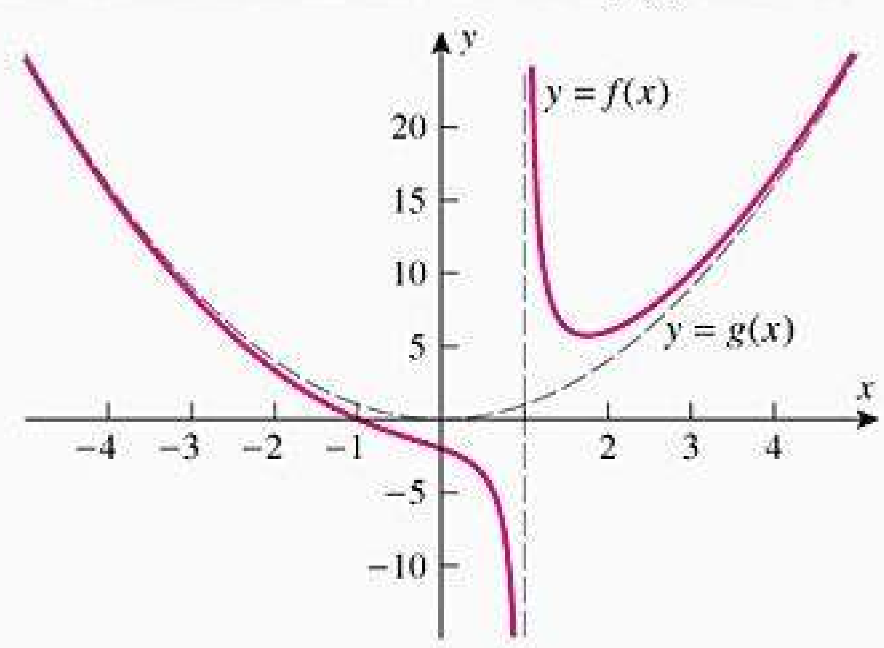
$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

então $y = f(x)$ é assintótica a $y = g(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$, pois

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

Esse comportamento assintótico está ilustrado na figura seguinte, que também mostra a assíntota vertical de $f(x)$ em $x = 1$.



Nesses exercícios, determine uma função $g(x)$ mais simples, tal que $y = f(x)$ seja assintótica a $y = g(x)$ quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Use um recurso gráfico para gerar os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = g(x)$ e identifique todas as assíntotas verticais.

79. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 2}$

80. $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 3}{x}$

81. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 3x^2 + x - 1}{x - 3}$

82. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 3}{x^2 - 1}$

83. $f(x) = \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x - 1}$

84. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1}}$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.3

1. (a) -3 (b) $-\infty$ (c) -1 (d) 0 (e) $+\infty$ (f) 5 (g) 0 **2.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) não existe (c) e^2 **3.** (a) 9 (b) $-\frac{2}{3}$ (c) não existe (d) 4
4. e^x, e^{-x}, 2^x e $(0{,}5)^x$ têm, cada uma, uma assíntota horizontal

2.4 LIMITES (DISCUTIDOS MAIS RIGOROSAMENTE)

Nas seções anteriores deste capítulo nos ocupamos com a descoberta de valores de limites, tanto pela amostragem de valores selecionados de x como pela aplicação de teoremas de limites que foram enunciados sem prova. Nosso objetivo principal nesta seção é definir precisamente a noção de limite, tornando possível, assim, estabelecer limites com exatidão e provar teoremas sobre limites. Com isso, também estaremos obtendo uma compreensão mais profunda de algumas das propriedades mais sutis das funções.

■ MOTIVAÇÃO PARA A DEFINIÇÃO DE LIMITES BILATERAIS

A afirmação $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pode ser interpretada informalmente como significando que o valor de $f(x)$ pode ser tomado tão próximo quanto queiramos do número real L, bastando para isso tomar valores de x suficientemente próximos de a. Nosso objetivo é tornar as frases "tão próximo quanto queiramos de L" e "suficientemente próximo de a" matematicamente precisas.

Para isso, considere a função f esboçada na Figura 2.4.1a, para a qual $f(x) \to L$ quando $x \to a$. Para simplificar a visualização, desenhamos o gráfico de f como sendo crescente em um intervalo aberto contendo a e deliberadamente colocamos um buraco no gráfico sobre o ponto $x = a$ para enfatizar que f não precisa estar definida em $x = a$ para ter um limite nesse ponto.

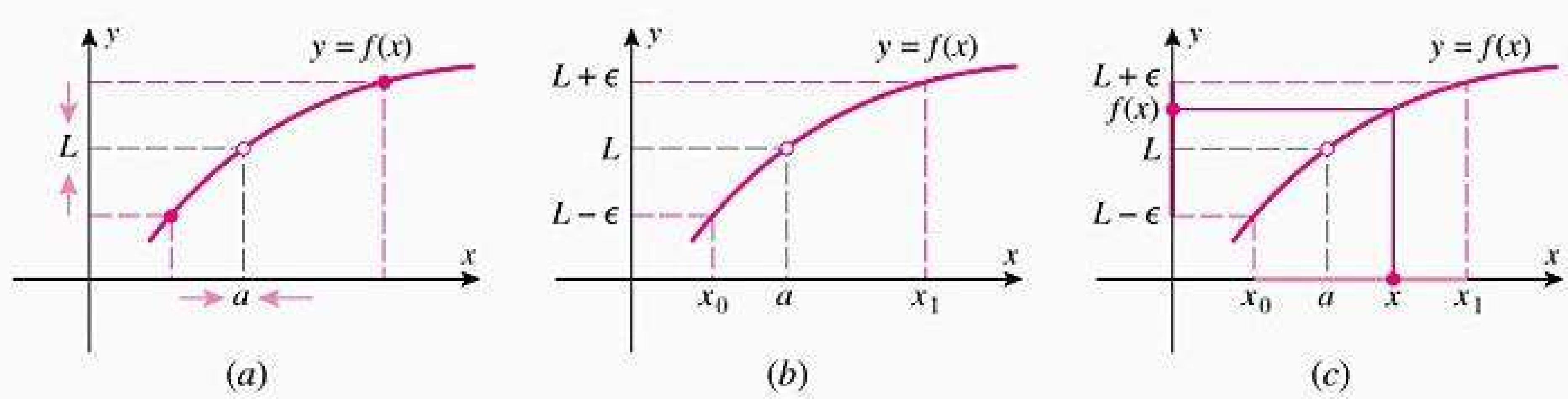


Figura 2.4.1

Em seguida, escolhamos qualquer número positivo ϵ e perguntemos quão próximo deve estar x de a para garantir que os valores de $f(x)$ caiam a uma distância inferior a ϵ de L. Agora podemos responder isso geometricamente traçando retas horizontais a partir dos pontos $L + \epsilon$ e $L - \epsilon$ do eixo y até encontrarmos a curva $y = f(x)$, e então traçar retas verticais a partir desses pontos da curva até o eixo x (Figura 2.4.1b). Como indicamos na figura, sejam x_0 e x_1 os dois pontos em que as retas verticais cortam o eixo x.

Agora imaginemos que x se aproxima mais e mais de a (de qualquer um dos dois lados). A partir de um certo instante, x estará dentro do intervalo (x_0, x_1), que está destacado com cor

na Figura 2.4.1c; quando isso ocorrer, o valor de $f(x)$ cairá entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$, que determinam um intervalo destacado com cor na figura. Assim, podemos concluir:

Se $f(x) \to L$ quando $x \to a$, então para qualquer número positivo ϵ podemos encontrar um intervalo aberto (x_0, x_1) no eixo x que contém o ponto a e que tem a propriedade de que, para cada x nesse intervalo (exceto possivelmente para $x = a$), o valor de $f(x)$ está entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$.

O que é importante sobre esse resultado é que ele é válido independentemente de quão pequeno se tomar ϵ. Contudo, tomando ϵ cada vez menor força $f(x)$ a ficar cada vez mais próximo de L, que é precisamente o conceito que estávamos tentando captar matematicamente.

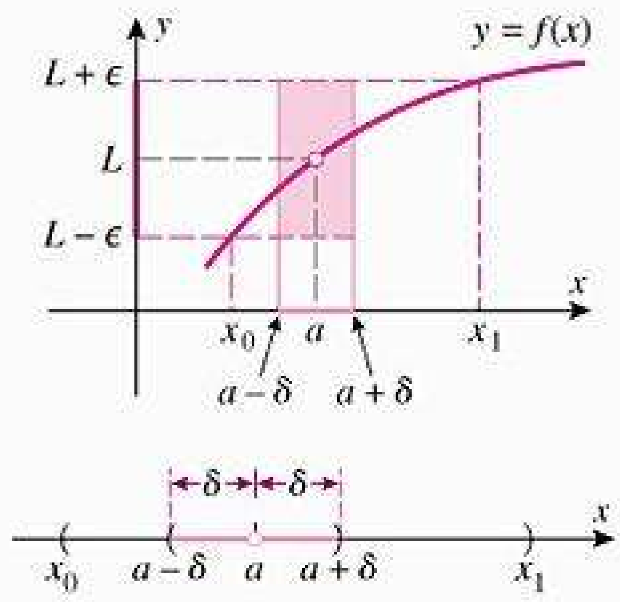


Figura 2.4.2

Observe que na Figura 2.4.1c o intervalo (x_0, x_1) se estende mais para o lado direito de a do que para o lado esquerdo. Contudo, muitas vezes é preferível dispor de um intervalo que se estenda a mesma distância para ambos os lados de a. Para isso, escolhamos qualquer número positivo δ que seja menor do que ambos $x_1 - a$ e $a - x_0$ e consideremos o intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Esse intervalo se estende à mesma distância δ de ambos os lados de a e está dentro do intervalo (x_0, x_1) (Figura 2.4.2). Além disso, a condição $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ vale para cada x desse intervalo (exceto, possivelmente, $x = a$), já que essa condição vale no intervalo maior (x_0, x_1).

Como a condição $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ pode ser expressa como

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

e a condição em que x está situado no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, mas $x \neq a$, pode ser expressa como

$$0 < |x - a| < \delta$$

somos levados à definição precisa de limite bilateral a seguir.

As definições de limites laterais exigem adaptações mínimas na Definição 2.4.1. Por exemplo, para um limite pela direita basta supor que $f(x)$ esteja definida em um intervalo (a, b) que se estende à direita de a e que a condição ϵ seja satisfeita por qualquer x do intervalo $a < x < a + \delta$ que se estende à direita de a. Uma adaptação semelhante deve ser feita para limites pela esquerda.

2.4.1. DEFINIÇÃO DE LIMITE Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto que contenha o número a, com a possível exceção de que $f(x)$ não precisa estar definida em a. Escreveremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Essa definição, que é atribuída ao matemático alemão Karl Weierstrass e é conhecida como a definição "épsilon-delta" de limite bilateral, estabelece a transição de um conceito informal de limite para uma definição precisa. Especificamente, à frase informal "tão próximo quanto queiramos de L" atribuímos um sentido quantitativo pela nossa habilidade de escolher arbitrariamente o número positivo ϵ, e a frase "suficientemente próximo de a" é quantificada pelo número positivo δ.

Na seção precedente, ilustramos vários métodos numéricos e gráficos para adivinhar limites. Agora que temos uma definição precisa para trabalhar, podemos confirmar, de fato, a validade daqueles palpites com prova matemática. Aqui está um exemplo típico de uma tal prova.

► Exemplo 1 Use a Definição 2.4.1 para provar que $\lim_{x \to 2} (3x - 5) = 1$.

Solução Devemos mostrar que, dado qualquer número positivo ϵ, podemos encontrar um número positivo δ tal que

$$|\underbrace{(3x - 5)}_{f(x)} - \underbrace{1}_{L}| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - \underbrace{2}_{a}| < \delta \tag{1}$$

Há duas coisas a fazer. Primeiro, devemos *descobrir* um valor de δ que sustente essa afirmação e, então, *provar* que a afirmação é válida para aquele δ. Para a primeira parte, começamos por simplificar e escrever (1) como

$$|3x - 6| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

A seguir, vamos reescrever essa afirmação em uma forma que irá facilitar a descoberta de um δ apropriado:

$$\begin{aligned} 3|x - 2| < \epsilon \quad &\text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta \\ |x - 2| < \epsilon/3 \quad &\text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta \end{aligned} \tag{2}$$

Deveria ser evidente por si só que essa última afirmação está assegurada quando $\delta = \epsilon/3$, a qual completa a parte da descoberta de nosso trabalho. Agora, precisamos provar que (1) é válida para essa escolha de δ. Porém, a afirmativa (1) é equivalente à (2), e (2) se verifica com $\delta = \epsilon/3$, portanto, (1) se verifica também com $\delta = \epsilon/3$. Isso prova que $\lim_{x \to 2} (3x - 5) = 1$. ◄

Este exemplo ilustra a forma geral da prova de um limite: *Admitimos* que nos é dado um número positivo ϵ, e tentamos *provar* ser possível encontrar um número positivo δ, tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \tag{3}$$

Isso é feito em primeiro lugar descobrindo-se δ, e então provando que o δ descoberto funciona. Uma vez que o argumento tem de ser bastante geral a fim de valer para todos os valores de ϵ positivos, a quantidade δ deve ser expressa como uma função de ϵ. No Exemplo 1, encontramos a função $\delta = \epsilon/3$ por alguma álgebra simples; contudo, a maioria das provas de limite requer um pouco mais de engenhosidade lógica e algébrica. Logo, se o leitor achar nossa discussão resultante das provas "ϵ-δ" desafiadora, não venha a se desencorajar; os conceitos e as técnicas têm dificuldades intrínsecas. Com efeito, o entendimento exato de limites iludiu as melhores mentes matemáticas por mais de 150 anos após a descoberta dos conceitos básicos de Cálculo.

► Exemplo 2 Prove que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Solução Observe que o domínio de $\sqrt{x}$ é $0 \le x$, portanto é válido discutir o limite com $x \to 0^+$. Devemos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - 0| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < x < 0 + \delta$$

ou, simplificando:

$$\sqrt{x} < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < x < \delta \tag{4}$$



Karl Weierstrass (1815-1897) Weierstrass, filho de um oficial alfandegário, nasceu em Ostenfelde, Alemanha. Quando jovem, Weierstrass mostrou notável habilidade em línguas e Matemática. Porém, pressionado pelo pai dominador, entrou em um programa de leis e comércio da Universidade de Bonn. Para desgosto da família, o teimoso jovem concentrou-se em esgrimar e beber cerveja. Quatro anos mais tarde, voltou para casa sem nenhum título. Em 1839, entrou na Academia de Münster para obter um título em ensino médio e aí conheceu e estudou sob a orientação de um excelente matemático, chamado Christof Gudermann. As idéias desse matemático tiveram grande influência no trabalho de Weierstrass. Após receber seu diploma de licenciatura, ele passou os 15 anos seguintes lecionando alemão, Geografia e Matemática em uma escola de ensino médio. Além disso, ensinava caligrafia para crianças. Durante esse período, muito do trabalho matemático de Weierstrass foi ignorado, pois era um professor de ensino médio, e não universitário. Então, em 1854, ele publicou um artigo da maior importância, causando sensação no mundo matemático e dando-lhe da noite para o dia fama internacional. Ele recebeu imediatamente um doutorado honorário na Universidade de Königsberg e começou uma nova carreira universitária, lecionando na Universidade de Berlim, em 1856. Em 1859, o esforço dispendido nas pesquisas matemáticas causou-lhe um colapso nervoso temporário e levou-o a surtos de vertigens que o acompanharam pelo resto de sua vida. Weierstrass era um professor brilhante, e suas aulas ficavam sempre lotadas. Apesar de sua fama, ele nunca perdeu seus hábitos de bebedor de cerveja, estando sempre na companhia de estudantes, brilhantes ou não. Weierstrass foi reconhecido como um grande nome mundial em Análise Matemática. Ele e seus estudantes abriram caminho para as escolas modernas de Análise Matemática.

O limite pela esquerda e o limite bilateral no Exemplo 2 não existem em $x = 0$ porque o domínio de $\sqrt{x}$ não inclui números à esquerda de 0.

Mas, elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade $\sqrt{x} < \epsilon$, podemos reescrever (4) como

$$x < \epsilon^2 \quad \text{se} \quad 0 < x < \delta \tag{5}$$

Deveria ser evidente por si só que (5) é verdadeiro se $\delta = \epsilon^2$; e uma vez que (5) é a reformulação de (4), mostramos que (4) é válida com $\delta = \epsilon^2$. Isso prova que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. ◄

■ O VALOR DE δ NÃO É ÚNICO

Preparando o próximo exemplo, notamos que o valor de δ na Definição 2.4.1 não é único; uma vez encontrado um valor de δ que preencha as exigências da definição, então qualquer número positivo δ_1 menor também cumprirá aquelas exigências. Isto é, se é verdade que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

então também será verdade que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$



Figura 2.4.3

Isso porque $\{x : 0 < |x - a| < \delta_1\}$ é um subconjunto de $\{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ (Figura 2.4.3), e portanto, se $|f(x) - L| < \epsilon$ é satisfeita para todo x no intervalo maior, então será automaticamente satisfeita para todo x no subconjunto. Logo, no Exemplo 1, onde usamos $\delta = \epsilon/3$, poderíamos ter usado valores menores de δ, tais como $\delta = \epsilon/4$, $\delta = \epsilon/5$ ou $\delta = \epsilon/6$.

► **Exemplo 3** Prove que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

Solução Devemos mostrar que, dado qualquer número positivo, conseguimos encontrar um número positivo δ tal que

$$|x^2 - 9| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \tag{6}$$

Como $|x - 3|$ ocorre no lado direito dessa "afirmativa se", será útil fatorar o lado esquerdo para introduzir um fator $|x - 3|$. Isso resulta na seguinte forma alternativa de (6):

$$|x + 3||x - 3| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \tag{7}$$

Queremos limitar o fator $|x + 3|$. Se soubéssemos, por exemplo, que $\delta \le 1$, então teríamos $-1 < x - 3 < 1$, portanto, $5 < x + 3 < 7$ e, conseqüentemente, $|x + 3| < 7$. Assim, se $\delta \le 1$ e $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|x + 3||x - 3| < 7\delta$$

Caso o leitor se pergunte como foi obtida a restrição $\delta \le 1$, em vez de $\delta \le 5$ ou $\delta \le \frac{1}{2}$, por exemplo, a resposta é simples: 1 é somente uma escolha conveniente, pois qualquer restrição da forma $\delta \le c$ teria funcionado igualmente bem.

Segue que (7) estará satisfeita por qualquer δ positivo tal que $\delta \le 1$ e $7\delta < \epsilon$. Isso pode ser obtido tomando δ como o mínimo dos números 1 e $\epsilon/7$, que costumamos denotar por $\delta = \min(1, \epsilon/7)$. Isso prova que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$. ◄

■ LIMITE QUANDO $x \to \pm\infty$

Na Seção 2.3, discutimos os limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

de um ponto de vista intuitivo. Interpretamos a primeira afirmação como significando que os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queiramos de L quando x cresce sem parar; interpretamos a segunda afirmação como significando que os valores de $f(x)$ ficam tão próximos quanto queriamos de L quando x decresce sem parar. Essas idéias são captadas mais precisamente nas definições a seguir e ilustradas na Figura 2.4.4.

> **2.4.2 DEFINIÇÃO** Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto infinito, o qual se estende no sentido positivo do eixo x. Escreveremos
>
> $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$
>
> se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, houver um correspondente número positivo N, tal que
>
> $$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se} \quad x > N$$

> **2.4.3 DEFINIÇÃO** Seja $f(x)$ definida para todo x de algum intervalo aberto infinito, o qual se estende no sentido negativo do eixo x. Escreveremos
>
> $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
>
> se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, houver um correspondente número negativo N, tal que
>
> $$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se} \quad x < N$$

Para ver como essas definições se relacionam com os nossos conceitos informais desses limites, suponha que $f(x) \to L$ quando $x \to +\infty$, e para um dado ϵ seja N o número positivo descrito na Definição 2.4.2. Se for permitido x crescer sem parar, então x irá entrar no intervalo $(N, +\infty)$, o qual está marcado mais claro na Figura 2.4.4a; quando isso acontecer, os valores de $f(x)$ cairão entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$, marcado mais escuro na figura. Uma vez que isso é válido para todos os valores de ϵ (não importa quão pequeno), podemos forçar os valores de $f(x)$ a ficar tão perto de L quanto quisermos, fazendo N suficientemente grande. Isso está de acordo com o nosso conceito informal desse limite. Analogamente, a Figura 2.4.4b ilustra a Definição 2.4.3.

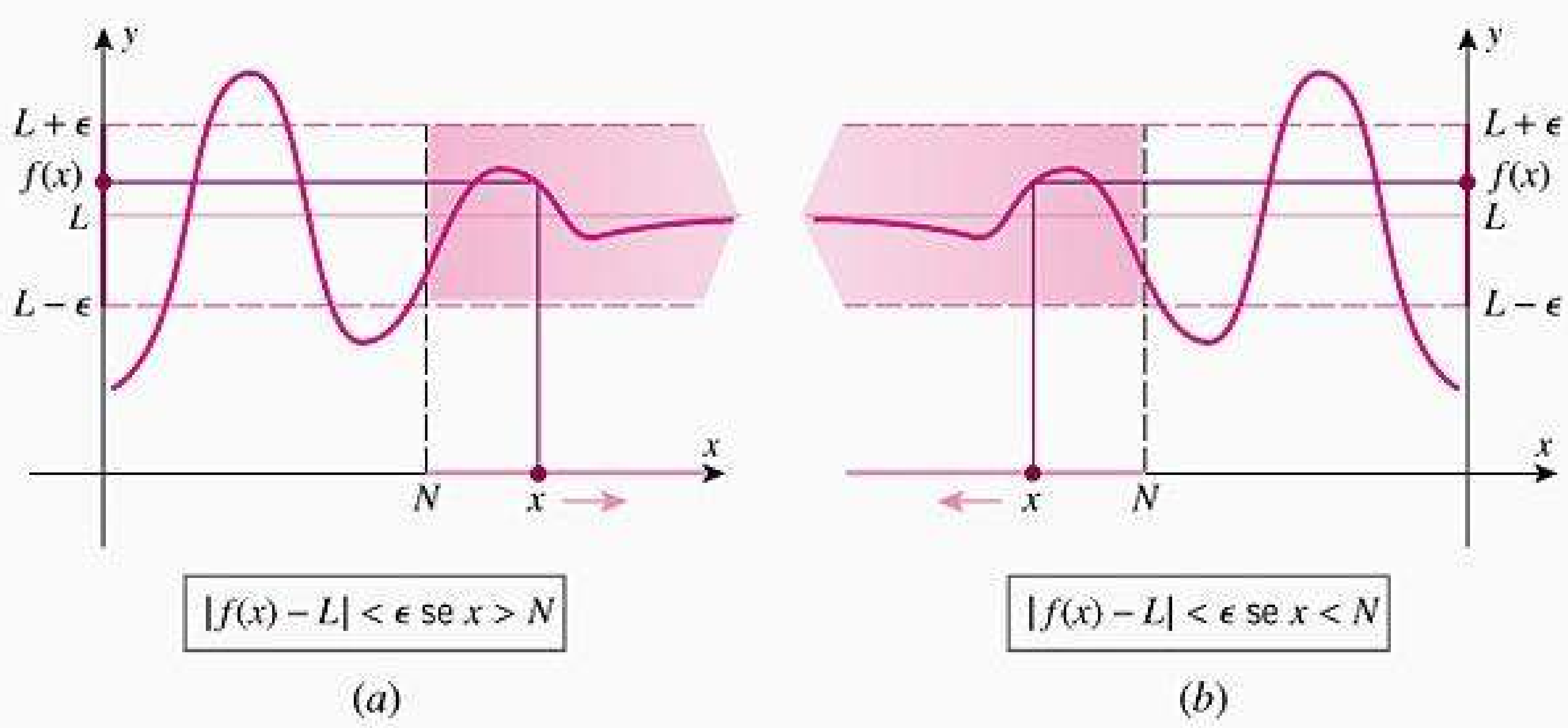


Figura 2.4.4

▶ Exemplo 4 Prove que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Solução Aplicando-se a Definição 2.4.2 com $f(x) = 1/x$ e $L = 0$, devemos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, conseguimos encontrar um número $N > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{se} \quad x > N \tag{8}$$

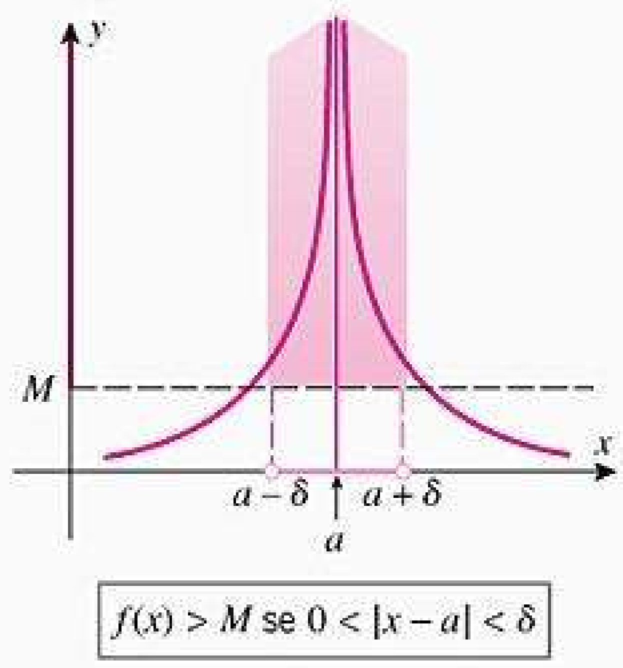
Como $x \to +\infty$, podemos supor que $x > 0$. Logo, podemos eliminar os valores absolutos nessa afirmação e a reescrever como

$$\frac{1}{x} < \epsilon \quad \text{se} \quad x > N$$

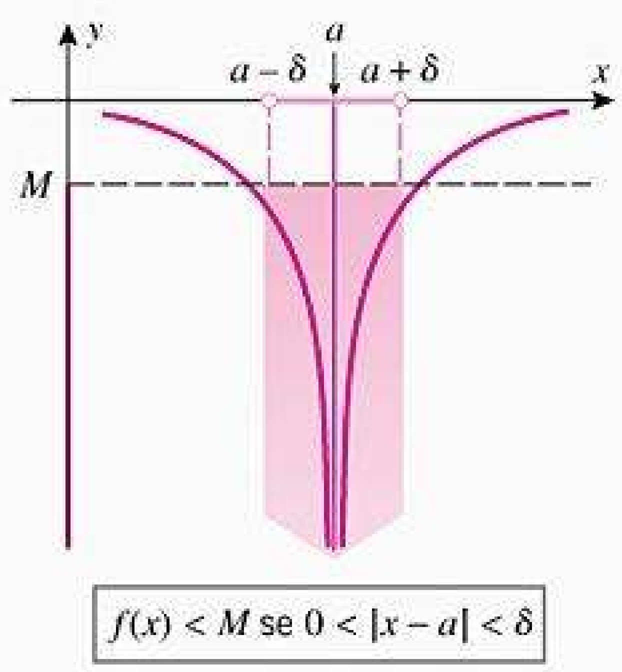
ou, tomando os recíprocos,

$$x > \frac{1}{\epsilon} \quad \text{se} \quad x > N \tag{9}$$

É evidente por si só que $N = 1/\epsilon$ satisfaz essa exigência, e como (9) é equivalente a (8) para $x > 0$, a prova está completa. ◂



(a)



(b)

Figura 2.4.5

LIMITES INFINITOS

Na Seção 2.1, discutimos do ponto de vista intuitivo os seguinte tipos de limites:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \tag{10}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \tag{11}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \tag{12}$$

Lembre que cada uma dessas expressões descreve uma maneira particular na qual o limite não existe. O $+\infty$ indica que o limite não existe porque $f(x)$ cresce sem cota, e $-\infty$ indica que o limite não existe porque $f(x)$ decresce sem cota. Essas idéias estão captadas mais precisamente nas definições a seguir e ilustradas na Figura 2.4.5.

2.4.4 DEFINIÇÃO Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto contendo a, exceto que $f(x)$ não precisa estar definida em a. Escreveremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se, dado um número positivo M qualquer, pudermos encontrar um número $\delta > 0$, tal que $f(x)$ satisfaz

$$f(x) > M \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

2.4.5 DEFINIÇÃO Seja $f(x)$ definida para todo x de algum intervalo aberto contendo a, com a exceção de que $f(x)$ não precisa estar definida em a. Escreveremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se, dado um número negativo M qualquer, pudermos encontrar um número $\delta > 0$, tal que $f(x)$ satisfaz

$$f(x) < M \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Como o leitor definiria:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Para ver como essas definições se relacionam com os nossos conceitos informais desses limites, suponha que $f(x) \to +\infty$ quando $x \to a$, e que para um dado M seja δ o número positivo correspondente, descrito na Definição 2.4.4. A seguir, imagine que x aproxima-se cada vez mais de a (por qualquer lado). Então, x entrará no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, o qual está marcado mais claro na Figura 2.4.5a; quando isso acontecer, os valores de $f(x)$ serão maiores do que M, marcado mais escuro. Uma vez que isso é válido para qualquer valor positivo M (não importa quão grande), podemos forçar os valores de $f(x)$ para que sejam tão grandes quanto quisermos, fazendo-se x suficientemente próximo de a.

Isso está de acordo com o nosso conceito informal desse limite. Analogamente, a Figura 2.4.5*b* ilustra a Definição 2.4.5.

▶ Exemplo 5 Prove que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Solução Aplicando a Definição 2.4.4 com $f(x) = 1/x^2$ e $a = 0$, devemos mostrar que, dado um número $M > 0$, conseguimos encontrar um número $\delta > 0$, tal que

$$\frac{1}{x^2} > M \quad \text{se} \quad 0 < |x - 0| < \delta \tag{13}$$

ou, tomando-se o recíproco e simplificando,

$$x^2 < \frac{1}{M} \quad \text{se} \quad 0 < |x| < \delta \tag{14}$$

Mas, $x^2 < 1/M$ se $|x| < 1/\sqrt{M}$, logo $\delta = 1/\sqrt{M}$ satisfaz (14). Uma vez que (13) é equivalente a (14), a prova está completa. ◀

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.4 (*Ver página 143 para respostas.*)

1. A definição de limite bilateral afirma: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, dado qualquer número __________, existir um número __________, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se __________.
2. Encontre o maior intervalo aberto centrado em $x = 1$, tal que, para cada x no intervalo, $f(x)$ está a menos de ϵ unidades de $f(1) = 5$.
   (a) $f(x) = x + 4,\ \epsilon = 0{,}01$
   (b) $f(x) = 5x,\ \epsilon = 0{,}02$
   (c) $f(x) = 3x^2 + 2,\ \epsilon = 0{,}1212$
3. Suponha que ϵ seja um número positivo qualquer. Encontre o maior valor de δ, tal que $|5x - 10| < \epsilon$ se $0 < |x - 2| < \delta$.
4. A definição de limite em $+\infty$ afirma: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ se, dado qualquer número __________, existir um número positivo __________, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se __________.
5. Encontre o menor número positivo N, tal que, para cada $x > N$, o valor de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ está a menos de ϵ unidades de 0.
   (a) $\epsilon = 0{,}1$ (b) $\epsilon = 0{,}01$ (c) $\epsilon = 0{,}001$

EXERCÍCIOS 2.4 Recurso Gráfico

1. (a) Encontre o maior intervalo aberto, centrado na origem do eixo x, tal que, para cada ponto x no intervalo, o valor da função $f(x) = x + 2$ não esteja mais longe do que 0,1 unidade do número $f(0) = 2$.
   (b) Encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 3$, tal que, para cada ponto x no intervalo, o valor da função $f(x) = 4x - 5$ não esteja mais longe do que 0,01 unidade do número $f(3) = 7$.
   (c) Encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 4$, tal que, para cada ponto x do intervalo, o valor da função $f(x) = x^2$ não esteja mais longe do que 0, 001 unidade do número $f(4) = 16$.
2. Em cada item, encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 0$, tal que, para cada ponto x do intervalo, o valor da função $f(x) = 2x + 3$ não esteja mais longe do que ϵ unidades do número $f(0) = 3$.
   (a) $\epsilon = 0{,}1$ (b) $\epsilon = 0{,}01$ (c) $\epsilon = 0{,}0012$
3. (a) Encontre os valores de x_0 e x_1 na figura anexa.
   (b) Encontre um número positivo δ, tal que $|\sqrt{x} - 2| < 0{,}05$ se $0 < |x - 4| < \delta$.

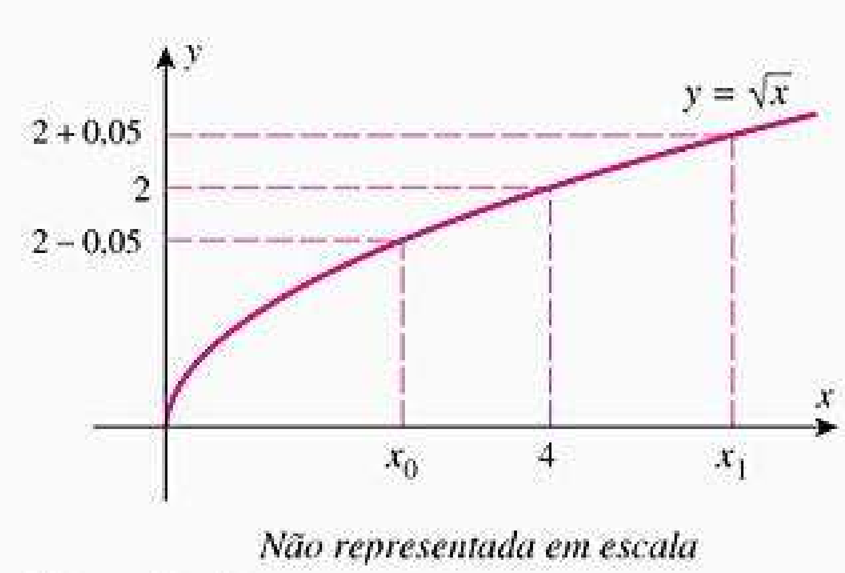
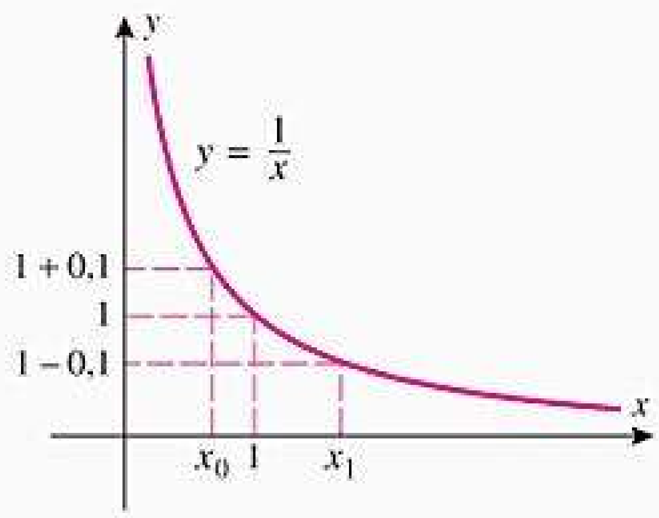


Figura Ex-3

4. (a) Encontre os valores de x_0 e x_1 na figura abaixo.

(b) Encontre um número positivo δ, tal que $|(1/x) - 1| < 0{,}1$ se $0 < |x - 1| < \delta$.



Não representada em escala

Figura Ex-4

5. Gere o gráfico de $f(x) = x^3 - 4x + 5$ com um recurso gráfico computacional e use-o para encontrar um número δ, tal que $|f(x) - 2| < 0{,}05$ se $0 < |x - 1| < \delta$. [*Sugestão*: Mostre que a desigualdade $|f(x) - 2| < 0{,}05$ pode ser reescrita como $1{,}95 < x^3 - 4x + 5 < 2{,}05$ e estime os valores de x para os quais $x^3 - 4x + 5 = 1{,}95$ e $x^3 - 4x + 5 = 2{,}05$.]

6. Use o método do Exercício 5 para encontrar um número δ, tal que $|\sqrt{5x+1} - 4| < 0{,}5$ se $0 < |x - 3| < \delta$.

7. Seja $f(x) = x + \sqrt{x}$ com $L = \lim_{x \to 1} f(x)$ e tome $\epsilon = 0{,}2$. Use um recurso gráfico e sua operação de traçar retas para encontrar um número positivo δ, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - 1| < \delta$.

8. Seja $f(x) = (\operatorname{sen} 2x)/x$ e use um recurso gráfico para conjecturar o valor de $L = \lim_{x \to 0} f(x)$. Agora tome $\epsilon = 0{,}1$ e use o recurso gráfico e sua operação de traçar retas para encontrar um número positivo δ, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x| < \delta$.

9-16 São dados um número positivo ϵ e o limite L de uma função f no ponto a. Encontre um número δ, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$.

9. $\lim_{x \to 4} 2x = 8;\ \epsilon = 0{,}1$

10. $\lim_{x \to 3} (5x - 2) = 13;\ \epsilon = 0{,}01$

11. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6;\ \epsilon = 0{,}05$

12. $\lim_{x \to -1/2} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} = -2;\ \epsilon = 0{,}05$

13. $\lim_{x \to 2} x^3 = 8;\ \epsilon = 0{,}001$

14. $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2;\ \epsilon = 0{,}001$

15. $\lim_{x \to 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5};\ \epsilon = 0{,}05$

16. $\lim_{x \to 0} |x| = 0;\ \epsilon = 0{,}05$

ENFOCANDO CONCEITOS

17. Suponha que $f(x)$ seja uma função e que, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, a condição $0 < |x - 4| < \epsilon/5$ garanta que $|f(x) - 3| < \epsilon$.

(a) Qual é o limite descrito por essa afirmação?

(b) Encontre um valor de δ, tal que $0 < |x - 4| < \delta$ garanta que $|10f(x) - 30| < 0{,}005$.

18. Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções e que, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, as condições seguintes valham:

(i) Se $0 < |x - 3| < \epsilon^2$, então $|f(x) - 7| < \epsilon$.

(ii) Se $0 < |x - 3| < \min(1/2, \epsilon/8)$, então $|g(x) - 5| < \epsilon$.

(a) Quais são os limites descritos por essas duas afirmações?

(b) Encontre um valor de δ, tal que $0 < |x - 3| < \delta$ garanta que $|3f(x) - 21| < 0{,}03$.

19. Suponha que $f(x)$ seja a função do Exercício 17. Encontre um valor de δ, tal que $0 < |x - 4| < \delta$ garanta que $|10f(x) + 2x - 38| < 0{,}01$. [*Sugestão*: Pela desigualdade triangular,

$$|(10f(x) - 30) + (2x - 8)| \le |10f(x) - 30| + |2x - 8|\ ]$$

20. Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam as funções do Exercício 18. Encontre um valor de δ, tal que $0 < |x - 3| < \delta$ garanta que $|3f(x) + g(x) - 26| < 0{,}06$. [*Sugestão*: Pela desigualdade triangular,

$$|(3f(x) - 21) + (g(x) - 5)| \le |3f(x) - 21| + |g(x) - 5|\ ]$$

21-26 Use a Definição 2.4.1 para provar que o limite dado está correto.

21. $\lim_{x \to 5} 3x = 15$

22. $\lim_{x \to -1} (7x + 5) = -2$

23. $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x}{x} = 1$

24. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$

25. $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$, onde $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$

26. $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$, onde $f(x) = \begin{cases} 9 - 2x, & x \neq 2 \\ 49, & x = 2 \end{cases}$

ENFOCANDO CONCEITOS

27. (a) Mostre que

$$|(3x^2 + 2x - 20) - 300| = |3x + 32| \cdot |x - 10|$$

(b) Encontre um número que seja maior do que $|3x + 32|$ para cada x que satisfaça $|x - 10| < 1$.

(c) Preencha as lacunas para completar a prova de que

$$\lim_{x \to 10} [3x^2 + 2x - 20] = 300$$

Suponha que $\epsilon > 0$. Tome $\delta = \min(1, ______)$ e suponha que $0 < |x - 10| < \delta$. Então

$$\begin{aligned} |(3x^2 + 2x - 20) - 300| &= |3x + 32| \cdot |x - 10| \\ &< ______ \cdot |x - 10| \\ &< ______ \cdot ______ \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

28. (a) Mostre que

$$\left|\frac{28}{3x + 1} - 4\right| = \left|\frac{12}{3x + 1}\right| \cdot |x - 2|$$

(b) Existe algum número que seja maior do que $|12/(3x+1)|$ para cada x, tal que $|x-2|<4$? Se não existir, explique; se existir, encontre um desses números.

(c) Existe algum número que seja maior do que $|12/(3x+1)|$ para cada x, tal que $|x-2|<1$? Se não existir, explique; se existir, encontre um desses números.

(d) Preencha as lacunas para completar a prova de que

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{28}{3x+1}\right]=4$$

Suponha que $\epsilon>0$. Tome $\delta=\min(1,______)$ e suponha que $0<|x-2|<\delta$. Então

$$\left|\frac{28}{3x+1}-4\right|=\left|\frac{12}{3x+1}\right|\cdot|x-2|$$
$$<______\cdot|x-2|$$
$$<______\cdot______$$
$$=\epsilon$$

29-34 Use a Definição 2.4.1 para provar que o limite dado está correto.

29. $\lim_{x\to 1} 2x^2=2$

30. $\lim_{x\to 3}(x^2+x)=12$

31. $\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+1}=-1$

32. $\lim_{x\to 1/2}\frac{2x+3}{x}=8$

34. $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

34. $\lim_{x\to 2} f(x)=5$, onde $f(x)=\begin{cases}9-2x, & x<2\\ 3x-1, & x>2\end{cases}$

35. (a) Encontrar o menor número positivo N, tal que, para cada ponto x no intervalo $(N,+\infty)$, o valor da função $f(x)=1/x^2$ não esteja mais longe do que 0,1 unidade de $L=0$.

(b) Encontrar o menor número positivo N, tal que, para cada ponto x no intervalo $(N,+\infty)$, o valor da função $f(x)=x/(x+1)$ não esteja mais longe do que 0,01 unidade de $L=1$.

(c) Encontrar o maior número negativo N, tal que, para cada ponto x no intervalo $(-\infty,N)$, o valor da função $f(x)=1/x^3$ não esteja mais longe do que 0,001 unidade de $L=0$.

(d) Encontrar o maior número negativo N, tal que, para cada ponto x no intervalo $(-\infty,N)$, o valor da função $f(x)=x/(x+1)$ não esteja mais longe do que 0,01 unidade de $L=1$.

36. Em cada parte, encontre o menor número positivo N, tal que, para cada ponto x no intervalo $(N,+\infty)$, a função $f(x)=1/x^3$ não esteja mais longe do que ϵ unidades do número $L=0$.

(a) $\epsilon=0{,}1$ (b) $\epsilon=0{,}01$ (c) $\epsilon=0{,}001$

37. (a) Encontrar os valores de x_1 e x_2 na figura a seguir.

(b) Encontrar um número positivo N, tal que

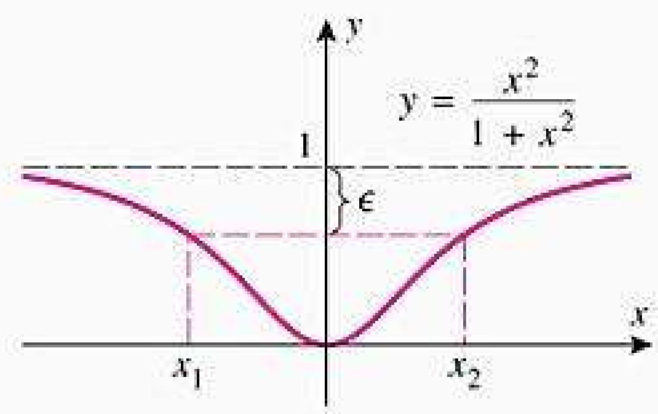
$$\left|\frac{x^2}{1+x^2}-1\right|<\epsilon$$

para $x>N$.

(c) Encontrar um número negativo N, tal que

$$\left|\frac{x^2}{1+x^2}-1\right|<\epsilon$$

para $x<N$.



Não desenhado em escala

Figura Ex-37

38. (a) Encontre os valores de x_1 e x_2 na figura abaixo.

(b) Encontre um número positivo N, tal que

$$\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-0\right|=\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right|<\epsilon$$

para $x>N$.

(c) Encontre um número negativo N, tal que

$$\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-0\right|=\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right|<\epsilon$$

para $x<N$.

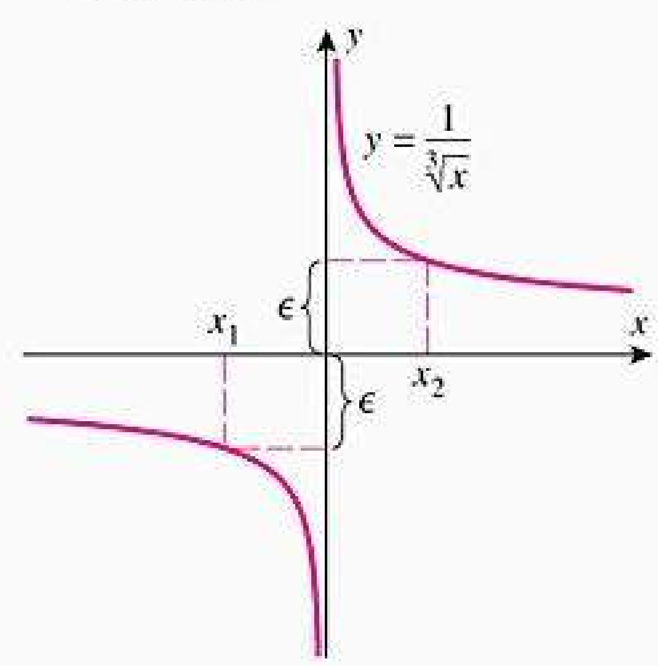


Figura Ex-38

39-42 São dados um número positivo ϵ e o limite L de uma função f em $+\infty$. Encontre um número positivo N, tal que $|f(x)-L|<\epsilon$ se $x>N$.

39. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0;\ \epsilon=0{,}01$

40. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=0;\ \epsilon=0{,}005$

41. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1;\ \epsilon=0{,}001$

42. $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x+5}=2;\ \epsilon=0{,}1$

43-46 São dados um número positivo ϵ e o limite L de uma função f em $-\infty$. Encontre um número negativo N, tal que $|f(x)-L|<\epsilon$ se $x<N$.

43. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=0;\ \epsilon=0{,}005$

44. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0;\ \epsilon=0{,}01$

45. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{2x+5}=2;\ \epsilon=0{,}1$

46. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$; $\epsilon = 0{,}001$

47-52 Use a Definição 2.4.2 ou a 2.4.3 para provar que o limite dado está correto.

47. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

48. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$

49. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x-1}{2x+5} = 2$

50. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

51. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 2$

52. $\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$

53. (a) Encontre o maior intervalo aberto centrado na origem do eixo x, tal que, para cada ponto x no intervalo, diferente do centro, o valor de $f(x) = 1/x^2$ é maior do que 100.

(b) Encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 1$, tal que, para cada ponto x do intervalo, diferente de 1, o valor da função $f(x) = 1/|x-1|$ é maior do que 1.000.

(c) Encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 3$, tal que, para cada ponto x do intervalo, diferente de 3, o valor da função $f(x) = -1/(x-3)^2$ é menor do que -1.000.

(d) Encontre o maior intervalo aberto, centrado na origem do eixo x, tal que, para cada ponto x do intervalo, diferente de zero, o valor de $f(x) = -1/x^4$ é menor do que -10.000.

54. Em cada parte, encontre o maior intervalo aberto, centrado no ponto $x = 1$, tal que, para cada ponto x do intervalo diferente do centro, o valor de $f(x) = 1/(x-1)^2$ é maior do que M.

(a) $M = 10$ (b) $M = 1.000$ (c) $M = 100.000$

55-60 Use a Definição 2.4.4 ou 2.4.5 para provar que o limite dado está correto.

55. $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

56. $\lim_{x \to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = -\infty$

57. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$

58. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$

59. $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^4}\right) = -\infty$

60. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$

61-66 Use a observação ao lado da Definição 2.4.1(página 135) para provar que o limite dado está correto.

61. $\lim_{x \to 2^+} (x+1) = 3$

62. $\lim_{x \to 1^-} (3x+2) = 5$

63. $\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 0$

64. $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0$

65. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$, onde $f(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 3x, & x \le 2 \end{cases}$

66. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 6$, onde $f(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 3x, & x \le 2 \end{cases}$

67-70 Escreva por extenso as definições dos limites dados ao lado da Definição 2.4.5 (página 139) e use sua definição para provar que o limite dado está correto.

67. (a) $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ (b) $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$

68. (a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ (b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

69. (a) $\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ (b) $\lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

70. (a) $\lim_{x \to +\infty} (x^2-3) = +\infty$ (b) $\lim_{x \to -\infty} (x^3+5) = -\infty$

71. Prove o resultado do Exemplo 3 sob a hipótese de que $\delta \le 2$ em vez de $\delta \le 1$.

72. (a) Na Definição 2.4.1, há uma condição requerendo que $f(x)$ esteja definida em todo x de algum intervalo aberto que contenha a, com a exceção possivelmente em a. Qual é a finalidade dessa exigência?

(b) Por que $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ é uma afirmativa incorreta?

(c) A afirmativa $\lim_{x \to 0{,}01} \sqrt{x} = 0{,}1$ está correta?

73. De acordo com a lei de Ohm, quando uma voltagem de V volts é aplicada através de um resistor com uma resistência de R ohms, uma corrente de $I = V/R$ ampères circula através do resistor.

(a) Quanta corrente circula se uma voltagem de 3,0 volts é aplicada através de uma resistência de 7,5 ohms?

(b) Se a resistência varia em ± 0,1 ohm e a voltagem permanece constante em 3,0 volts, qual é a variação dos valores para a corrente?

(c) Se a variação da temperatura fizer a resistência variar em $\pm\delta$ de seu valor de 7,5 ohms e a voltagem permanecer constante em 3,0 volts, quais serão os possíveis valores para a corrente?

(d) Se a corrente não pode variar mais do que $\epsilon = \pm 0{,}001$ ampères a uma voltagem de 3,0 volts, qual a variação de $\pm\delta$ a partir do valor de 7,5 ohms que é permitida?

(e) Certas ligas tornam-se ***supercondutores*** quando suas temperaturas se aproximam do zero absoluto (−273°C), significando que suas resistências tendem a zero. Se a voltagem permanecer constante, o que acontece com a corrente em um supercondutor quando $R \to 0^+$?

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.4

1. $\epsilon > 0$; $\delta > 0$; $0 < |x - a| < \delta$ **2.** (a) (0,99; 1,01) (b) (0,996; 1,004) (c) (0,98; 1,02) **3.** $\delta = \epsilon/5$ **4.** $\epsilon > 0$; N; $x > N$
5. (a) $N = 100$ (b) $N = 10.000$ (c) $N = 1.000.000$

2.5 CONTINUIDADE

Uma bola de beisebol não pode desaparecer em algum ponto para reaparecer em outro e continuar seu movimento. Assim, percebemos a trajetória da bola como uma curva sem interrupções. Nesta seção vamos transladar as "curvas sem interrupções" para uma formulação matemática precisa chamada continuidade e desenvolver algumas das propriedades fundamentais das curvas contínuas.

DEFINIÇÃO DE CONTINUIDADE

Intuitivamente, o gráfico de uma função pode ser descrito como uma curva contínua se não apresentar quebras ou buracos. Para tornar essa idéia mais precisa, precisamos entender quais propriedades de uma função podem causar quebras ou buracos. Com referência à Figura 2.5.1, podemos ver que o gráfico de uma função tem uma quebra ou buraco se ocorrer alguma das seguintes condições:

- A função f não está definida em c (Figura 2.5.1*a*).
- O limite de $f(x)$ não existe quando x tende a c (Figura 2.5.1*b*, Figura 2.5.1*c*).
- O valor da função e o valor do limite em c são diferentes (Figura 2.5.1*d*).

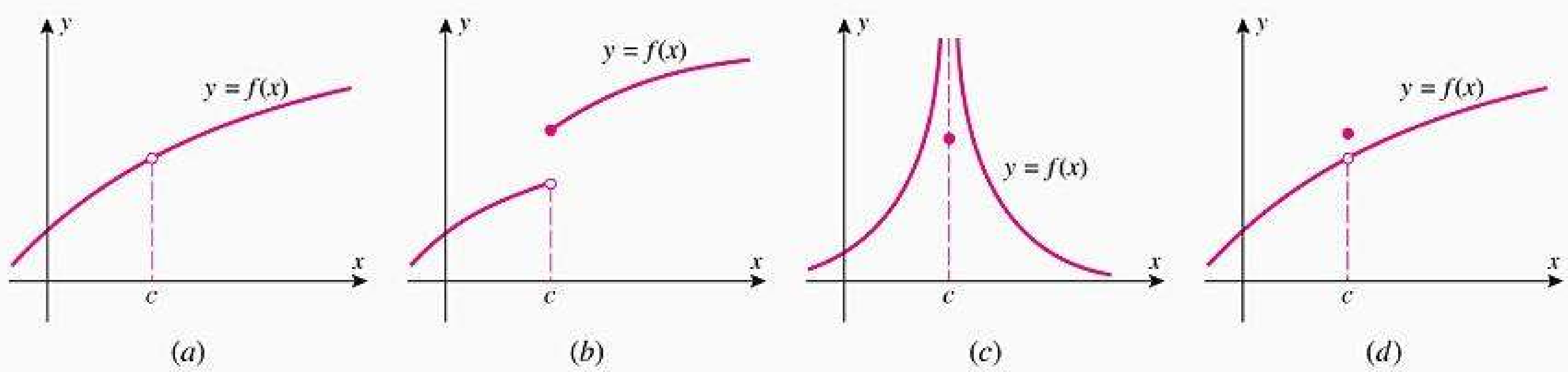


Figura 2.5.1

Isso sugere a seguinte definição.

2.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***contínua em x = c*** se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

A terceira condição da Definição 2.5.1 na realidade implica as primeiras duas, pois fica subentendido na afirmação

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

que esse limite existe e que a função está definida em c. Assim, quando quisermos mostrar a continuidade em c, em geral verificamos apenas a terceira condição.

Se falhar uma ou mais das condições dessa definição, então dizemos que f tem uma ***descontinuidade em x = c***. Cada função esboçada na Figura 2.5.1 ilustra uma descontinuidade em $x = c$. Na Figura 2.5.1*a*, a função não está definida em c, violando a primeira condição da Definição 2.5.1. Nas Figuras 2.5.1*b* e 2.5.1*c*, o limite $\lim_{x \to c} f(x)$ não existe, violando a segunda condição da Definição 2.5.1. Na Figura 2.5.1*d*, a função está definida em c e existe $\lim_{x \to c} f(x)$, mas esses dois valores não são iguais, violando a terceira condição da Definição 2.5.1.

► Exemplo 1 Determine se as seguintes funções são contínuas no ponto $x = 2$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Solução Em cada caso, devemos determinar se o limite da função quando $x \to 2$ é o mesmo que o valor da função em $x = 2$. Em todos os três casos, as funções são idênticas, exceto no ponto $x = 2$, portanto, todas as três têm o mesmo limite em $x = 2$, isto é:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

A função f está indefinida em $x = 2$ e, portanto, não é contínua em $x = 2$ (Figura 2.5.2*a*). A função g está definida em $x = 2$, mas o valor $g(2) = 3$ difere do limite naquele ponto; portanto, g não é contínua em $x = 2$ (Figura 2.5.2*b*). O valor da função h em $x = 2$ é $h(2) = 4$, que é o mesmo que o limite naquele ponto. Portanto, h é contínua em $x = 2$ (Figura 2.5.2*c*). (Note que a função h poderia ter sido escrita de forma simplificada $h(x) = x + 2$, mas a escrevemos por partes para enfatizar sua relação com f e g.) ◄

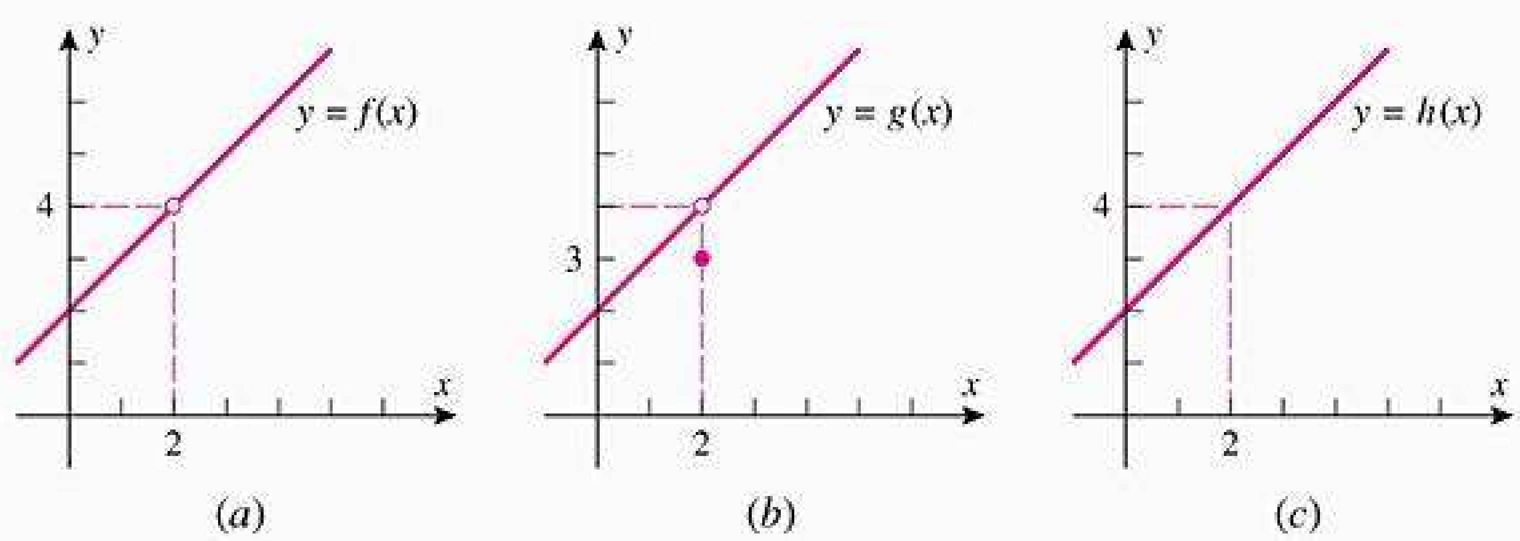


Figura 2.5.2

■ CONTINUIDADE EM APLICAÇÕES

Nas aplicações, as descontinuidades sinalizam, muitas vezes, a ocorrência de importantes fenômenos físicos. Por exemplo, a Figura 2.5.3*a* é um gráfico da voltagem *versus* o tempo para um cabo subterrâneo que é acidentalmente cortado por uma equipe de trabalho no instante $t = t_0$. (A voltagem caiu para zero quando a linha foi cortada.) A Figura 2.5.3*b* mostra o gráfico de unidades em estoque *versus* tempo para uma companhia que reabastece o estoque com y_1 unidades quando o estoque cai para y_0 unidades. As descontinuidades ocorrem nos momentos em que acontece o reabastecimento.

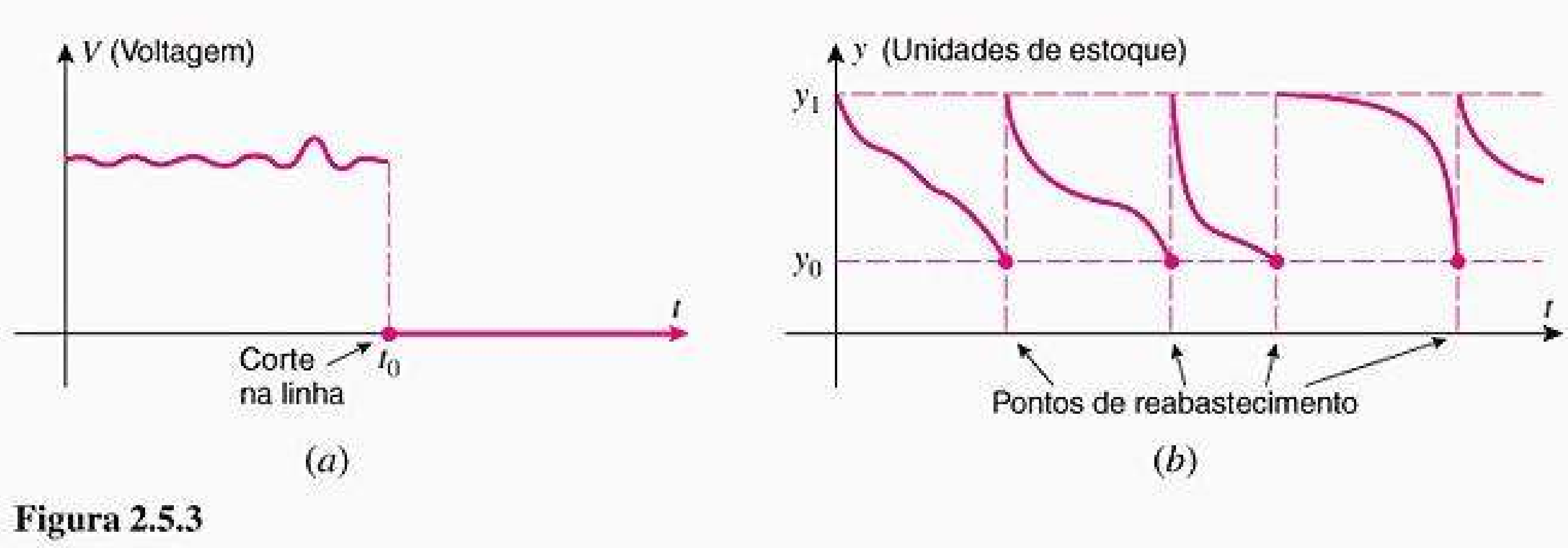


Figura 2.5.3

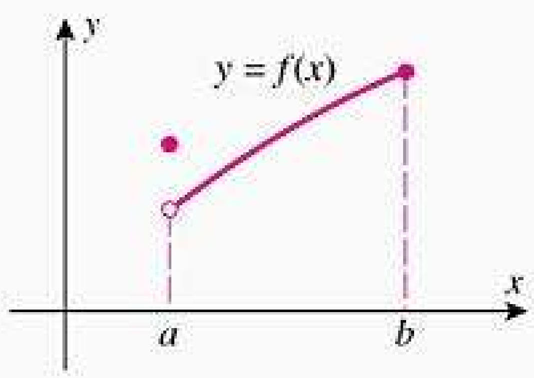


Figura 2.5.4

■ CONTINUIDADE EM UM INTERVALO

Se uma função f for contínua em cada ponto do intervalo aberto (a, b), então dizemos que f é ***contínua em (a, b)***. Essa definição se aplica para intervalos abertos infinitos da forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e $(-\infty, +\infty)$. Quando f for contínua em $(-\infty,+\infty)$, dizemos que f é ***contínua em toda parte***.

Como a Definição 2.5.1 envolve limite bilateral, ela geralmente não se aplica aos extremos de um intervalo fechado $[a, b]$ ou aos pontos extremos de um intervalo da forma $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ ou $[a, +\infty)$. Para contornar esse problema, concordaremos que uma função é contínua nos pontos extremos de um intervalo, se o valor no ponto extremo for igual ao limite lateral adequado naquele ponto. Por exemplo, a função cujo gráfico está na Figura 2.5.4 é contínua no ponto extremo à direita do intervalo $[a, b]$ porque

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

mas não é contínua no ponto extremo à esquerda porque

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$$

Em geral, dizemos que uma função é ***contínua à esquerda*** no ponto c se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

e é ***contínua à direita*** no ponto c se

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

Usando essa terminologia, definimos a continuidade em um intervalo fechado como segue:

Modifique a Definição 2.5.2 apropriadamente, de modo a poder aplicá-la a intervalos da forma $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, b]$ e $[a, b)$.

2.5.2 DEFINIÇÃO Uma função f é dita ***contínua em um intervalo fechado [a, b]*** se as seguintes condições são satisfeitas:

1. f é contínua em (a, b).
2. f é contínua à direita em a.
3. f é contínua à esquerda em b.

► Exemplo 2 O que pode ser dito sobre a continuidade da função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$?

Solução Como o domínio natural dessa função é o intervalo fechado $[-3, 3]$, precisamos investigar a continuidade de f no intervalo aberto $(-3, 3)$ e nos dois pontos extremos. Se c for um ponto qualquer do intervalo $(-3, 3)$, então segue do Teorema 2.2.2 (*e*) que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to c} (9 - x^2)} = \sqrt{9 - c^2} = f(c)$$

provando que f é contínua em cada ponto do intervalo $(-3, 3)$. A função f é também contínua nos pontos extremos, uma vez que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to 3^-} (9 - x^2)} = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to -3^+} (9 - x^2)} = 0 = f(-3)$$

Logo, f é contínua no intervalo fechado $[-3, 3]$. ◄

ALGUMAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

O teorema seguinte é derivado do Teorema 2.2.2 e nos capacita a tirar conclusões sobre a continuidade das funções obtidas pela adição, pela subtração, pela multiplicação e pela divisão de funções contínuas.

2.5.3 TEOREMA *Se as funções f e g forem contínuas em c, então:*

(*a*) *$f + g$ é contínua em c.*

(*b*) *$f - g$ é contínua em c.*

(*c*) *fg é contínua em c.*

(*d*) *f / g é contínua em c se $g(c) \neq 0$ e tem uma descontinuidade em c se $g(c) = 0$.*

Provaremos a parte (*d*); as demais provas são similares e serão omitidas.

DEMONSTRAÇÃO Consideremos primeiro o caso em que $g(c) = 0$. Nesse caso, $f(c) / g(c)$ está indefinida, logo a função f / g tem uma descontinuidade em c.

A seguir, consideremos o caso em que $g(c) \neq 0$. Para provar que f / g é contínua em c, devemos mostrar que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \tag{1}$$

Uma vez que f e g são contínuas em c,

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} g(x) = g(c)$$

Logo, pelo Teorema 2.2.2(*d*),

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

o que prova (1). ■

CONTINUIDADE DOS POLINÔMIOS E DAS FUNÇÕES RACIONAIS

O procedimento geral para mostrar que uma função é contínua em toda parte é verificar a continuidade em um ponto *arbitrário*. Por exemplo, mostramos no Teorema 2.2.3 que se $p(x)$ for um polinômio e a um número real qualquer, então

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

Isso mostra que os polinômios são contínuos em toda parte. Além disso, como as funções racionais são quocientes de polinômios, segue da parte (*d*) do Teorema 2.5.3 que as funções racionais são contínuas nos pontos em que o denominador não se anula e que nesses zeros têm descontinuidades. Assim, temos o seguinte resultado:

2.5.4 TEOREMA

(*a*) *Um polinômio é contínuo em toda parte.*

(*b*) *Uma função racional é contínua em cada ponto em que o denominador não se anula e tem descontinuidades nos pontos em que o denominador é zero.*

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um recurso computacional para gerar o gráfico da equação do Exemplo 3, então é bem possível que possa ser vista a descontinuidade em $x = 2$, mas não em $x = 3$. Tente isso e explique o que deve estar acontecendo.

► **Exemplo 3** Para quais valores de x há um buraco ou uma interrupção no gráfico de

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}?$$

Solução A função cujo gráfico estamos fazendo é uma função racional, e portanto é contínua em toda parte, exceto nos pontos em que o denominador é zero. Resolvendo a equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

obtêm-se dois pontos de descontinuidade, $x = 2$ e $x = 3$. ◄

► **Exemplo 4** Mostre que $|x|$ é contínua em toda parte (Figura 1.1.10).

Solução Podemos escrever $|x|$ como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

logo, $|x|$ é o mesmo que o polinômio x no intervalo $(0,+\infty)$ e o mesmo que o polinômio $-x$ no intervalo $(-\infty, 0)$. Mas, como polinômios são funções contínuas, então $x = 0$ é o único ponto de descontinuidade possível para $|x|$. Nesse ponto, temos $|0| = 0$; logo, para provar a continuidade em $x = 0$, devemos mostrar que

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 \tag{2}$$

Como a fórmula para $|x|$ muda no 0, será útil considerar os limites laterais em 0, em vez do limite bilateral. Obtemos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Logo, (2) é válido e $|x|$ é contínua em $x = 0$. ◄

CONTINUIDADE DE COMPOSIÇÕES

O teorema seguinte, cuja prova está dada no Apêndice C do Volume 2, será útil para calcular o limite da composição de funções.

Um símbolo de limite pode passar pelo sinal de função desde que o limite da expressão dentro desse sinal exista e a função seja contínua nesse limite.

2.5.5 TEOREMA *Se* $\lim_{x \to c} g(x) = L$ *e se a função* f *é contínua em* L*, então* $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$*. Ou seja,*

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right)$$

Essa igualdade permanece válida se $\lim_{x \to c}$ *for trocado em toda parte por um dos limites* $\lim_{x \to c^+}$, $\lim_{x \to c^-}$, $\lim_{x \to +\infty}$ *ou* $\lim_{x \to -\infty}$.

No caso especial desse teorema, em que $f(x) = |x|$ por ser $|x|$ contínua em toda parte, podemos escrever

$$\lim_{x \to c} |g(x)| = \left|\lim_{x \to c} g(x)\right| \tag{3}$$

sempre que existir $\lim_{x \to c} g(x)$. Assim, por exemplo:

$$\lim_{x \to 3} |5 - x^2| = \left|\lim_{x \to 3} (5 - x^2)\right| = |-4| = 4$$

O teorema seguinte refere-se à continuidade da composição de funções; a primeira parte trata da continuidade em um ponto específico e a segunda, da continuidade em toda parte.

2.5.6 TEOREMA

(*a*) *Se a função g for contínua em um ponto c e a função f for contínua no ponto g(c), então a composição f ∘ g é contínua em c.*

(*b*) *Se a função g for contínua em toda parte e a função f for contínua em toda parte, então a composição f ∘ g é contínua em toda parte.*

DEMONSTRAÇÃO Provaremos apenas a parte (*a*); a prova da parte (*b*) pode ser obtida aplicando-se a parte (*a*) em um ponto arbitrário *c*. Para provar que $f \circ g$ é contínua em *c*, devemos mostrar que o valor $f \circ g$ e o valor de seu limite são os mesmos em $x = c$. De fato, é isso que acontece uma vez que podemos escrever

$$\lim_{x \to c} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(g(c)) = (f \circ g)(c) \quad \blacksquare$$

Teorema 2.5.5 g é contínua em c

O valor absoluto de uma função que não é contínua em toda parte pode ser contínuo? Justifique sua resposta.

Sabemos do Exemplo 4 que a função $|x|$ é contínua em toda parte. Assim, se $g(x)$ for contínua no ponto *c*, então pela parte (*a*) do Teorema 2.5.6 a função $|g(x)|$ deve também ser contínua no ponto *c*; e, mais geralmente, se $g(x)$ for contínua em toda parte, então também o é $|g(x)|$. Formulado informalmente:

O valor absoluto de uma função contínua é contínuo.

Por exemplo, o polinômio $g(x) = 4 - x^2$ é contínuo em toda parte; logo, podemos concluir que a função $|4 - x^2|$ é também contínua em toda parte (Figura 2.5.5).

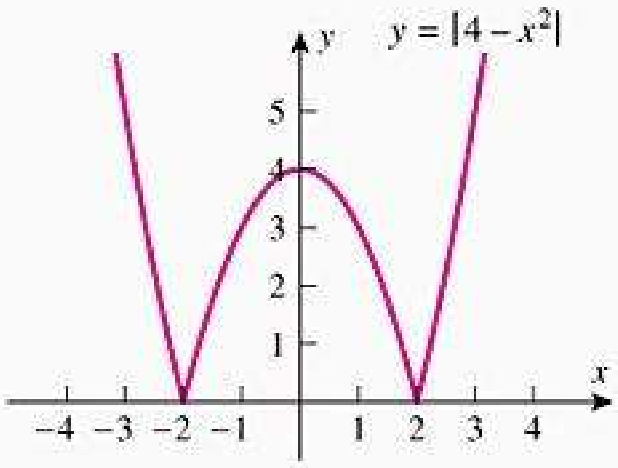


Figura 2.5.5

■ TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

A Figura 2.5.6 mostra o gráfico de uma função que é contínua no intervalo fechado $[a, b]$. A figura sugere que, se traçarmos qualquer linha reta horizontal $y = k$, onde *k* está entre $f(a)$ e $f(b)$, então aquela reta cruzará a curva $y = f(x)$ pelo menos uma vez sobre o intervalo $[a, b]$.

Formulando em termos numéricos, se *f* for contínua em $[a, b]$, então a função *f* assume todos os valores *k* entre $f(a)$ e $f(b)$ pelo menos uma vez, à medida que *x* varia de *a* a *b*. Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^5 - x + 3$ tem o valor 3 em $x = 1$ e o valor 33 em $x = 2$. Logo, tem-se, a partir da continuidade de *p*, que a equação $x^5 - x + 3 = k$ tem, no mínimo, uma solução no intervalo $[1, 2]$ para todo valor de *k* entre 3 e 33. Essa idéia está mais precisamente formulada no seguinte teorema:

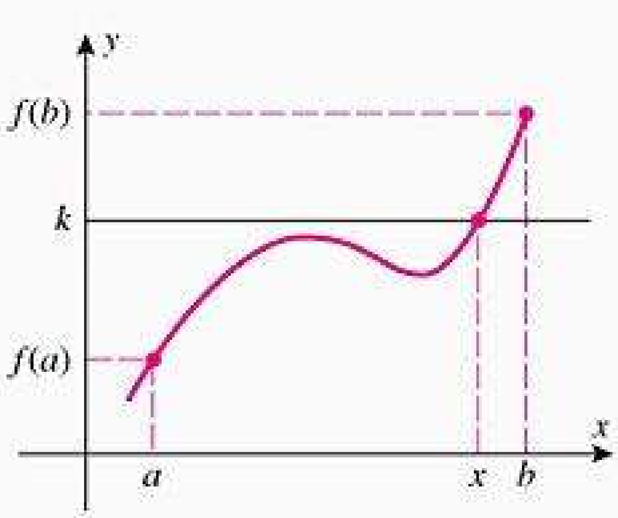


Figura 2.5.6

2.5.7 TEOREMA (***Teorema do Valor Intermediário***) *Se f for uma função contínua em um intervalo fechado* $[a, b]$ *e k um número qualquer entre* $f(a)$ *e* $f(b)$, *inclusive, então existe no mínimo um número x no intervalo* $[a, b]$, *tal que* $f(x) = k$.

Embora esse teorema seja intuitivamente óbvio, a prova depende de um desenvolvimento matemático preciso do sistema de números reais, o qual está além do alcance deste livro.

APROXIMANDO RAÍZES USANDO O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Vários problemas podem ser reduzidos a encontrar raízes de uma equação $f(x) = 0$. Às vezes, é possível encontrar as raízes exatamente usando Álgebra, mas, com freqüência, isso não é possível e devemos nos satisfazer com uma aproximação decimal das raízes. Um procedimento para a aproximação de raízes está baseado na seguinte conseqüência do Teorema do Valor Intermediário.

2.5.8 TEOREMA *Se f for uma função contínua em $[a, b]$, e se $f(a)$ e $f(b)$ forem diferentes de zero com sinais opostos, então existe, no mínimo, uma solução para a equação $f(x) = 0$ no intervalo (a, b).*

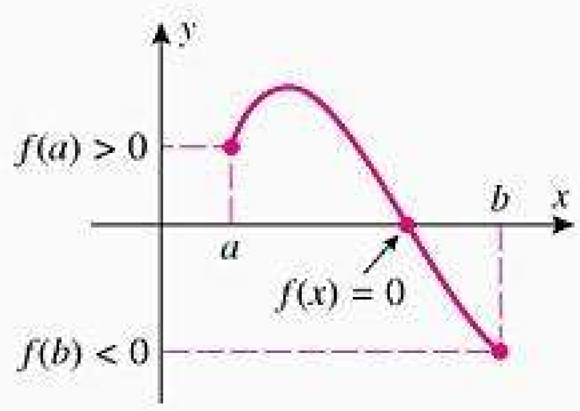


Figura 2.5.7

Esse resultado, ilustrado na Figura 2.5.7, pode ser provado como segue.

DEMONSTRAÇÃO Como $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, 0 está entre $f(a)$ e $f(b)$. Dessa forma, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe no mínimo um número x no intervalo $[a, b]$, tal que $f(x) = 0$. Contudo, $f(a)$ e $f(b)$ são diferentes de zero, logo x deve estar situado entre (a, b), o que completa a prova. ■

Antes de ilustrarmos como esse teorema pode ser usado para aproximar raízes, é útil discutir a terminologia padrão para descrever erros de aproximações. Se x é uma aproximação para uma quantidade x_0, então dizemos que

$$\epsilon = |x - x_0|$$

é o ***erro absoluto*** ou (menos precisamente) o ***erro*** na aproximação. A terminologia na Tabela 2.5.1 é usada para descrever o tamanho de tais erros:

Tabela 2.5.1

ERRO	DESCRIÇÃO
$\|x - x_0\| \le 0{,}1$	x aproxima x_0 com um erro de no máximo 0,1
$\|x - x_0\| \le 0{,}01$	x aproxima x_0 com um erro de no máximo 0,01
$\|x - x_0\| \le 0{,}001$	x aproxima x_0 com um erro de no máximo 0,001
$\|x - x_0\| \le 0{,}0001$	x aproxima x_0 com um erro de no máximo 0,0001
$\|x - x_0\| \le 0{,}5$	x aproxima x_0 até o inteiro mais próximo
$\|x - x_0\| \le 0{,}05$	x aproxima x_0 até a primeira casa decimal (i.e., até o décimo mais próximo)
$\|x - x_0\| \le 0{,}005$	x aproxima x_0 até a segunda casa decimal (i.e., até o centésimo mais próximo)
$\|x - x_0\| \le 0{,}0005$	x aproxima x_0 até a terceira casa decimal (i.e., até o milésimo mais próximo)

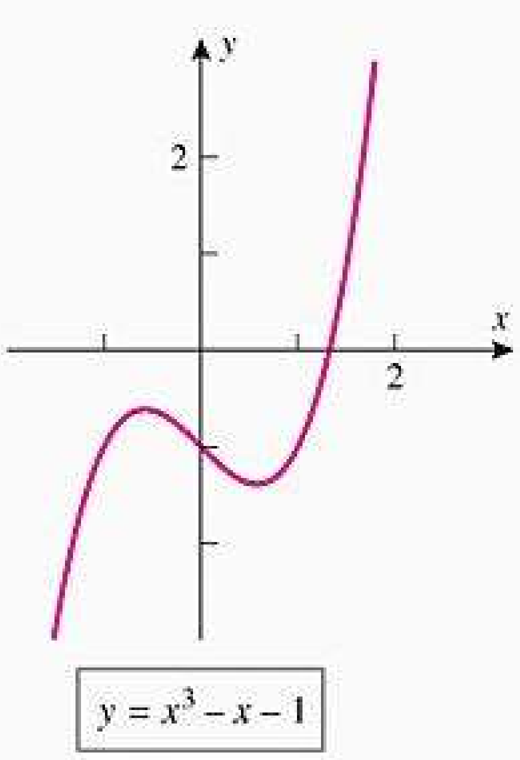


Figura 2.5.8

▶ Exemplo 5 A equação

$$x^3 - x - 1 = 0$$

não é facilmente resolvida pela Álgebra, porque o lado esquerdo não tem fatores simples. Entretanto, se fizermos o gráfico de $p(x) = x^3 - x - 1$ com um recurso gráfico computacional (Figura 2.5.8), então somos levados a conjecturar que há uma raiz real e que ela está situada dentro do intervalo $[1, 2]$. A existência de uma raiz nesse intervalo é também confirmada pelo Teorema 2.5.8, uma vez que $p(1) = -1$ e $p(2) = 5$ têm sinais opostos. Aproxime essa raiz com uma precisão de duas casas decimais.

Solução Nosso objetivo é aproximar a raiz desconhecida x_0 com um erro de, no máximo, 0,005. Isso significa que, se encontrarmos um intervalo de tamanho 0,01, o qual contenha a raiz, então o ponto médio desse intervalo aproximará a raiz com um erro de, no máximo, 0,01/2 = 0,005, o qual atinge a precisão desejada.

Sabemos que a raiz x_0 está situada no intervalo [1, 2]. Contudo, esse intervalo tem tamanho 1, o qual é muito grande. Podemos apontar com maior precisão a localização da raiz dividindo o intervalo [1, 2] em 10 partes iguais e calculando p nos pontos da subdivisão, usando um recurso computacional (Tabela 2.5.2). Nessa tabela, $p(1{,}3)$ e $p(1{,}4)$ têm sinais opostos, assim sabemos que a raiz está situada no intervalo [1,3; 1,4]. Esse intervalo tem tamanho 0,1, e é ainda muito grande, portanto repetimos o processo dividindo o intervalo [1,3; 1,4] em 10 partes e calculando p nos pontos da subdivisão; isso dá lugar à Tabela 2.5.3, a qual nos diz que a raiz está situada em [1,32; 1,33] (Figura 2.5.9). Como o intervalo tem tamanho 0,01, seu ponto médio 1,325 aproximará a raiz com um erro de, no máximo, 0,005. Logo, $x_0 \approx 1{,}325$ com uma precisão de duas casas decimais. ◄

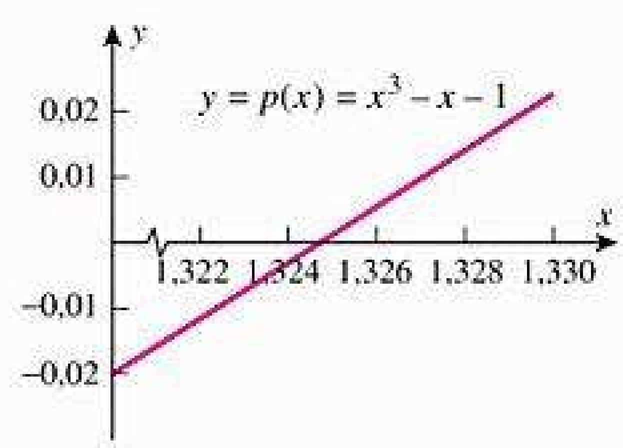


Figura 2.5.9

Tabela 2.5.2

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$p(x)$	−1	−0,77	−0,47	−0,10	0,34	0,88	1,50	2,21	3,03	3,96	5

Tabela 2.5.3

x	1,3	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,4
$p(x)$	−0,103	−0,062	−0,020	0,023	0,066	0,110	0,155	0,201	0,248	0,296	0,344

■ APROXIMANDO RAÍZES USANDO O *ZOOM* DE UM RECURSO GRÁFICO

O método ilustrado no Exemplo 5 pode também ser implementado com um recurso gráfico computacional, como segue.

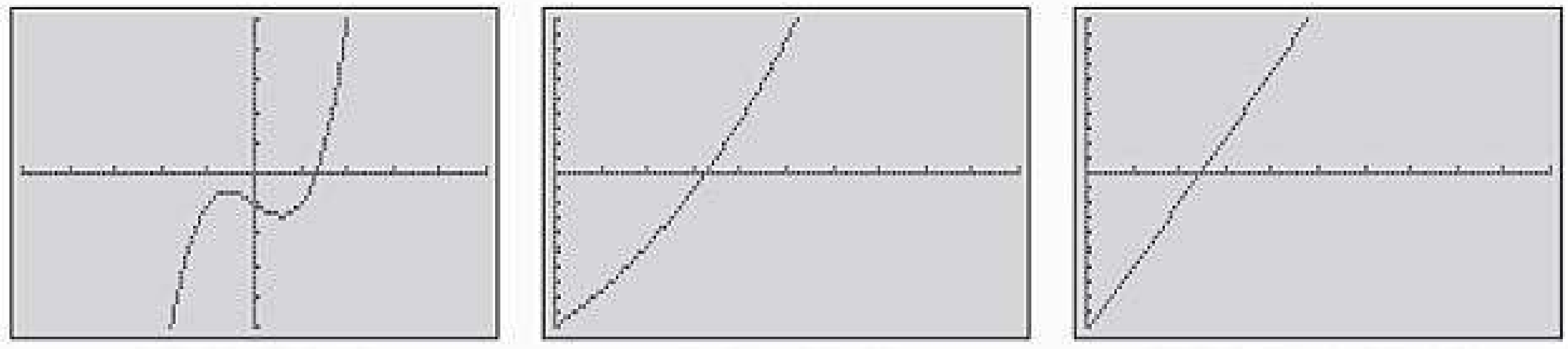
***Aproximando raízes com* zoom**

Passo 1 A Figura 2.5.10*a* mostra o gráfico de p na janela $[-5, 5] \times [-5, 5]$ com xScl = 1 e yScl = 1. Esse gráfico localiza a raiz entre $x = 1$ e $x = 2$.

Passo 2 Uma vez que sabemos que a raiz está situada entre $x = 1$ e $x = 2$, vamos usar o *zoom* nesse gráfico de p sobre um intervalo x que se estende entre esses pontos e no qual xScl = 0,1. O intervalo y e yScl não são críticos, enquanto o intervalo y se estender acima e abaixo do eixo x. A Figura 2.5.10*b* mostra o gráfico de p na janela $[1, 2] \times [-1, 1]$ com xScl = 0,1 e yScl = 0,1. Esse gráfico localiza a raiz entre $x = 1{,}3$ e $x = 1{,}4$.

Passo 3 Uma vez que sabemos que a raiz está situada entre $x = 1{,}3$ e $x = 1{,}4$, vamos usar o *zoom* outra vez no gráfico de p sobre um intervalo x que se estende entre esses pontos e no qual xScl = 0,01. A Figura 2.5.10*c* mostra o gráfico de p na janela $[1{,}3; 1{,}4] \times [-0{,}1; 0{,}1]$ com xScl = 0,01 e yScl = 0,01. Esse gráfico localiza a raiz entre $x = 1{,}32$ e $x = 1{,}33$.

Passo 4 Uma vez que o intervalo do passo 3 tem comprimento 0,01, seu ponto médio 1,325 aproxima a raiz com um erro de, no máximo, 0,005; logo, $x_0 \approx 1{,}325$ com uma precisão de duas casas decimais.



$[-5, 5] \times [-5, 5]$
xScl = 1, yScl = 1
(a)

$[1, 2] \times [-1, 1]$
xScl = 0,1, yScl = 0,1
(b)

$[1{,}3; 1{,}4] \times [-0{,}1; 0{,}1]$
xScl = 0,01, yScl = 0,01
(c)

Figura 2.5.10

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso gráfico computacional para mostrar que a raiz x_0 no Exemplo 5 pode ser aproximada como $x_0 \approx 1{,}3245$ com uma precisão de três casas decimais.

Dizer que x aproxima x_0 com uma precisão de N casas decimais não significa que as primeiras N casas decimais de x e x_0 serão as mesmas, quando os números são arredondados para N casas decimais. Por exemplo, $x = 1{,}084$ aproxima $x_0 = 1{,}087$ com duas casas decimais porque $|x - x_0| = 0{,}003$ ($< 0{,}005$). Entretanto, se arredondarmos esses valores para duas casas decimais, então obtemos $x \approx 1{,}08$ e $x_0 \approx 1{,}09$. Assim, para aproximar um número até N casas decimais, devemos apresentar a aproximação até $N + 1$ casas decimais pelo menos, para preservar a aproximação da enésima casa.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.5 (*Ver página 155 para respostas.*)

1. A função f é contínua em $x = c$ se estiver definida $f(c)$, existir $\lim_{x \to c} f(x)$ e __________.

2. Considere as funções

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 4 \\ -1, & x = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 4x - 10, & x \neq 4 \\ -6, & x = 4 \end{cases}$$

Em cada parte, é a função dada contínua em $x = 4$?

(a) $f(x)$ (b) $g(x)$ (c) $-g(x)$ (d) $|f(x)|$
(e) $f(x)g(x)$ (f) $g(f(x))$ (g) $g(x) - 6f(x)$

3. Para quais valores de x, se houver, é a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$$

descontínua?

4. Suponha que a função f seja contínua em toda parte e que $f(-2) = 3$, $f(-1) = -1$, $f(0) = -4$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 5$. O Teorema do Valor Intermediário garante que f tem raiz nos intervalos a seguir?

(a) $[-2, -1]$ (b) $[-1, 0]$ (c) $[-1, 1]$ (d) $[0, 2]$

EXERCÍCIOS 2.5 Recurso Gráfico

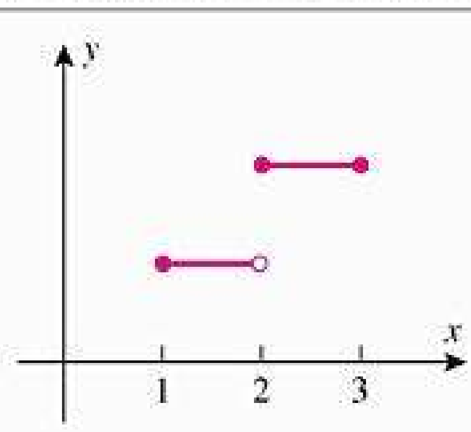
ENFOCANDO CONCEITOS

1-4 Seja f a função cujo gráfico é dado. Em quais (se houver) dos intervalos seguintes é f contínua?

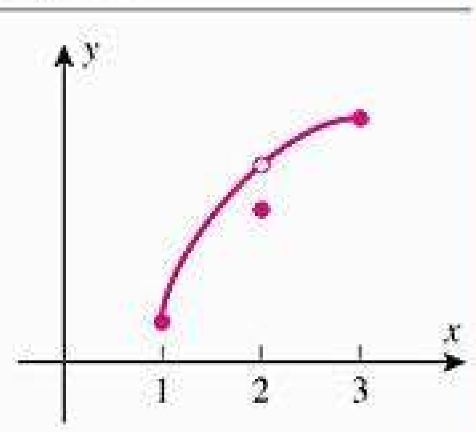
(a) $[1, 3]$ (b) $(1, 3)$ (c) $[1, 2]$
(d) $(1, 2)$ (e) $[2, 3]$ (f) $(2, 3)$

Em cada intervalo no qual f não for contínua, indique quais das condições para a continuidade de f não valem.

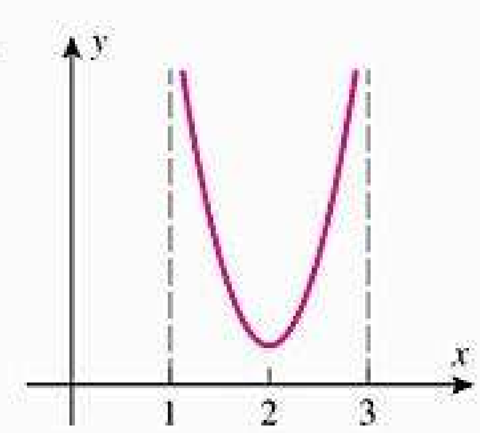
1.



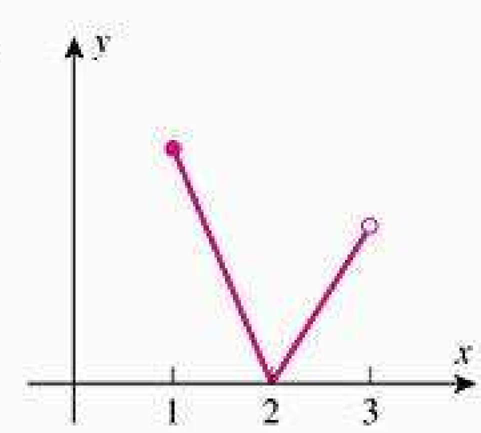
2.



3.



4.



5. Suponha que f e g sejam funções contínuas, tais que $f(2) = 1$ e $\lim_{x \to 2} [f(x) + 4g(x)] = 13$. Encontre

(a) $g(2)$ (b) $\lim_{x \to 2} g(x)$

6. Suponha que f e g sejam funções contínuas, tais que $\lim_{x \to 3} g(x) = 5$ e $f(3) = -2$. Encontre $\lim_{x \to 3} [f(x)/g(x)]$.

7. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função f que satisfaça as condições propostas.
   (a) f é contínua em toda parte, exceto em $x = 3$, onde é contínua à direita.
   (b) f tem um limite bilateral em $x = 3$, mas não é contínua naquele ponto.
   (c) f não é contínua em $x = 3$, mas se seu valor em $x = 3$ for mudado de $f(3) = 1$ para $f(3) = 0$, torna-se contínua em $x = 3$.
   (d) f é contínua no intervalo $[0, 3)$ e está definida no intervalo fechado $[0, 3]$; mas f não é contínua no intervalo $[0, 3]$.

8. Obtenha fórmulas para algumas funções que sejam contínuas nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, mas não no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

9. Um estacionamento para estudantes em uma universidade cobra \$2,00 para a primeira meia hora (ou para qualquer fração) e \$1,00 para cada meia hora subseqüente (ou para qualquer fração) até uma diária máxima de \$10,00.
   (a) Esboce o gráfico do custo como função do tempo de estacionamento.
   (b) Discuta o significado da descontinuidade no gráfico para um estudante que utiliza o estacionamento.

10. Em cada parte, determine se a função é contínua ou não e explique seu raciocínio.
   (a) A população da Terra como uma função do tempo.
   (b) Sua estatura exata como uma função do tempo.
   (c) O custo de uma corrida de táxi em sua cidade como uma função da distância percorrida.
   (d) O volume de um cubo de gelo derretendo como uma função do tempo.

11-22 Encontre os pontos x, se houver, nos quais f não é contínua.

11. $f(x) = 5x^4 - 3x + 7$
12. $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$
13. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4}$
14. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$
15. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+x}$
16. $f(x) = \dfrac{2x+1}{4x^2+4x+5}$
17. $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x-1}{x^2-1}$
18. $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{x+4}$
19. $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{|x|+3}$
20. $f(x) = \left|4 - \dfrac{8}{x^4+x}\right|$
21. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 4 \\ 7 + \dfrac{16}{x}, & x > 4 \end{cases}$
22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1}, & x \ne 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

23-24 Encontre um valor para a constante k, se possível, que faça a função ficar contínua em toda parte.

23. (a) $f(x) = \begin{cases} 7x-2, & x \le 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \le 2 \\ 2x+k, & x > 2 \end{cases}$

24. (a) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2, & x \ge -3 \\ k/x^2, & x < -3 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2, & x \ge 0 \\ k/x^2, & x < 0 \end{cases}$

25. Encontre valores das constantes k e m, se possível, que façam a função f ficar contínua em toda parte.
$$f(x) = \begin{cases} x^2+5, & x > 2 \\ m(x+1)+k, & -1 < x \le 2 \\ 2x^3+x+7, & x \le -1 \end{cases}$$

26. Em qual dos seguintes intervalos
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$
é contínua?
   (a) $[2, +\infty)$ (b) $(-\infty, +\infty)$ (c) $(2, +\infty)$ (d) $[1, 2)$

27-30 Diz-se que uma função f tem uma ***descontinuidade removível*** em $x = c$ se $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, mas f não é contínua em $x = c$, ou porque f não está definida em c ou porque $f(c)$ difere do valor do limite. Essa terminologia será necessária nestes exercícios.

27. (a) Esboce o gráfico de uma função com uma descontinuidade removível em $x = c$ para a qual $f(c)$ não está definida.
   (b) Esboce o gráfico de uma função com uma descontinuidade removível em $x = c$ para a qual $f(c)$ está definida.

28. (a) A terminologia *descontinuidade removível* é apropriada porque uma descontinuidade removível de uma função f em um ponto $x = c$ pode ser "removida" redefinindo o valor de f apropriadamente em $x = c$. Que valor para $f(c)$ remove a descontinuidade?
   (b) Mostre que as seguintes funções têm uma descontinuidade removível em $x = 1$ e esboce seus gráficos.
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases}$$
   (c) Quais valores para $f(1)$ e $g(1)$ removem as descontinuidades?

29-30 Encontre os valores de x (se existirem) nos quais f não é contínua e determine se cada um desses valores é uma descontinuidade removível.

29. (a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+3}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x-2}{|x|-2}$

30. (a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3-8}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \le 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$
   (c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+5, & x \ne 1 \\ 6, & x = 1 \end{cases}$

31. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico da função $f(x) = (x + 3) / (2x^2 + 5x - 3)$, e então use o gráfico para fazer uma conjectura sobre o número e a localização de todas as descontinuidades.

(b) Verifique sua conjectura fatorando o denominador.

32. (a) Use um recurso computacional para gerar o gráfico da função $f(x) = x / (x^3 - x + 2)$, e então use o gráfico para fazer uma conjectura sobre o número e a localização de todas as descontinuidades.

(b) Use o Teorema do Valor Intermediário para localizar aproximadamente todos os pontos de descontinuidade com duas casas decimais de precisão.

33. Prove que $f(x) = x^{3/5}$ é contínua em toda parte, justificando cuidadosamente cada passo.

34. Prove que $f(x) = 1/\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}$ é contínua em toda parte, justificando cuidadosamente cada passo.

35. Sejam f e g descontínuas em c. Dê exemplos para mostrar que

(a) $f + g$ pode ser contínua ou descontínua em c.

(b) fg pode ser contínua ou descontínua em c.

36. Prove a parte (*b*) do Teorema 2.5.4.

37. Prove:

(a) a parte (*a*) do Teorema 2.5.3.

(b) a parte (*b*) do Teorema 2.5.3

(c) a parte (*c*) do Teorema 2.5.3.

38. Prove: Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$, então existe no mínimo uma solução para a equação $f(x) = g(x)$ em (a, b). [*Sugestão*: Considere $f(x) - g(x)$.]

ENFOCANDO CONCEITOS

39. Dê um exemplo de uma função que está definida em todo ponto de um intervalo fechado, e cujos valores nos pontos extremos têm sinais opostos, mas para a qual a equação $f(x) = 0$ não tem solução no intervalo.

40. Seja f a função cujo gráfico está mostrado no Exercício 2. Para cada intervalo, determine (i) se está satisfeita a hipótese do Teorema do Valor Intermediário e (ii) se está satisfeita a conclusão desse mesmo teorema.

(a) $[1, 2]$ (b) $[2, 3]$ (c) $[1, 3]$

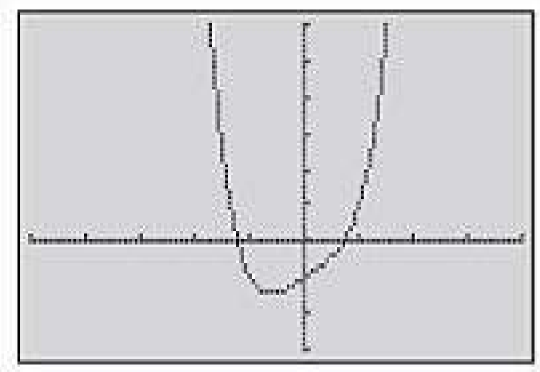
41. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que há um cilindro circular reto de altura h e raio menor do que r, cujo volume é igual àquele de um cone circular reto de altura h e raio r.

42. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que há um quadrado com a diagonal medindo entre r e $2r$ e uma área que é a metade da área do círculo de raio r.

43. Mostre que a equação $x^3 + x^2 - 2x = 1$ tem, no mínimo, uma solução no intervalo $[-1, 1]$.

44. Prove que, se $p(x)$ é um polinômio de grau ímpar, então a equação $p(x) = 0$ tem, no mínimo, um número real como solução.

45. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = x^4 + x - 1$. Use o método do Exemplo 5 para aproximar os cortes com o eixo x com um erro de, no máximo, 0,05.

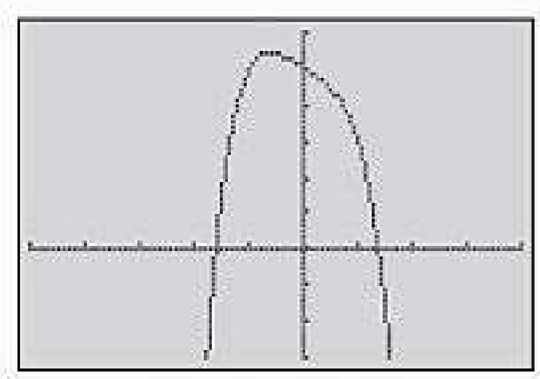


$[-5, 4] \times [-3, 6]$
xScl = 1, yScl = 1

Figura Ex-45

46. Use o *zoom* de um recurso gráfico computacional para resolver o problema do Exercício 45.

47. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = 5 - x - x^4$. Use o método do Exemplo 5 para aproximar as raízes da equação $5 - x - x^4 = 0$ com uma precisão de duas casas decimais.



$[-5, 4] \times [-3, 6]$
xScl = 1, yScl = 1

Figura Ex-47

48. Use o *zoom* de um recurso gráfico computacional para resolver o problema do Exercício 47.

49. Use o fato de que é $\sqrt{5}$ uma solução de $x^2 - 5 = 0$ para aproximar $\sqrt{5}$ com um erro de, no máximo, 0,005.

50. Prove que, se a e b forem positivos, então a equação

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = 0$$

tem, no mínimo, uma solução no intervalo $(1, 3)$.

51. Uma esfera de raio desconhecido x consiste em um centro esférico e um revestimento de 1 cm de espessura (ver figura abaixo). Dado que o volume do revestimento e o do centro esférico são os mesmos, aproxime o raio da esfera com uma precisão de três casas decimais.

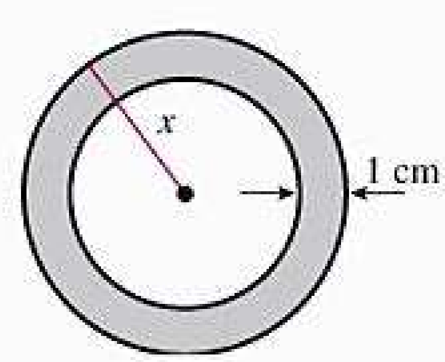


Figura Ex-51

52. Um monge começou a caminhar em uma estrada de uma montanha ao meio-dia (12h) e alcançou o topo à meia-noite

(0h). Ele meditou e descansou até o meio-dia do dia seguinte, quando começou a descer pela mesma estrada, alcançando a base à meia-noite. Mostre que há, no mínimo, um ponto do caminho que ele alcançou no mesmo instante do dia, tanto na subida quanto na descida.

53. Seja f definida em c. Prove que f é contínua em c se, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ se $|x - c| < \delta$.

54. Suponha que f seja contínua no intervalo $[0, 1]$ e que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo x desse intervalo.

(a) Esboce o gráfico de $y = x$ junto com um gráfico possível de f sobre o intervalo $[0, 1]$.

(b) Use o Teorema do Valor Intermediário para ajudar a provar que existe pelo menos um número c no intervalo $[0, 1]$, tal que $f(c) = c$.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.5

1. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ 2. (a) não (b) não (c) não (d) sim (e) sim (f) não (g) sim **3.** $x = 1,4$
4. (a) sim (b) não (c) sim (d) sim

2.6 CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E DE FUNÇÕES INVERSAS

Nesta seção investigaremos as propriedades de continuidade das funções trigonométricas e de inversão de várias funções contínuas. Também discutiremos alguns importantes limites envolvendo essas funções.

■ CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Lembre que na Trigonometria desenhamos os gráficos de sen x e de cos x como curvas contínuas. Não provaremos formalmente que essas funções são contínuas, mas podemos motivar esse fato deixando c ser um ângulo fixo e x um ângulo variável, ambos medidos em radianos. Como indica a Figura 2.6.1, quando o ângulo x tende ao ângulo c, o ponto $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$ move-se no círculo unitário em direção ao ponto $Q(\cos c, \operatorname{sen} c)$, e as coordenadas de P tendem às correspondentes coordenadas de Q. Isso implica que

$$\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} \cos x = \cos c \tag{1}$$

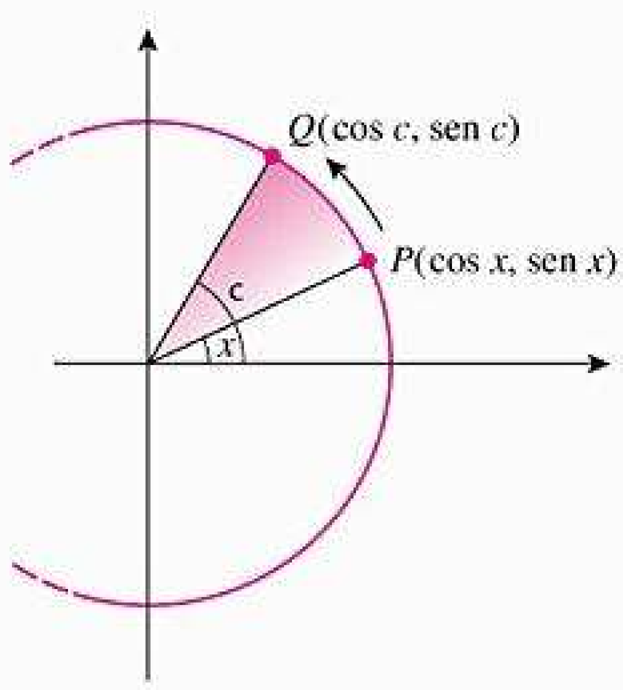


Figura 2.6.1

Assim, sen x e cos x são contínuos em um ponto arbitrário c; desse modo, essas funções são contínuas em toda parte.

As fórmulas em (1) podem ser usadas para encontrar limites das funções trigonométricas restantes, expressando-os em termos de sen x e cos x; por exemplo, se $\cos c \neq 0$, então

$$\lim_{x \to c} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to c} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} = \operatorname{tg} c$$

Assim, somos levados ao teorema seguinte.

O Teorema 2.6.1 implica que as seis funções trigonométricas básicas são contínuas em seus domínios. Em particular, sen x e cos x são contínuas em toda parte.

2.6.1 TEOREMA *Se c é um número no domínio natural da função trigonométrica enunciada, então*

$$\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c \qquad \lim_{x \to c} \cos x = \cos c \qquad \lim_{x \to c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c$$

$$\lim_{x \to c} \operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec} c \qquad \lim_{x \to c} \sec x = \sec c \qquad \lim_{x \to c} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} c$$

▶ Exemplo1 Encontre o limite

$$\lim_{x \to 1} \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$$

Solução Como a função cosseno é contínua em toda parte, segue do Teorema 2.5.5 que

$$\lim_{x \to 1} \cos(g(x)) = \cos\left(\lim_{x \to 1} g(x)\right)$$

sempre que $\lim_{x \to 1} g(x)$ exista. Assim,

$$\lim_{x \to 1} \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \lim_{x \to 1} \cos(x + 1) = \cos\left(\lim_{x \to 1} (x + 1)\right) = \cos 2$$ ◀

■ CONTINUIDADE DE FUNÇÕES INVERSAS

Como os gráficos de uma função injetora f e sua inversa f^{-1} são um a reflexão do outro pela reta $y = x$, é geometricamente evidente que se o gráfico de f não tem quebras ou buracos, então tampouco o gráfico de f^{-1} tem quebras ou buracos. Isso, mais o fato de que a imagem de f é o domínio de f^{-1}, sugere o resultado seguinte, que enunciamos sem prova formal.

Resumindo, o Teorema 2.6.2 afirma: *a inversa de uma função contínua é contínua.*

2.6.2 TEOREMA *Se f é uma função injetora que é contínua em cada ponto de seu domínio, então f^{-1} é contínua em cada ponto de seu domínio; ou seja, f^{-1} é contínua em cada ponto da imagem de f.*

▶ Exemplo 2

(a) Suponha que b^x seja contínua em toda parte e use o Teorema 2.6.2 para provar que a função $\log_b x$ é contínua em todos os números reais positivos.

(b) Use o Teorema 2.6.2 para provar que arc sen x é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

Solução (a) O domínio e a imagem de b^x são os intervalos $(-\infty, +\infty)$ e $(0, +\infty)$, respectivamente, e $\log_b x$ é a inversa de b^x. Como b^x é contínua em $(-\infty, +\infty)$, segue pelo Teorema 2.6.2 que $\log_b x$ é contínua em $(0, +\infty)$. Assim, $\log_b x$ é contínua em todos os números reais positivos.

Solução (b) Lembre que arc sen x é a função inversa da função seno restrita, cujo domínio é o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ e cuja imagem é o intervalo $[-1, 1]$ (Definição 1.5.6 e Figura 1.5.13). Como sen x é contínua no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, o Teorema 2.6.2 implica que arc sen x é contínua no intervalo $[-1, 1]$. ◀

Um argumento análogo à solução do Exemplo 2(b) mostra que arc tg x é contínua em $(-\infty, +\infty)$ e que arc cos x é contínua em $[-1, 1]$.

▶ Exemplo 3 Em quais pontos a função $f(x) = \dfrac{\text{arc tg } x + \ln x}{x^2 - 4}$ é contínua?

Solução O quociente será uma função contínua em todos os pontos onde o numerador e o denominador são ambos funções contínuas e o denominador não é zero. Como arc tg x é contínua em toda parte e $\ln x$ é contínua em $x > 0$, o numerador é contínuo se $x > 0$. O denomina-

dor, sendo um polinômio, é contínuo em toda parte, de modo que o quociente é contínuo em todos os pontos tais que $x > 0$ e o denominador é não-nulo. Assim, f é contínua nos intervalos $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$. ◄

■ OBTENDO LIMITES POR CONFRONTO

Na Seção 2.1, usamos evidência numérica para conjecturar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \tag{2}$$

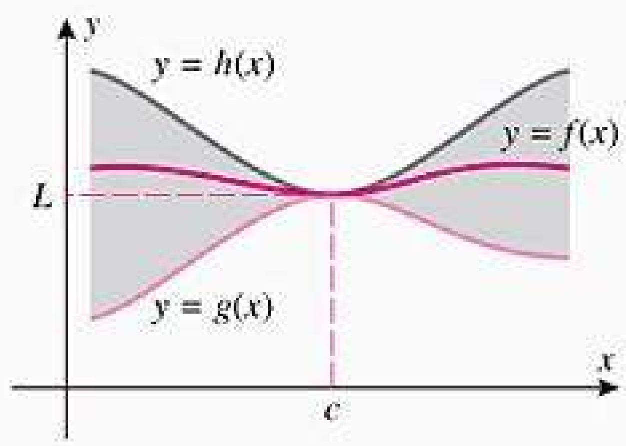


Figura 2.6.2

Contudo, não é fácil determinar esse limite com precisão. O limite é uma forma indeterminada do tipo 0/0, e não existem operações algébricas simples que nos permitam obtê-lo. Adiante no texto, desenvolveremos métodos gerais para obter limites de formas indeterminadas, mas aqui utilizaremos uma técnica chamada de *confronto*.

O método do confronto é usado para concluir que $f(x) \to L$ quando $x \to c$ através do "confronto" de f com duas outras funções, g e h, cujos limites quando $x \to c$ já são conhecidos como sendo L. Como ilustra a Figura 2.6.2, isso força f a também ter o limite L. Essa é a idéia subjacente ao teorema seguinte, que enunciamos sem prova.

> **2.6.3 TEOREMA** (***Teorema do Confronto***) *Sejam f, g e h funções que satisfazem*
>
> $$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$
>
> *para todo x em algum intervalo aberto que contenha o ponto c, com a possível exceção de que as desigualdades não precisam ser válidas em c. Se g e h tiverem o mesmo limite quando x tende a c, digamos*
>
> $$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$
>
> *então f também tem esse limite quando x tende a c, isto é,*
>
> $$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

O Teorema do Confronto também é válido para limites laterais e para limites em $+\infty$ e $-\infty$. Como mudariam as hipóteses do teorema nesses casos?

Para ilustrar o uso do Teorema do Confronto, provaremos o resultado seguinte, ilustrado na Figura 2.6.3

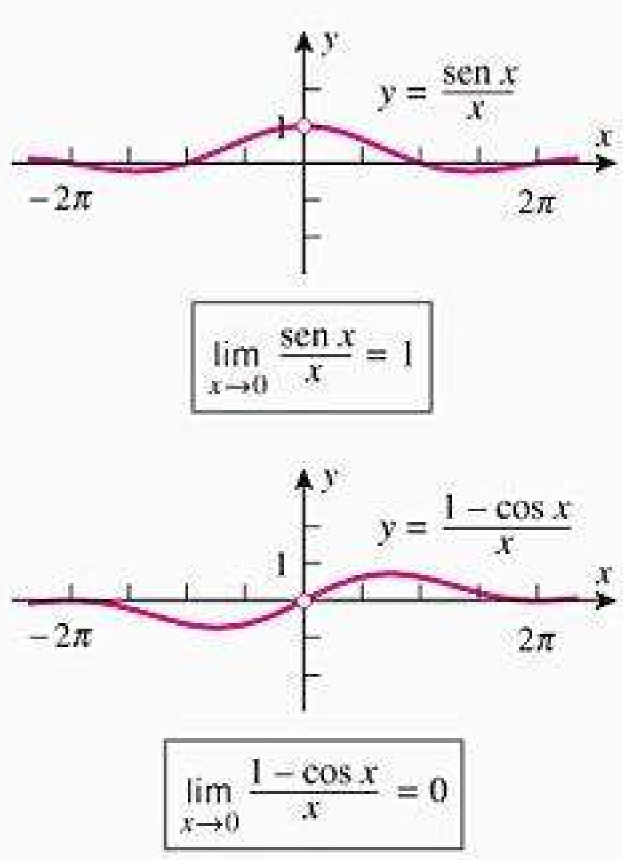


Figura 2.6.3

> **2.6.4 TEOREMA**
>
> $$(a)\quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \qquad (b)\quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO (*a*) Nesta prova, interpretaremos x como um ângulo medido em radianos, e vamos supor, para começar, que $0 < x < \pi/2$. Como ilustrado na Figura 2.6.4, a área do setor de raio 1 e ângulo central x situa-se entre as áreas de dois triângulos, um com a área $\frac{1}{2}$ tg x e o outro com a área $\frac{1}{2}$ sen x. Como a área do setor é de $\frac{1}{2}x$ (ver nota marginal), segue que

$$\frac{1}{2}\,\text{tg}\, x \geq \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x$$

Multiplicando todos os membros por 2/(sen x) e usando que sen $x > 0$ para $0 < x < \pi/2$, obtemos

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{x}{\text{sen } x} \geq 1$$

Em seguida, tomando os recíprocos e revertendo as desigualdades, obtemos

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \tag{3}$$

que prende a função (sen x)/x entre as funções cos x e 1. Embora tenhamos derivado essas desigualdades supondo que $0 < x < \pi/2$, elas também são válidas para $-\pi/2 < x < 0$ [já que (3) permanece inalterada trocando x por $-x$, usando as identidades $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(-x) = \cos x$]. Finalmente, como

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

o Teorema do Confronto implica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

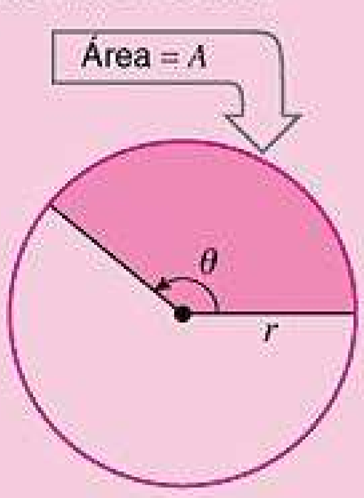
Lembre que a área A de um setor de raio r e ângulo θ é

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Isso pode ser obtido da relação

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

que afirma que a área do setor está para a área do círculo assim como o ângulo central do setor está para o ângulo central do círculo.



DEMONSTRAÇÃO (*b*) Para esta prova, usaremos o limite da parte (*a*), a continuidade da função seno e a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)x}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right) = (1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 \qquad ■$$

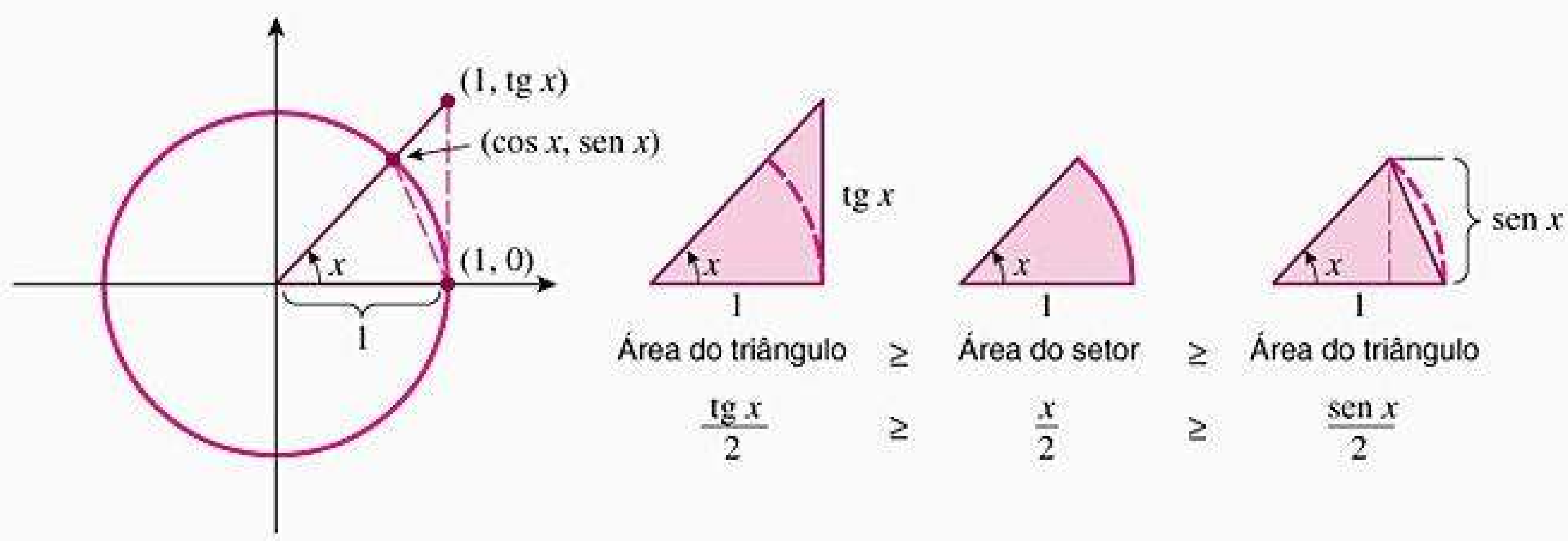


Figura 2.6.4

► Exemplo 4 Encontre

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \qquad \text{(b)}\ \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\theta} \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$$

Solução (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right) = (1)(1) = 1$$

Solução (b) O truque é multiplicar e dividir por 2, o que fará o denominador igual ao argumento da função seno [como no Teorema 2. 6.4(*a*)]:

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\theta} = 2 \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\theta}$$

Faça agora a substituição $x = 2\theta$ e use o fato de que $x \to 0$ quando $\theta \to 0$. Segue-se

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\theta} = 2 \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\theta} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2(1) = 2$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso gráfico computacional para confirmar os limites no último exemplo; se o leitor dispuser de um CAS, use-o para obter os limites.

Solução c

$$\text{im}_{x\to 0} \frac{\text{en } 3x}{\text{en } 5x} = \text{im}_{x\to 0} \frac{\dfrac{\text{en } 3x}{x}}{\dfrac{\text{en } 5x}{x}} = \text{im}_{x\to 0} \frac{3\cdot \dfrac{\text{en } 3x}{3x}}{5\cdot \dfrac{\text{en } 5x}{5x}} = \frac{3\cdot 1}{5\cdot 1} = \frac{3}{5} \blacktriangleleft$$

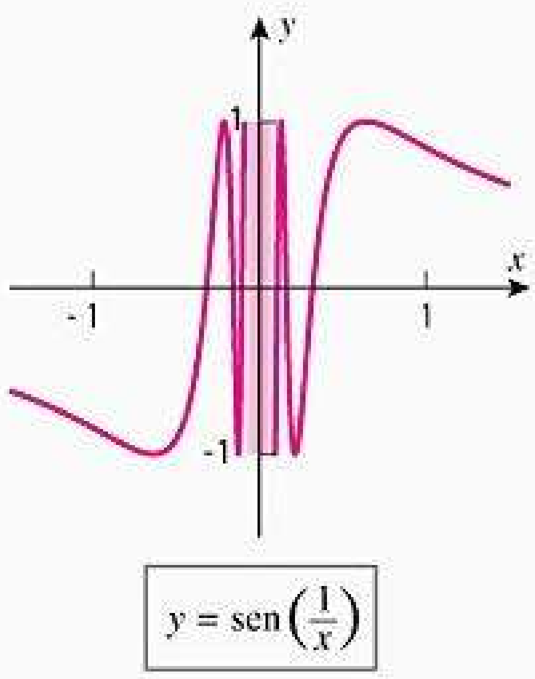


Figura 2.6.5

▶ Exemplo 5 De cubra imite

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solução a n i erem $1/x$ c m um ângu me i em ra ian uan $x \to 0^+$, ângu $1/x$ ten e a $+\infty$, e m ue a re e en $1/x$ ficam ci an entre 1 e -1, em ten er a imite a gum na gamente, uan $x \to 0^-$, ângu $1/x$ ten e a $-\infty$, e m ue n amente a re e $1/x$ ficam ci an entre 1 e -1, em ten er a imite a gum E a c nc u õe ã c n i tente c m gráfic m tra na Figura 2 5 b er e ue a ci a ções ficam ca a ez mai rá i a uan $x \to 0$, i $1/x$ cre ce u ecre ce ca a ez mai rá i uan x ten e a 0

Solução b m

$$-1 \le \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

egue ue, e $x \neq 0$, entã

$$-|x| \le x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le |x| \qquad 4$$

m $|x| \to 0$ uan $x \to 0$, a e igua a e em 4 e e rema n r nt im icam ue

$$\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

é c n i tente c m gráfic m tra na Figura 2 ◀

Confirme 4 considerando os casos $x > 0$ e $x < 0$ separadamente.

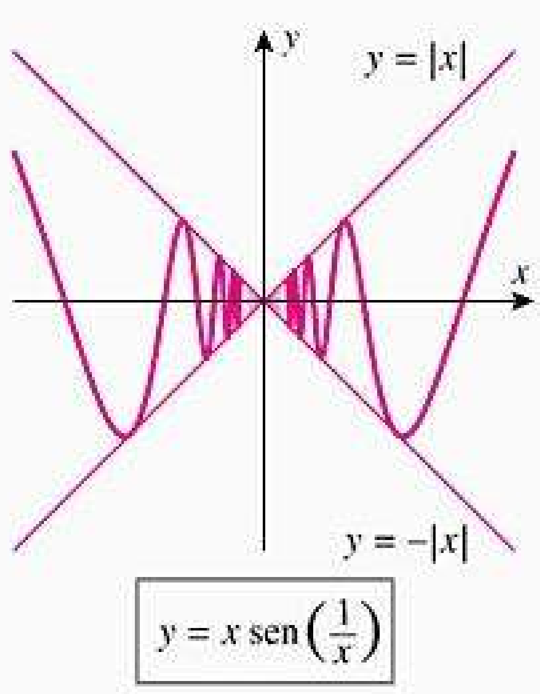


Figura 2.6.6

Tem-se, a partir da parte b deste exemplo, que a função

$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$, uma vez que o valor da função e o valor do limite são os mesmos naquele ponto. Isso mostra que o comportamento de uma função pode ser muito complexo na vizinhança de um ponto $x = c$, mesmo se a função for contínua em c.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.6 *(Ver página 162 para respostas.)*

1. Em ca a arte, é a unçã c ntínua a a n inter a $0, \pi/2$
 a en x b c x c tg x c ec x
 e ec x c tg x g e^x h n x
 i arc en x arc tg x

2. a cu e imite

 a $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$ b $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

3. Se am $f\ x = x^2$ c n $|x|$, $g\ x = -x^2$ e $h\ x = x^2$
 a E i ue r ue a unções g e h, unta c m e rema n r nt , em er u a a ara bter $\text{im}_{x\to 0} f\ x$ ma nã $\text{im}_{x\to 1} f\ x$
 b a cu e $\text{im}_{x\to 0} f\ x$ e $\text{im}_{x\to 1} f\ x$

4. a cu e imite

 a $\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\dfrac{x^2-3x}{x}\right)$ b $\lim_{x\to 3^+} \text{sen}\left(\dfrac{x}{x^2-3x}\right)$

 c $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2-3x)}{x}$ $\lim_{x\to 3} \dfrac{\text{sen}(x^2-3x)}{x}$

EXERCÍCIOS 2.6 Recurso Gráfico

1-8 Encontre os pontos de descontinuidade, se existirem.

1. $f(x) = \text{sen}(x^2 - 2)$
2. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x-\pi}\right)$
3. $f(x) = |\text{cotg}\, x|$
4. $f(x) = \sec x$
5. $f(x) = \text{cossec}\, x$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1+\text{sen}^2 x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{1-2\,\text{sen}\, x}$
8. $f(x) = \sqrt{2+\text{tg}^2 x}$

9-14 Determine onde f é contínua.

9. $f(x) = \text{arc sen}\, x$
10. $f(x) = \text{arc sec}\, x$
11. $f(x) = \dfrac{\ln(\text{arc tg}\, x)}{x^2-9}$
12. $f(x) = \exp\left(\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right)$
13. $f(x) = \dfrac{\text{arc sen}\,(1/x)}{x}$
14. $f(x) = \ln|x| - 2\ln(x+3)$

15. Use o Teorema 2.5.6 para mostrar que as seguintes funções são contínuas em toda parte, expressando-as como composições de funções mais simples que se sabe que são contínuas.
    (a) $\text{sen}\,(x^3+7x+1)$ (b) $|\text{sen}\, x|$
    (c) $\cos^3(x+1)$ (d) $\sqrt{3+\text{sen}\, 2x}$
    (e) $\text{sen}\,(\text{sen}\, x)$ (f) $\cos^5 x - 2\cos^3 x + 1$
16. (a) Prove que se $g(x)$ for contínua em toda parte, então também são: $\text{sen}(g(x))$, $\cos(g(x))$, $g(\text{sen}(x))$ e $g(\cos(x))$.
    (b) Ilustre o resultado de (a) escolhendo algumas g prediletas.

17-40 Encontre os limites.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2-3x}\right)$
19. $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{arc sen}\left(\dfrac{x}{1-2x}\right)$
20. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
21. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3\theta}{\theta}$
22. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\text{sen}\, h}{2h}$
23. $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta^2}$
24. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\theta}$
25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, 7x}{\text{sen}\, 3x}$
26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 6x}{\text{sen}\, 8x}$
27. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\, x}{5\sqrt{x}}$
28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2 x}{3x^2}$
29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x^2}{x}$
30. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\text{sen}\, h}{1-\cos h}$
31. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{1-\cos^2 t}$
32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)}$
33. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta^2}{1-\cos\theta}$
34. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos 3h}{\cos^2 5h - 1}$
35. $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 3\,\text{sen}\, x}{x}$
37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\cos 3x - \cos 4x}{x}$
38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, 3x^2 + \text{sen}^2 5x}{x^2}$
39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, ax}{\text{sen}\, bx}, \quad (a\neq 0, b\neq 0)$
40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2(kx)}{x^2}, \quad k \neq 0$

41-44 (a) Construa uma tabela para estimar o limite calculando os valores da função perto do ponto do limite. (b) Encontre o valor exato do limite.

41. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\text{sen}(x-5)}{x^2-25}$
42. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\text{sen}(2x-4)}{x^2-4}$
43. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\text{sen}(x^2+3x+2)}{x+2}$
44. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\text{sen}(x^2+3x+2)}{x^3+1}$

ENFOCANDO CONCEITOS

45. No Exemplo 5, usamos o Teorema do Confronto para provar que
$$\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
Por que não poderíamos ter obtido o mesmo resultado escrevendo
$$\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= 0 \cdot \lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0?$$
46. Encontre um valor para a constante k que torne
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$
contínua em $x = 0$.
47. Encontre um valor diferente de zero para a constante k que torne
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{tg}\, kx}{x}, & x < 0 \\ 3x + 2k^2, & x \geq 0 \end{cases}$$
contínua em $x = 0$.
48. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
é contínua em $x = 0$? Explique

49. Nas partes (a) a (c), encontre o limite fazendo a substituição indicada.

(a) $\text{im}_{x\to+\infty} x \ \text{en}\frac{1}{x}$ $\quad t = \frac{1}{x}$

(b) $\text{im}_{x\to-\infty} x\left(1 - \text{c} \ \frac{1}{x}\right)$ $\quad t = \frac{1}{x}$

(c) $\text{im}_{x\to\pi} \frac{\pi - x}{\text{en}\, x}$ $\quad t = \pi - x$

50. Enc ntre $\text{im}_{x\to 2} \frac{\text{c} \ \ (\pi/x)}{x-2}$ $\left[\textit{Sugestão}: \text{Se a } t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{x}.\right]$

51. Enc ntre $\text{im}_{x\to 1} \frac{\text{en}(\pi x)}{x-1}$.

52. Enc ntre $\text{im}_{x\to\pi/4} \frac{\text{tg}\, x - 1}{x - \pi/4}$.

53. Enc ntre $\text{im}_{x\to\pi/4} \frac{\text{c} \ \ x - \ \text{en}\, x}{x - \pi/4}$

54. Su nha ue f e a uma unçã in ertí e , ta ue f 0 = 0, f e a c ntínua em 0 e e i ta im$_{x\to 0}$ f x /x Saben ue L = im$_{x\to 0}$ f x /x, m tre ue

$$\text{im}_{x\to 0} \frac{x}{f^{-1}(x)} = L$$

Sugestão: i ue e rema 2 5 5 à c m içã $h \circ g$, n e

$$h(x) = \begin{cases} f(x)/x, & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases}$$

e g x = f^{-1} x

55-58 i ue re u ta E ercíci 54, e nece ári , ara enc ntrar imite

55. $\text{im}_{x\to 0} \frac{x}{\text{arc} \ \ \text{en}\, x}$

56. $\text{im}_{x\to 0} \frac{\text{arc tg}\, x}{x}$

57. $\text{im}_{x\to 0} \frac{\text{arc} \ \ \text{en}\, 5x}{x}$

58. $\text{im}_{x\to 1} \frac{\text{arc} \ \ \text{en}\,(x-1)}{x^2 - 1}$

59-62 iante erá r a ue

$$\text{im}_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

e e e re u ta ara enc ntrar imite

59. $\text{im}_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

60. $\text{im}_{x\to 0} \frac{\text{n}(1 + x)}{x}$ *Sugestão*: er E ercíci 54

61. $\text{im}_{x\to 0} \frac{\text{e} \ \ (x^2) - 1}{x}$

62. $\text{im}_{x\to 0} \frac{\text{n}(1 + 5x)}{x}$

ENFOCANDO CONCEITOS

63. e e rema n r nt ara m trar ue

$$\lim_{x\to 0} x \cos \frac{50\pi}{x} = 0$$

e i u tre rincí i en i , u an um recur gráfic c m utaci na ara azer gráfic e $y = |x|$, $y = -|x|$ e $y = x$ c $50\pi/x$ na me ma te a a ane a $-1, 1 \times -1, 1$

64. e e rema n r nt ara m trar ue

$$\lim_{x\to 0} x^2 \,\text{sen}\left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0$$

e i u tre rincí i en i u an um recur gráfic c m utaci na ara azer gráfic e $y = x^2$, $y = -x^2$ e $y = x^2$ en $50\pi/\sqrt[3]{x}$ na me ma te a a ane a $-0{,}5$ $0{,}5$ × $-0{,}25$ $0{,}25$

65. E b ce gráfic e $y = 1 - x^2$, $y = \text{c}$ x e $y = f$ x , n e f é uma unçã ua uer ue ati az a e igua a e

$$1 - x^2 \leq f \ x \ \leq \text{c} \ \ x$$

ara t x n inter a $-\pi/2, \pi/2$ ue cê e izer bre imite e f x , uan $x \to 0$ E i ue eu raci cíni

66. E b ce gráfic e $y = 1/x$, $y = -1/x$ e $y = f$ x em um i tema e c r ena a , n e f é uma unçã ua uer a ti azen a e igua a e

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

ara t x n inter a 1, $+\infty$ ue cê e izer bre imite e f x uan $x \to +\infty$ E i ue eu ra ci cíni

67. Enc ntre órmu a ara a unçõe g e h, tai ue g x $\to 0$ e h x $\to 0$ uan $x \to +\infty$ e

$$g(x) \leq \frac{\text{sen}\, x}{x} \leq h(x)$$

ara a re iti e x. ue cê e izer bre imite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}\, x}{x}?$$

E i ue eu raci cíni

68. Faça e enh aná g a a Figura 2 2 ue i u trem e rema n r nt ara imite a rma im$_{x\to+\infty}$ f x e im$_{x\to-\infty}$ f x

69-70 embre ue, a men e mençã e ícita em c ntrári , a ariá e x em unçõe trig n métrica tai c m en x e c x é me i a em ra ian imite e rema 2 4 ã ba ea ne a u içã E te e ercíci e ram ue ac ntece na ue e imite e x r me i em grau

69. (a) tre ue, e x e tá em grau , entã

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \frac{\pi}{180}$$

(b) nfirme ue imite em a e tá em c n rmi a e c m re u ta r uzi r um recur c m utaci na , re r graman ara grau , e ca cu e en x /x ara a gun a re e x ue e a r imam ca a ez mai e 0

70. ua é imite e 1 − c x /x uan $x \to 0$ e x e tá em grau

71. Segue a arte (*a*) e rema 2 4 ue, e θ é e uen ró im a zer e me i em ra ian , entã eríam e erar ue

$$\text{en}\, \theta \approx \theta$$

e a uma b a a r imaçã

(a) Enc ntre en 10° u an um recur c m utaci na

(b) a cu e en 10° u an a a r imaçã acima

72. (a) Use a aproximação de sen θ que é dada no Exercício 71, junto com a identidade $\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\alpha$ com $\alpha = \theta/2$, para mostrar que, se θ é pequeno (próximo a zero) e medido em radianos, então poderíamos esperar que

$$\cos\theta \approx 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2$$

seja uma boa aproximação.

(b) Encontre cos 10° usando um recurso computacional.

(c) Calcule cos 10° usando a aproximação acima.

73. Tem-se, a partir da parte (a) do Exemplo 4, que, se θ é pequeno (próximo a zero) e medido em radianos, então poderíamos esperar que

$$\text{tg}\,\theta \approx \theta$$

seja uma boa aproximação.

(a) Encontre tg 5° usando um recurso computacional.

(b) Calcule tg 5° usando a aproximação acima.

74. Com referência à figura abaixo, suponha que o ângulo de elevação do topo de um prédio medido de um ponto a L metros de sua base seja α graus.

(a) Use a relação $h = L\,\text{tg}\,\alpha$ para calcular a altura do prédio para a qual $L = 500\,M$ e $\alpha = 6°$.

(b) Mostre que, se L é grande comparado com a altura do prédio h, então se poderia esperar bons resultados na aproximação de h por $h \approx \pi L \alpha / 180$.

(c) Use o resultado de (b) para aproximar a altura do prédio h de (a).

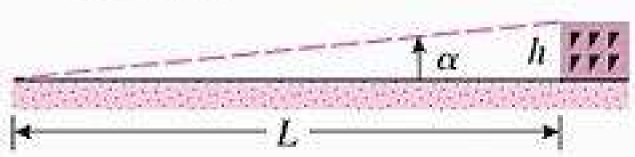


Figura Ex-74

75. (a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $x = \cos x$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $[0, \pi/2]$.

(b) Mostre graficamente que há exatamente uma solução no intervalo.

(c) Aproxime a solução com três casas decimais de precisão.

76. (a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $x + \text{sen}\,x = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, \pi/6]$.

(b) Mostre graficamente que existe exatamente uma solução no intervalo.

(c) Aproxime a solução com três casas decimais de precisão.

77. No estudo da queda de objetos próximos à superfície da Terra, a ***aceleração g devida à gravidade*** é usualmente tomada como sendo a constante 9,8 m/s^2. Entretanto, a forma elíptica da Terra e outros fatores causam variações nesse valor que dependem da latitude. A seguinte fórmula, conhecida como Fórmula da Gravidade Elipsoidal do Sistema Geodésico Mundial de 1984 (WGS 84), é usada para prever o valor de g na latitude de ϕ graus (tanto ao norte quanto ao sul do Equador):

$$g = 9{,}7803253359\frac{1 + 0{,}0019318526461\,\text{sen}^2\,\phi}{\sqrt{1 - 0{,}0066943799901\,\text{sen}^2\,\phi}}\ \text{m/s}^2$$

(a) Use um recurso gráfico para traçar a curva $y = g(\phi)$ para $0° \le \phi \le 90°$. O que os valores de g em $\phi = 0°$ e em $\phi = 90°$ dizem sobre o modelo elipsoidal WGS 84 da Terra?

(b) Mostre que temos $g = 9{,}8$ m/s^2 em algum lugar entre as latitudes 38° e 39°.

78. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$$

(a) Faça uma conjectura sobre o limite de $f(x)$ quando $x \to 0$.

(b) Faça uma conjectura sobre o limite de $xf(x)$ quando $x \to 0$.

(c) Prove suas conjecturas.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 2.6

1. (a) sim (b) sim (c) sim (d) não (e) sim (f) não (g) sim (h) não (i) não (j) sim **2.** (a) 1 (b) 0
3. (a) Como $-1 \le \cos(\ln|x|) \le 1$ para $x \ne 0$, segue que $-x^2 \le f(x) \le x^2$. Observe que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = \lim_{x\to 0} h(x)$, de modo que podemos usar o Teorema do Confronto para $\lim_{x\to 0} f(x)$. No entanto, $\lim_{x\to 1} g(x) = -1$ e $\lim_{x\to 0} h(x) = 1 \ne -1$, de modo que o Teorema do Confronto não pode ser usado para $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) 0; 1 **4.** (a) sen (-3) (b) não existe (c) -3 (d) 0

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO   Recurso Gráfico   C CAS

1. Para a função f cujo gráfico está na figura ao lado, encontre o limite se ele existir.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 4} f(x)$ (e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (h) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (i) $\lim_{x\to 0} f(x)$

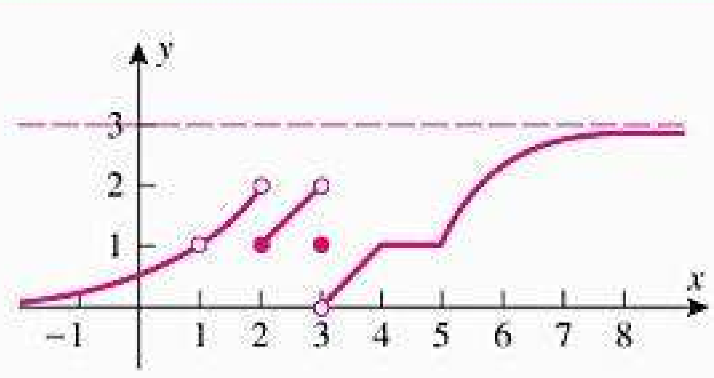


Figura Ex-1

2. Em cada parte, calcule o valor da função para os valores dados de x e faça uma conjectura sobre o valor do limite. Confirme suas conjecturas, obtendo o limite algebricamente.

(a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$; $\lim_{x \to 2^+} f(x)$; $x = 2{,}5; 2{,}1; 2{,}01; 2{,}001; 2{,}0001; 2{,}00001$

(b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; $\lim_{x \to 0} f(x)$; $x = \pm 1{,}0; \pm 0{,}1; \pm 0{,}01; \pm 0{,}001; \pm 0{,}0001; \pm 0{,}00001$

3. (a) Aproxime o valor do limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$$

com três casas decimais de precisão, construindo uma tabela apropriada de valores.

C 4. Aproxime

$$\lim_{x \to 3} \frac{2^x - 8}{x - 3}$$

primeiro olhando para o gráfico e, em seguida, calculando os valores para algumas escolhas apropriadas de x. Compare suas respostas com o valor obtido por um CAS.

5-10 Encontre os limites.

5. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

6. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{3x + 9}{x^2 + 4x + 3}$

8. $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x + 2}{x - 2}$

9. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x-1)^5}{(3x^2 + 2x - 7)(x^3 - 9x)}$

10. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$

11. Em cada parte, encontre as assíntotas horizontais, se houver.

(a) $y = \dfrac{2x - 7}{x^2 - 4x}$ (b) $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 10}{3x^2 - 4x}$

(c) $y = \dfrac{2x^2 - 6}{x^2 + 5x}$

12. Em cada parte, encontre $\lim_{x \to a} f(x)$, se existir, tomando a igual a 0, 5^+; -5^-; $-5{,}5$; $-\infty$ e $+\infty$.

(a) $f(x) = \sqrt{5 - x}$

(b) $f(x) = \begin{cases} (x-5)/|x-5|, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$

13-20 Encontre os limites.

13. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg} 3x}$

14. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

15. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3x - \operatorname{sen}(kx)}{x}$, $k \neq 0$

16. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \operatorname{tg}\left(\frac{1 - \cos\theta}{\theta}\right)$

17. $\displaystyle\lim_{t \to \pi/2^+} e^{\operatorname{tg} t}$

18. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0^+} \ln(\operatorname{sen} 2\theta) - \ln(\operatorname{tg}\theta)$

19. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-x}$

20. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$, $a, b > 0$

21. Se investirmos \$1.000 numa aplicação que paga 7% de juros, compostos N vezes por ano, então em 10 anos haverá $\$1.000(1 + 0{,}07/n)^{10n}$ na aplicação. Quanto haverá na aplicação em 10 anos se a taxa de juros for composta trimestralmente ($n = 4$)? Mensalmente ($n = 12$)? Diariamente ($n = 365$)? Quanto haverá na aplicação em 10 anos se os juros forem compostos *continuamente*, isto é, com $n \to +\infty$?

22. (a) Escreva um parágrafo ou dois que descreva como o limite de uma função pode não existir em um ponto $x = a$, apresentando alguns exemplos específicos.

(b) Escreva um parágrafo ou dois que descreva como o limite de uma função pode não existir quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, apresentando alguns exemplos específicos.

(c) Escreva um parágrafo ou dois que descreva como uma função poderia deixar de ser contínua em um ponto $x = a$, apresentando alguns exemplos específicos.

23. (a) Encontre uma fórmula para uma função racional que tem uma assíntota vertical em $x = 1$ e uma assíntota horizontal em $y = 2$.

(b) Verifique seu trabalho usando um recurso computacional para fazer o gráfico da função.

24. Reescreva a definição ϵ-δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ em termos da janela de um recurso gráfico centrada no ponto (a, L).

25. Suponha que $f(x)$ seja uma função e que, para qualquer $\epsilon > 0$, a condição $0 < |x - 2| < \frac{3}{4}\epsilon$ garanta que $|f(x) - 5| < \epsilon$.

(a) Qual é o limite descrito por essa afirmação?

(b) Obtenha um valor de δ tal que $0 < |x - 2| < \delta$ garanta que $|8f(x) - 40| < 0{,}048$.

26. O limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

assegura que há um número δ tal que

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| < 0{,}001$$

se $0 < |x| < \delta$. Estime o maior desses δ.

27. Em cada parte são dados um número positivo ϵ e o limite L de uma função f em a. Encontre um número δ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$.

(a) $\lim_{x \to 2} (4x - 7) = 1$; $\epsilon = 0{,}01$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = 6$; $\epsilon = 0{,}05$

(c) $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$; $\epsilon = 0{,}001$

28. Use a Definição 2.4.1 para provar que os limites dados estão corretos.

(a) $\lim_{x \to 2} (4x - 7) = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = 6$

29. Suponha que f seja contínua em x_0 e que $f(x_0) > 0$. Dê uma prova ϵ–δ ou um argumento verbal convincente para mostrar que deve existir um intervalo aberto, contendo x_0, no qual $f(x) > 0$.

30. (a) Seja

$$f(x) = \frac{\text{sen}\, x - \text{sen}\, 1}{x - 1}$$

Aproxime $\lim_{x \to 1} f(x)$ traçando o gráfico de f e calculando valores para algumas escolhas apropriadas de x.

(b) Use a identidade

$$\text{sen}\, \alpha - \text{sen}\, \beta = 2\, \text{sen}\, \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

para encontrar o valor exato de $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

31. Encontre os valores de x, se houver, nos quais a função dada não é contínua.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (b) $f(x) = |x^3 - 2x^2|$

(c) $f(x) = \dfrac{x + 3}{|x^2 + 3x|}$

32. Determine onde f é contínua.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 3}$ (b) $f(x) = \text{arc cos}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(c) $f(x) = e^{\ln x}$

33. Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 + 3, & x \leq 2 \\ x^2 + 9, & x > 2 \end{cases}$$

f é contínua em toda parte? Justifique sua conclusão.

34. Um dicionário descreve uma função contínua como "aquela cujos valores em cada ponto estão aproximados de perto pelos valores dos pontos vizinhos".

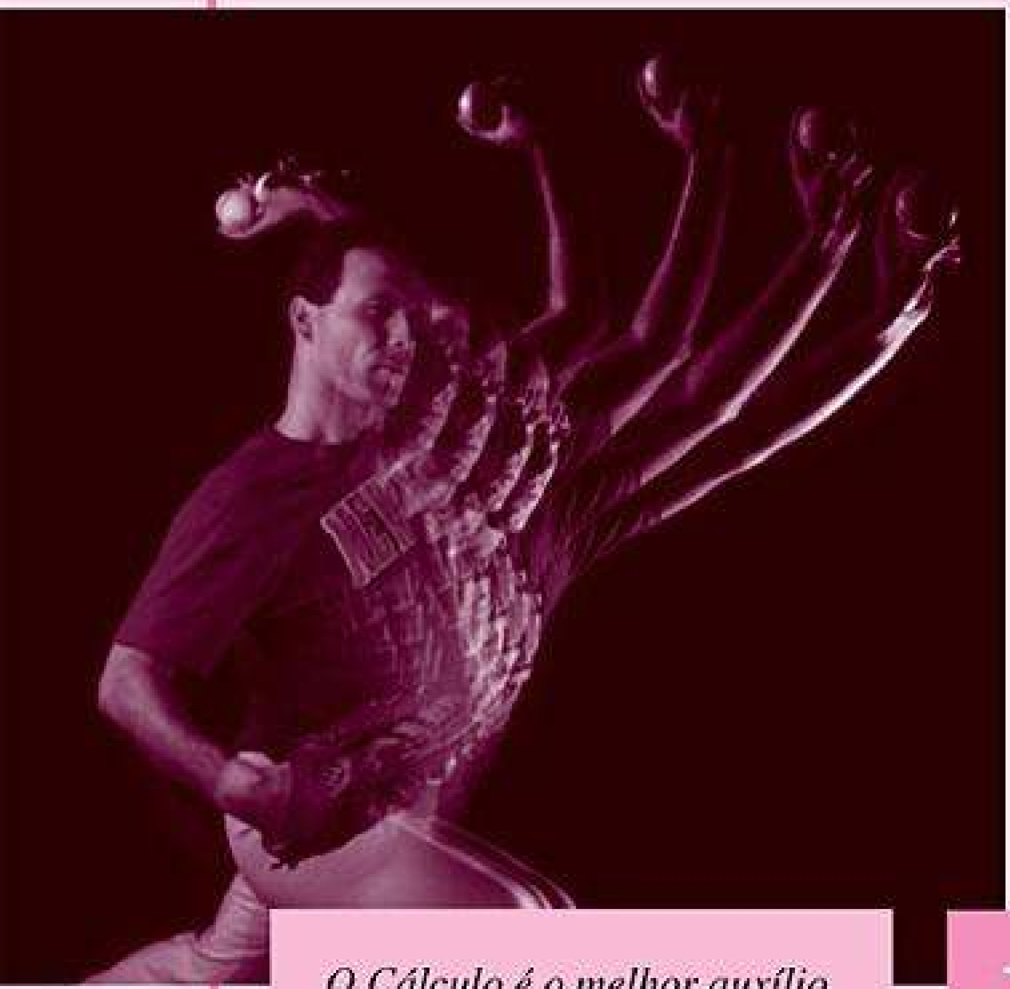
(a) Como você explicaria o significado dos termos "pontos vizinhos" e "aproximados de perto" para um não-matemático?

(b) Escreva um parágrafo que explique por que a definição do dicionário está em conformidade com a definição dada no livro.

35. Mostre que a conclusão do Teorema do Valor Intermediário pode ser falsa, se f não é contínua no intervalo $[a, b]$.

36. Suponha que f seja contínua no intervalo $[0, 1]$, que $f(0) = 2$ e que f não tenha zeros no intervalo. Prove que $f(x) > 0$ para todo x em $[0, 1]$.

37. Mostre que a equação $x^4 + 5x^3 + 5x - 1 = 0$ tem, no mínimo, duas soluções reais no intervalo $[-6, 2]$.



A DERIVADA

O Cálculo é o melhor auxílio de que dispomos para apreciar a verdade física no mais amplo sentido da palavra.

—William Fogg Osgood
Matemático

Muitos fenômenos físicos envolvem grandezas que variam, como a velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o número de bactérias em uma cultura, a intensidade do tremor de um terremoto, a voltagem de um sinal elétrico, e assim por diante. Neste capítulo desenvolveremos o conceito de "derivada", que é a ferramenta matemática para estudar a taxa segundo a qual varia uma quantidade em relação a outra. O estudo de taxas de variação está bastante relacionado com o conceito geométrico de uma reta tangente a uma curva, portanto, também discutiremos a definição geral de reta tangente e os métodos para encontrar sua inclinação e equação. Por fim, mostraremos como as derivadas podem ser usadas para aproximar funções não-lineares por funções lineares.

Foto: ***O coroamento das realizações do Cálculo é sua habilidade em capturar matematicamente o movimento contínuo, permitindo que seja analisado instante a instante.***

3.1 RETAS TANGENTES, VELOCIDADE E TAXAS DE VARIAÇÃO GERAIS

Nesta seção discutiremos três idéias: retas tangentes a curvas, a velocidade de um objeto movendo-se em linha reta e a taxa segundo a qual uma variável muda em relação a outra. Nosso objetivo é mostrar como essas idéias aparentemente sem conexão estão, na realidade, estreitamente relacionadas.

RETAS TANGENTES

No Exemplo 1 da Seção 2.1 mostramos como a noção de limite pode ser utilizada para encontrar uma equação para a reta tangente a uma curva. Naquele estágio não tínhamos definições precisas de retas tangentes nem de limites para utilizar e, portanto, nossos argumentos foram intuitivos e informais. Contudo, agora que os limites foram definidos com precisão, estamos em condições de dar uma definição matemática de reta tangente a uma curva $y = f(x)$ num ponto $P(x_0, f(x_0))$ da curva. Como ilustramos na Figura 3.1.1, considere um ponto $Q(x, f(x))$ na curva que seja distinto de P e calcule a inclinação m_{PQ} da reta secante por P e Q:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Quando x tende a x_0, então o ponto Q caminha na curva e se aproxima do ponto P. Se a reta secante por P e Q atingir alguma posição limite quando $x \to x_0$, então consideraremos essa posição como a posição da reta tangente em P. Dito de outra maneira, se a inclinação m_{PQ} da

reta secante por P e Q tender a um limite quando $x \to x_0$, então consideraremos esse limite como a inclinação m_{tg} da reta tangente em P. Assim, temos a definição seguinte.

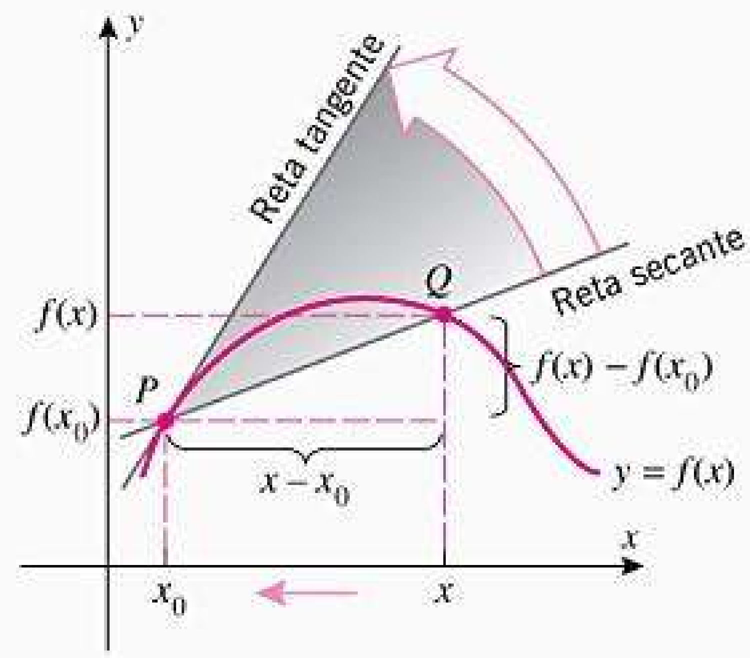


Figura 3.1.1

3.1.1 DEFINIÇÃO Suponha que x_0 seja um ponto do domínio da função f. A ***reta tangente*** à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta de equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

onde

$$m_{tg} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

sempre que existir o limite. Para simplificar, também dizemos que essa reta é a reta tangente a $y = f(x)$ em x_0.

► Exemplo 1 Use a Definição 3.1.1 para encontrar uma equação para a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$ e confirme que o resultado confere com o obtido no Exemplo 1 da Seção 2.1.

Solução Aplicando a Fórmula (1) com $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$, temos

$$\begin{aligned} m_{tg} &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2 \end{aligned}$$

Assim, a reta tangente a $y = x^2$ em (1, 1) tem a equação

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = 2x - 1$$

que confere com o Exemplo 1 da Seção 2.1. ◄

Há uma maneira alternativa de expressar a Fórmula (1) que também é muito usada. Denotando por h a diferença

$$h = x - x_0$$

então, a afirmação de que $x \to x_0$ é equivalente à afirmação de que $h \to 0$; portanto, podemos reescrever (1) em termos de x_0 e de h como

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2}$$

Embora essa fórmula seja diferente de (1), realmente é apenas uma outra maneira de expressar a inclinação de uma reta tangente como um limite de inclinações de secantes (Figura 3.1.2)

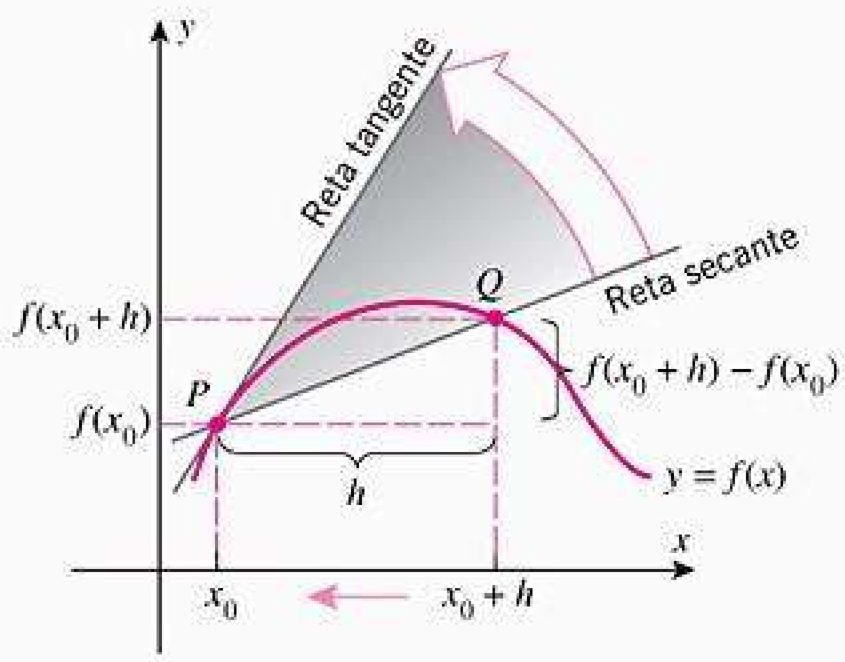


Figura 3.1.2

► Exemplo 2 Calcule a inclinação no Exemplo 1 usando a Fórmula (2).

As Fórmulas (1) e (2) para m_{tg} quase sempre conduzem a uma forma indeterminada do tipo 0/0; portanto, é necessário efetuar alguma simplificação algébrica ou utilizar outro método para determinar o limite de tais indeterminações.

Solução Aplicando a Fórmula (2) com $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} m_{tg} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2 \end{aligned}$$

o que está de acordo com a inclinação encontrada no Exemplo 1. ◄

► Exemplo 3 Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = 2/x$ no ponto (2, 1) dessa curva.

Solução Vamos encontrar a inclinação da reta tangente aplicando a Fórmula (2) com $f(x) = 2/x$ e $x_0 = 2$. Temos

$$\begin{aligned} m_{tg} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{2+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{2-(2+h)}{2+h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(2+h)} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{2+h} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

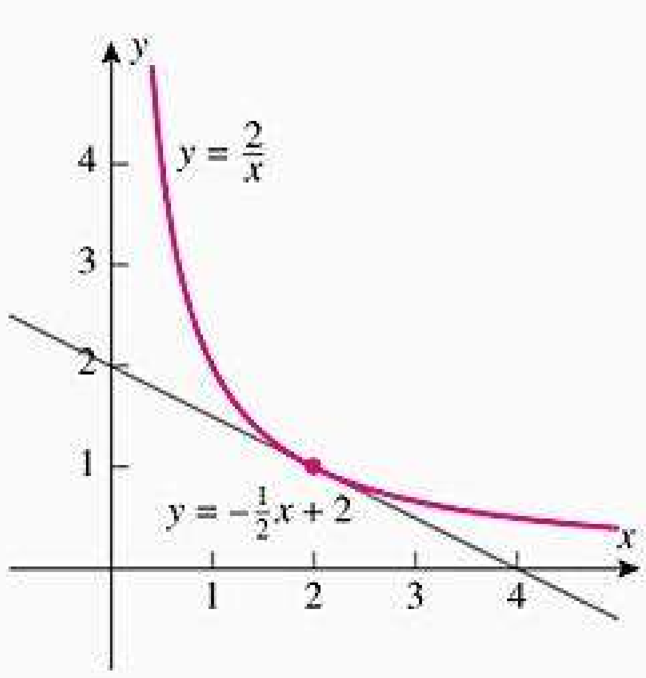


Figura 3.1.3

Assim, uma equação da reta tangente em (2, 1) é

$$y - 1 = -\tfrac{1}{2}(x - 2) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = -\tfrac{1}{2}x + 2$$

(ver Figura 3.1.3). ◄

▶ Exemplo 4 Encontre as inclinações das retas tangentes à curva $y = \sqrt{x}$ em $x_0 = 1$, $x_0 = 4$ e $x_0 = 9$.

Solução Poderíamos calcular cada uma dessas inclinações, mas é mais eficiente encontrar a inclinação para um valor arbitrário de x_0 e depois substituir os valores numéricos específicos dados. Dessa forma, obtemos

$$
\begin{aligned}
m_{\text{tg}} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}
$$

Racionalize o numerador para ajudar a eliminar a forma indeterminada do limite

As inclinações em $x_0 = 1$, 4 e 9 agora podem ser obtidas substituindo esses valores na fórmula geral de m_{tg}. Assim:

$$
\text{inclinação em } x_0 = 1 \text{ é } \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}, \quad \text{inclinação em } x_0 = 4 \text{ é } \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}
$$

$$
\text{inclinação em } x_0 = 9 \text{ é } \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}
$$

(ver Figura 3.1.4). ◀

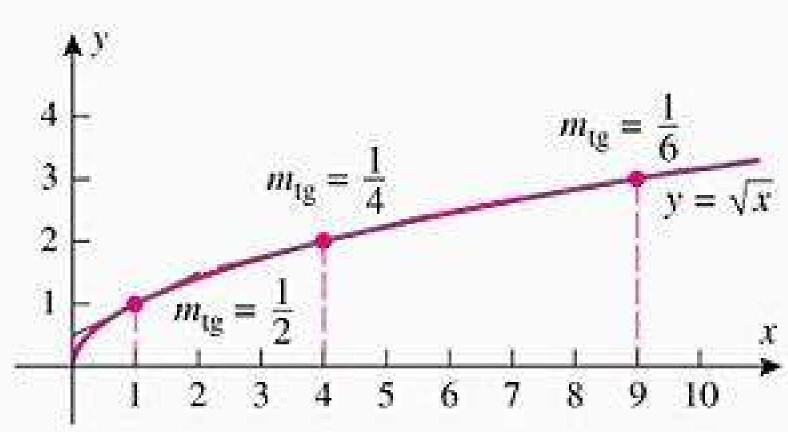


Figura 3.1.4

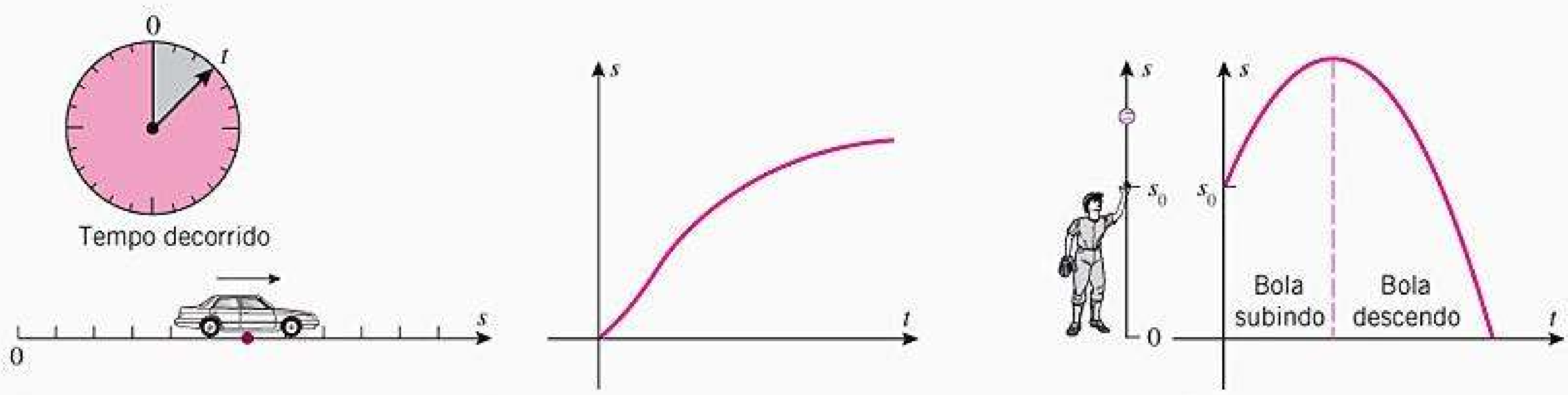
■ MOVIMENTO RETILÍNEO

Um dos temas importantes do Cálculo é o estudo do movimento. Para descrever completamente o movimento de um objeto é necessário especificar sua ***velocidade***, a direção e o sentido em que está se movendo. Por exemplo, saber que um avião tem uma velocidade de 800 km/h nos diz quão rápido ele é, mas não para onde está indo. Por outro lado, saber que sua velocidade é de 800 km/h *em direção ao Sul* esclarece não apenas o quão rápido ele é como também a direção e o sentido de seu movimento.

Adiante estudaremos o movimento de objetos que se movem ao longo de curvas nos espaços bi e tridimensional, mas por enquanto consideraremos apenas o movimento ao longo de uma reta, o que constitui o ***movimento retilíneo***. Alguns exemplos disso são um pistão

movendo-se em um cilindro, um carro de corrida em uma pista reta, um objeto largado diretamente para baixo do alto de um prédio, uma bola que, jogada verticalmente para cima, volta verticalmente para baixo, e assim por diante.

Para fins computacionais, vamos supor que uma partícula em movimento retilíneo move-se ao longo de uma reta de coordenadas, como o eixo x ou o eixo y. Em discussões gerais, em que não há necessidade de sermos muito específicos, vamos considerar a reta de coordenadas como sendo um eixo s. Uma descrição gráfica do movimento retilíneo ao longo do eixo s pode ser obtida com um gráfico da coordenada s da partícula *versus* o tempo decorrido t desde o tempo inicial $t = 0$. Esse gráfico é a ***curva posição* versus *tempo*** da partícula. A Figura 3.1.5 mostra duas dessas curvas típicas. A primeira é para um carro que partiu da origem e se move somente no sentido positivo do eixo s. Nesse caso, s cresce com t crescente. A segunda é para uma bola que é jogada verticalmente para cima no sentido positivo de um eixo s a partir de uma altura inicial s_0 e, então, cai verticalmente para baixo no sentido negativo. Nesse caso, s cresce quando a bola sobe e decresce quando a bola desce.



O carro move-se somente no sentido positivo Curva posição *versus* tempo Curva posição *versus* tempo

Figura 3.1.5

Se uma partícula em movimento retilíneo percorre o eixo s de tal modo que a função da coordenada da posição em termos do tempo t decorrido é

$$s = f(t) \tag{3}$$

então f é denominada ***função posição da partícula***; o gráfico de (3) é a curva posição *versus* tempo.

DESLOCAMENTO E VELOCIDADE MÉDIA

A chave para descrever a velocidade de uma partícula em movimento retilíneo é a noção de "deslocamento". Se $[t_0, t_0 + h]$ é um dado intervalo de tempo, então definimos o ***deslocamento*** ou a ***variação na posição*** da partícula nesse intervalo como sendo a diferença entre as coordenadas de sua posição final e inicial:

$$\text{deslocamento no intervalo } [t_0, t_0 + h] = f(t_0 + h) - f(t_0) \tag{4}$$

O deslocamento é positivo se a posição final está no sentido positivo em relação à posição inicial, negativo se a posição final está no sentido negativo em relação à posição inicial, e zero se a posição final coincide com a posição inicial (Figura 3.1.6).

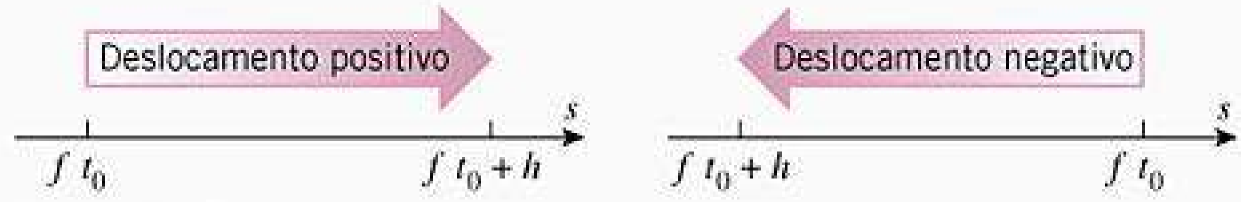


Figura 3.1.6

Quando uma partícula em movimento retilíneo move-se somente no sentido positivo ao longo de um intervalo de tempo, então o deslocamento nesse intervalo é igual à distância

percorrida pela partícula. Contudo, se a partícula pode mover-se em ambos os sentidos no intervalo de tempo dado, então o deslocamento e a distância percorrida podem diferir. Por exemplo, se a partícula se moveu 100 unidades no sentido positivo e depois 100 unidades no sentido negativo, a distância percorrida é de 200 unidades, mas o deslocamento é zero (pois as posições final e inicial coincidem).

É importante distinguir entre a *velocidade* (quão rápida é e em que sentido) e a *velocidade escalar* (quão rápida é) de uma partícula em movimento retilíneo. Isso é feito usando velocidade negativa para movimentos no sentido negativo e velocidade positiva para movimentos no sentido positivo. Assim, uma partícula com uma velocidade de −2 m/s tem uma velocidade escalar de 2 m/s e se move no sentido negativo, enquanto uma partícula com uma velocidade de 2 m/s tem uma velocidade escalar de 2 m/s e se move no sentido positivo.

Suponha que uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um eixo s tenha uma função posição $s = f(t)$. A ***velocidade média*** da partícula em um intervalo de tempo $[t_0, t_0 + h]$, com $h > 0$, é definida como

Mostre que (5) também vale para um intervalo de tempo $[t_0 + h, t_0]$, $h < 0$.

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \tag{5}$$

Para definir a velocidade escalar média, usamos a distância percorrida pela partícula, e não seu deslocamento. Por exemplo, se uma partícula se move 5 m no sentido positivo, e então retrocede 2 m no sentido negativo, seu deslocamento é de 3 m, mas a distância percorrida é de $5 + 2 = 7$ m. Definimos a *velocidade escalar média* como o quociente da distância percorrida pelo tempo decorrido:

$$\text{velocidade escalar}_m = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}}$$

No caso em que a partícula se move somente no sentido positivo, seu deslocamento e a distância percorrida em qualquer intervalo de tempo são iguais. Nesse caso, a velocidade média e a velocidade escalar média também são iguais.

► Exemplo 5 Suponha que $s = f(t) = 1 + 3t - 2t^2$ seja a função posição de uma partícula, onde s está em metros e t em segundos. Encontre o deslocamento e a velocidade média da partícula nos intervalos de tempo (a) [0, 1] e (b) [1, 3].

Solução (a) Aplicando (4) com $t_0 = 0$ e $h = 1$, vemos que o deslocamento é

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = f(1) - f(0) = 2 - 1 = 1 \text{ m}$$

Segue por (5) que a velocidade média no intervalo de tempo [0, 1] é de $1/1 = 1$ m/s.

Solução (b) Aplicando (4) com $t_0 = 1$ e $h = 2$, vemos que o deslocamento é

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = f(3) - f(1) = -8 - 2 = -10 \text{ m}$$

Segue por (5) que a velocidade média no intervalo de tempo [1, 3] é de $-10/2 = -5$ m/s. ◄

■ VELOCIDADE INSTANTÂNEA

A velocidade média descreve o comportamento de uma partícula em movimento retilíneo em um *intervalo* de tempo. Estamos interessados na "velocidade instantânea" da partícula, que descreve seu comportamento em um *instante* de tempo específico. A Fórmula (5) não é diretamente aplicável para calcular a velocidade instantânea, pois o "tempo decorrido" em um instante específico é zero, fazendo com que (5) se torne indefinida. Uma maneira de contornar esse problema é calcular velocidades médias para intervalos de tempo pequenos entre $t = t_0$ e $t = t_0 + h$. Essas velocidades médias podem ser vistas como aproximações da "velocidade instantânea" da partícula no instante t_0. Se essas velocidades médias tiverem um limite quando h tender a zero, então podemos tomar esse limite como sendo a "velocidade instantânea" da partícula no instante t_0. Vejamos um exemplo.

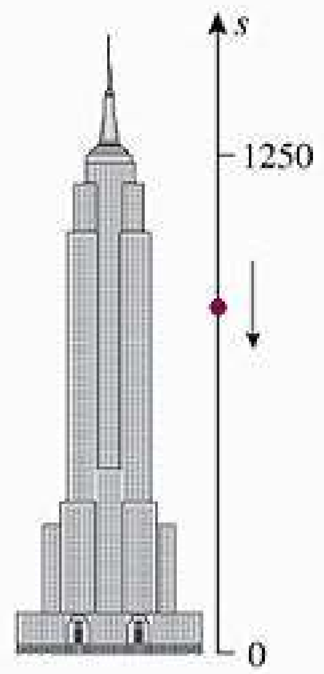


Figura 3.1.7

► Exemplo 6 Suponha que um objeto seja largado do repouso (ou seja, com velocidade inicial nula) desde o alto do Empire State Building, em Nova York, EUA, de uma altura de 1.250 pés acima do nível da rua. Mostra-se na Física que, com hipóteses simplificadoras adequadas, a altura s do objeto (em pés) acima do nível da rua, t segundos depois de ser largado, pode ser modelada pela função posição

$$s = f(t) = 1250 - 16t^2$$

(ver Figura 3.1.7). Verifique que o objeto não alcançou o nível da rua aos $t = 5$ segundos e encontre sua velocidade instantânea nesse instante.

Solução Inicialmente, observe que $f(5) = 1250 - 400 = 850$ pés, de modo que o objeto ainda está caindo 5 s depois de largado. Como uma primeira aproximação de sua velocidade instantânea no instante $t = 5$ s, calculemos a velocidade média no intervalo de tempo de $t = 5$ até $t = 6$. Segue de (5), com $t_0 = 5$ e $h = 1$, que

$$v_m = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{f(6) - f(5)}{1} = \frac{674 - 850}{1} = -176 \text{ pés/s}$$

Observe os valores negativos para a velocidade no Exemplo 6. Isso é consistente com o fato de que o objeto está se movendo no sentido negativo ao longo do eixo s.

Para melhorar essa aproximação inicial, calculemos a velocidade média em uma sucessão de intervalos de tempo cada vez menores. Deixamos a cargo do leitor verificar os resultados da Tabela 3.1.1. As velocidades médias nessa tabela parecem se aproximar de um limite de −160 pés/s, fornecendo evidência forte de que a velocidade instantânea no instante $t = 5$ é de −160 pés/s. Para confirmar isso analiticamente, começamos calculando a velocidade média do objeto em um intervalo de tempo genérico, entre $t = 5$ e $t = 5 + h$, usando a Fórmula (5):

Tabela 3.1.1

INTERVALO DE TEMPO	VELOCIDADE MÉDIA (pés/s)
$5{,}0 \le t \le 6{,}0$	−176
$5{,}0 \le t \le 5{,}1$	−161,6
$5{,}0 \le t \le 5{,}01$	−160,16
$5{,}0 \le t \le 5{,}001$	−160,016
$5{,}0 \le t \le 5{,}0001$	−160,0016

$$v_m = \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} = \frac{[1250 - 16(5 + h)^2] - 850}{h}$$

A velocidade instantânea do objeto no instante de tempo $t = 5$ é calculada como um limite quando $h \to 0$:

$$\begin{aligned}
\text{velocidade instantânea} &= \lim_{h \to 0} \frac{[1250 - 16(5 + h)^2] - 850}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{400 - 16(25 + 10h + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-16(10h + h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} -16(10 + h) = -160
\end{aligned}$$

Isso confirma nossa conjectura numérica de que a velocidade instantânea depois de 5 segundos é de −160 pés/s. ◄

Considere uma partícula em movimento retilíneo com função posição $s = f(t)$. Motivados pelo Exemplo 6, definimos a ***velocidade instantânea*** v_i da partícula no instante t_0 como o limite, quando $h \to 0$, das velocidades médias v_m nos intervalos de tempo entre $t = t_0$ e $t = t_0 + h$. Assim, a partir de (5), obtemos

$$v_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \tag{6}$$

Geometricamente, a velocidade média v_m entre $t = t_0$ e $t = t_0 + h$ é a inclinação da reta secante pelos pontos $P(t_0, f(t_0))$ e $Q(t_0 + h, f(t_0 + h))$ da curva posição *versus* tempo, e a velocidade instantânea v_i no instante t_0 é a inclinação da reta tangente à curva posição *versus* tempo no ponto $P(t_0, f(t_0))$ (Figura 3.1.8).

A velocidade instantânea é positiva quando a partícula se move no sentido positivo, é negativa quando a partícula se move no sentido negativo e é zero quando a partícula está

momentaneamente parada. Definimos a ***velocidade escalar instantânea*** no instante t_0 como o valor absoluto da velocidade instantânea:

$$\text{velocidade escalar instantânea}_i = |v_i| = \left| \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} \right| \qquad (7)$$

Isso nos diz quão rápido está se movendo a partícula no instante $t = t_0$, mas não fornece seu sentido. Assim, no Exemplo 6, a velocidade escalar instantânea do objeto no instante $t = 5$ s é $|-160| = 160$ pés/s, ao passo que sua velocidade instantânea naquele instante é de -160 pés/s.

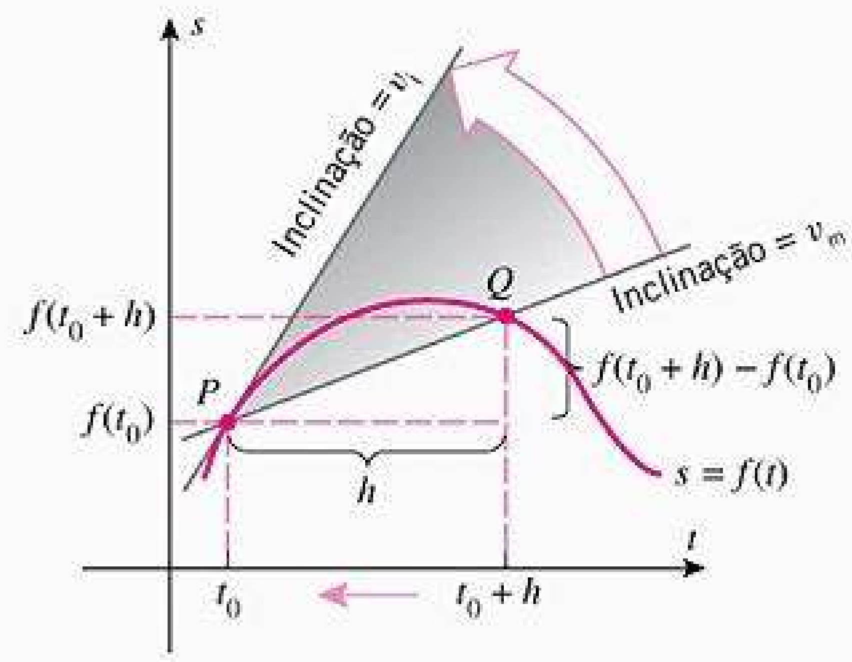
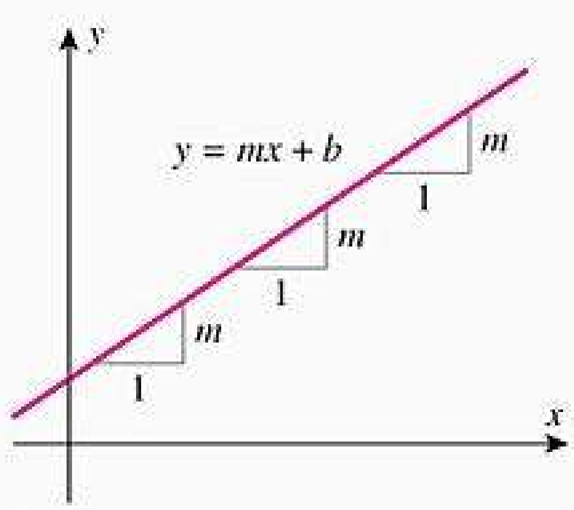


Figura 3.1.8

■ INCLINAÇÕES E TAXAS DE VARIAÇÃO

A velocidade pode ser vista como uma *taxa de variação*, mais precisamente, a taxa de variação da posição em relação ao tempo. As taxas de variação também ocorrem em outras aplicações. Por exemplo:

- Um biólogo pode estar interessado na taxa com que a quantidade de bactérias de uma colônia muda com o tempo.
- Um engenheiro pode estar interessado na taxa com que o comprimento de um cano de metal muda com a temperatura.
- Um economista pode estar interessado na taxa com que os custos de produção mudam com a quantidade do produto que está sendo produzido.
- Um médico pode estar interessado na taxa com que o raio de uma artéria muda com a concentração de álcool na corrente sangüínea.



Uma unidade de aumento em x produz sempre m unidades de variação em y.

Figura 3.1.9

Nosso próximo objetivo é definir precisamente o que se entende por "taxa de variação de y em relação a x" quando y é uma função de x. No caso em que y é uma função linear de x, digamos $y = mx + b$, a inclinação m é uma medida natural da taxa de variação de y em relação a x. Como ilustramos na Figura 3.1.9, cada aumento de 1 unidade em x em qualquer lugar ao longo da reta produz uma variação de m unidades de y, de modo que vemos que y muda a uma taxa constante em relação a x ao longo da reta e que é m que mede essa taxa de variação.

► Exemplo 7 Encontre a taxa de variação de y em relação a x se

(a) $y = 2x - 1$ (b) $y = -5x + 1$

Solução Em (a), a taxa de variação de y em relação a x é $m = 2$, de modo que um aumento de 1 unidade em x produz um aumento de 2 unidades de y. Em (b), a taxa de variação de y em relação a x é $m = -5$, de modo que um aumento de 1 unidade em x produz uma redução de 5 unidades de y. ◄

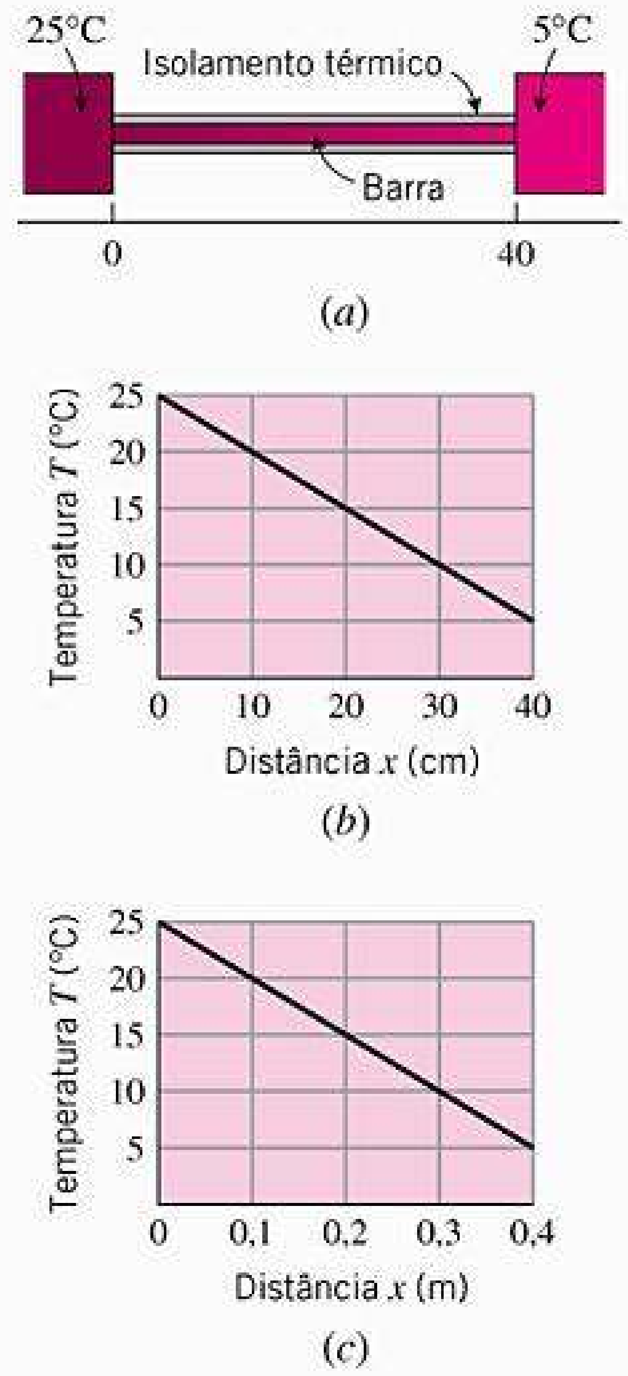


Figura 3.1.10

Em problemas aplicados, mudar as unidades de medida pode mudar a inclinação de uma reta; assim, é essencial incluir as unidades quando calculamos a inclinação. Os exemplos a seguir ilustram isso.

▶ **Exemplo 1** Considere uma barra uniforme de 40 cm (0,4 m) de comprimento, termicamente isolada em sua superfície lateral e com as extremidades mantidas a temperaturas constantes de 25º e 5ºC, respectivamente (Figura 3.1.10*a*). Mostra-se em Física que, sob condições apropriadas, o gráfico da temperatura T *versus* a distância x da extremidade esquerda da barra é uma linha reta. As partes (*b*) e (*c*) da Figura 3.1.10 mostram dois desses gráficos: um com x medido em centímetros e o outro em metros. As inclinações em ambos os casos são:

$$m = \frac{5-25}{40-0} = \frac{-20}{40} = -0{,}5 \tag{8}$$

$$m = \frac{5-25}{0{,}4-0} = \frac{-20}{0{,}4} = -50 \tag{9}$$

A inclinação de (8) indica que a temperatura *decresce* a uma taxa de 0,5ºC por centímetro de distância da extremidade esquerda da barra, e a de (9) indica que a temperatura decresce a uma taxa de 50ºC por metro de distância da extremidade esquerda da barra. Embora ambas as inclinações sejam diferentes, os dois resultados são fisicamente equivalentes. ◀

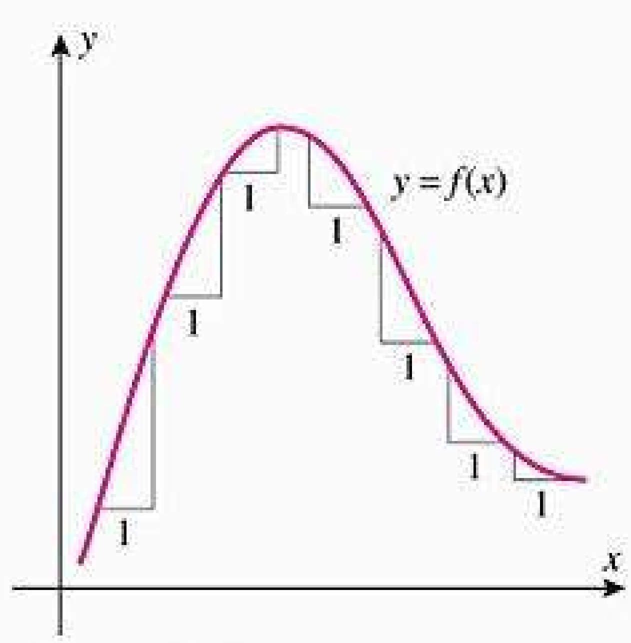


Figura 3.1.11

Muito embora a taxa de variação de y em relação a x seja constante ao longo de uma reta não-vertical $y = mx + b$, isso não é válido para uma curva qualquer $y = f(x)$. Por exemplo, na Figura 3.1.11, a variação em y que resulta de um aumento de 1 unidade em x tende a ter magnitude maior nas regiões em que a curva cresce ou decresce mais rapidamente do que em regiões em que a curva cresce ou decresce mais lentamente. Assim como fizemos com a velocidade, vamos distinguir entre a taxa de variação média sobre um intervalo e a taxa de variação instantânea em um ponto específico.

Se $y = f(x)$, então definimos a ***taxa de variação média de y em relação a x no intervalo*** $[x_0, x_1]$ como

$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{10}$$

e dizemos que a ***taxa de variação instantânea de y em relação a x é***

$$r_i = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{11}$$

Geometricamente, a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ é a inclinação da reta secante pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_1, f(x_1))$ (Figura 3.1.12), e a taxa de variação instantânea de y em relação a x em x_0 é a inclinação da reta tangente no ponto $P(x_0, f(x_0))$ (pois é o limite das inclinações das retas secantes por P).

Se quisermos, podemos tomar $h = x_1 - x_0$ e reescrever (10) e (11) como

$$r_m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{12}$$

$$r_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{13}$$

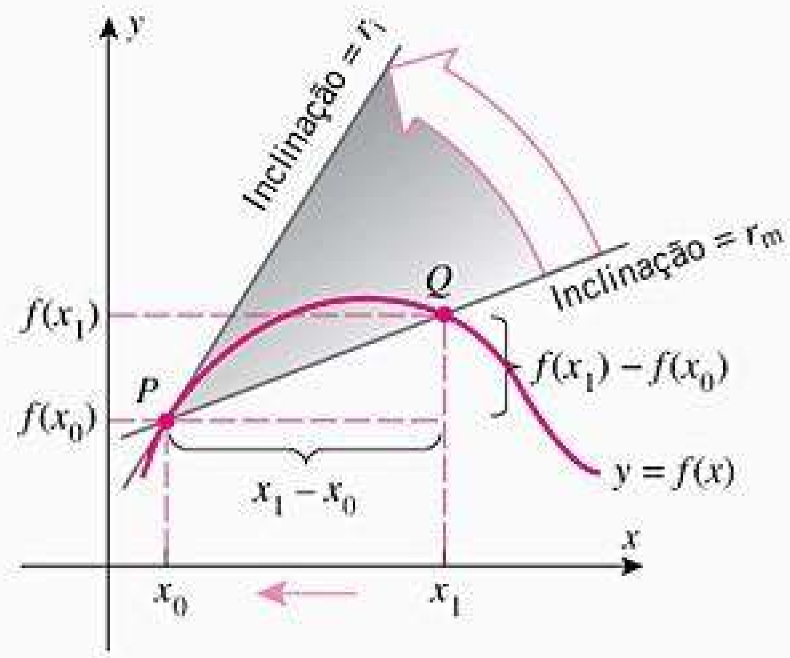


Figura 3.1.12

► Exemplo 9 Seja $y = x^2 + 1$.

(a) Encontre a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo [3, 5].

(b) Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x quando $x = -4$.

Solução (a) Aplicando a Fórmula (10) com $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 3$ e $x_1 = 5$, obtemos

$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{26 - 10}{2} = 8$$

Assim, y cresce uma média de 8 unidades por aumento de 1 unidade em x ao longo do intervalo [3, 5].

Solução (b) Aplicando a Fórmula (11) com $f(x) = x^2 + 1$ e $x_0 = -4$, obtemos

$$r_i = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to -4} \frac{f(x_1) - f(-4)}{x_1 - (-4)} = \lim_{x_1 \to -4} \frac{(x_1^2 + 1) - 17}{x_1 + 4}$$

$$= \lim_{x_1 \to -4} \frac{x_1^2 - 16}{x_1 + 4} = \lim_{x_1 \to -4} \frac{(x_1 + 4)(x_1 - 4)}{x_1 + 4} = \lim_{x_1 \to -4} (x_1 - 4) = -8$$

Assim, um pequeno aumento em x a partir de $x = -4$ acarretará aproximadamente um decréscimo de 8 unidades em y. ◄

Faça os cálculos do Exemplo 9 usando as Fórmulas (12) e (13).

■ TAXAS DE VARIAÇÃO EM APLICAÇÕES

Em problemas aplicados, as taxas de variação média e instantânea devem ser acompanhadas de unidades apropriadas. Em geral, as unidades de uma taxa de variação de y em relação a x são obtidas "dividindo-se" as unidades de y pelas unidades de x e, então, simplificando-se pelas regras usuais da Álgebra. Seguem-se alguns exemplos:

- Se y estiver em graus Celsius (°C) e x em centímetros (cm), então a unidade da taxa de variação de y em relação a x será graus Celsius por centímetro (°C/cm).
- Se y estiver em metros por segundo (m/s) e x em segundos (s), então a unidade da taxa de variação de y em relação a x será metros por segundo por segundo (m/s/s), o que é usualmente notado por m/s^2.
- Se y estiver em newton-metros (N · m) e x em metros, então a unidade da taxa de variação de y em relação a x será newtons (N), pois N · m/m = N.
- Se y estiver em metro-quilos (m · kg) e x em horas (h), então a unidade da taxa de variação de y em relação a x será metro-quilos por hora (m · kg/h).

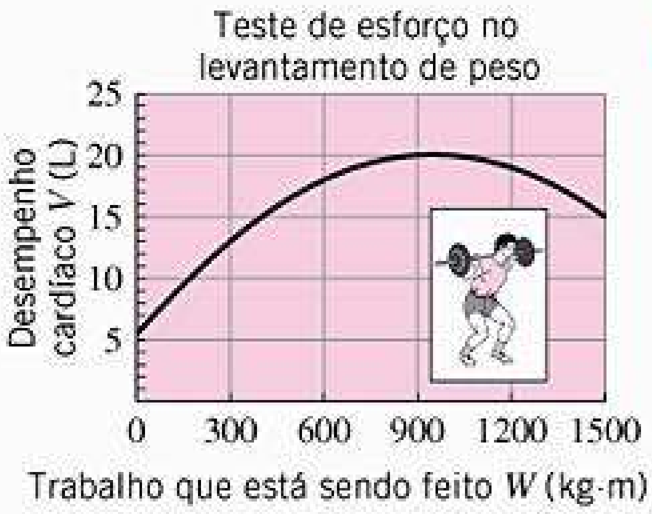


Figura 3.1.13

▶ Exemplo 10 O fator limitante na resistência atlética é o desempenho cardíaco, isto é, o volume de sangue que o coração pode bombear por unidade de tempo durante uma competição atlética. A Figura 3.1.13 mostra um gráfico de teste de esforço de desempenho cardíaco V em litros (L) de sangue *versus* a quantidade de trabalho que está sendo feita W em quilogramas-metros (kg · m) durante 1 minuto de levantamento de peso. O gráfico ilustra o conhecido fato médico de que o desempenho cardíaco aumenta com a quantidade de trabalho, mas, depois de atingir um valor de pico, começa a cair.

(a) Use a reta secante que aparece na Figura 3.1.14*a* para estimar a taxa média de desempenho cardíaco em relação ao trabalho a ser executado quando este aumenta de 300 para 1200 kg · m.

(b) Use a reta tangente da Figura 3.1.14*b* para estimar a taxa de variação instantânea do desempenho cardíaco em relação ao trabalho que está sendo executado no ponto onde ele é de 300 kg · m.

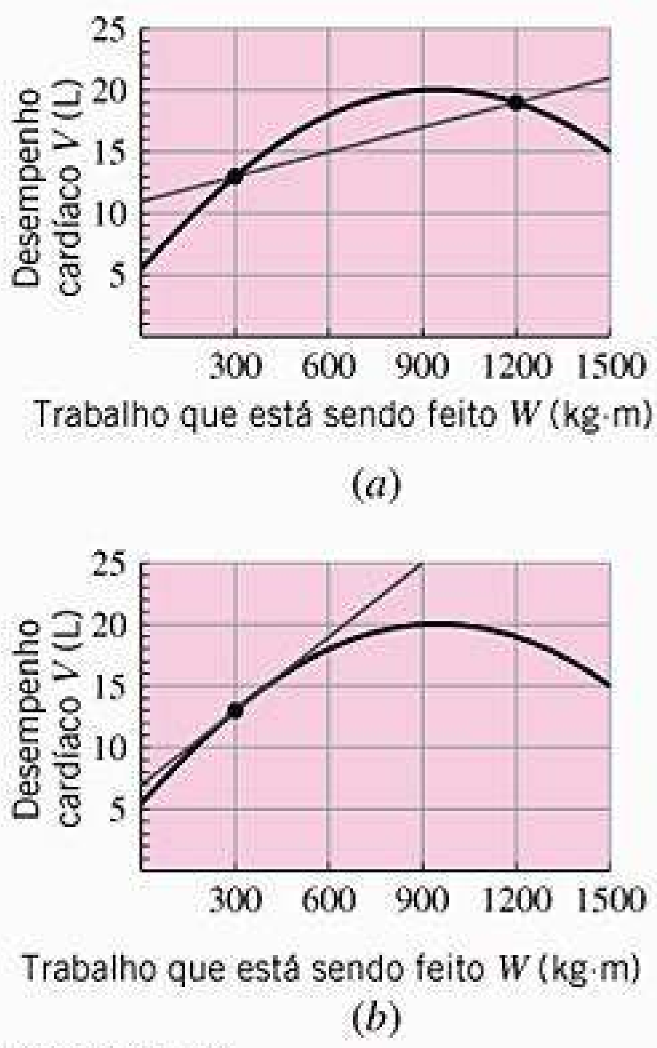


Figura 3.1.14

Solução (a) Usando os pontos estimados (300, 13) e (1200, 19), a inclinação da reta secante da Figura 3.1.14*a* é

$$r_m \approx \frac{19 - 13}{1200 - 300} \approx 0{,}0067 \frac{\text{L}}{\text{kg·m}}$$

Isso significa que, em média, o aumento de 1 unidade no trabalho que está sendo executado produz um aumento de 0,0067 L no desempenho cardíaco no intervalo.

Solução (b) Estimamos a inclinação da curva de desempenho cardíaco em $W = 300$ traçando uma reta que parece encontrar a curva em $W = 300$ com inclinação igual à da curva (Figura 3.1.14*b*). Estimando os pontos (0, 7) e (900, 25) nessa reta, obtemos

$$r_i \approx \frac{25 - 7}{900 - 0} = 0{,}02 \frac{\text{L}}{\text{kg·m}} \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.1 (*Ver página 178 para respostas.*)

1. A inclinação m_{tg} da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é dada por
$$m_{tg} = \lim_{x \to x_0} ________ = \lim_{h \to 0} ________$$

2. A reta tangente à curva $y = (x - 1)^2$ no ponto $(-1, 4)$ tem equação $4x + y = 0$. Assim, o valor do limite
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$$
é __________.

3. Uma partícula se move ao longo de um eixo s, onde s está em metros. Durante os primeiros 5 segundos do movimento, a posição da partícula é dada por
$$s = 10 - (3 - t)^2, \quad 0 \le t \le 5$$
Use essa função posição para completar cada parte.
   (a) Inicialmente, a partícula avança uma distância de ______ m no sentido __________ (positivo/negativo); depois reverte o sentido, percorrendo uma distância de __________ m durante o período de 5 s restante.
   (b) A velocidade média da partícula no período de 5 segundos é __________.
   (c) A velocidade escalar média da partícula no período de 5 segundos é __________.

4. Seja $s = f(t)$ a equação de uma curva posição *versus* tempo para uma partícula em movimento retilíneo, onde s está em metros e t em segundos. Suponha que $s = -1$ quando $t = 2$ e que a velocidade instantânea da partícula nesse instante é de 3 m/s. A equação da reta tangente à curva posição *versus* tempo no instante $t = 2$ é __________.

5. Suponha que $y = x^2 + x$.
   (a) A taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $2 \le x \le 5$ é __________.
   (b) A taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = 0$ é __________.

EXERCÍCIOS 3.1

ENFOCANDO CONCEITOS

1. A figura abaixo mostra a curva de posição *versus* tempo para um elevador que se move para cima até 60 m e, então, descarrega seus passageiros.

(a) Estime a velocidade instantânea do elevador em $t = 10$ s.

(b) Esboce uma curva de velocidade *versus* tempo para o movimento do elevador no intervalo $0 \leq t \leq 20$.

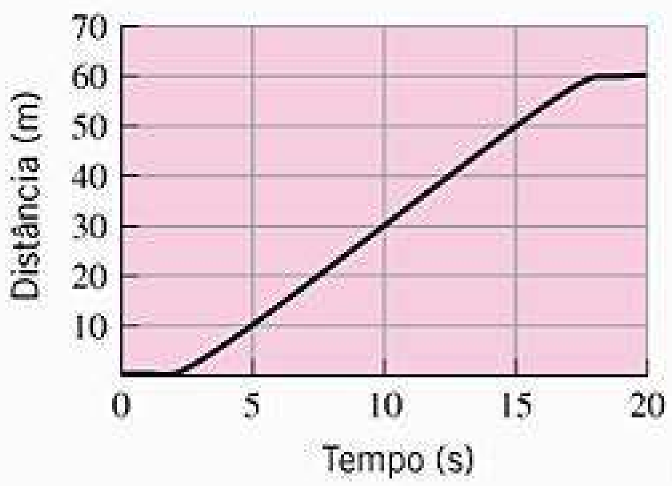


Figura Ex-1

2. A figura abaixo mostra a curva posição *versus* tempo de um automóvel durante um período de 10 s. Use os segmentos de reta mostrados na figura para estimar a velocidade instantânea do automóvel nos instantes $t = 4$ s e $t = 8$ s.

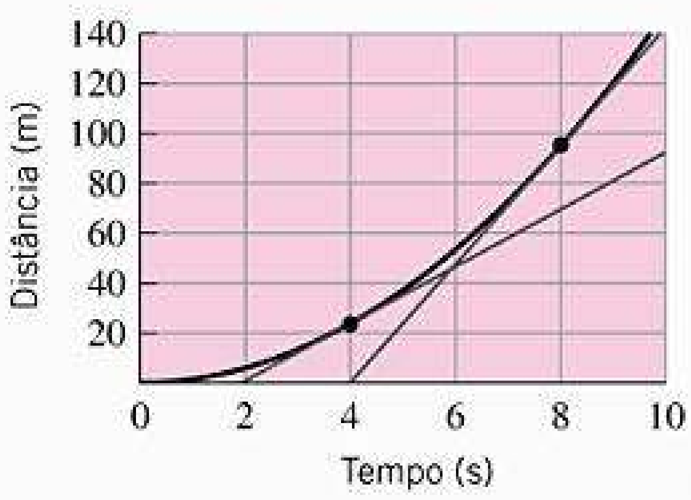


Figura Ex-2

3. Um pára-quedista cai verticalmente de um avião. A figura em anexo mostra o gráfico da distância s caída pelo pára-quedista *versus* o tempo t desde o salto do avião.

(a) Use o segmento de reta que acompanha o gráfico para estimar a velocidade escalar instantânea do pára-quedista no instante $t = 5$ s.

(b) Estime a velocidade escalar instantânea do pára-quedista no instante $t = 17,5$ s. O que parece estar ocorrendo com a velocidade escalar do pára-quedista ao longo do tempo?

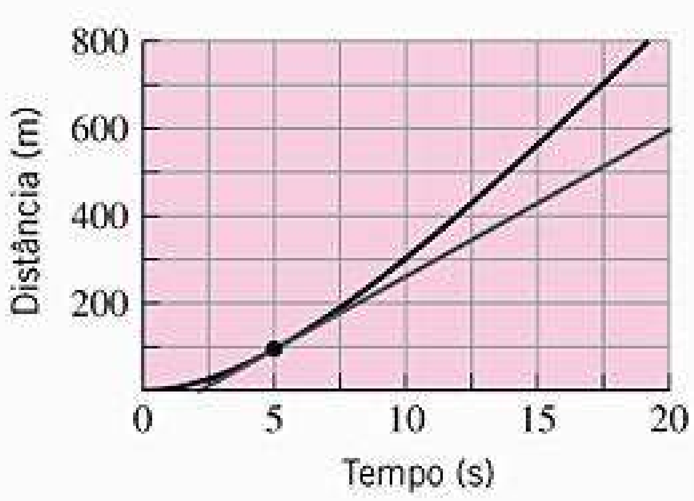


Figura Ex-3

4. A figura abaixo mostra a curva de posição *versus* tempo para uma certa partícula se movendo ao longo de uma linha reta. A partir do gráfico, estime as seguintes quantidades:

(a) a velocidade média no intervalo $0 \leq t \leq 3$.

(b) os valores de t nos quais a velocidade instantânea é zero.

(c) os valores de t nos quais a velocidade instantânea é máxima ou mínima.

(d) a velocidade instantânea quando $t = 3$ s.

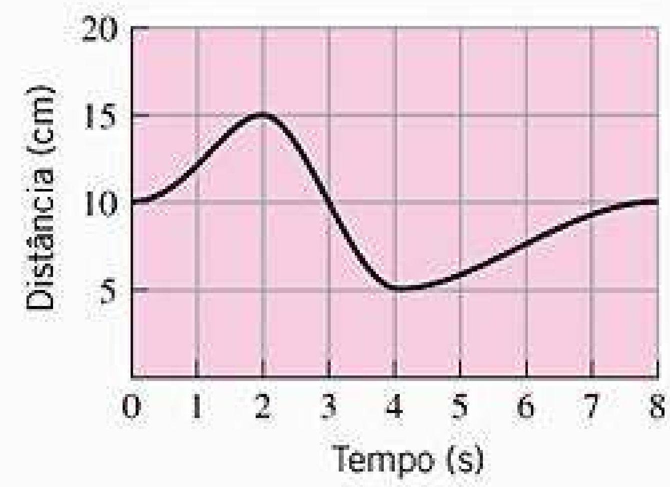


Figura Ex-4

5. A figura abaixo mostra a curva de posição *versus* tempo para certa partícula movendo-se sobre uma linha reta.

(a) Onde a partícula se move mais rapidamente, em t_0 ou t_2? Explique.

(b) Na origem, a tangente é horizontal. Que informação sobre a velocidade inicial da partícula isso nos dá?

(c) A partícula está aumentando ou diminuindo sua velocidade escalar em $[t_0, t_1]$? Explique.

(d) E no intervalo $[t_1, t_2]$, sua velocidade escalar está aumentando ou diminuindo? Explique.

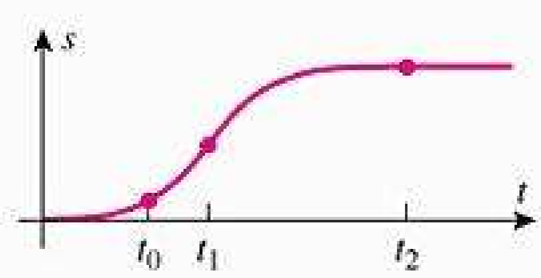


Figura Ex-5

6. Um automóvel, inicialmente em repouso, começa a se mover sobre um caminho reto. A velocidade aumenta de modo uniforme até que, de repente, ao ver uma barreira de concreto, o motorista freia firmemente em t_0. O carro desacelera rapidamente, mas é muito tarde – ele se choca com a barreira no instante t_1 e volta instantaneamente ao repouso. Esboce uma curva de posição *versus* tempo que possa representar o movimento do carro.

7. Se uma partícula se move com velocidade constante, o que pode ser dito sobre a curva de posição *versus* tempo?

8. As figuras em anexo mostram as curvas de posição *versus* tempo para quatro partículas diferentes movendo-se sobre linhas retas. Para cada partícula, determine se a velocidade instantânea está aumentando ou diminuindo com o tempo.

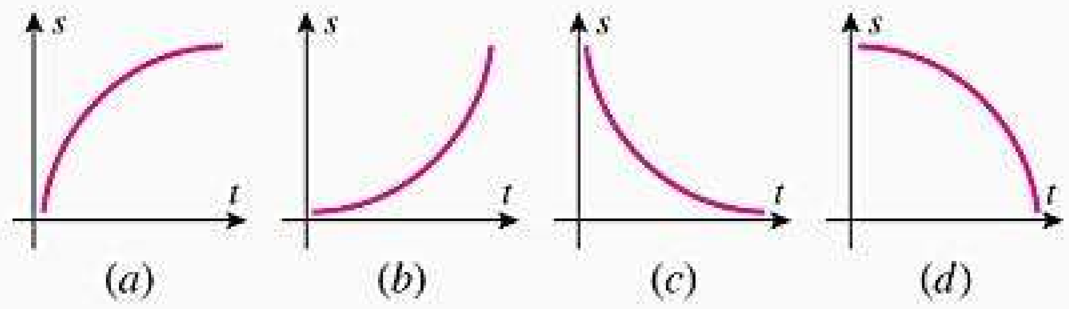


Figura Ex-8

9-12 São dados uma função $y = f(x)$ e os valores de x_0 e x_1.

(a) Encontre a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$.

(b) Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x no valor especificado de x_0.

(c) Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x em um valor arbitrário de x_0.

(d) A taxa de variação média em (a) é a inclinação de uma certa reta secante, e a taxa de variação instantânea em (b) é a inclinação de uma certa reta tangente. Esboce o gráfico de $y = f(x)$ junto com essas duas retas.

9. $y = 2x^2;\ x_0 = 0,\ x_1 = 1$

10. $y = x^3;\ x_0 = 1,\ x_1 = 2$

11. $y = 1/x;\ x_0 = 2,\ x_1 = 3$

12. $y = 1/x^2;\ x_0 = 1,\ x_1 = 2$

13-16 São dados uma função $y = f(x)$ e um valor de x_0.

(a) Encontre uma fórmula para a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto arbitrário $x = x_0$.

(b) Use a fórmula obtida em (a) para encontrar a inclinação da reta tangente para o dado valor de x_0.

13. $f(x) = x^2 - 1;\ x_0 = -1$

14. $f(x) = x^2 + 3x + 2;\ x_0 = 2$

15. $f(x) = \sqrt{x};\ x_0 = 1$

16. $f(x) = 1/\sqrt{x};\ x_0 = 4$

ENFOCANDO CONCEITOS

17. Suponha que na figura a seguir esteja a curva de temperatura externa em °F *versus* tempo relativa a um período de 24 horas.

(a) Estime a temperatura máxima e o instante no qual ela ocorre.

(b) O aumento da temperatura entre 8h e 14h é razoavelmente linear. Estime a taxa segundo a qual a temperatura está aumentando durante esse período.

(c) Estime o tempo no qual a temperatura decresce mais rapidamente. Estime a taxa de variação instantânea da temperatura em relação ao tempo naquele instante.

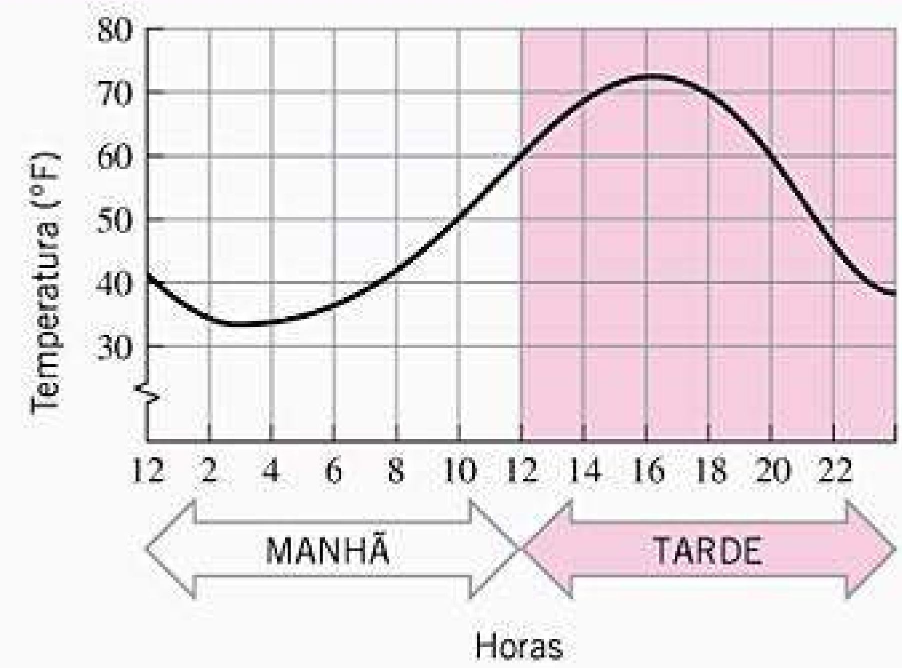


Figura Ex-17

18. A figura abaixo mostra o gráfico da pressão p em atmosferas (atm) *versus* o volume V em litros (L) de 1 mol de um gás ideal a uma temperatura constante de 300 K(kelvin). Use as retas tangentes mostradas para estimar a taxa de variação da pressão em relação ao volume nos pontos em que $V = 10$ L e $V = 25$ L.

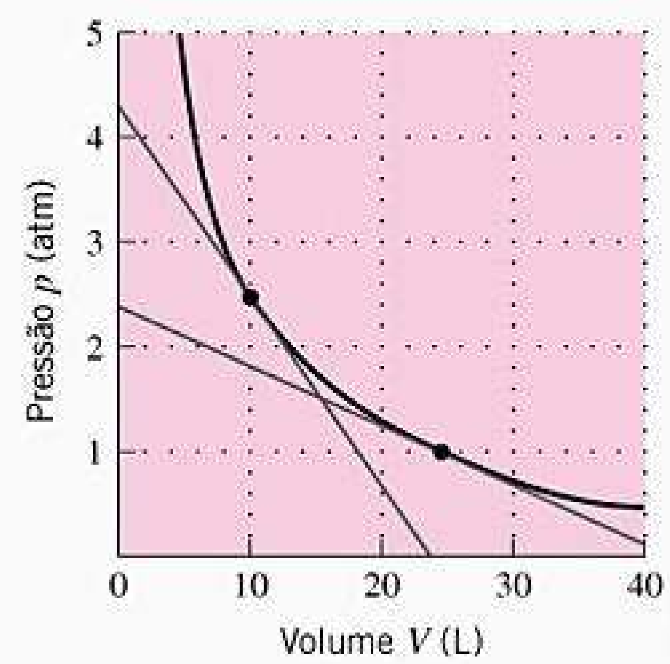


Figura Ex-18

19. A figura abaixo mostra o gráfico da altura h em centímetros *versus* a idade t em anos de um indivíduo, desde o nascimento até os 20 anos.

(a) Quando a taxa de crescimento é máxima?

(b) Estime a taxa de crescimento aos 5 anos.

(c) Aproximadamente em que idade, entre 10 e 20 anos, a taxa de crescimento é máxima? Estime a taxa de crescimento nessa idade.

(d) Esboce um gráfico aproximado da taxa de crescimento *versus* idade.

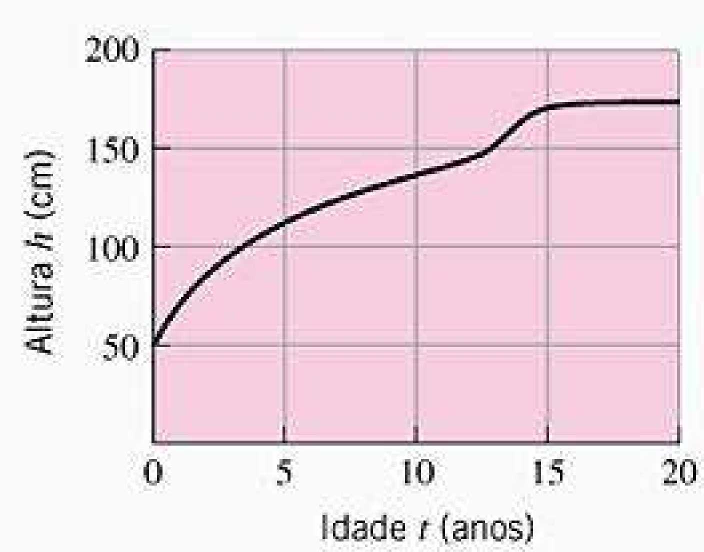


Figura Ex-19

20. Uma pedra cai de uma altura de 170 m em direção ao solo. Em t segundos, a distância percorrida pela pedra é de $s = 16t^2$ m.

(a) Quantos segundos após o início da queda a pedra atinge o solo?

(b) Qual é a velocidade média da pedra durante a queda?

(c) Qual é a velocidade média da pedra nos 3 primeiros segundos?

(d) Qual é a velocidade instantânea da pedra quando ela atinge o solo?

21. Durante os 40 segundos iniciais de vôo, um foguete é disparado diretamente para cima, de forma que a altura atingida em t segundos é de $s = t^3/\sqrt{10}$ m.

(a) Qual é a altura atingida em 40 s?

(b) Qual é a velocidade média do foguete durante os primeiros 40 s?

(c) Qual é a velocidade média do foguete durante os primeiros 135 m de vôo?

(d) Qual é a velocidade instantânea ao fim dos 40 segundos?

22. Um automóvel é conduzido ao longo de uma estrada reta de tal forma que, decorridos $0 \leq t \leq 12$ segundos, está a $s = 4{,}5t^2$ metros de sua posição inicial.

(a) Encontre a velocidade média do carro no intervalo [0, 12].

(b) Encontre a velocidade instantânea do carro aos $t = 6$ s.

23. Uma partícula move-se no sentido positivo de um eixo de tal forma que, após t minutos, sua distância é $s = 6t^4$ centímetros da origem.

(a) Encontre a velocidade média da partícula no intervalo [2, 4].

(b) Encontre a velocidade instantânea em $t = 2$.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.1

1. $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **2.** -4 **3.** (a) 9; positivo; 4 (b) 1 m/s (c) $\dfrac{13}{5}$ m/s **4.** $s = 3t - 7$

5. (a) $r_m = 8$ (b) $r_i = 1$

3.2 FUNÇÃO DERIVADA

Nesta seção discutiremos o conceito de uma "derivada", que é a principal ferramenta matemática utilizada para calcular e estudar as taxas de variação.

■ DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO DERIVADA

Na última seção mostramos que se o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe, então podemos interpretá-lo ou como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$, ou como a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = x_0$ [ver Fórmulas (2) e (13) daquela seção]. Esse limite é tão importante que possui notação especial:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Podemos pensar em f' (que se lê "éfe linha") como uma função cuja entrada é x_0 e cuja saída é o número $f'(x_0)$ que representa ou a inclinação da reta tangente a $y = f(x)$ em $x = x_0$, ou a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = x_0$. Para enfatizar esse ponto de vista funcional, substituímos x_0 por x em (1) e estabelecemos a definição a seguir.

A expressão

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que aparece em (2) é comumente chamada de "quociente de diferenças".

3.2.1 DEFINIÇÃO A função f' definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

é denominada ***derivada de f em relação a x***. O domínio de f' consiste em todos os x do domínio de f para os quais existe o limite.

O termo "derivada" é usado porque a função f' *deriva* da função f por meio de um limite.

▶ Exemplo 1 Encontre a derivada em relação a x de $f(x) = x^2 + 1$ e use-a para encontrar a equação da reta tangente a $y = x^2 + 1$ em $x = 2$.

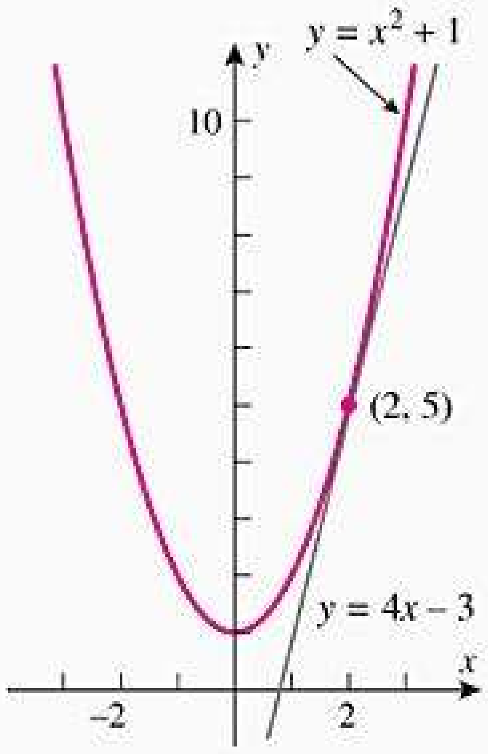


Figura 3.2.1

Solução Segue de (2) que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - [x^2 + 1]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

Assim, a inclinação da reta tangente a $y = x^2 + 1$ em $x = 2$ é $f'(2) = 4$. Como $y = 5$ para $x = 2$, a fórmula ponto-inclinação da reta tangente é

$$y - 5 = 4(x - 2)$$

que podemos reescrever no formato inclinação-corte como $y = 4x + 3$ (Figura 3.2.1). ◀

Podemos pensar em f' como uma função "que produz inclinações", no sentido de que o valor de $f'(x)$ em $x = x_0$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $x = x_0$. Esse aspecto da derivada está ilustrado na Figura 3.2.2, que mostra os gráficos de $f(x) = x^2 + 1$ e de sua derivada $f'(x) = 2x$ (obtida no Exemplo 1). A figura ilustra que os valores de $f'(x) = 2x$ em $x = -2$, 0 e 2 correspondem às inclinações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ nesses valores de x.

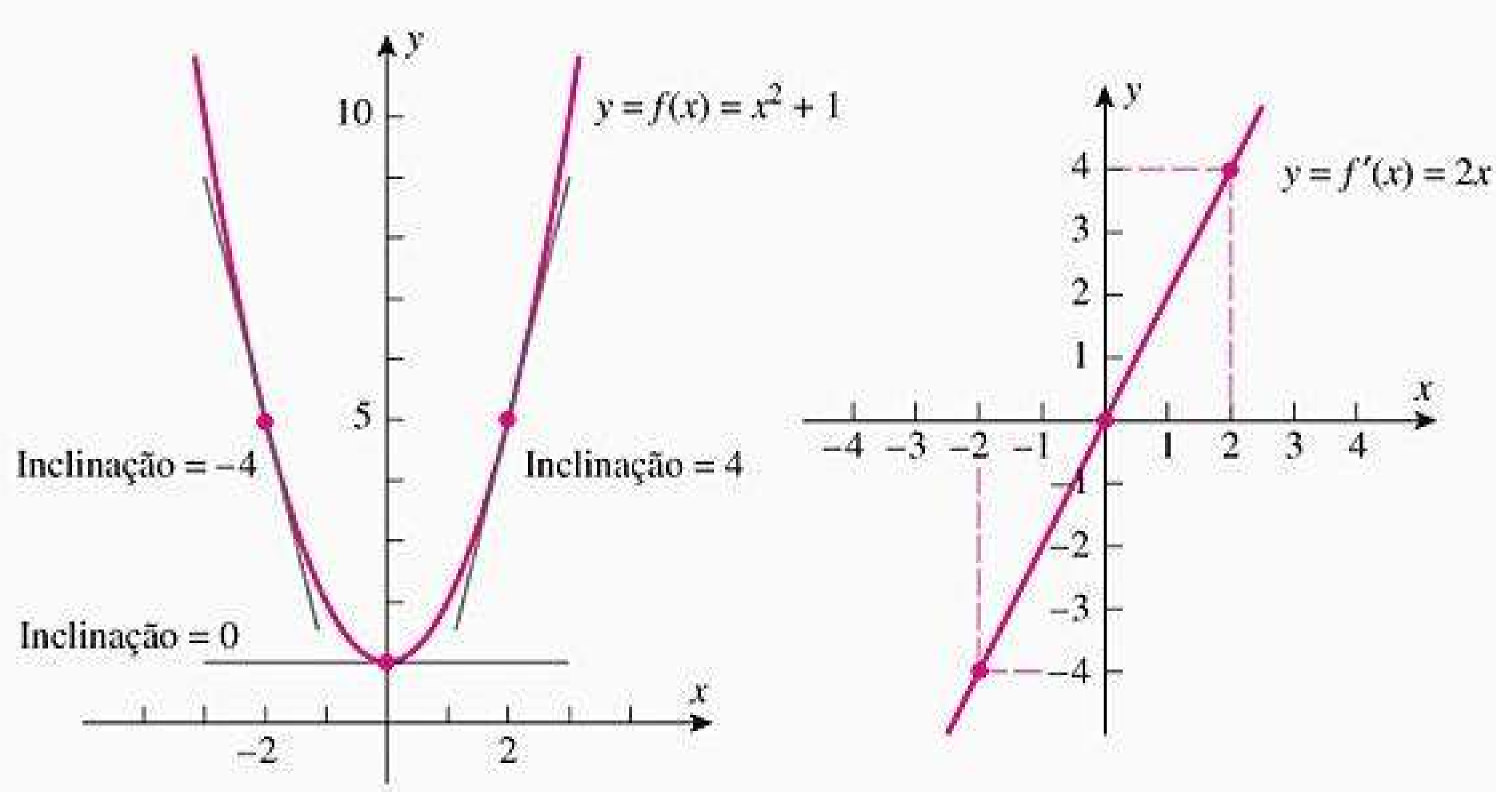


Figura 3.2.2

Em geral, se $f'(x)$ está definida em $x = x_0$, então a fórmula ponto-inclinação da equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ou, equivalentemente, por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

► Exemplo 2

(a) Encontre a derivada em relação a x de $f(x) = x^3 - x$.

(b) Faça os gráficos de f e f' juntos e discuta a relação entre ambos.

Solução (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h] - [x^3 - x]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} [3x^2 + 3xh + h^2 - 1] = 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

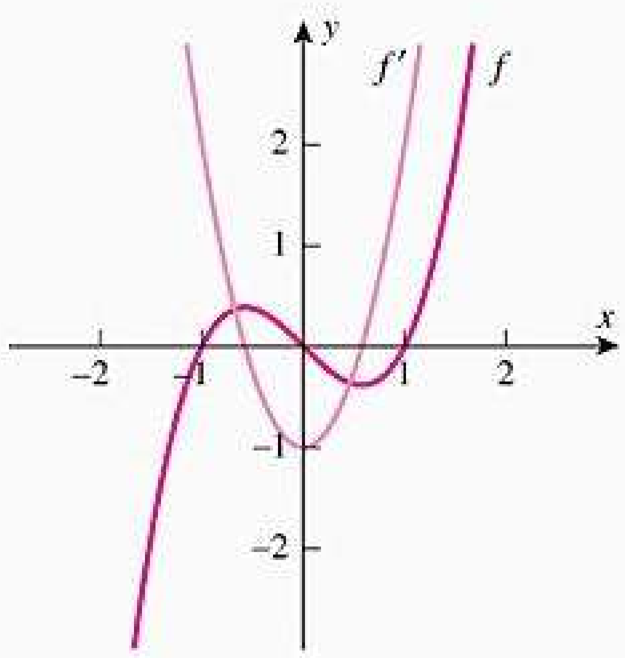


Figura 3.2.3

Solução (b) Uma vez que $f'(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto x, a derivada $f'(x)$ é positiva onde a reta tangente $y = f(x)$ tem inclinação positiva, é negativa onde a inclinação é negativa, e é zero onde a reta tangente é horizontal. Deixamos para o leitor a verificação de que isso está em conformidade com os gráficos de $f(x) = x^3 - x$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$ mostrados na Figura 3.2.3. ◄

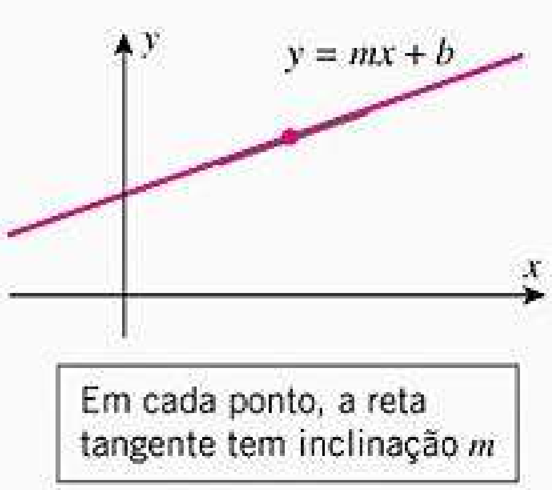


Figura 3.2.4

O resultado no Exemplo 3 é consistente com nossa observação anterior de que a taxa de variação de y em relação a x ao longo da reta $y = mx + b$ é constante, e essa constante é m.

► Exemplo 3

Em cada ponto x, a tangente à reta $y = mx + b$ coincide com a própria reta (Figura 3.2.4) e, portanto, todas as retas tangentes têm inclinação m. Isso sugere geometricamente que, se $f(x) = mx + b$, então $f'(x) = m$ para todo x. Isso é confirmado pelos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[m(x+h) + b] - [mx + b]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \to 0} m = m \end{aligned}$$ ◄

► Exemplo 4

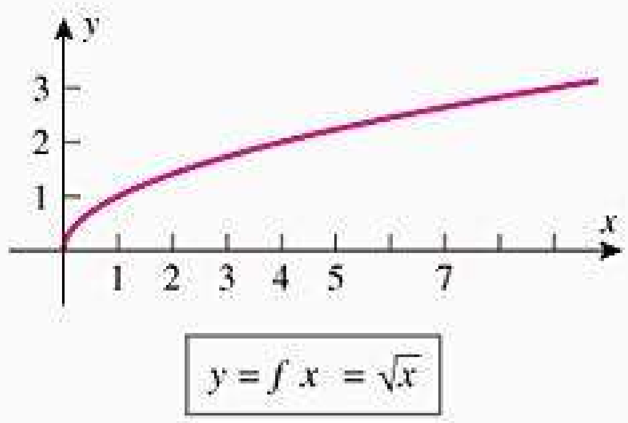
(a) Encontre a derivada em relação a x de $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) Encontre a inclinação da reta tangente a $y = \sqrt{x}$ em $x = 9$.

(c) Encontre os limites de $f'(x)$ quando $x \to 0^+$ e quando $x \to +\infty$, e explique o que esses limites dizem sobre o gráfico de f.

Solução (a) Lembre que no Exemplo 4 da Seção 3.1 obtivemos a inclinação da reta tangente a $y = \sqrt{x}$ em $x = x_0$ como sendo $m_{tg} = 1/(2\sqrt{x_0})$. Assim, $f'(x) = 1(2\sqrt{x})$.

Solução (b) A inclinação da reta tangente em $x = 9$ é $f'(9)$; logo, a partir de (a), essa inclinação é $f'(9) = 1/(2\sqrt{9}) = \frac{1}{6}$.



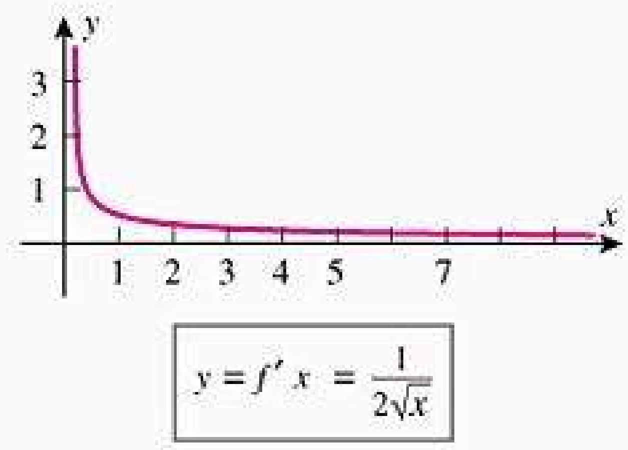


Figura 3.2.5

Solução (c) gráfic e f x $= \sqrt{x}$ e e f' x $= 1/$ $2\sqrt{x}$ ã m tra na Figura 3 2 5 b er e ue f' x >0 e $x>0$, ue significa ue t a a reta tangente a gráfic e $y=\sqrt{x}$ têm inc inação iti a em t nt e e inter a m

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

gráfic e t rna ca a ez mai ertica uan $x\to 0^+$ e ca a ez mai h riz nta uan $x\to+\infty$ ◀

■ USANDO DERIVADAS PARA CALCULAR VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Segue a Fórmu a a Seçã 3 1 ub tituin t_0 r t ue, e $s=f$ t é a unçã içã e uma artícu a em m iment reti íne , entã a e ci a e in tantânea em um in tante arbitrári t é a a r

$$v_i=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

m a ireit e a e uaçã é a eri a a a unçã f c m ariá e in e en ente t em ez e x, egue ue, e f t é a unçã içã e uma artícu a em m iment reti íne , entã a unçã

$$v(t)=f'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \qquad 4$$

re re enta a e ci a e in tantânea a artícu a n in tante t n e üentemente, izem ue 4 é a ***função velocidade instantânea*** u, mai im e mente, a ***função velocidade*** a artícu a

▶ Exemplo 5 embre ue n E em a Seçã 3 1 im ue, b hi óte e a r ria a , a unçã içã e um b et arga a t Em ire State ui ing, e uma a tura e 1250 é acima ní e a rua, e er m e a a e a unçã içã $s=f$ t $=$ $1250-1$ t^2 ui, f t é me i em é acima ní e a rua e t, em egun e i e er arga b et

a Enc ntre a unçã e ci a e b et

b Enc ntre inter a e tem a ng ua a e a unçã e ci a e

c ua é a e ci a e b et a atingir ní e a rua

Solução (a) Segue e 4 ue a unçã e ci a e é

$$\begin{aligned}v(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[1250-16(t+h)^2]-[1250-16t^2]}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-16[t^2+2th+h^2-t^2]}{h}=-16\left(\lim_{h\to 0}\frac{2th+h^2}{h}\right)\\&=-16\cdot\lim_{h\to 0}(2t+h)=-32t\end{aligned}$$

n e a uni a e a e ci a e ã é r egun

Solução (b) unçã e ci a e em a é á i a a artir in tante $t=0$, em ue b e t é arga , até in tante t_1, em ue bate n , u e a, uan

$1250-1$ $t_1^2=0$ u, e ui a entemente, 1 $t_1^2=1250$

Resolvendo para o valor positivo de t_1, concluímos que a função velocidade é válida até o instante

$$t_1 = \sqrt{\frac{1250}{16}} \approx 8{,}8 \text{ s}$$

Solução (c) Para encontrar a velocidade do objeto quando atinge o solo, substituímos o valor de t_1 obtido em (b) na função velocidade $v(t) = -32t$. Assim, obtemos

$$v(t_1) = -32t_1 = -32\sqrt{\frac{1250}{16}} \approx -282{,}8 \text{ pés/s} \blacktriangleleft$$

DIFERENCIABILIDADE

É possível que o limite que define a derivada de uma função f não exista em certos pontos do domínio de f. Nesses pontos, a derivada não está definida. Para levar em conta essa possibilidade, introduzimos a seguinte terminologia.

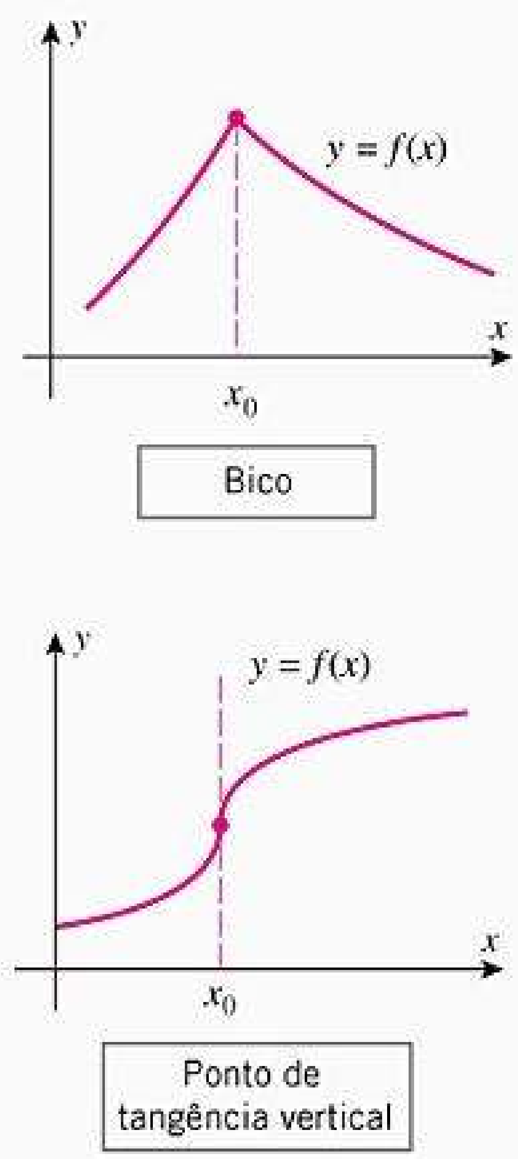


Figura 3.2.6

3.2.2 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***diferenciável*** ou ***derivável em*** $\boldsymbol{x_0}$ se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5}$$

Se f é diferenciável em cada ponto do intervalo aberto (a, b), então dizemos que a função é ***diferenciável em*** $\boldsymbol{(a, b)}$ e, analogamente, em intervalos abertos da forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e $(-\infty, +\infty)$. Nesse último caso, dizemos que f é ***diferenciável em toda parte.***

Geometricamente, uma função f é diferenciável em x_0 se o gráfico de f possuir uma reta tangente em x_0. Assim, f não é derivável em cada ponto x_0 em que as retas secantes pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$ distintos de P não tenderem a uma única posição limite *não-vertical* quando $x \to x_0$. A Figura 3.2.6 exibe duas situações comuns nas quais uma função que é contínua em x_0 pode deixar de ser derivável em x_0. Essas situações podem ser descritas informalmente como

- pontos com bico
- pontos de tangência vertical

Em um bico, as inclinações das retas secantes têm limites distintos pela esquerda e pela direita e, portanto, o limite *bilateral* que define a derivada não existe (Figura 3.2.7). Em um ponto de tangência vertical, as inclinações das retas secantes tendem a $+\infty$ ou $-\infty$ pela esquerda e pela direita (Figura 3.2.8), portanto, novamente o limite que define a derivada não existe.

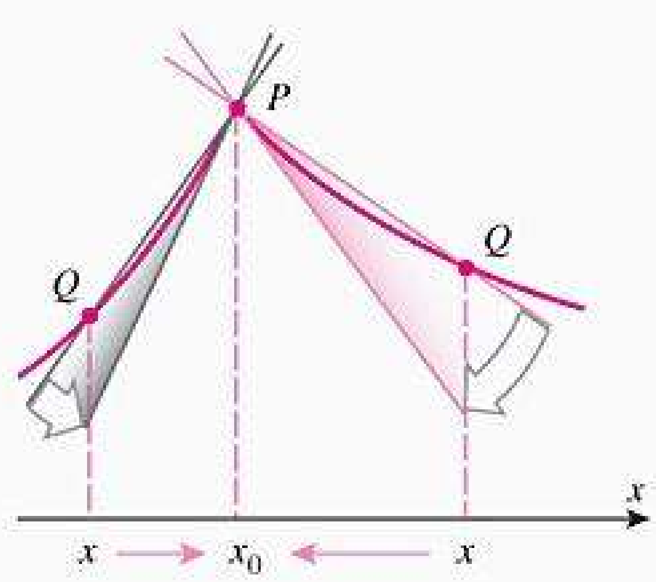


Figura 3.2.7

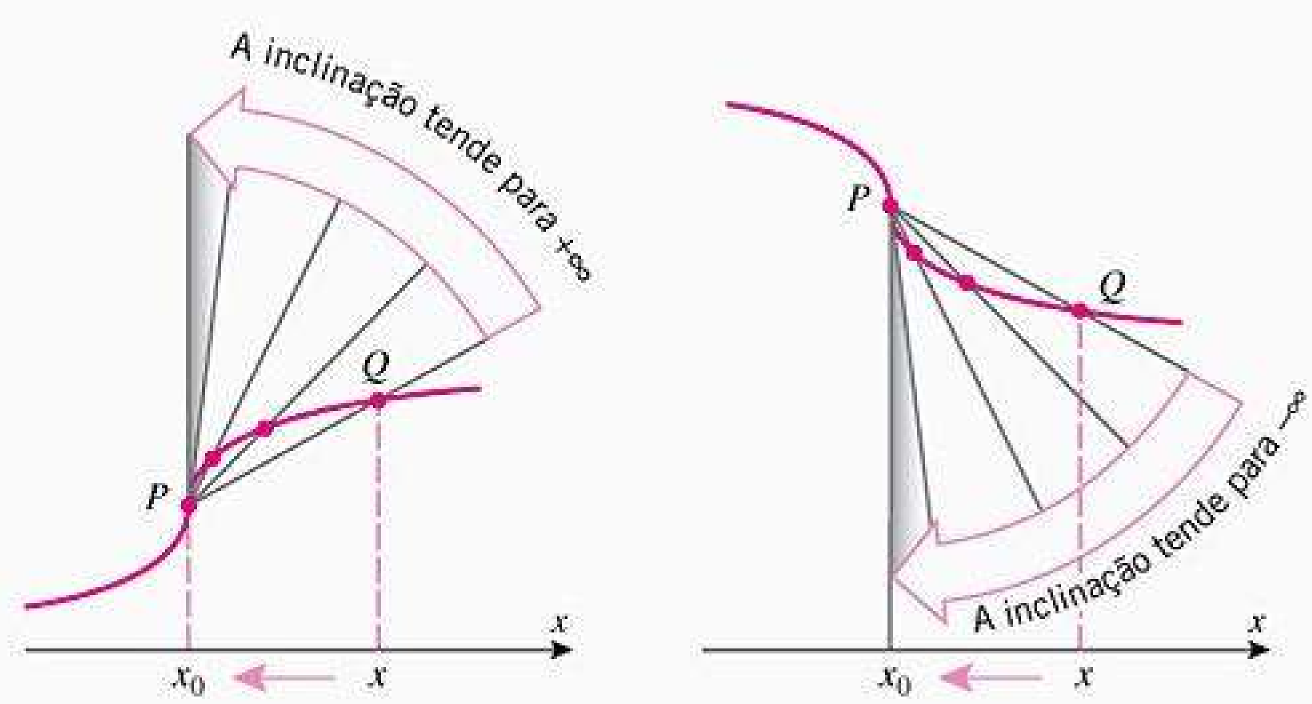


Figura 3.2.8

> Existem outras circunstâncias menos óbvias sob as quais uma função pode deixar de ser diferenciável. (Ver, por exemplo, o Exercício 45.)

Como ilustra a Figura 3.2.9, a diferenciabilidade em x_0 também pode ser descrita informalmente em termos do comportamento do gráfico de f sob ampliações cada vez maiores no ponto $P(x_0, f(x_0))$. Se f é derivável em x_0, então com ampliações suficientemente grandes em P o gráfico parece ser uma reta não-vertical (a reta tangente); se ocorrer um bico em x_0, então esse bico persistirá em qualquer ampliação, por maior que seja, e o gráfico nunca parecerá uma reta não-vertical; finalmente, se ocorrer uma tangência vertical em x_0, então o gráfico de f parecerá uma reta vertical com ampliações suficientemente grandes em P.

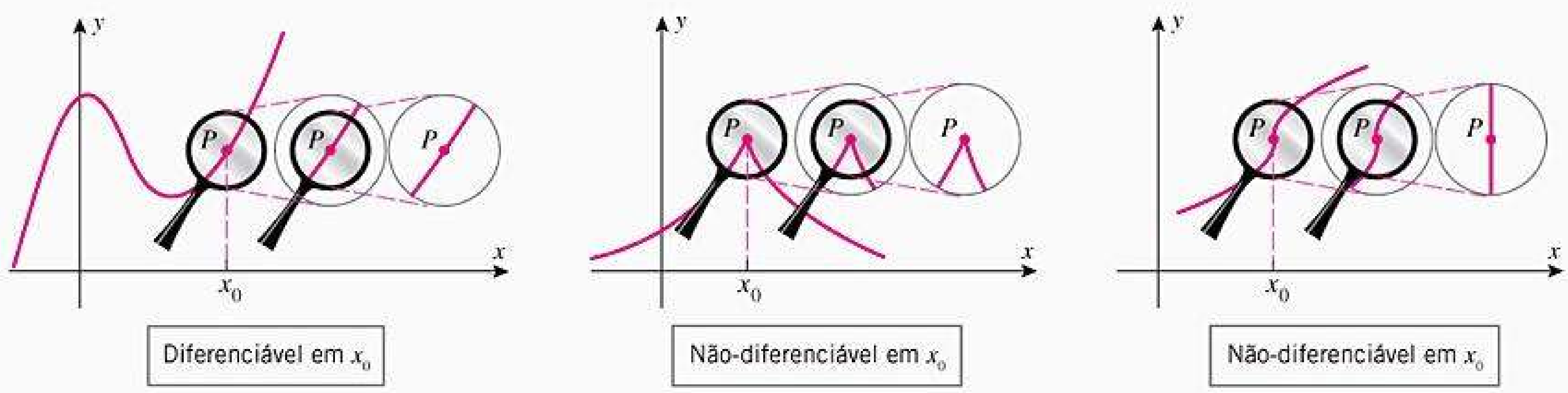


Figura 3.2.9

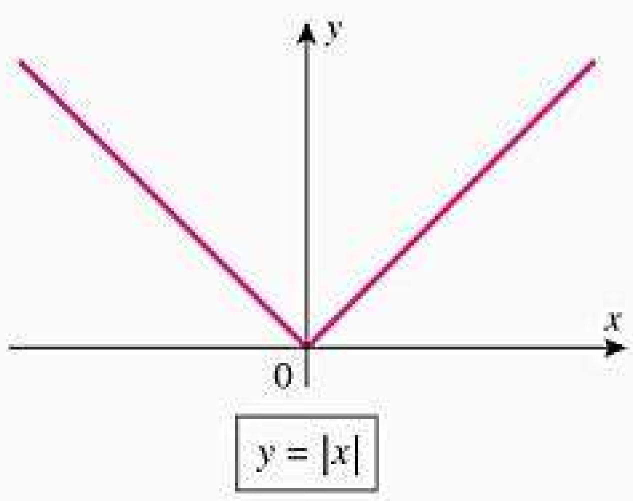


Figura 3.2.10

► Exemplo 6 O gráfico de $y = |x|$ na Figura 3.2.10 sugere que há um bico em $x = 0$, e isso implica que $f(x) = |x|$ não é diferenciável naquele ponto.

(a) Prove que $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$, mostrando que o limite na Definição 3.2.2 não existe naquele ponto.

(b) Encontre uma fórmula para $f'(x)$.

Solução (a) Da Fórmula (5) com $x_0 = 0$, o valor de $f'(0)$, se existisse, seria dado por

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \tag{6}$$

Mas,

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

portanto

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

Como esses limites não são iguais, o limite bilateral em (5) não existe e, conseqüentemente, $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$.

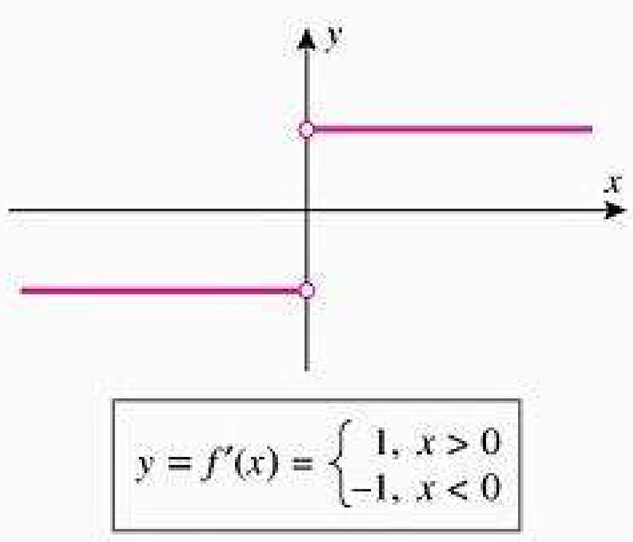


Figura 3.2.11

Solução (b) Uma fórmula para a derivada de $f(x) = |x|$ pode ser obtida escrevendo-se $|x|$ por partes e tratando-se os casos $x > 0$ e $x < 0$ separadamente. Se $x > 0$, então $f(x) = x$ e $f'(x) = 1$; e se $x < 0$, então $f(x) = -x$ e $f'(x) = -1$. Logo,

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

O gráfico de f' é mostrado na Figura 3.2.11. Observe que f' não é contínua em $x = 0$; logo, esse exemplo mostra que a derivada de uma função que é contínua em toda parte não precisa ser contínua em toda parte. ◄

A RELAÇÃO ENTRE DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE

á abem ue unção nã ã i erenciá ei em nt c m bic e em nt e tangência ertica ró im te rema m tra ue unção nã ã i erenciá ei em nt e e c n tinui a e Pr arem i m tran ue, e f é i erenciá e em um nt , entã f e e er c ntínua ne e nt

> Um teorema que diz "se a afirmação *A* é verdadeira, então a afirmação *B* é verdadeira" é equivalente ao teorema que diz "se a afirmação *B* não é verdadeira, então a afirmação *A* não é verdadeira". Dizemos que os dois teoremas estão em ***forma contrapositiva*** um ao outro. Assim, o Teorema 3.2.3 pode ser reescrito na forma contrapositiva como "se a função f não é contínua em x_0, então f não é diferenciável em x_0".

3.2.3 TEOREMA *Se f é diferenciável no ponto x_0, então f é contínua em x_0.*

DEMONSTRAÇÃO Su n ue f é i erenciá e em x_0, tem e, a artir e 5 , ue f' x_0 e i te e é a a r

$$f'(x_0) = \operatorname*{im}_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right] \qquad 7$$

Para m trar ue f é c ntínua em x_0, e em m trar ue $\operatorname*{im}_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, u, e ui a entemente,

$$\operatorname*{im}_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = 0$$

E re an i em term a ariá e $h = x - x_0$, e em r ar ue

$$\operatorname*{im}_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)] = 0$$

ntu , i e er r a u an e 7 , c m egue:

$$\begin{aligned}\operatorname*{im}_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)] &= \operatorname*{im}_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right]\\ &= \operatorname*{im}_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]\cdot \operatorname*{im}_{h\to 0} h\\ &= f'(x_0)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

■

ADVERTÊNCIA

> A recíproca do Teorema 3.2.3 é falsa, ou seja, *uma função pode ser contínua em um ponto sem ser diferenciável nele.* Isso ocorre, por exemplo, em bicos de funções contínuas. Por exemplo, $f\ x\ = |x|$ é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável nesse ponto (Exemplo 6).

re açã entre a c ntinui a e e a i erenciabi i a e te e gran e ignifica hi tó ric n e en iment á cu iníci écu X X, matemátic acre ita am ue, e uma unçã c ntínua ti e e muit nt e nã i erenciabi i a e, e e nt , c m ente e um err te, e eriam e tar e ara un utr e iga r egment e cur a i a Figura 3 2 12 E e e uí c i erruba r uma érie e e c berta ue c meçaram em 1 34 a ue e an , um a re, fi ó e matemátic a êmia, chama ernhar zan , e c briu uma rma e c n truir uma unçã c ntínua ue nã e i erenciá e em nenhum nt ai tar e, em 1 0, gran e matemátic a emã ar eier tra bi grafia 13 a re ent u a rimeira órmu a ara uma ta unçã E e gráfic ã im í ei e er traça bic ã tã numer ue t a am iaçã e um egment a cur a re e a mai bic e c berta e a unçõe at ógica i im rtante, à me i a ue t rn u matemátic e c nfia e ua intuiçã ge métrica e e igente e r a matemática reci a ecentemente, tai unçõe a aram a e em enhar um a e un amenta n e tu e b et ge métri c en mina ***fractais*** ractai re e aram uma r em ara enômen naturai ue eram e carta anteri rmente c m en a eatóri e caótic

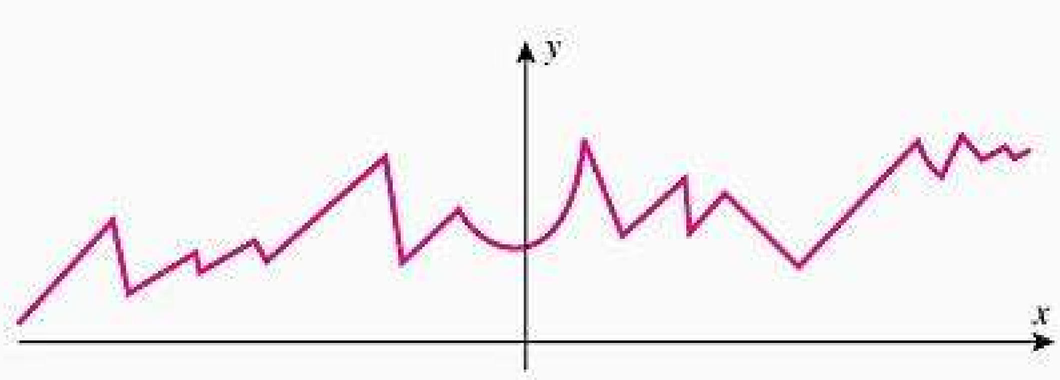


Figura 3.2.12

DERIVADAS NOS EXTREMOS DE UM INTERVALO

Se uma função f está definida em um intervalo fechado $[a, b]$, mas não fora dele, então f' não está definida nos extremos desse intervalo porque derivadas são limites bilaterais. Para tratar disso definimos a ***derivada pela esquerda*** e a ***derivada pela direita*** por

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{e} \quad f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

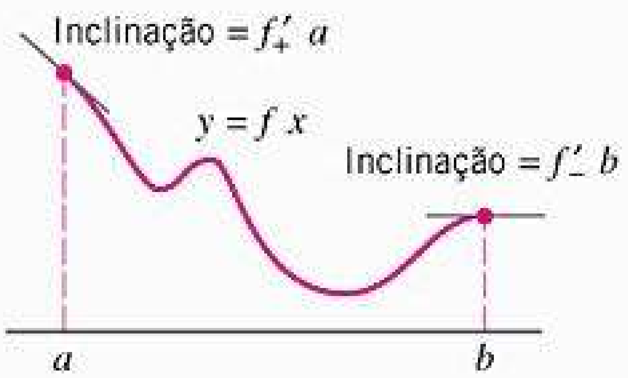


Figura 3.2.13

respectivamente. Essas derivadas são chamadas ***derivadas laterais***. Geometricamente, $f'_-(x)$ é o limite das inclinações das retas secantes quando x é aproximado pela esquerda e $f'_+(x)$ é o limite das inclinações das retas secantes quando x é aproximado pela direita. No caso de um intervalo fechado $[a, b]$, entenderemos que a derivada no extremo esquerdo é $f'_+(a)$ e a derivada no extremo direito é $f'_-(b)$ (Figura 3.2.13).

Em geral, dizemos que f é ***diferenciável*** em um intervalo da forma $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $[a, b)$ ou $(a, b]$ se f for diferenciável em cada ponto do interior do intervalo e se existir a derivada lateral apropriada em cada extremo incluído no intervalo.

Pode ser provado que uma função f é contínua pela esquerda naqueles pontos em que existe a derivada pela esquerda, e contínua pela direita naqueles pontos em que existe a derivada pela direita.

OUTRAS NOTAÇÕES PARA A DERIVADA

O processo de encontrar uma derivada é chamado ***derivação*** ou ***diferenciação***. Podemos pensar na derivação como uma *operação* sobre funções, que associa a função f' a uma função f. Quando a variável independente for x, a operação de derivação também costuma ser denotada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{ou} \quad f'(x) = D_x[f(x)]$$

No caso em que também temos a variável dependente $y = f(x)$, a derivada costuma ser denotada por

$$f'(x) = y'(x) \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Adiante daremos significados específicos aos símbolos dy e dx. Por enquanto, não podemos encarar dy/dx como um quociente, mas tão-somente como um único símbolo, que denota a derivada.

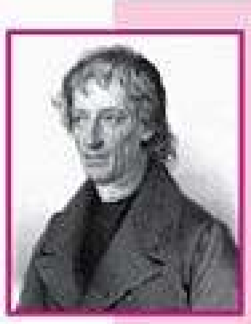
Com essas notações, o valor da derivada em um ponto x_0 pode ser expressa como

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx}[f(x)]\bigg|_{x=x_0}, \quad f'(x_0) = D_x[f(x)]\big|_{x=x_0}, \quad f'(x_0) = y'(x_0), \quad f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}$$

Se uma variável w muda de um valor inicial w_0 para algum valor final w_1, então o valor final menos o inicial é chamado de ***incremento*** em w, denotado por

$$\Delta w = w_1 - w_0 \tag{8}$$

Os incrementos podem ser positivos ou negativos, dependendo de o valor final ser maior ou menor do que o valor inicial. O símbolo do incremento em (8) não deveria ser interpretado como um produto; em vez disso, Δw deveria ser considerado como um só símbolo, que representa a variação no valor de w.



Bernhard Bolzano (1781-1848) Bolzano, filho de um comerciante de artes, nasceu em Praga, Boêmia (República Tcheca). Foi educado na Universidade de Praga e acabou por ganhar fama matemática suficiente para ser recomendado para uma cadeira naquela universidade. Porém, ordenou-se padre católico romano e, em 1805, foi designado para uma cadeira de Filosofia na Universidade de Praga. Bolzano foi um homem de grande compaixão humana; defendeu abertamente uma reforma educacional, proclamou os direitos da consciência individual sobre as exigências do governo e discursou sobre o absurdo da guerra e do militarismo. Seus pontos de vista acabaram por provocar o Imperador Franz I da Áustria, o qual pressionou o Arcebispo de Praga para obter uma retratação de Bolzano. Recusando-se a fazê-la, Bolzano foi forçado a aposentar-se em 1824 com uma pequena pensão. Sua grande contribuição à Matemática foi filosófica. Seu trabalho ajudou a convencer os matemáticos de que a Matemática confiável deve se apoiar primordialmente em provas rigorosas, em vez de no uso da intuição. Além de Matemática, Bolzano pesquisou problemas ligados ao espaço, à força e à propagação de ondas.

É comum considerar a variável h na fórmula da derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{9}$$

como um incremento Δx em x e escrever (9) como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{10}$$

Além disso, se $y = f(x)$, então o numerador em (10) pode ser considerado como o incremento

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{11}$$

e, nesse caso,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{12}$$

A interpretação geométrica de Δx e Δy está mostrada na Figura 3.2.14.

Às vezes é desejável expressar as derivadas em um formato que não utiliza incremento algum. Por exemplo, escrevendo $w = x + h$ na Fórmula (9), temos $h = w - x$ e $w \to x$ quando $h \to 0$, de modo que podemos reescrever aquela fórmula como

$$f'(x) = \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} \tag{13}$$

(Compare as Figuras 3.2.14 e 3.2.15.)

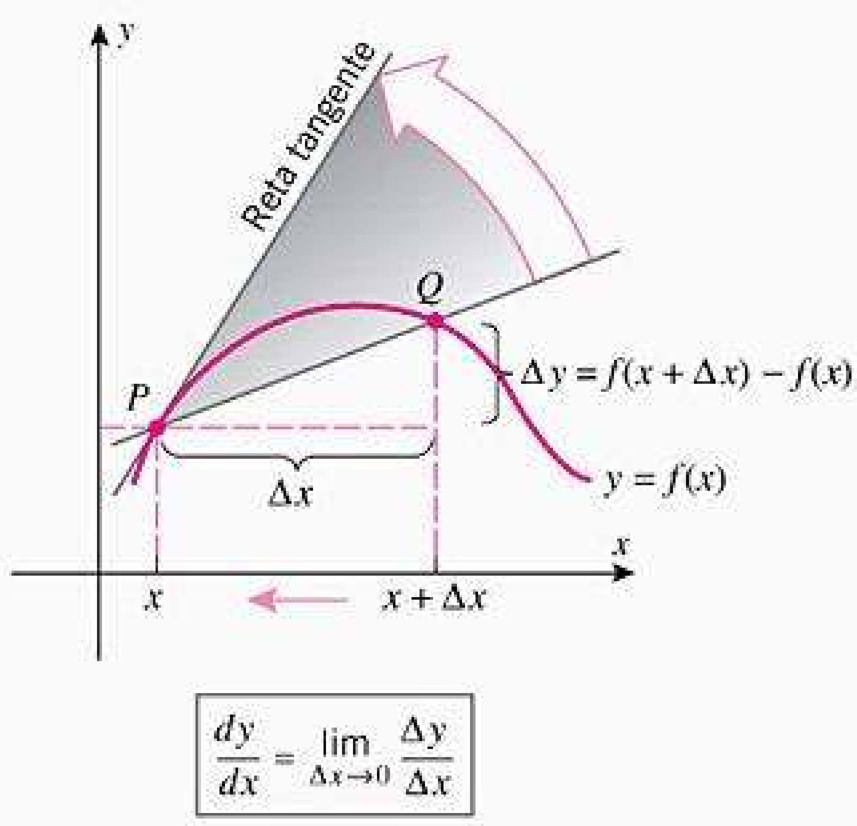


Figura 3.2.14

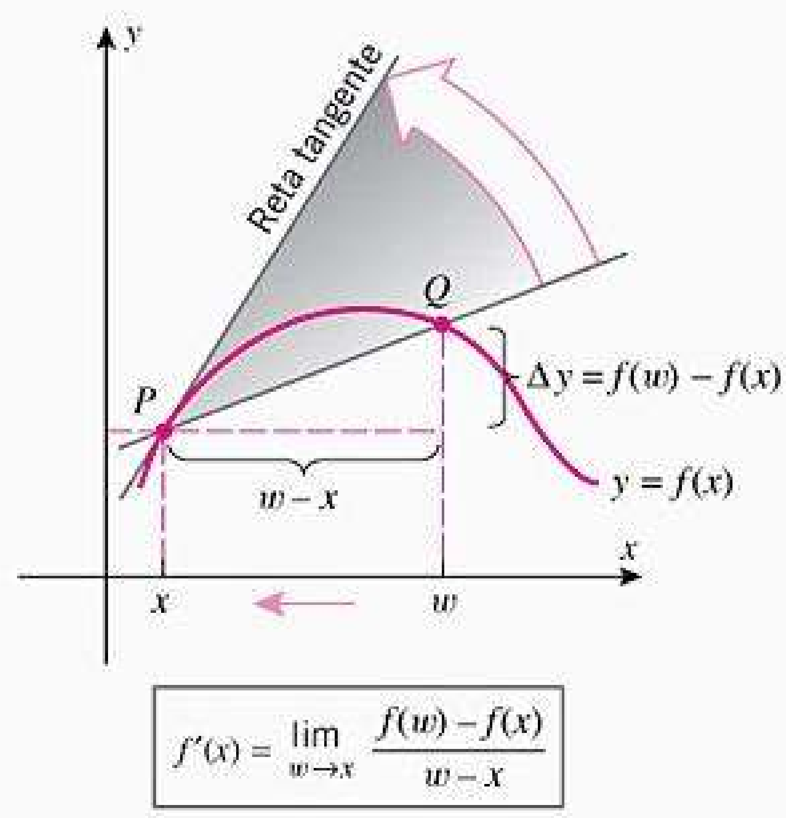


Figura 3.2.15

Quando utilizamos letras diferentes de x e y para as variáveis independente e dependente, devemos ajustar as notações de derivadas de acordo. Assim, por exemplo, se $s = f(t)$ é a função posição de uma partícula em movimento retilíneo, então a função velocidade $v(t)$ de (4) pode ser expressa como

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{14}$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.2 (*Ver página 190 para respostas.*)

1. (a) A função $f'(x)$ é definida pela fórmula
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} ________$$

(b) Suponha que $f(2+h) = 3h \cos h - 1$ para todo h. O valor de $f'(2)$ é ________.

2. Um ponto do gráfico de $y = \sqrt{x}$ no qual a reta tangente tem inclinação igual à coordenada y do ponto é ________.

3. Suponha que a reta $2x + 3y = 5$ seja tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = 1$. O valor de $f(1)$ é ________ e o valor de $f'(1)$ é ________.

4. Qual é o teorema que nos garante que se
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
existir, então $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

EXERCÍCIOS 3.2 Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Use o gráfico de $y = f(x)$ na figura abaixo para estimar o valor de $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(5)$ e $f'(6)$.

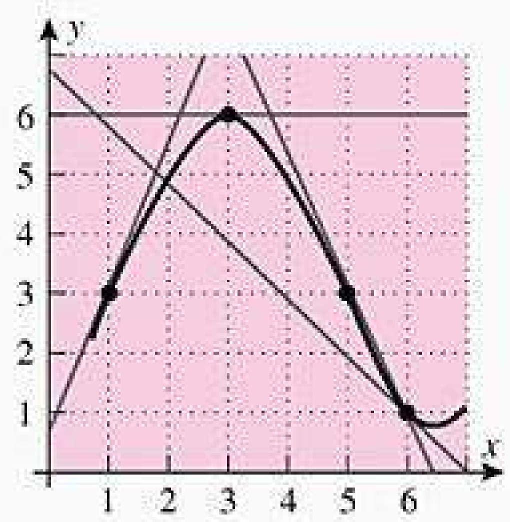


Figura Ex-1

2. Para a função cujo gráfico está na figura abaixo, arranje os números 0, $f'(-3)$, $f'(0)$, $f'(2)$ e $f'(4)$ em ordem crescente.

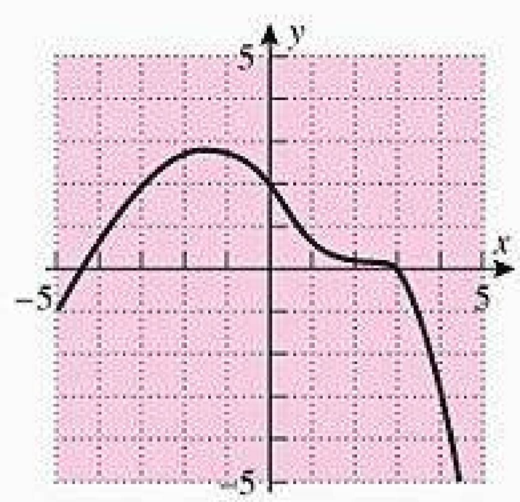


Figura Ex-2

3. (a) Se for dada uma equação da reta tangente no ponto $(a, f(a))$ em uma curva $y = f(x)$, como poderíamos calcular $f'(a)$?

(b) Dado que a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(2, 5)$ é $y = 3x - 1$, determine $f'(2)$.

(c) Para a equação $y = f(x)$ em (b), qual é a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = 2$?

4. Dado que a reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(1, 2)$ passa pelo ponto $(-1, -1)$, encontre $f'(1)$.

5. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = -1$, $f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ se $x < 0$ e $f'(x) > 0$ se $x > 0$.

6. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $x > 0$.

7. Dado que $f(3) = -1$ e $f'(3) = 5$, encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto onde $x = 3$.

8. Dado que $f(-2) = 3$ e $f'(-2) = -4$, encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto onde $x = -2$.

9-14 Use a Definição 3.2.1 para encontrar $f'(x)$, e então encontre a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = a$.

9. $f(x) = 2x^2;\ a = 1$

10. $f(x) = 1/x^2;\ a = -1$

11. $f(x) = x^3;\ a = 0$

12. $f(x) = 2x^3 + 1;\ a = -1$

13. $f(x) = \sqrt{x+1};\ a = 8$

14. $f(x) = \sqrt{2x+1};\ a = 4$

15-20 Use a Fórmula (12) para encontrar dy/dx.

15. $y = \dfrac{1}{x}$

14. $y = \dfrac{1}{x+1}$

17. $y = x^2 - x$

16. $y = x^4$

19. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

18. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

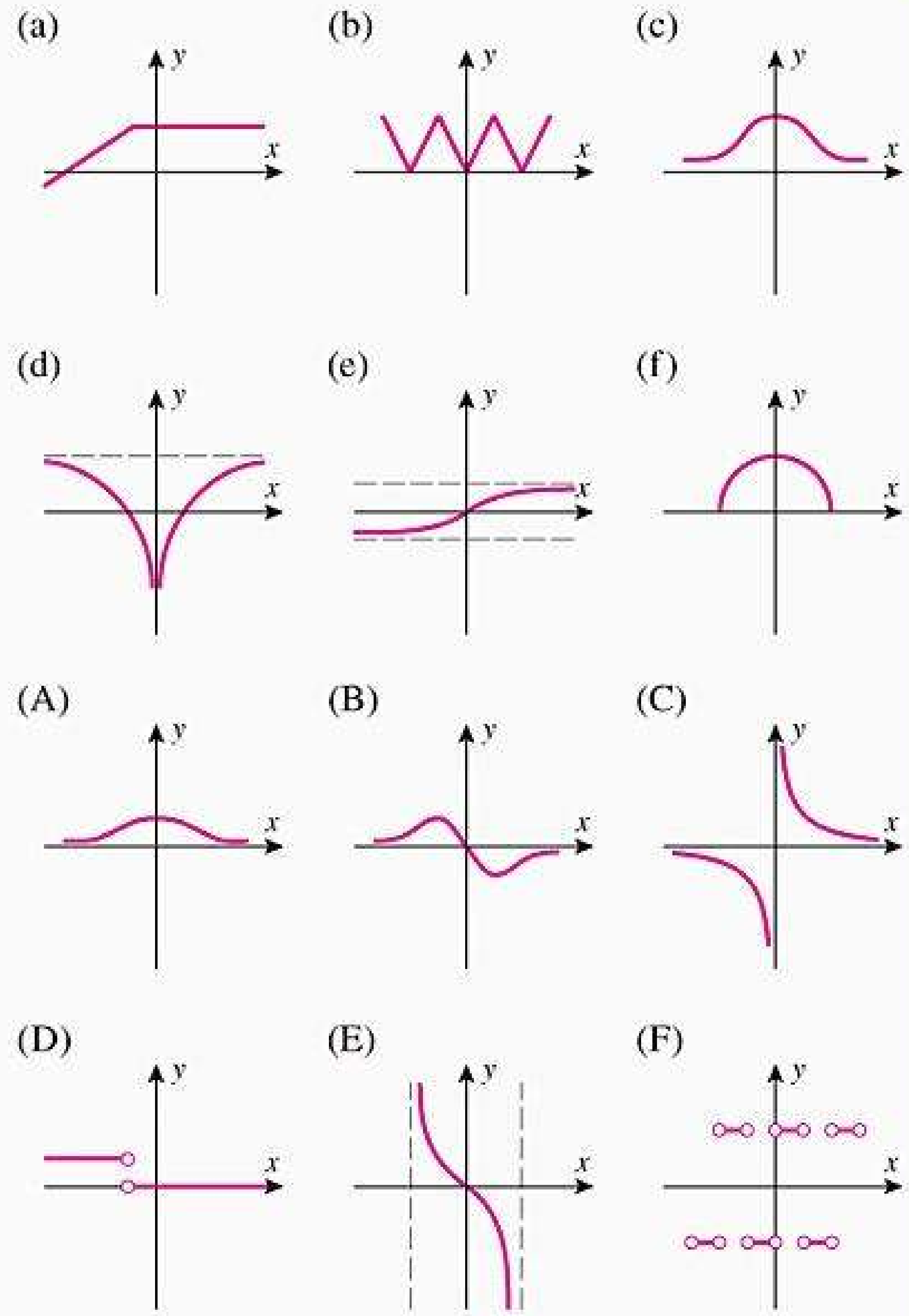
21-22 Use a Definição 3.2.1 (com a mudança apropriada na notação) para obter a derivada pedida.

21. Encontre $f'(t)$ se $f(t) = 4t^2 + t$.

22. Encontre dV/dr se $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

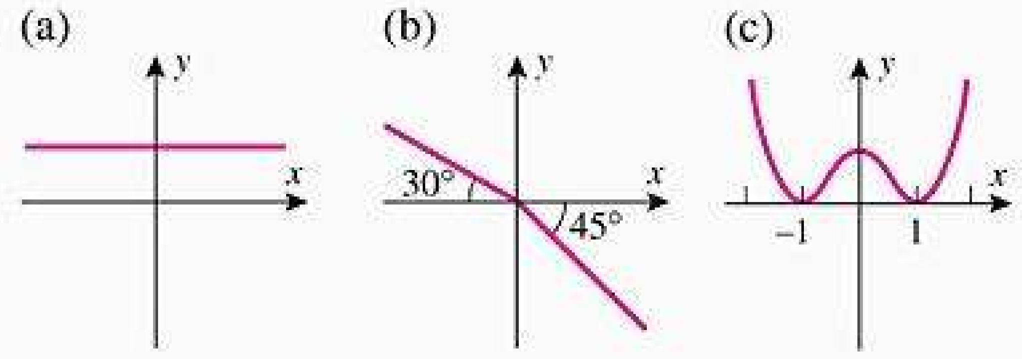
ENFOCANDO CONCEITOS

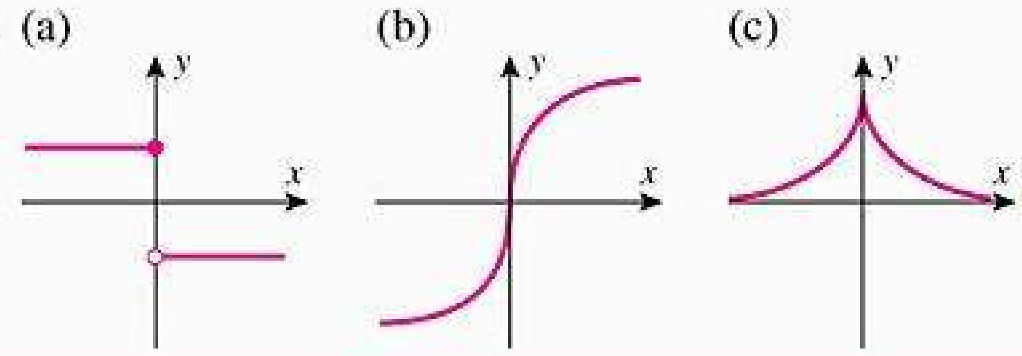
23. Combine o gráfico das funções mostradas em (a) a (f) com os de suas derivadas em (A) a (F).



24. Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Use um argumento geométrico para encontrar $f'(\sqrt{2}/2)$.

25-26 Esboce o gráfico da derivada da função cujo gráfico é dado.

25.


26.


27-28 O limite dado representa $f'(a)$ para alguma função f e algum número a. Encontre $f(x)$ e a em cada caso.

27. (a) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\Delta x} - 1}{\Delta x}$ (b) $\lim_{x_1 \to 3} \dfrac{x_1^2 - 9}{x_1 - 3}$

28. (a) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$ (b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$

29. Encontre $dy/dx|_{x=1}$, sabendo que $y = 1 - x^2$.

30. Encontre $dy/dx|_{x=-2}$, sabendo que $y = (x + 2)/x$.

31. Encontre uma equação para a reta que é tangente à curva $y = x^3 - 2x + 1$ no ponto (0, 1) e use um recurso gráfico para fazer, na mesma tela, os gráficos da curva e de sua tangente.

32. Use um recurso gráfico para, na mesma tela, colocar a curva $y = x^2/4$, a reta tangente a essa curva em $x = 1$ e a reta secante que passa pelos pontos (0, 0) e (2, 1) da curva.

33. Seja $f(x) = 2^x$. Estime $f'(1)$ pelos seguintes métodos:

(a) Usando um recurso gráfico para fazer um *zoom* em um ponto apropriado do gráfico até que ele se pareça a uma reta e, então, estimando a inclinação.

(b) Usando um recurso gráfico para estimar o limite na fórmula (13), fazendo uma tabela para uma sucessão de valores de w tendendo a 1.

34. Seja $f(x) = \text{sen}\, x$. Estime $f'(\pi/4)$ pelos seguintes métodos:

(a) Usando um recurso gráfico para fazer um *zoom* em um ponto apropriado do gráfico até que ele se pareça a uma reta e, então, estimando a inclinação.

(b) Usando um recurso gráfico para estimar na fórmula (13), fazendo uma tabela para uma sucessão de valores de w tendendo a $\pi/4$.

ENFOCANDO CONCEITOS

35. Suponha que o custo da perfuração de x metros para um poço de petróleo seja de $C = f(x)$ dólares.

(a) Quais são as unidades de $f'(x)$?

(b) Em termos práticos, qual é o significado de $f'(x)$ neste caso?

(c) O que pode ser dito quanto ao sinal de $f'(x)$?

(d) Estime o custo de perfuração de um metro adicional, começando a uma profundidade de 300 metros, dado que $f'(300) = 1000$.

36. Uma empresa fabricante de tintas estima que pode vender $g = f(p)$ galões de tinta a um preço de p reais.

(a) Quais são as unidades de dg/dp?

(b) Em termos práticos, o que significa dg/dp neste caso?

(c) O que pode ser dito quanto ao sinal de dg/dp?

(d) Dado que $dg/dp|_{p=10} = -100$, o que pode ser dito sobre o efeito de aumentar o preço de 10 para 11 reais por galão?

37. É fato que, quando uma corda flexível é enrolada em um cilindro áspero, uma pequena força de magnitude F_0 em uma ponta pode resistir a uma grande força de magnitude F na outra ponta. O tamanho de F depende do ângulo θ, segundo o qual a corda é enrolada em torno do cilindro (veja a figura a seguir). Essa figura mostra o gráfico de F (em libras) *versus* θ (em radianos), onde F é a magnitude da força à

qual resiste uma força F_0 com 10 libras de magnitude para uma certa corda e um certo cilindro.

(a) Estime os valores de F e de $dF/d\theta$ quando θ for de 10 radianos.

(b) Pode ser mostrado que a força F satisfaz a equação $dF/d\theta = \mu F$, onde a constante μ é denominada ***coeficiente de atrito***. Use os resultados de (a) para estimar o valor de μ.

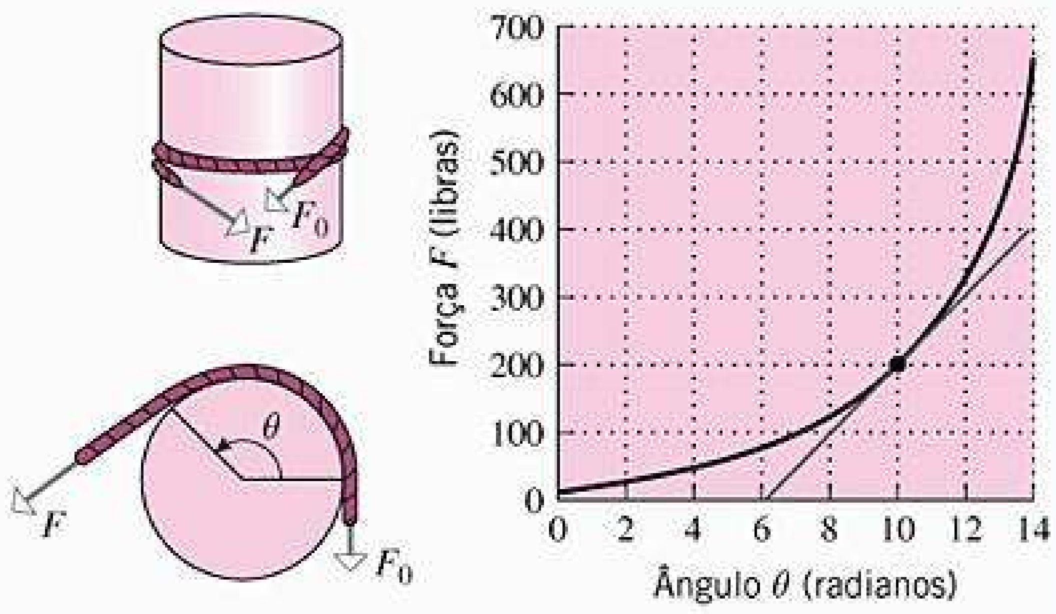


Figura Ex-37

38. A figura abaixo mostra a curva velocidade *versus* tempo para um foguete no espaço extraterrestre, onde a única força atuando sobre o foguete é a de seus motores. Pode ser mostrado que a massa $M(t)$ do foguete no instante t (em segundos) satisfaz a equação

$$M(t) = \frac{T}{dv/dt}$$

onde T é o empuxo (em libras) dos motores do foguete e v é a velocidade (em pés/s) do foguete. O empuxo do primeiro estágio do foguete *Saturno V* é de $T = 7.680.982$ libras. Use esse valor de T e o segmento de reta na figura para estimar a massa do foguete no instante $t = 100$ s.

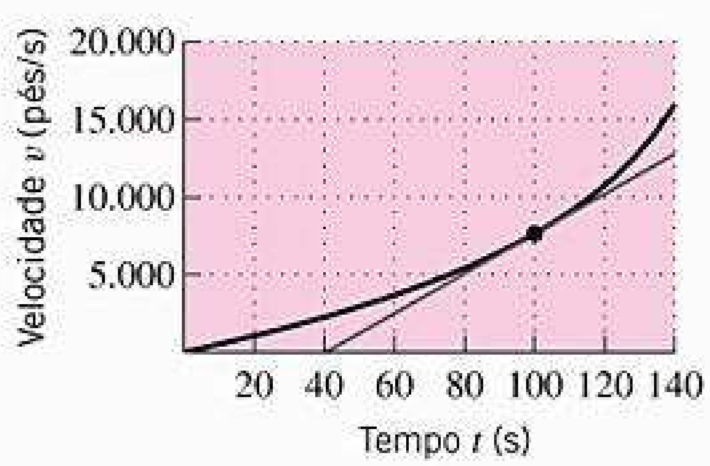


Figura Ex-38

39. De acordo com a ***Lei do Resfriamento de Newton***, a taxa de variação da temperatura de um objeto é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a do meio ambiente. A figura a seguir mostra o gráfico da temperatura T (em graus Fahrenheit) *versus* o tempo t (em minutos) para uma xícara de café inicialmente a 200°F, deixada para esfriar em uma sala com uma temperatura constante de 75°F.

(a) Estime T e dT/dt quando $t = 10$ min.

(b) A Lei do Resfriamento de Newton pode ser expressa por

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

onde k é a constante de proporcionalidade e T_0, a temperatura do meio ambiente (constante, por hipótese). Use os resultados de (a) para estimar o valor de k.

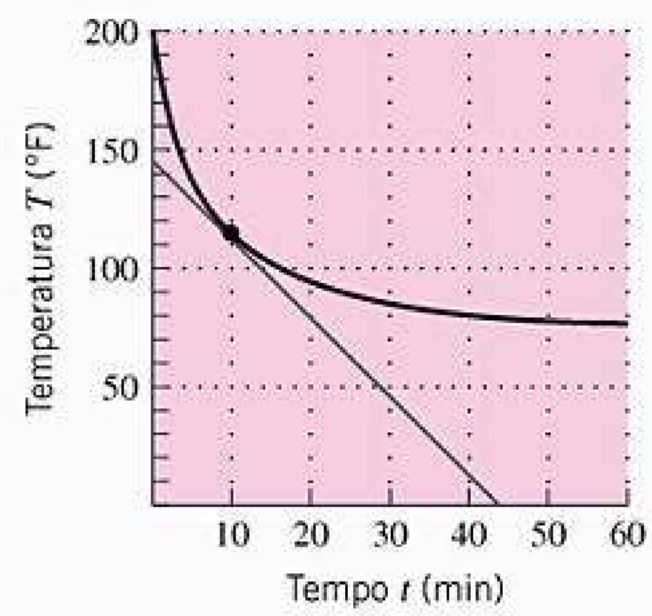


Figura Ex-39

40. Escreva um parágrafo que explique qual o significado de uma função ser diferenciável. Inclua alguns exemplos de funções não-diferenciáveis e explique a relação entre diferenciabilidade e continuidade.

41. Mostre que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em $x = 0$, mas não-diferenciável em $x = 0$. Esboce o gráfico de f.

42. Mostre que $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ é contínua em $x = 2$, mas não-diferenciável em $x = 2$. Esboce o gráfico de f.

43. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

é contínua e diferenciável em $x = 1$. Esboce o gráfico de f.

44. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \le 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

é contínua, mas não-diferenciável em $x = 1$. Esboce o gráfico de f.

45. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(1/x), & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua, mas não-diferenciável em $x = 0$. Esboce o gráfico de f na vizinhança de $x = 0$. (Ver Figura 2.6.6 e a observação que segue o Exemplo 5 da Seção 2.6.)

46. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}(1/x), & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua e diferenciável em $x = 0$. Esboce o gráfico de f na vizinhança de $x = 0$.

ENFOCANDO CONCEITOS

47. Suponha que uma função f seja diferenciável em x_0 e que $f'(x_0) > 0$. Prove que existe um intervalo aberto contendo x_0, tal que, se x_1 e x_2 são dois pontos quaisquer nesse intervalo, com $x_1 < x_0 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

48. Su nha ue uma unçã f e a i erenciá e em x_0 e efina $g\ x\ = f\ mx + b$, n e m e b ã c n tante Pr e ue, e x_1 é um nt ta ue $mx_1 + b = x_0$, entã $g\ x$ é i erenciá e em x_1 e $g'\ x_1\ = m f'\ x_0$

49. Su nha ue uma unçã f e a i erenciá e em $x = 0$ c m $f\ 0\ = f'\ 0\ = 0$ e e a $y = mx$, $m \neq 0$, uma reta e a rigem e inc inaçã nã nu a

a Pr e ue e i te um inter a abert c nten 0, ta ue, ara ca a x ne e inter a , a ha $|f(x)| < \left|\frac{1}{2}mx\right|$. *Sugestão*: me $\epsilon = \frac{1}{2}|m|$ e a i ue a Definiçã 2 4 1 a 5 c m $x_0 = 0$

b nc ua, u an a arte a e a e igua a e triangu ar, ue e i te um inter a abert c nten 0, ta ue $|f\ x\ |$ $< |f\ x\ - mx|$ ara ca a x ne e inter a

c E i ue r ue re u ta bti em b e er inter reta c m ignifican ue a reta tangente a gráfic e f na rigem é a me h r a r imaçã *linear* e f na ue e nt

50. Su nha ue uma unçã f e a i erenciá e em x_0 i fi ue argument E ercíci 4 ara r ar ue a reta tangente a gráfic e f n nt $P\ x_0, f\ x_0$ rnece a me h r a r imaçã inear e f em P *Sugestão:* Su nha ue $y = f\ x_0\ + m\ x - x_0$ é uma reta ua uer ue a e e n t $P\ x_0, f\ x_0$ c m inc inaçã $m \neq f'\ x_0$ i ue a Defini çã 2 4 1 a 5 c m $x = x_0 + h$ e $\epsilon = \frac{1}{2}|f'(x_0) - m|$.]

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.2

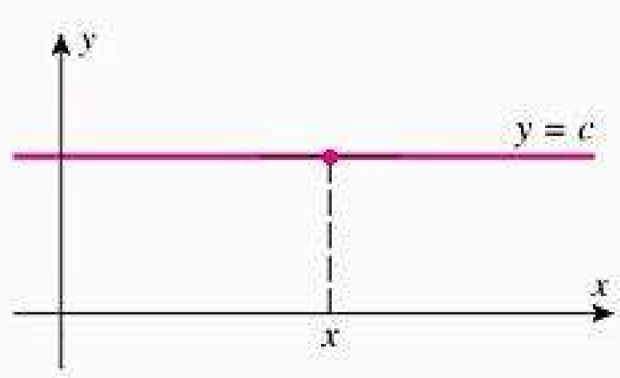
1. a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ b 3 **2.** $(1/2, \sqrt{2}/2)$ **3.** 1 $-\dfrac{2}{3}$ **4.** e rema 3 2 3: Se f é i erenciá e em x_0, entã f é c ntínua em x_0

3.3 TÉCNICAS DE DIFERENCIAÇÃO

Na última seção definimos a derivada de uma função f como um limite e usamos esse limite para calcular algumas derivadas simples. Vamos desenvolver agora alguns teoremas importantes, que nos possibilitarão calcular derivadas de forma mais eficiente.

■ DERIVADA DE UMA CONSTANTE

ti mai im e e unçã é a unçã c n tante $f\ x\ = c$ m gráfic e f é uma reta h riz nta e inc inaçã 0, a reta tangente a gráfic e f tem inc inaçã 0 em ca a nt x rtant , em er ge metricamente ue $f'\ x\ = 0$ Figura 3 3 1 ambém em er, i a gebricamente, i



A reta tangente ao gráfico $f(x) = c$ tem inclinação 0 para todo x.

Figura 3.3.1

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

im, e tabe ecem re u ta eguinte

3.3.1 TEOREMA eri a a e uma unçã c n tante é 0 i t é, e c r um númer rea ua uer, entã

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \qquad (1)$$

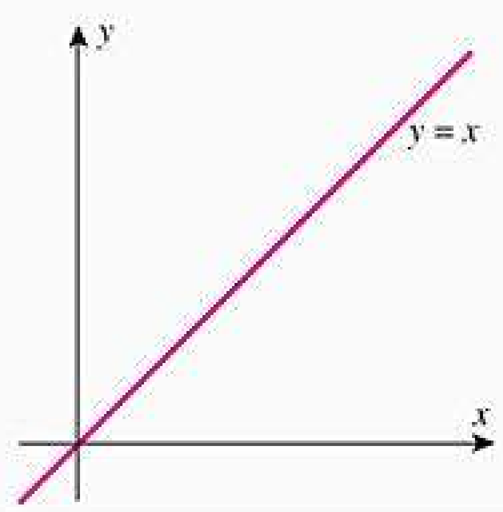
► Exemplo 1

$$\frac{d}{dx}[1] = 0, \quad \frac{d}{dx}[-3] = 0, \quad \frac{d}{dx}[\pi] = 0, \quad \frac{d}{dx}[-\sqrt{2}] = 0 \ ◄$$

DERIVADAS DE POTÊNCIAS INTEIRAS DE x

O tipo mais simples de função potência é $f(x) = x$. Como o gráfico de f é uma reta de inclinação 1, segue do Exemplo 3 da Seção 3.2 que $f'(x) = 1$ para todo x (Figura 3.3.2). Em outras palavras,

$$\frac{d}{dx}[x] = 1 \tag{2}$$



A reta tangente ao gráfico de $f(x) = x$ tem inclinação 1 para todo x.

Figura 3.3.2

Verifique que a Fórmula (2) é um caso especial de (3) em que $n = 1$.

Essa fórmula é um caso especial do resultado mais geral seguinte.

3.3.2 TEOREMA (***Regra da Potência***) *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{3}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $f(x) = x^n$. Então, a partir da definição de derivada e do teorema do binômio para a expansão de expressões do tipo $(x + h)^n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n] = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\
&= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 + 0 \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

■

Em palavras, *a derivada de x elevada a uma potência inteira é o produto do expoente inteiro por x elevado à potência inteira subtraída de uma unidade.*

► Exemplo 2

$$\frac{d}{dx}[x^2] = 2x, \quad \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}[x^4] = 4x^3, \quad \frac{d}{dt}[t^{12}] = 12t^{11}$$ ◄

Embora a regra da potência na Fórmula (3) aplique-se somente a potências n inteiras *positivas*, mostraremos adiante que a mesma fórmula vale para qualquer expoente real. Como um primeiro passo nessa direção, mostremos que a fórmula vale para todas as potências n inteiras.

3.3.3 TEOREMA (***Regra da Potência Estendida***) *Se n for qualquer inteiro, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{4}$$

DEMONSTRAÇÃO O caso $n > 0$ já foi estabelecido. Se $n < 0$, então seja $m = -n$; portanto:

$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Então

$$\frac{d}{dx}[x^n] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^m}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^m} - \frac{1}{x^m}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^m - (x+h)^m}{(x+h)^m x^m h}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m - x^m}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)^m x^m}$$

$$= \underbrace{-mx^{m-1}}\cdot\frac{1}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}$$

Pela prova do Teorema 3.3.2

$$= nx^{n-1}$$

o que prova (4). Caso $n = 0$, a Fórmula (4) se reduz a

$$\frac{d}{dx}[1] = 0\cdot x^{-1} = 0$$

a qual está correta pelo Teorema 3.3.1. ■

► Exemplo 3

$$\frac{d}{dx}[x^{-9}] = -9x^{-9-1} = -9x^{-10}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{d}{dx}[x^{-1}] = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dw}\left[\frac{1}{w^{100}}\right] = \frac{d}{dw}[w^{-100}] = -100w^{-101} = -\frac{100}{w^{101}}$$ ◄

Revisando, vemos que a Fórmula (4) também é válida para $n = \frac{1}{2}$, pois no Exemplo 4 da Seção 3.2 mostramos que

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{5}$$

que pode ser expresso como

$$\frac{d}{dx}[x^{1/2}] = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

■ A DERIVADA DE UMA CONSTANTE VEZES UMA FUNÇÃO

A Fórmula (6) também pode ser expressa em notação funcional por

$$(cf)' = cf'$$

3.3.4 TEOREMA ***(Regra do Múltiplo Constante)*** *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também é diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{6}$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Um fator constante pode ser para fora do sinal do limite

$$= c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

■

Em palavras, *um fator constante pode ser movido para fora do sinal da derivada.*

▶ Exemplo 4

$$\frac{d}{dx}[4x^8] = 4\frac{d}{dx}[x^8] = 4[8x^7] = 32x^7$$

$$\frac{d}{dx}[-x^{12}] = (-1)\frac{d}{dx}[x^{12}] = -12x^{11}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{x}\right] = \pi\frac{d}{dx}[x^{-1}] = \pi(-x^{-2}) = -\frac{\pi}{x^2}$$ ◀

■ DERIVADAS DE SOMAS E DE DIFERENÇAS

As Fórmulas (7) e (8) também podem ser expressas como

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

3.3.5 TEOREMA ***(Regras da Soma e da Diferença)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então $f + g$ e $f - g$ também o são e*

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \qquad (8)$$

DEMONSTRAÇÃO A Fórmula (7) pode ser demonstrada como segue:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

O limite de uma soma é a soma dos limites

$$= \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

A Fórmula (8) pode ser provada de maneira análoga ou, alternativamente, escrevendo $f(x) - g(x)$ como $f(x) + (-1)g(x)$ e, então, aplicando as Fórmulas (6) e (7). ■

Em palavras, *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas,* e *a derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas.*

▶ Exemplo 5

$$\frac{d}{dx}[2x^6 + x^{-9}] = \frac{d}{dx}[2x^6] + \frac{d}{dx}[x^{-9}] = 12x^5 + (-9)x^{-10} = 12x^5 - 9x^{-10}$$

$$\frac{d}{dx}[1 - 2\sqrt{x}] = \frac{d}{dx}[1] - \frac{d}{dx}[2\sqrt{x}] = 0 - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$ Ver Fórmula (5) ◀

Embora as Fórmulas (7) e (8) tenham sido enunciadas para somas e diferenças de duas funções, podemos estendê-las a um número finito qualquer de funções. Por exemplo, agrupando as funções e aplicando a Fórmula (7) duas vezes, obtemos

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Como ilustra o exemplo a seguir, a regra do múltiplo constante pode ser usada junto com a versão estendida das regras da soma e da diferença para derivar polinômios.

▶ Exemplo 6 Encontre dy/dx se $y = 3x^8 - 2x^5 + 6x + 1$.

Solução

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[3x^8 - 2x^5 + 6x + 1] \\ &= \frac{d}{dx}[3x^8] - \frac{d}{dx}[2x^5] + \frac{d}{dx}[6x] + \frac{d}{dx}[1] \\ &= 24x^7 - 10x^4 + 6\end{aligned}$$ ◀

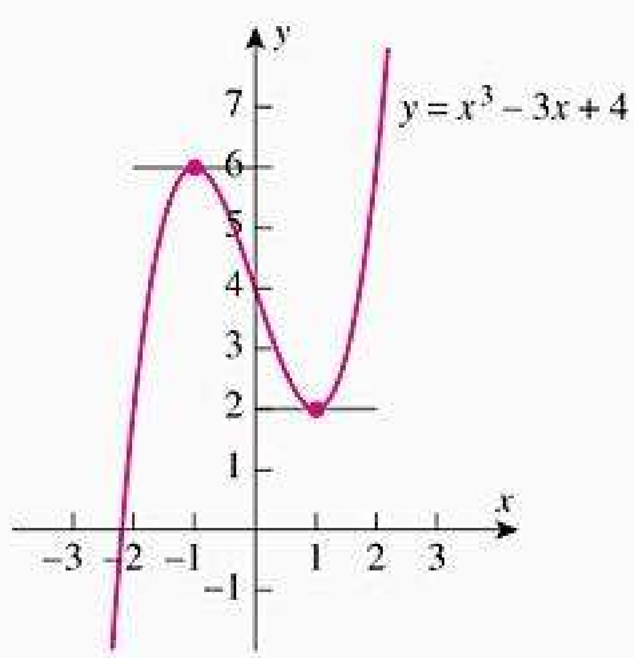


Figura 3.3.3

▶ Exemplo 7 Em quais pontos, se em algum, o gráfico de $y = x^3 - 3x + 4$ tem uma reta tangente horizontal?

Solução Retas tangentes horizontais têm inclinação zero; portanto, devemos encontrar aqueles valores de x para os quais $y'(x) = 0$. Derivando, obtemos

$$y'(x) = \frac{d}{dx}[x^3 - 3x + 4] = 3x^2 - 3$$

Assim, as retas tangentes horizontais ocorrem naqueles valores de x para os quais $3x^2 - 3 = 0$, ou seja, tais que $x = -1$ ou $x = 1$. Os pontos correspondentes da curva $y = x^3 - 3x + 4$ são $(-1, 6)$ e $(1, 2)$ (ver Figura 3.3.3). ◀

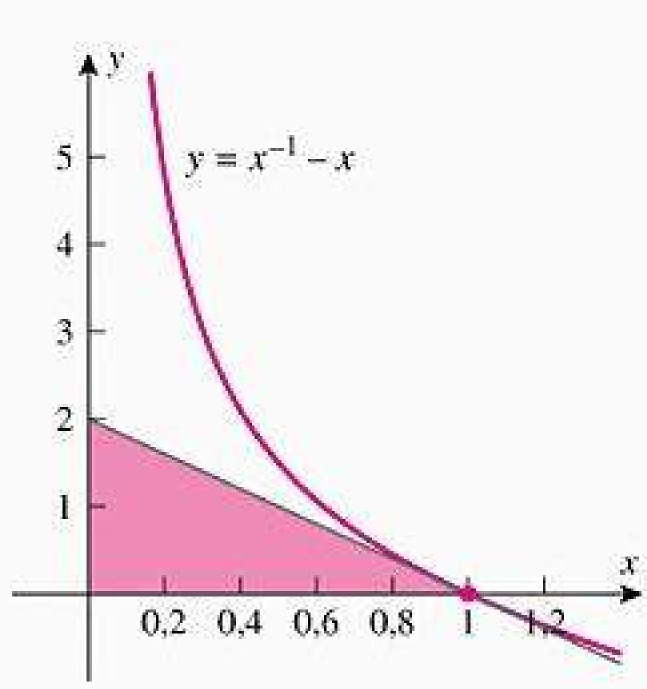


Figura 3.3.4

▶ Exemplo 8 Encontre a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e a reta tangente à curva $y = x^{-1} - x$ no ponto $(1, 0)$.

Solução Como a derivada de y em relação a x é

$$y'(x) = \frac{d}{dx}[x^{-1} - x] = \frac{d}{dx}[x^{-1}] - \frac{d}{dx}[x] = -x^{-2} - 1$$

a inclinação da reta tangente no ponto $(1, 0)$ é $y'(1) = -2$. Assim, a equação da reta tangente nesse ponto é

$$y - 0 = -2(x - 1) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = -2x + 2$$

Como o corte dessa reta com o eixo y é 2, a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e a reta tangente é de 1 unidade quadrada (Figura 3.3.4). ◀

DERIVADAS DE ORDENS SUPERIORES

A derivada f' de uma função f é novamente uma função, que pode ter sua própria derivada. Se f' for derivável, então sua derivada é denotada por f'' e é denominada ***derivada segunda*** de f. Enquanto tivermos diferenciabilidade, podemos continuar o processo de derivação para obter as derivadas terceira, quarta, quinta, e até derivadas superiores de f. Essas derivadas em sucessão são denotadas por

$$f', \quad f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', \quad f^{(5)} = (f^{(4)})', \ldots$$

Se $y = f(x)$, então as derivadas sucessivas também podem ser denotadas por

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad y^{(5)}, \ldots$$

Outras notações comuns são

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}[f(x)]\right] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)] \\ y''' &= \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)] \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Essas derivadas em sucessão são chamadas de *derivada primeira*, *derivada segunda*, *derivada terceira*, e assim por diante. O número de vezes que f for diferenciável é chamado de ***ordem*** da derivada. Uma derivada de enésima ordem geral pode ser denotada por

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \tag{9}$$

e o valor de uma derivada de enésima ordem geral calculada em um ponto específico $x = x_0$ pode ser denotado por

$$\left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0) = \left.\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]\right|_{x=x_0} \tag{10}$$

► Exemplo 9 Se $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 6x^2 + 2x - 4 \\ f''(x) &= 36x^2 - 12x + 2 \\ f'''(x) &= 72x - 12 \\ f^{(4)}(x) &= 72 \\ f^{(5)}(x) &= 0 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad (n \geq 5) \end{aligned}$$ ◄

A importância da derivada segunda e das derivadas superiores será discutida em seções posteriores.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.3 (Ver página 198 para respostas.)

1. Em cada parte, determine $f'(x)$.

(a) $f(x) = -x^2 + x + \dfrac{3}{x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

(c) $f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$ (d) $f(x) = \sqrt{3x}$

2. A equação da reta tangente à curva $y = x^2 + x + 1$ em $x = 1$ é __________.

3. A reta $y = 9x - 5$ é tangente à curva $y = x^3 + 3x^2$ no ponto __________.

4. A reta tangente ao gráfico de $y = 1/x$ no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ corta os eixos coordenados em $x =$ __________ e $y =$ __________.

5. Encontre todas as soluções da equação $f''(x) = f'(x)$, sabendo que $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1$.

EXERCÍCIOS 3.3 Recurso Gráfico

1-8 Encontre dy/dx.

1. $y = 4x^7$ **2.** $y = -3x^{12}$

3. $y = 3x^8 + 2x + 1$ **4.** $y = \frac{1}{2}(x^4 + 7)$

5. $y = \pi^3$ **6.** $y = \sqrt{2}x + (1/\sqrt{2})$

7. $y = -\frac{1}{3}(x^7 + 2x - 9)$ **8.** $y = \dfrac{x^2+1}{5}$

9-16 Encontre $f'(x)$.

9. $f(x) = x^{-3} + \dfrac{1}{x^7}$ **10.** $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

11. $f(x) = -3x^{-8} + 2\sqrt{x}$ **12.** $f(x) = 7x^{-6} - 5\sqrt{x}$

13. $f(x) = (3x^2+1)^2$ **14.** $f(x) = (x^5 + 2x)^2$

15. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d constantes)

16. $f(x) = \dfrac{1}{a}\left(x^2 + \dfrac{1}{b}x + c\right)$ (a, b, c constantes)

17-18 Encontre $y'(1)$.

17. $y = 5x^2 - 3x + 1$ **18.** $y = \dfrac{x^{3/2}+2}{x}$

19-20 Encontre dx/dt.

19. $x = t^2 - t$ **20.** $x = \dfrac{t^2+1}{3t}$

21-24 Encontre $dy/dx|_{x=1}$.

21. $y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

22. $y = \dfrac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}{x^3}$

23. $y = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$

24. $y = x^{24} + 2x^{12} + 3x^8 + 4x^6$

25-26 Aproxime $f'(1)$ considerando o quociente de diferenças

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

para valores de h perto de 0; depois encontre o valor exato de $f'(1)$ por derivação.

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ **26.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

27-28 Use um recurso gráfico para estimar o valor de $f'(1)$ fazendo um *zoom* no gráfico de f; depois, compare sua estimativa ao valor exato obtido por derivação.

27. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ **28.** $f(x) = \dfrac{x + 2x^{3/2}}{\sqrt{x}}$

29-32 Encontre a derivada indicada.

29. $\dfrac{d}{dt}[16t^2]$ **30.** $\dfrac{dC}{dr}$, onde $C = 2\pi r$

31. $V'(r)$, onde $V = \pi r^3$ **32.** $\dfrac{d}{d\alpha}[2\alpha^{-1} + \alpha]$

33. Um balão esférico está sendo inflado.

(a) Encontre uma fórmula geral para a taxa de variação instantânea do volume V em relação ao raio r, sabendo que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

(b) Encontre a taxa de variação de V em relação a r no momento em que o raio é $r = 5$.

34. Encontre $\dfrac{d}{d\lambda}\left[\dfrac{\lambda\lambda_0 + \lambda^6}{2 - \lambda_0}\right]$ (λ_0 é uma constante).

35. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto onde $x = -3$ se $f(-3) = 2$ e $f'(-3) = 5$.

36. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = 2$ se $f(2) = -2$ e $f'(2) = -1$.

37-38 Encontre d^2y/dx^2.

37. (a) $y = 7x^3 - 5x^2 + x$ (b) $y = 12x^2 - 2x + 3$
(c) $y = \dfrac{x+1}{x}$ (d) $y = (5x^2 - 3)(7x^3 + x)$

38. (a) $y = 4x^7 - 5x^3 + 2x$ (b) $y = 3x + 2$
(c) $y = \dfrac{3x-2}{5x}$ (d) $y = (x^3 - 5)(2x + 3)$

39-40 Encontre y'''.

39. (a) $y = x^{-5} + x^5$ (b) $y = 1/x$
(c) $y = ax^3 + bx + c$ (a, b, c constantes)

40. (a) $y = 5x^2 - 4x + 7$ (b) $y = 3x^{-2} + 4x^{-1} + x$
(c) $y = ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, c constantes)

41. Encontre
(a) $f'''(2)$, onde $f(x) = 3x^2 - 2$
(b) $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$, onde $y = 6x^5 - 4x^2$
(c) $\left.\dfrac{d^4}{dx^4}[x^{-3}]\right|_{x=1}$.

42. Encontre
(a) $y'''(0)$, onde $y = 4x^4 + 2x^3 + 3$
(b) $\left.\dfrac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=1}$, onde $y = \dfrac{6}{x^4}$

43. Mostre que $y = x^3 + 3x + 1$ satisfaz $y''' + xy'' - 2y' = 0$.

44. Mostre que, se $x \neq 0$, então $y = 1/x$ satisfaz a equação $x^3y'' + x^2y' - xy = 0$.

45-46 Use um recurso gráfico para estimar a localização das linhas tangentes horizontais. Depois, encontre a localização exata por diferenciação.

45. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ **46.** $y = \dfrac{x^2+9}{x}$

ENFOCANDO CONCEITOS

47. Encontre uma função $y = ax^2 + bx + c$ cujo gráfico corte o eixo x no ponto 1, o eixo y em -2 e que tenha uma reta tangente de inclinação -1 no ponto de corte com o eixo y.

48. Encontre k se a curva $y = x^2 + k$ é tangente à reta $y = 2x$.

49. Encontre a coordenada x do ponto no gráfico de $y = x^2$ no qual a reta tangente é paralela à reta secante que corta a curva em $x = -1$ e $x = 2$.

50. Encontre a coordenada x do ponto no gráfico de $y = \sqrt{x}$ no qual a reta tangente é paralela à reta secante que corta a curva em $x = 1$ e $x = 4$.

51. Encontre as coordenadas de todos os pontos no gráfico de $y = 1 - x^2$ nos quais a reta tangente passa pelo ponto $(2, 0)$.

52. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$, $a \neq 0$, intersecta um ponto que está em uma reta vertical passando pelo ponto médio dos pontos de tangência.

53. Seja L a reta tangente ao gráfico da equação cúbica $y = ax^3 + bx$ em $x = x_0$. Encontre a coordenada x do ponto onde L intersecta o gráfico uma segunda vez.

54. Mostre que o segmento de reta tangente ao gráfico de $y = 1/x$ que é cortado fora pelos eixos coordenados é bissectado pelo ponto de tangência.

55. Mostre que o triângulo formado por qualquer reta tangente ao gráfico de $y = 1/x$, $x > 0$, e pelos eixos coordenados tem uma área de 2 unidades quadradas.

56. Encontre condições em a, b, c e d para que o gráfico do polinômio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha
(a) exatamente duas tangentes horizontais;
(b) exatamente uma tangente horizontal;
(c) não tenha tangentes horizontais.

57. A Lei da Gravidade Universal de Newton afirma que a magnitude F da força exercida por um ponto com massa M sobre um ponto com massa m é

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

onde G é uma constante e r, a distância entre os pontos. Supondo os pontos em movimento, encontre uma fórmula para a taxa de variação instantânea de F em relação a r.

58. No intervalo de temperatura entre 0ºC e 700ºC, a resistência R [em ohms (Ω)] de um certo termômetro de resistência de platina é dada por

$$R = 10 + 0{,}04124T - 1{,}779 \times 10^{-5}T^2$$

onde T é a temperatura variando entre 0°C e 700°C. Quando, no intervalo de variação da temperatura, a resistência é mais e menos sensível à variação de T? [*Sugestão*: Considere o tamanho de dR/dT no intervalo $0 \le t \le 700$.]

59-60 Use um recurso gráfico para fazer estimativas grosseiras dos intervalos nos quais $f'(x) > 0$ e os encontre exatamente por diferenciação.

59. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ **60.** $f(x) = x^3 - 3x$

61-64 Nestes exercícios, determine se a função dada é diferenciável em um valor $x = x_0$, sendo que f está definida por fórmulas diferentes em lados diferentes de x_0. Para isso, pode ser usado o resultado seguinte, que é uma conseqüência do Teorema do Valor Médio (a ser discutido na Seção 5.7). ***Teorema***: *Seja f uma função contínua em* x_0 *e suponha que exista* $\lim_{x \to x_0} f'(x)$. *Então f é diferenciável em* x_0, e $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.

61. Mostre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \le 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$$

é contínua em $x = 1$. Determine se f é diferenciável em $x = 1$. Se for, encontre o valor da derivada nesse ponto. Esboce o gráfico de f.

62. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16x, & x < 9 \\ \sqrt{x}, & x \geq 9 \end{cases}$$

f é contínua em $x = 9$? Determine se f é diferenciável em $x = 9$. Se for, encontre o valor da derivada nesse ponto.

63. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Determine se f é diferenciável em $x = 1$. Caso seja, encontre o valor da derivada nesse ponto.

64. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{1}{16}, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}x^2, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Determine se f é diferenciável em $x = \frac{1}{2}$. Caso seja, encontre o valor da derivada nesse ponto.

65. Encontre os pontos onde f não é diferenciável. Justifique sua resposta.

(a) $f(x) = |3x - 2|$ (b) $f(x) = |x^2 - 4|$

66. Em cada item, calcule f', f'' e f''' e, então, estabeleça uma fórmula para $f^{(n)}$.

(a) $f(x) = 1/x$ (b) $f(x) = 1/x^2$

[*Sugestão*: A expressão $(-1)^n$ tem valor 1 se n for par e -1 se n for ímpar. Use essa expressão em sua resposta.]

67. (a) Prove:

$$\frac{d^2}{dx^2}[cf(x)] = c\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[f(x) + g(x)] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)] + \frac{d^2}{dx^2}[g(x)]$$

(b) Os resultados de (a) se generalizam para a enésima derivada? Justifique sua resposta.

68. Sendo $f(x) = x^8 - 2x + 3$, encontre

$$\lim_{w \to 2} \frac{f'(w) - f'(2)}{w - 2}$$

69. (a) Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = x^k$ e $n > k$, onde k é um inteiro positivo.

(c) Encontre $f^{(n)}(x)$ se

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

70. (a) Prove: se $f''(x)$ existe para cada x em (a, b), então f e f' são contínuas em (a, b).

(b) O que se pode afirmar quanto à continuidade de f e suas derivadas se $f^{(n)}(x)$ existe para cada x em (a, b)?

71. Seja $f(x) = (mx + b)^n$, onde m e b são constantes e n é um inteiro. Use o resultado do Exercício 48 na Seção 3.2 para provar que $f'(x) = nm(mx + b)^{n-1}$.

72-73 Verifique o resultado do Exercício 71 para $f(x)$.

72. $f(x) = (2x + 3)^2$ **73.** $f(x) = (3x - 1)^3$

74-77 Use o resultado do Exercício 71 para calcular a derivada da função $f(x)$ dada.

74. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ **75.** $f(x) = \dfrac{3}{(2x + 1)^2}$

76. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ **77.** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.3

1. (a) $f'(x) = -2x + 1 - \dfrac{6}{x^3}$ (b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ (c) $f'(x) = 4x^3$ (d) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{x}}$ **2.** $y = 3x$ **3.** $(1, 4)$ **4.** 4; 1 **5.** $\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}$

3.4 REGRAS DO PRODUTO E DO QUOCIENTE

Nesta seção desenvolveremos técnicas para derivar produtos e quocientes de funções cujas derivadas são conhecidas.

■ DERIVADA DE UM PRODUTO

Poderíamos conjecturar que a derivada do produto de duas funções seja o produto de suas derivadas. Contudo, um exemplo simples nos mostra que isso é falso. Considere as funções

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

O produto de suas derivadas é

$$f'(x)g'(x) = (1)(2x) = 2x$$

mas seu produto é $h(x) = f(x)g(x) = x^3$; portanto, a derivada do produto é

$$h'(x) = 3x^2$$

Assim, a derivada do produto não é igual ao produto das derivadas. A relação correta, que é creditada a Leibniz, é expressa no teorema seguinte.

A Fórmula (1) também pode ser expressa por

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$$

3.4.1 TEOREMA (***Regra do Produto***) *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também o é, e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{1}$$

DEMONSTRAÇÃO Enquanto as provas das regras de derivação da seção anterior eram aplicações diretas da definição de derivada, esta prova utiliza um passo crucial que envolve somar e subtrair a quantidade $f(x + h)g(x)$ ao numerador na definição da derivada. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \left[\lim_{h \to 0} f(x+h) \right] \frac{d}{dx}[g(x)] + \left[\lim_{h \to 0} g(x) \right] \frac{d}{dx}[f(x)] \\
&= f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]
\end{aligned}$$

[*Nota*: No último passo, $f(x + h) \to f(x)$ quando $h \to 0$, pois f é contínua em x pelo Teorema 3.2.3, e $g(x) \to g(x)$ quando $h \to 0$, pois $g(x)$ não envolve h e, portanto, permanece constante.] ■

Em palavras, *a derivada de um produto de duas funções é o produto da primeira função vezes a derivada da segunda somado com o produto da segunda função vezes a derivada da primeira.*

▶ **Exemplo 1** Encontre dy/dx se $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$.

Solução Pode-se usar dois métodos para encontrar dy/dx. Podemos tanto usar a regra do produto quanto efetuar as multiplicações indicadas na fórmula de y e, então, diferenciar. Vamos utilizar ambos os métodos.

Método I (*usando a regra do produto*)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(4x^2 - 1)(7x^3 + x)]$$
$$= (4x^2 - 1)\frac{d}{dx}[7x^3 + x] + (7x^3 + x)\frac{d}{dx}[4x^2 - 1]$$
$$= (4x^2 - 1)(21x^2 + 1) + (7x^3 + x)(8x) = 140x^4 - 9x^2 - 1$$

Método II (*primeiro multiplicando*)

$$y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x) = 28x^5 - 3x^3 - x$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[28x^5 - 3x^3 - x] = 140x^4 - 9x^2 - 1$$

que é o mesmo resultado obtido pela regra do produto. ◀

▶ **Exemplo 2** Encontre ds/dt se $s = (1 + t)\sqrt{t}$.

Solução Aplicando a regra do produto, obtemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[(1 + t)\sqrt{t}]$$
$$= (1 + t)\frac{d}{dt}[\sqrt{t}] + \sqrt{t}\frac{d}{dt}[1 + t]$$
$$= \frac{1 + t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} = \frac{1 + 3t}{2\sqrt{t}}$$ ◀

DERIVADA DE UM QUOCIENTE

Assim como a derivada de um produto não é, em geral, o produto das derivadas, também a derivada de um quociente não é, em geral, o quociente das derivadas. A relação correta é dada no teorema seguinte.

A Fórmula (2) também pode ser expressa por

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

3.4.2 TEOREMA (***Regra do Quociente***) *Se f e g forem diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então f/g é diferenciável em x, e*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} \qquad (2)$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x + h)}{g(x + h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x + h)}$$

Somando-se e subtraindo-se ao numerador o termo $f(x) \cdot g(x)$, obteremos

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[g(x)\cdot \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - \left[f(x)\cdot \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} g(x)\cdot \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} f(x)\cdot \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x)\cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x+h)}$$

$$= \frac{\left[\lim\limits_{h\to 0} g(x)\right]\cdot \dfrac{d}{dx}[f(x)] - \left[\lim\limits_{h\to 0} f(x)\right]\cdot \dfrac{d}{dx}[g(x)]}{\lim\limits_{h\to 0} g(x)\cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x+h)}$$

$$= \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

[Veja a nota no final da prova do Teorema 3.4.1 para explicações sobre a última passagem.] ■

Em palavras, *a derivada de um quociente de duas funções é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, tudo dividido pelo quadrado do denominador.*

Às vezes é melhor simplificar uma função do que aplicar a regra do quociente às cegas. Por exemplo, é mais fácil derivar

$$f(x) = \frac{x^{3/2}+x}{\sqrt{x}}$$

reescrevendo essa função como

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

do que usar a regra do quociente na primeira expressão.

► Exemplo 3 Encontre $y'(x)$ para $y = \dfrac{x^3+2x^2-1}{x+5}$.

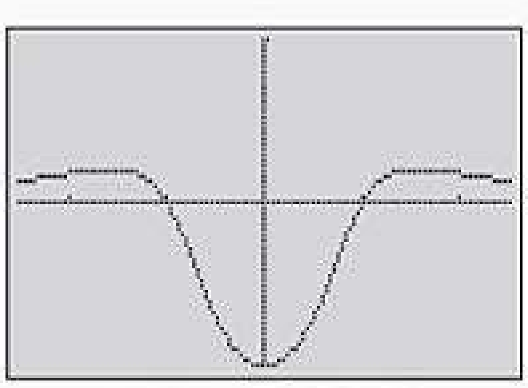
Solução Aplicando a regra do quociente, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3+2x^2-1}{x+5}\right] = \frac{(x+5)\dfrac{d}{dx}[x^3+2x^2-1] - (x^3+2x^2-1)\dfrac{d}{dx}[x+5]}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{(x+5)(3x^2+4x) - (x^3+2x^2-1)(1)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{(3x^3+19x^2+20x) - (x^3+2x^2-1)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{2x^3+17x^2+20x+1}{(x+5)^2} \blacktriangleleft$$



$[-2{,}5; 2{,}5] \times [-1, 1]$
$x\text{Scl} = 1, y\text{Scl} = 1$

$$y = \frac{x^2-1}{x^4+1}$$

Figura 3.4.1

► Exemplo 4 Seja $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^4+1}$.

(a) Faça o gráfico de $y = f(x)$ e utilize-o para obter as localizações aproximadas de todas as retas tangentes horizontais.

(b) Por diferenciação, encontre a localização exata das retas tangentes horizontais.

Solução (a) A Figura 3.4.1 mostra o gráfico de $y = f(x)$ na janela $[-2{,}5; 2{,}5] \times [-1, 1]$. Esse gráfico sugere que as retas tangentes horizontais ocorrem em $x = 0$, $x \approx 1{,}5$ e $x \approx -1{,}5$.

Solução (b) Para encontrar a exata localização das retas tangentes horizontais, devemos descobrir os pontos nos quais $dy/dx = 0$. Vamos começar encontrando dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{x^4+1}\right] = \frac{(x^4+1)\frac{d}{dx}[x^2-1] - (x^2-1)\frac{d}{dx}[x^4+1]}{(x^4+1)^2}$$

$$= \frac{(x^4+1)(2x) - (x^2-1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

A diferenciação está completa
O resto é simplificação

$$= \frac{-2x^5+4x^3+2x}{(x^4+1)^2} = -\frac{2x(x^4-2x^2-1)}{(x^4+1)^2}$$

Vamos equacionar agora $dy/dx = 0$ e determinar as soluções x. Obtemos

$$-\frac{2x(x^4-2x^2-1)}{(x^4+1)^2} = 0$$

As soluções para essa equação são os valores de x que anulam o numerador:

$$2x(x^4-2x^2-1) = 0$$

O primeiro fator dá lugar à solução $x = 0$. Outras soluções podem ser encontradas resolvendo a equação

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

Essa pode ser tratada como uma equação quadrática em x^2 e resolvida pela fórmula quadrática. Obtém-se, então,

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

O sinal menos dá lugar a valores imaginários para x, os quais vamos ignorar, pois não são relevantes para o problema. O sinal mais dá lugar às soluções

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

Em resumo, as retas tangentes horizontais ocorrem em

$$x = 0, \quad x = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1{,}55 \quad \text{e} \quad x = -\sqrt{1+\sqrt{2}} \approx -1{,}55$$

que estão em conformidade com as aproximações obtidas em (a). ◄

Deduza a regra seguinte para a derivada do recíproco de uma função:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Utilize essa regra para encontrar a derivada de

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

■ RESUMO DAS REGRAS DE DERIVAÇÃO

A tabela abaixo resume as regras de derivação que encontramos até aqui.

$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
$(cf)' = cf'$	$(f-g)' = f' - g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ (n um inteiro)

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.4 *(Ver página 204 para respostas.)*

1. (a) $\frac{d}{dx}\left[\frac{x+1}{x-1}\right] =$ ________

(b) $\frac{d}{dx}[(4-x^3)(x^2+x-1)] =$ ________

(c) $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^3-x^2}\right] =$ ________

2. Encontre $F'(1)$ sabendo que $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$, $g(1) = 3$ e $g'(1) = -1$.

(a) $F(x) = 2f(x) - 3g(x)$
(b) $F(x) = [f(x)]^2$
(c) $F(x) = f(x)g(x)$
(d) $F(x) = f(x)/g(x)$

3. e uaçã a reta tangente a gráfic e

$$y = \frac{3x+4}{x^2+1}$$

em $x = 2$ é ___________

4. Su n ue f e a ua eze eri á e , enc ntre uma órmu a ara a eri a a egun a e $g\ x = f\ x^{\ 2}$ em term e f, f' e f''

EXERCÍCIOS 3.4 Recurso Gráfico

1-4 a cu e a eri a a a unçã $f\ x$: a mu ti ican e entã eri an , e e i b u an a regra r ut erifi ue ue a e b ã me m re u ta

1. $f(x) = (x+1)(2x-1)$ **2.** $f(x) = (3x^2-1)(x^2+2)$

3. $f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$

4. $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)$

5-10 Enc ntre $f'\ x$

5. $f(x) = (3x^2+6)\left(2x-\frac{1}{4}\right)$

6. $f(x) = (2-x-3x^3)(7+x^5)$

7. $f(x) = (x^3+7x^2-8)(2x^{-3}+x^{-4})$

8. $f(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(3x^3+27)$

9. $f(x) = (x-2)(x^2+2x+4)$

10. $f(x) = (x^2+x)(x^2-x)$

11-16 Enc ntre $dy/dx|_{x=1}$

11. $y = \frac{1}{5x-3}$ **12.** $y = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$

13. $y = \frac{2x-1}{x+3}$ **14.** $y = \frac{4x+1}{x^2-5}$

15. $y = \left(\frac{3x+2}{x}\right)(x^{-5}+1)$ **16.** $y = (2x^7-x^2)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

17-18 e um recur gráfic ara e timar a r e $f'\ 1$ u an um *zoom* n gráfic e f e, entã , c m are ua e timati a a a r e at bti r eri açã

17. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ **18.** $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

19. Enc ntre $g'\ 4$, a ue $f\ 4 = 3$ e $f'\ 4 = -5$

(a) $g(x) = \sqrt{x}f(x)$ (b) $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

20. Enc ntre $g'\ 3$, a ue $f\ 3 = -2$ e $f'\ 3 = 4$

(a) $g(x) = 3x^2 - 5f(x)$ (b) $g(x) = \frac{2x+1}{f(x)}$

21. Enc ntre $F'\ 2$, a ue $f\ 2 = -1$, $f'\ 2 = 4$, $g\ 2 = 1$ e $g'\ 2 = -5$

(a) $F(x) = 5f(x) + 2g(x)$ (b) $F(x) = f(x) - 3g(x)$
(c) $F(x) = f(x)g(x)$ (d) $F(x) = f(x)/g(x)$

22. Enc ntre $F'\ \pi$, a ue $f\ \pi = 10$, $f'\ \pi = -1$, $g\ \pi = -3$ e $g'\ \pi = 2$

(a) $F(x) = 6f(x) - 5g(x)$ (b) $F(x) = x(f(x)+g(x))$
(c) $F(x) = 2f(x)g(x)$ (d) $F(x) = \frac{f(x)}{4+g(x)}$

23-28 Enc ntre t a re e x n uai a reta tangente à cur a a a ati az a r rie a e enuncia a

23. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$ h riz nta **24.** $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ h riz nta

25. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ ara e a à reta $y = x$

26. $y = \frac{x+3}{x+2}$ er en icu ar à reta $y = x$

27. $y = \frac{1}{x+4}$ a a e a rigem

28. $y = \frac{2x+5}{x+2}$ c rta ei y em 2

ENFOCANDO CONCEITOS

29. a Defina ue e eria ignificar ua cur a e inter ec tan em ângu ret

b Pr e ue a cur a $y = 1/x$ e $y = 1/\ 2-x$ e inter ec tam em ângu ret

30. Enc ntre t a re e a ara uai a cur a $y = a/\ x-1$ e $y = x^2 - 2x + 1$ e inter ectam em ângu ret

31. Enc ntre a órmu a gera ara $F''\ x$ e $F\ x = xf\ x$ e f e f' ã i erenciá ei em x

32. Su nha ue a unçã f e a i erenciá e em t a arte e ue $F\ x = xf\ x$

a E re e $F'''\ x$ em term e x e a eri a a e f

b Para $n \geq 2$, c n ecture uma órmu a ara $F^{n}\ x$

33. i ue ua eze a regra r ut e rema 3 4 1 ara m trar ue e f, g e h rem i erenciá ei , entã $f \cdot g \cdot h$ erá i erenciá e e

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

34. m ba e n re u ta E ercíci 33, aça uma c n ectura bre uma órmu a ara i erenciar um r ut e n unçõe

35. e a órmu a bti a n E ercíci 33 ara enc ntrar:

(a) $\frac{d}{dx}\left[(2x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)(x^{-3}+7)\right]$

(b) $\frac{d}{dx}[(x^7+2x-3)^3]$

36. Use a fórmula obtida no Exercício 34 para encontrar:

(a) $\dfrac{d}{dx}[x^{-5}(x^2+2x)(4-3x)(2x^9+1)]$

(b) $\dfrac{d}{dx}[(x^2+1)^{50}]$

37. Sabendo que f é uma função derivável e que n é um inteiro positivo, use o resultado do Exercício 34 para determinar uma fórmula para a derivada de $g(x) = (f(x))^n$.

38. Use o resultado do Exercício 37 para encontrar a derivada de $g(x) = (x^2 - 1)^{10}$.

39 Use a regra do quociente (Teorema 3.4.2) para deduzir a fórmula para a derivada de $f(x) = x^{-n}$, onde n é um inteiro positivo.

40. Supondo que $h(x) = f(x)/g(x)$ seja derivável, use a regra do produto para deduzir a Fórmula (2). [*Sugestão:* Derive ambos os lados da equação $h(x) \cdot g(x) = f(x)$ e resolva em $h'(x)$.]

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.4

1. (a) $-\dfrac{2}{(x-1)^2}$ (b) $(4-x^3)(2x+1)+(x^2+x-1)(-3x^2)$ (c) $\dfrac{2x-3x^2}{(x^3-x^2)^2}$ **2.** (a) 7 (b) −4 (c) 7 (d) $\dfrac{5}{9}$ **3.** $y = -x + 4$ **4.** $2f'^2 + 2ff''$

3.5 DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O objetivo principal desta seção é obter as fórmulas para as derivadas das seis funções trigonométricas básicas. Se considerar necessário, o leitor pode consultar a revisão de funções trigonométricas dada no Apêndice A.

Nesta seção vamos supor que a variável independente x das funções trigonométricas sen x, cos x, tg x, cotg x, sec x e cossec x seja medida em radianos. Também vamos precisar dos limites no Teorema 2.6.4, reescritos com h em vez de x como a variável, como segue:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

Comecemos com o problema de derivar $f(x) = \operatorname{sen} x$. Usando a definição de derivada, obtemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h+\cos x\operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x}{h} && \text{Pela fórmula da adição do seno}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)-\operatorname{sen} x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)\right] && \text{Reorganização algébrica}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}-\lim_{h\to 0}\operatorname{sen} x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\\
&= \left(\lim_{h\to 0}\cos x\right)(1)-\left(\lim_{h\to 0}\operatorname{sen} x\right)(0) && \text{Fórmulas (1) e (2)}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x = \cos x && \text{cos } x \text{ não envolve a variável } h \text{ e, portanto, pode ser tratado como uma constante no cálculo do limite}
\end{aligned}$$

Reforçamos que as fórmulas das derivadas das funções trigonométricas são válidas somente se x for medido em radianos. Ver no Exercício 47 como essas fórmulas mudam se x for medido em graus.

Assim, mostramos que

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \tag{3}$$

Nos exercícios o leitor será convidado a utilizar o mesmo método para derivar a fórmula seguinte para a derivada de cos x:

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x \tag{4}$$

▶ Exemplo 1 Encontre dy/dx se $y = x \operatorname{sen} x$.

Solução Usando a Fórmula (3) e a regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[x \operatorname{sen} x] \\ &= x\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}[x] \\ &= x\cos x + \operatorname{sen} x \quad ◀\end{aligned}$$

▶ Exemplo 2 Encontre dy/dx se $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.

Solução Usando a regra do quociente junto com as Fórmulas (3) e (4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1+\cos x)\cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] - \operatorname{sen} x \cdot \frac{d}{dx}[1+\cos x]}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{(1+\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x} \quad ◀\end{aligned}$$

As fórmulas das derivadas das funções trigonométricas deveriam ser memorizadas. Um auxílio mnemônico é dado no Exercício 48.

As derivadas das demais funções trigonométricas são

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \operatorname{tg} x \tag{5-6}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cotg} x] = -\operatorname{cossec} x^2 \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{cossec} x] = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \tag{7-8}$$

Todas essas fórmulas podem ser obtidas usando a definição de derivada, mas é mais fácil utilizar as Fórmulas (3) e (4) e aplicar a regra do quociente às relações

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right] &= \frac{\cos x \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] - \operatorname{sen} x \cdot \frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

► Exemplo 3 Encontre $f''(\pi/4)$ se $f(x) = \sec x$.

$$f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$f''(x) = \sec x \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] + \operatorname{tg} x \cdot \frac{d}{dx}[\sec x]$$

$$= \sec x \cdot \sec^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \sec x \operatorname{tg} x$$

$$= \sec^3 x + \sec x \operatorname{tg}^2 x$$

Assim,

$$f''(\pi/4) = \sec^3(\pi/4) + \sec(\pi/4) \operatorname{tg}^2(\pi/4)$$

$$= (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})(1)^2 = 3\sqrt{2} \blacktriangleleft$$

Quando quisermos obter o valor de uma derivada em um ponto específico $x = x_0$, é importante substituir x_0 *depois* de obtida a derivada. Assim, no Exemplo 3, fizemos a substituição $x = \pi/4$ depois de calcular f''. O que teria acontecido se tivéssemos substituído $x = \pi/4$ *incorretamente* em $f'(x)$ antes de calcular f''?

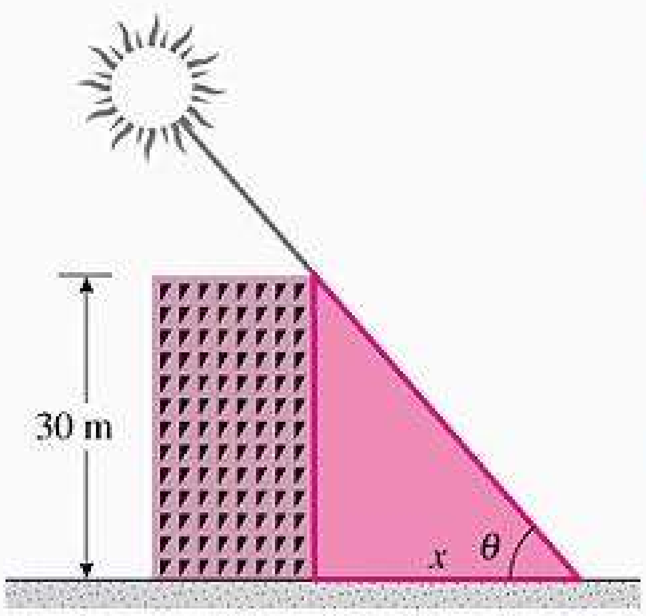


Figura 3.5.1

► Exemplo 4 Suponha que o Sol nascente passe diretamente sobre um prédio de 30 metros de altura e seja θ o ângulo de elevação do Sol (Figura 3.5.1). Encontre a taxa segundo a qual o comprimento x da sombra do prédio está variando em relação a θ, quando $\theta = 45°$. Expresse a resposta em metros/graus.

Solução As variáveis x e θ estão relacionadas por $\operatorname{tg} \theta = 30/x$, ou, de forma equivalente,

$$x = 30 \operatorname{cotg} \theta \tag{9}$$

Se θ for medido em radianos, então a Fórmula (7) é aplicável, resultando em

$$\frac{dx}{d\theta} = -30 \operatorname{cossec}^2 \theta$$

que é a taxa de variação do comprimento da sombra em relação ao ângulo de elevação em metros/radianos. Quando $\theta = 45°$ (ou, de forma equivalente, $\theta = \pi/4$ radianos), obtemos

$$\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/4} = -30 \operatorname{cossec}^2(\pi/4) = -60 \text{ metros/radianos}$$

Convertendo radianos (rad) para graus, obtemos

$$-60 \frac{\text{m}}{\text{rad}} \cdot \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{graus}} = -\frac{\pi}{3} \frac{\text{m}}{\text{graus}} \approx -1{,}05 \text{ m/grau}$$

Assim, quando $\theta = 45°$, o comprimento da sombra está decrescendo (devido ao sinal menos) a uma taxa aproximada de 1,05 m/grau, com o aumento do ângulo de elevação. ◄

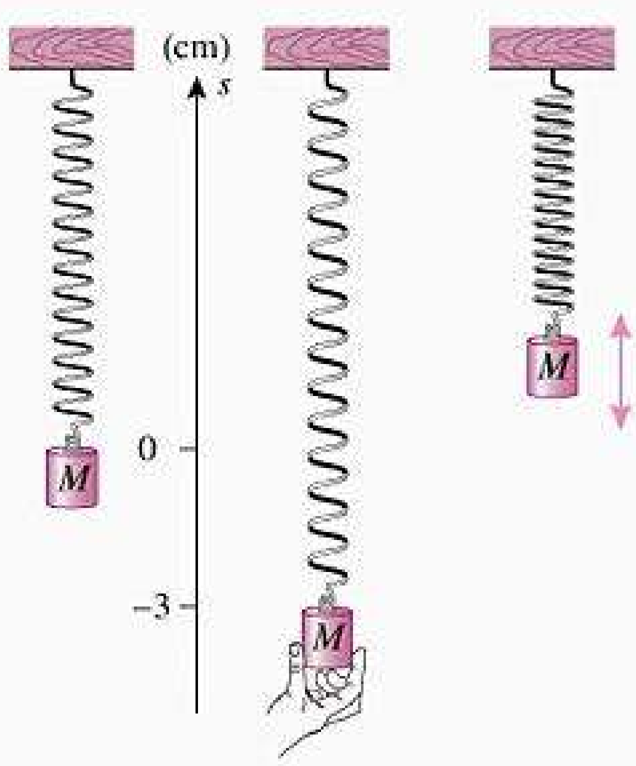


Figura 3.5.2

► Exemplo 5 Conforme ilustra a Figura 3.5.2, suponha que uma massa presa na ponta de uma mola seja espichada 3 cm além de seu ponto de repouso e largada no instante $t = 0$. Supondo que a função posição do topo da massa presa à mola seja

$$s = -3 \cos t \tag{10}$$

onde s está em centímetros e t em segundos, encontre a função velocidade e discuta o movimento dessa massa.

Solução A função velocidade é

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[-3 \cos t] = 3 \operatorname{sen} t$$

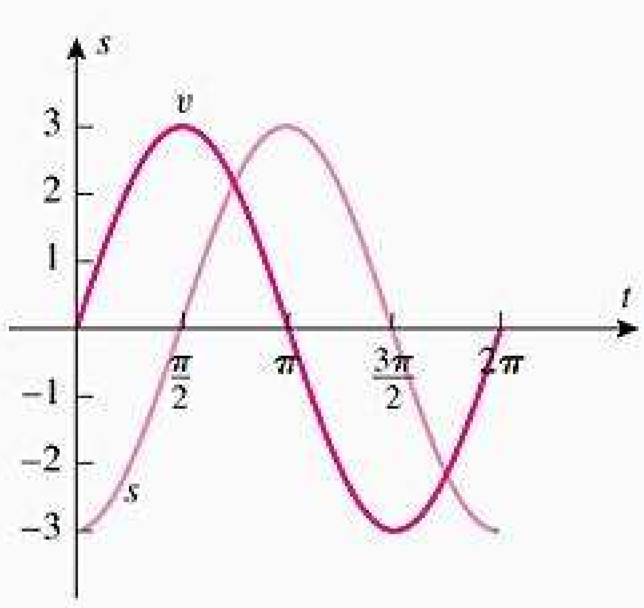


Figura 3.5.3

A Figura 3.5.3 mostra o gráfico das funções posição e velocidade. A função posição nos diz que o topo da massa oscila entre um ponto mínimo de $s = -3$ e um ponto máximo de $s = 3$, com uma oscilação completa ocorrendo a cada 2π segundos [o período de (10)]. O topo da massa se

O topo da massa atinge sua velocidade escalar máxima quando passa pelo ponto de repouso. Por quê? Qual é essa velocidade escalar máxima?

move para cima (o sentido positivo de s) quando v é positiva, para baixo quando v é negativa e está no ponto máximo ou mínimo quando $v = 0$. Assim, por exemplo, o topo da massa se move para cima do tempo $t = 0$ até o tempo $t = \pi$, quando atinge o ponto máximo $s = 3$ e, então, se move para baixo até o tempo $t = 2\pi$, quando atinge o ponto mínimo $s = -3$. O movimento então se repete periodicamente. ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.5 (Ver página 209 para respostas.)

1. Encontre dy/dx.
   (a) $y = \text{sen}\, x$ (b) $y = \cos x$
   (c) $y = \text{tg}\, x$ (d) $y = \sec x$
2. Encontre $f'(x)$ e $f'(\pi/3)$ se $f(x) = \text{sen}\, x \cos x$.
3. Use uma derivada para calcular cada limite.
   (a) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - 1}{h}$
   (b) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\text{cossec}(x + h) - \text{cossec}\, x}{h}$

EXERCÍCIOS 3.5 Recurso Gráfico

1-18 Encontre $f'(x)$.

1. $f(x) = 4\cos x + 2\,\text{sen}\, x$
2. $f(x) = \dfrac{5}{x^2} + \text{sen}\, x$
3. $f(x) = -4x^2 \cos x$
4. $f(x) = 2\,\text{sen}^2 x$
5. $f(x) = \dfrac{5 - \cos x}{5 + \text{sen}\, x}$
6. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x^2 + \text{sen}\, x}$
7. $f(x) = \sec x - \sqrt{2}\,\text{tg}\, x$
8. $f(x) = (x^2 + 1)\sec x$
9. $f(x) = 4\,\text{cossec}\, x - \text{cotg}\, x$
10. $f(x) = \cos x - x\,\text{cossec}\, x$
11. $f(x) = \sec x\,\text{tg}\, x$
12. $f(x) = \text{cossec}\, x\,\text{cotg}\, x$
13. $f(x) = \dfrac{\text{cotg}\, x}{1 + \text{cossec}\, x}$
14. $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \text{tg}\, x}$
15. $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$
16. $f(x) = \sec^2 x - \text{tg}^2 x$
17. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x \sec x}{1 + x\,\text{tg}\, x}$
18. $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)\,\text{cotg}\, x}{3 - \cos x\,\text{cossec}\, x}$

19-24 Encontre d^2y/dx^2.

19. $y = x\cos x$
20. $y = \text{cossec}\, x$
21. $y = x\,\text{sen}\, x - 3\cos x$
22. $y = x^2 \cos x + 4\,\text{sen}\, x$
23. $y = \text{sen}\, x \cos x$
24. $y = \text{tg}\, x$
25. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $\text{tg}\, x$ nos pontos
   (a) $x = 0$ (b) $x = \pi/4$ (c) $x = -\pi/4$
26. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $\text{sen}\, x$ nos pontos
   (a) $x = 0$ (b) $x = \pi$ (c) $x = \pi/4$
27. (a) Mostre que $y = x\,\text{sen}\, x$ é uma solução de $y'' + y = 2\cos x$.
   (b) Mostre que $y = x\,\text{sen}\, x$ é uma solução da equação $y^{(4)} + y'' = -2\cos x$.
28. (a) Mostre que $y = \cos x$ e $y = \text{sen}\, x$ são soluções da equação $y'' + y = 0$.
   (b) Mostre que $y = A\,\text{sen}\, x + B\cos x$ é uma solução da equação $y'' + y = 0$ para qualquer valor das constantes A e B.
29. Encontre todos os pontos no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ nos quais o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal.
   (a) $f(x) = \text{sen}\, x$ (b) $f(x) = x + \cos x$
   (c) $f(x) = \text{tg}\, x$ (d) $f(x) = \sec x$
30. (a) Use um recurso gráfico para fazer estimativas rudimentares dos pontos no intervalo $[0, 2\pi]$ nos quais o gráfico de $y = \text{sen}\, x \cos x$ tem uma reta tangente horizontal.
   (b) Encontre a exata localização dos pontos onde o gráfico tem uma reta tangente horizontal.
31. Uma escada de 3 m está apoiada em uma parede em um ângulo θ com a horizontal, conforme mostra a figura abaixo. A parte mais alta da escada está a x metros do solo. Se a base da escada for empurrada em direção à parede, encontre a taxa segundo a qual x varia em relação a θ quando $\theta = 60°$. Expresse sua resposta em metros/grau.

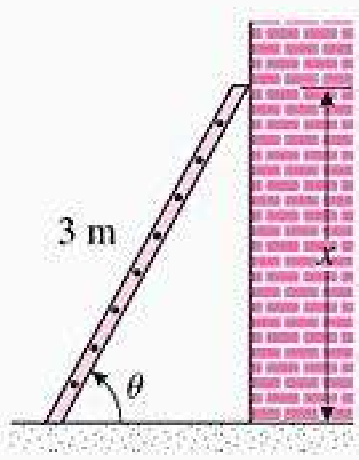


Figura Ex-31

32. Um avião está voando a 1.100 m de altura, conforme a figura abaixo. Qual é a taxa de variação da distância entre o avião e o ponto fixo P em relação a θ quando $\theta = 30°$? Expresse sua resposta em metros/grau.

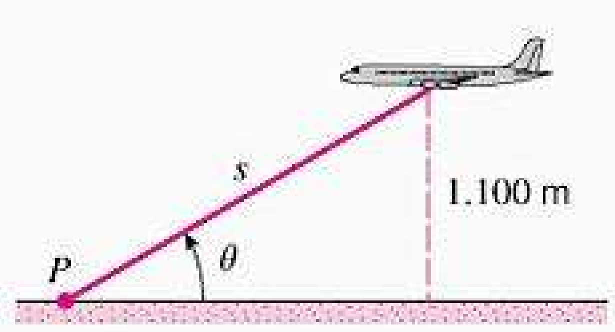


Figura Ex-32

33. Um holofote lança um facho de luz sobre uma parede distante 50 m dele, conforme a figura abaixo. Encontre a taxa segundo a qual a distância D está variando com θ quando $\theta = 45°$. Expresse sua resposta em metros/grau.

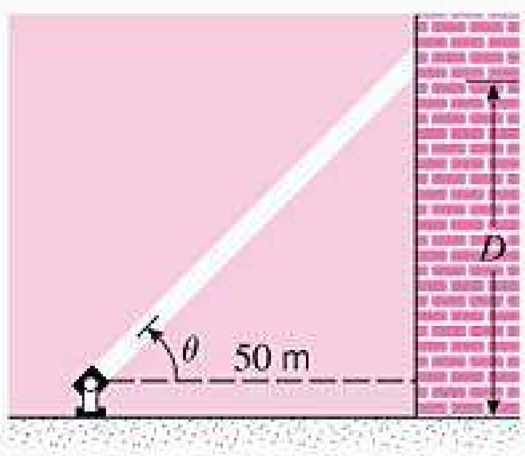


Figura Ex-33

34. Um satélite de observação pode ver somente uma parte da superfície da Terra. Ele tem sensores de horizonte que permitem calcular o ângulo θ, o qual pode ser visto na figura abaixo. Suponha que a Terra (esférica) tenha raio r e que a distância do satélite a partir da superfície dela seja h.

(a) Mostre que $h = r\,(\text{cossec}\,\theta - 1)$.

(b) Considerando $r = 6.378$km e supondo que o satélite se aproxima da Terra, encontre a taxa segundo a qual h está variando em relação a θ quando $\theta = 30°$. Expresse sua resposta em quilômetros/grau.

[Adaptado do *Space Mathematics*, NASA, 1985.]

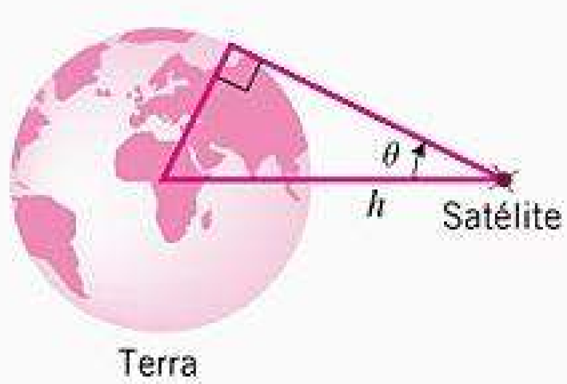


Figura Ex-34

35-36 Faça uma conjectura sobre a derivada, calculando algumas delas e observando o padrão resultante.

35. (a) $\dfrac{d^{87}}{dx^{87}}[\text{sen}\,x]$ (b) $\dfrac{d^{100}}{dx^{100}}[\cos x]$

36. $\dfrac{d^{17}}{dx^{17}}[x\,\text{sen}\,x]$

37. Seja $f(x) = \cos x$. Encontre todos os inteiros positivos n para os quais $f^{(n)}(x) = \text{sen}\,x$.

38. Seja $f(x) = \text{sen}\,x$. Encontre todos os inteiros positivos n para os quais $f^{(n)}(x) = \text{sen}\,x$.

ENFOCANDO CONCEITOS

39. Em cada item, determine onde f é diferenciável.

(a) $f(x) = \text{sen}\,x$ (b) $f(x) = \cos x$

(c) $f(x) = \text{tg}\,x$ (d) $f(x) = \text{cotg}\,x$

(e) $f(x) = \sec x$ (f) $f(x) = \text{cossec}\,x$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$ (h) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}\,x \cos x}$

(i) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 - \text{sen}\,x}$

40. (a) Deduza a Fórmula (4) usando a definição de derivada.

(b) Use as Fórmulas (3) e (4) para obter (7).

(c) Use a Fórmula (4) para obter (6).

(d) Use a Fórmula (3) para obter (8).

41. Use a Fórmula (1), o formato alternativo para a definição de derivada dado na Fórmula (13) da Seção 3.2, ou seja,

$$f'(x) = \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

e a identidade da diferença dos senos

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

para mostrar que $\dfrac{d}{dx}[\text{sen}\,x] = \cos x$.

42. Seguindo a orientação do Exercício 41, use a identidade da diferença dos cossenos

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

para mostrar que $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\,\text{sen}\,x$.

43. (a) Mostre que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\text{tg}\,h}{h} = 1$.

(b) Use o resultado de (a) como auxílio na dedução da fórmula para a derivada de tg x diretamente da definição de derivada.

44. Sem usar identidades trigonométricas, encontre

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(x + y) - \text{tg}\,y}{x}$$

[*Sugestão*: Relacione o limite dado com a definição de derivada de uma função apropriada de y.]

45. Mostre que, se k é uma constante, então

$$\frac{d}{dx}[\cos kx] = -k\,\text{sen}\,kx$$

46. Uma massa presa na ponta de uma mola é espichada 4 cm abaixo de seu ponto de repouso e largada no instante $t = 0$. Depois de largada, a massa se move ao longo de um eixo vertical, em que consideramos o sentido positivo como sendo para cima e a origem localizada no topo da massa quando a mola está na posição de repouso. Suponha que a função posição do topo da massa seja $s = -4\cos \pi t$, onde s está em centímetros e t em segundos medidos a partir do instante em que a massa é largada. Use o resultado do Exercício 45 para encontrar a função velocidade da massa. Qual é a velocidade da massa em sua primeira passagem pelo ponto de repouso?

47. As fórmulas das derivadas de sen x, cos x, tg x, cotg x, sec x e cossec x foram obtidas sob a hipótese de que x seja medido

em radianos. Usando os resultados dos Exercícios 69 e 70 da Seção 2.6, prove que, se x for medido em graus, então

(a) $\dfrac{d}{dx}[\text{sen}\, x] = \dfrac{\pi}{180}\cos x$

(b) $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\dfrac{\pi}{180}\,\text{sen}\, x$

48. Vamos chamar as funções cos x, cotg x e cossec x de ***cofunções*** de sen x, tg x e sec x, respectivamente. Convença-se de que a derivada de qualquer cofunção pode ser obtida a partir da derivada da função correspondente pela introdução de um sinal de menos e substituindo cada função na derivada por sua cofunção. Memorize as derivadas de sen x, tg x e sec x e use a observação acima para deduzir as derivadas das cofunções.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.5

1. (a) $\cos x$ (b) $-\text{sen}\, x$ (c) $\sec^2 x$ (d) $\sec x\,\text{tg}\, x$ **2.** $f'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, $f'(\pi/3) = -\dfrac{1}{2}$

3. (a) $\dfrac{d}{dx}[\text{sen}\, x]\Big|_{x=\pi/2} = 0$ (b) $\dfrac{d}{dx}[\text{cossec}\, x] = -\,\text{cossec}\, x\,\text{cotg}\, x$

3.6 REGRA DA CADEIA

Nesta seção deduziremos uma fórmula que expresse a derivada de uma composição $f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g. Essa fórmula nos permitirá derivar funções complicadas usando derivadas de funções mais simples.

■ DERIVADAS DE COMPOSIÇÕES

Considere o problema de calcular a derivada de

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)^{100}] \tag{1}$$

As duas maneiras de que dispomos até aqui para essa derivação são expandir $(x^2 + 1)^{100}$ pela fórmula do binômio e derivar termo a termo ou aplicar a definição. Em ambos os casos, as contas serão proibitivas e devemos tentar uma nova abordagem. Seja $h(x) = (x^2 + 1)^{100}$. Nossa estratégia será escrever h como uma composta de funções mais simples que sabemos derivar facilmente e então expressar (1) em termos das derivadas dessas funções simples. Por exemplo, expressemos $h(x)$ como a composição

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{onde} \quad g(x) = x^2 + 1, \quad f(x) = x^{100}$$

Como sabemos que

$$g'(x) = 2x \quad \text{e} \quad f'(x) = 100x^{99}$$

basta encontrar uma maneira de expressar $h'(x)$ em termos dessas duas derivadas conhecidas. A chave para isso é a introdução das variáveis dependentes

$$y = (x^2+1)^{100} \quad \text{e} \quad u = g(x) = x^2 + 1$$

das quais segue

$$y = u^{100}$$

Assim, queremos usar as derivadas conhecidas

$$\frac{dy}{du} = 100u^{99} \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = 2x \tag{2}$$

para encontrar a derivada desconhecida

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(x^2+1)^{100}] \tag{3}$$

Para isso, pensemos nas derivadas em (2) e (3) como taxas de variação. Assim, queremos utilizar as taxas de variação dy/du e du/dx conhecidas para encontrar a taxa de variação dy/dx

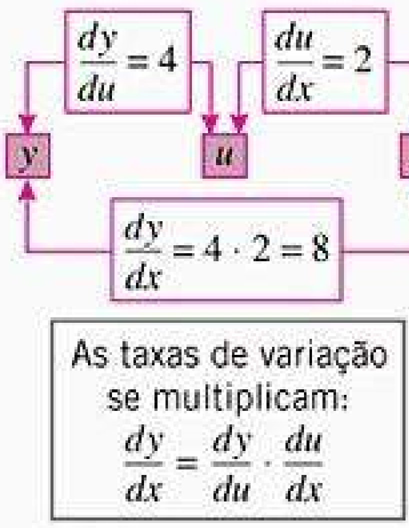


Figura 3.6.1

desconhecida. A intuição sugere que as taxas se multiplicam. Por exemplo, se y varia 4 vezes mais rápido do que u e u varia 2 vezes mais rápido do que x, então y varia $4 \times 2 = 8$ vezes mais rápido do que x (Figura 3.6.1). Isso sugere que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 100u^{99} \cdot 2x = 100(x^2+1)^{99} \cdot 2x = 200x(x^2+1)^{99}$$

Observe que esse processo é mais eficiente para calcular a derivada em (1) do que recorrer à enfadonha expansão binomial.

O teorema seguinte, cuja prova é dada no Apêndice C, formaliza as idéias precedentes.

> O nome "regra da cadeia" é apropriado porque a derivada procurada é obtida com dois elos de uma "cadeia" de derivadas mais simples.

3.6.1 TEOREMA **(*Regra da cadeia*)** *Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f \circ g$ é diferenciável no ponto x. Além disso, se*

$$y = f(g(x)) \quad \text{e} \quad u = g(x)$$

então $y = f(u)$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{4}$$

> A Fórmula (4) é fácil de lembrar porque o lado esquerdo é exatamente o que resultaria se "cancelássemos" os dois du do lado direito. Esse "cancelamento" fornece uma boa maneira de obter a forma correta da regra da cadeia quando utilizamos variáveis diferentes. Por exemplo, se w é uma função de x e x é uma função de t, então a regra da cadeia toma a forma
>
> $$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

► Exemplo 1 Encontre dy/dx se $y = \cos(x^3)$.

Solução Tomamos $u = x^3$ e expressamos y como $y = \cos u$. Aplicando a Fórmula (4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}[\cos u] \cdot \frac{d}{dx}[x^3] \\ &= (-\operatorname{sen} u) \cdot (3x^2) \\ &= (-\operatorname{sen}(x^3)) \cdot (3x^2) = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3) \blacktriangleleft\end{aligned}$$

► Exemplo 2 Encontre dw/dt se $w = \operatorname{tg} x$ e $x = 4t^3 + t$.

Solução Neste caso, a conta da regra da cadeia toma a forma

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d}{dx}[\operatorname{tg} x] \cdot \frac{d}{dt}[4t^3 + t] \\ &= (\sec^2 x) \cdot (12t^2 + 1) \\ &= (\sec^2(4t^3 + t)) \cdot (12t^2 + 1) = (12t^2 + 1)\sec^2(4t^3 + t) \blacktriangleleft\end{aligned}$$

■ UMA VERSÃO ALTERNATIVA DA REGRA DA CADEIA

O uso da Fórmula (4) para a regra da cadeia pode ficar desajeitado em alguns problemas porque envolve muitas variáveis. À medida que o leitor ficar mais à vontade com a regra da cadeia, pode querer dispensar o uso das variáveis dependentes intermediárias, expressando (4) na forma

> Confirme que (5) é uma versão alternativa de (4) tomando $y = f(g(x))$ e $u = g(x)$.

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{5}$$

Uma maneira conveniente de lembrar essa fórmula consiste em chamar f a "função de fora" e g a "função de dentro" na composição $f(g(x))$ e, então, expressar (5) em palavras como:

A derivada de $f(g(x))$ é a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}}$$

▶ Exemplo 3 (*Revisão do Exemplo 1*) Encontre $h'(x)$ se $h(x) = \cos(x^3)$.

Solução Podemos pensar em h como a composição $f(g(x))$ em que $g(x) = x^3$ é a função de dentro e $f(x) = \cos x$ é a função de fora. Assim, a Fórmula (5) fornece

$$\begin{aligned} h'(x) &= \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}} \\ &= f'(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= -\operatorname{sen}(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3) \end{aligned}$$

que confere com o resultado obtido no Exemplo 1. ◀

▶ Exemplo 4

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg}^2 x] = \frac{d}{dx}[(\operatorname{tg} x)^2] = \underbrace{(2 \operatorname{tg} x)}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{(\sec^2 x)}_{\text{Derivada da função de dentro}} = 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x^2+1}] = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{Derivada da função de dentro}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ver Fórmula (5) da Seção 3.3 ◀

■ FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

Existe uma terceira variante da regra da cadeia que é intermediária entre as Fórmulas (4) e (5). Tomando $u = g(x)$ em (5), podemos reescrever aquela fórmula como

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx} \tag{6}$$

Esse resultado, denominado ***fórmula generalizada da derivada*** de f, fornece uma maneira de usar a derivada de $f(x)$ para produzir derivadas de $f(u)$, quando u é uma função de x. A Tabela 3.6.1 dá alguns exemplos de aplicação dessa fórmula.

Tabela 3.6.1

FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO	
$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ (n um inteiro)	$\frac{d}{dx}[\sqrt{u}] = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[\text{sen } u] = \cos u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}[\cos u] = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[\text{tg } u] = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}[\text{cotg } u] = -\text{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \text{ tg } u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}[\text{cossec } u] = -\text{cossec } u \text{ cotg } u \frac{du}{dx}$

► **Exemplo 5** Encontre

(a) $\frac{d}{dx}[\text{sen}(2x)]$ (b) $\frac{d}{dx}[\text{tg}(x^2+1)]$ (c) $\frac{d}{dx}[\sqrt{x^3 + \text{cossec } x}]$

(d) $\frac{d}{dx}[(1 + x^5 \text{ cotg } x)^{-8}]$ (e) $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^3 + 2x - 3}\right]$

Solução (a) Tomando $u = 2x$ na fórmula generalizada de derivação de sen u, obtemos

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}(2x)] = \frac{d}{dx}[\text{sen } u] = \cos u \frac{du}{dx} = \cos 2x \cdot \frac{d}{dx}[2x] = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

Solução (b) Tomando $u = x^2 + 1$ na fórmula generalizada de derivação de tg u, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\text{tg}(x^2+1)] &= \frac{d}{dx}[\text{tg } u] = \sec^2 u \frac{du}{dx}\\ &= \sec^2(x^2+1) \cdot \frac{d}{dx}[x^2+1] = \sec^2(x^2+1)\cdot 2x\\ &= 2x\sec^2(x^2+1)\end{aligned}$$

Solução (c) Tomando $u = x^3 + \text{cossec } x$ na fórmula generalizada de derivação de $\sqrt{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sqrt{x^3 + \text{cossec } x}] &= \frac{d}{dx}[\sqrt{u}] = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + \text{cossec } x}} \cdot \frac{d}{dx}[x^3 + \text{cossec } x]\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^3 + \text{cossec } x}} \cdot (3x^2 - \text{cossec } x \text{ cotg } x) = \frac{3x^2 - \text{cossec } x \text{ cotg } x}{2\sqrt{x^3 + \text{cossec } x}}\end{aligned}$$

Solução (d) Tomando $u = 1 + x^5 \text{ cotg } x$ na fórmula generalizada de derivação de u^{-8}, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(1 + x^5 \text{ cotg } x)^{-8}] &= \frac{d}{dx}[u^{-8}] = -8u^{-9}\frac{du}{dx}\\ &= -8(1 + x^5 \text{ cotg } x)^{-9} \cdot \frac{d}{dx}[1 + x^5 \text{ cotg } x]\\ &= -8(1 + x^5 \text{ cotg } x)^{-9} \cdot (x^5(-\text{cossec}^2 x) + 5x^4 \text{ cotg } x)\\ &= (8x^5 \text{ cossec}^2 x - 40x^4 \text{ cotg } x)(1 + x^5 \text{ cotg } x)^{-9}\end{aligned}$$

Solução (e) Tomando $u = x^3 + 2x - 3$ na fórmula generalizada da derivada com u^{-1}, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^3+2x-3}\right] = \frac{d}{dx}[(x^3+2x-3)^{-1}] = \frac{d}{dx}[u^{-1}]$$
$$= -u^{-2}\frac{du}{dx} = -(x^3+2x-3)^{-2}\frac{d}{dx}[x^3+2x-3]$$
$$= -(x^3+2x-3)^{-2}(3x^2+2) = -\frac{3x^2+2}{(x^3+2x-3)^2} \blacktriangleleft$$

Às vezes, precisamos fazer ajustes na notação ou aplicar mais de uma vez a regra da cadeia para calcular uma derivada.

► Exemplo 6 Encontre

(a) $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(\sqrt{1+\cos x})]$ (b) $\frac{d\mu}{dt}$ se $\mu = \sec\sqrt{\omega t}$ (ω constante)

Solução (a) Usando $u = \sqrt{1+\cos x}$ na fórmula generalizada de derivação de sen u, obtemos

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(\sqrt{1+\cos x})] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = \cos u\frac{du}{dx}$$
$$= \cos(\sqrt{1+\cos x})\cdot\frac{d}{dx}[\sqrt{1+\cos x}]$$
$$= \cos(\sqrt{1+\cos x})\cdot\frac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1+\cos x}}$$

Usamos a forma generalizada de derivação para $\sqrt{u}$ com $u = 1 + \cos x$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x\cos(\sqrt{1+\cos x})}{2\sqrt{1+\cos x}}$$

Solução (b)

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt}[\sec\sqrt{\omega t}] = \sec\sqrt{\omega t}\operatorname{tg}\sqrt{\omega t}\frac{d}{dt}[\sqrt{\omega t}]$$

Usamos a forma generalizada de derivação para sec u com $u = \sqrt{\omega t}$

$$= \sec\sqrt{\omega t}\operatorname{tg}\sqrt{\omega t}\frac{\omega}{2\sqrt{\omega t}} \blacktriangleleft$$

Usamos a forma generalizada de derivação para $\sqrt{u}$ com $u = \omega t$

■ DERIVANDO COM SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

Alguns cálculos de derivadas podem ser muito cansativos quando feitos à mão, mesmo usando a regra da cadeia e as outras regras de derivação. Para derivadas complicadas, os engenheiros e cientistas freqüentemente utilizam algum sistema algébrico computacional (CAS), tal como o *Mathematica*, o *Maple* ou o *Derive*. Por exemplo, embora tenhamos todas as ferramentas matemáticas necessárias para calcular

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2+1)^{10}\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{1+\operatorname{cossec} x}}\right] \tag{7}$$

à mão, esse cálculo é suficientemente complexo, a ponto de ser mais eficiente (e menos sujeito a erro) usar um sistema algébrico computacional.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para efetuar a derivação em (7).

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.6 (*Ver página 217 para respostas.*)

1. A regra da cadeia afirma que a derivada da composta de duas funções é a derivada da função de ____________ calculada na função de __________ vezes a derivada da função de __________.
2. Se y é uma função derivável de u e u é uma função derivável de x, então
$$\frac{dy}{dx} = ________ \cdot ________$$
3. Encontre dy/dx.
   (a) $y = (x^2+5)^{10}$ (b) $y = \sqrt{1+6x}$
4. Encontre dy/dx.
   (a) $y = \operatorname{sen}(3x+2)$ (b) $y = (x^2 \operatorname{tg} x)^4$
5. Suponha que $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$, $g(3) = 6$ e $g'(3) = -5$. Calcule
   (a) $h'(2)$, onde $h(x) = g(f(x))$
   (b) $k'(3)$, onde $k(x) = f\left(\frac{1}{3}g(x)\right)$.

EXERCÍCIOS 3.6 Recurso Gráfico C CAS

1. Dado que $f'(0) = 2$, $g(0) = 0$ e $g'(0) = 3$, encontre $(f \circ g)'(0)$.
2. Dado que $f'(9) = 5$, $g(2) = 9$ e $g'(2) = -3$, encontre $(f \circ g)'(2)$.
3. Sejam $f(x) = x^5$ e $g(x) = 2x - 3$.
   (a) Encontre $(f \circ g)(x)$ e $(f \circ g)'(x)$.
   (b) Encontre $(g \circ f)(x)$ e $(g \circ f)'(x)$.
4. Sejam $f(x) = 5\sqrt{x}$ e $g(x) = 4 + \cos x$.
   (a) Encontre $(f \circ g)(x)$ e $(f \circ g)'(x)$.
   (b) Encontre $(g \circ f)(x)$ e $(g \circ f)'(x)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Dada a tabela a seguir, encontre as derivadas indicadas em (a) e (b).

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
3	5	−2	5	7
5	3	−1	12	4

   (a) $F'(3)$, onde $F(x) = f(g(x))$.
   (b) $G'(3)$, onde $G(x) = g(f(x))$.

6. Dada a Tabela abaixo, encontre as derivadas indicadas em (a) e (b).

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
−1	2	3	2	−3
2	0	4	1	−5

   (a) $F'(-1)$, onde $F(x) = f(g(x))$
   (b) $G'(-1)$, onde $G(x) = g(f(x))$

7-26 Encontre $f'(x)$.

7. $f(x) = (x^3+2x)^{37}$
8. $f(x) = (3x^2+2x-1)^6$
9. $f(x) = \left(x^3 - \frac{7}{x}\right)^{-2}$
10. $f(x) = \frac{1}{(x^5 - x + 1)^9}$
11. $f(x) = \frac{4}{(3x^2-2x+1)^3}$
12. $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 5}$
13. $f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{3x}}$
14. $f(x) = \sqrt[4]{x} \quad (= \sqrt{\sqrt{x}})$
15. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$
16. $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$
17. $f(x) = 4\cos^5 x$
18. $f(x) = 4x + 5\operatorname{sen}^4 x$
19. $f(x) = \cos^2(3\sqrt{x})$
20. $f(x) = \operatorname{tg}^4(x^3)$
21. $f(x) = 2\sec^2(x^7)$
22. $f(x) = \cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$
23. $f(x) = \sqrt{\cos(5x)}$
24. $f(x) = \sqrt{3x - \operatorname{sen}^2(4x)}$
25. $f(x) = [x + \operatorname{cossec}(x^3+3)]^{-3}$
26. $f(x) = [x^4 - \sec(4x^2-2)]^{-4}$

27-40 Encontre dy/dx.

27. $y = x^3\operatorname{sen}^2(5x)$
28. $y = \sqrt{x}\operatorname{tg}^3(\sqrt{x})$
29. $y = x^5\sec(1/x)$
30. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\sec(3x+1)}$
31. $y = \cos(\cos x)$
32. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{tg} 3x)$
33. $y = \cos^3(\operatorname{sen} 2x)$
34. $y = \frac{1 + \operatorname{cossec}(x^2)}{1 - \operatorname{cotg}(x^2)}$
35. $y = (5x+8)^7(1-\sqrt{x})^6$
36. $y = (x^2+x)^5\operatorname{sen}^8 x$
37. $y = \left(\frac{x-5}{2x+1}\right)^3$
38. $y = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{17}$
39. $y = \frac{(2x+3)^3}{(4x^2-1)^8}$
40. $y = [1 + \operatorname{sen}^3(x^5)]^{12}$

41-42 Use um CAS para encontrar dy/dx.

C 41. $y = [x\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^4(x^7)]^5$

C 42. $y = \operatorname{tg}^4\left(2 + \frac{(7-x)\sqrt{3x^2+5}}{x^3 + \operatorname{sen} x}\right)$

43-50 Encontre a equação da reta tangente ao gráfico no ponto especificado.

43. $y = x \cos 3x,\ x = \pi$

44. $y = \text{sen}(1 + x^3),\ x = -3$

45. $y = \sec^3\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right),\ x = -\dfrac{\pi}{2}$

46. $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3,\ x = 2$

47. $y = \text{tg}(4x^2),\ x = \sqrt{\pi}$

48. $y = 3\,\text{cotg}^4 x,\ x = \dfrac{\pi}{4}$

49. $y = x^2\sqrt{5 - x^2},\ x = 1$

50. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}},\ x = 0$

51-54 Encontre d^2y/dx^2.

51. $y = x\cos(5x) - \text{sen}^2 x$

52. $y = \text{sen}(3x^2)$

53. $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

54. $y = x\,\text{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

55-58 Encontre a derivada indicada.

55. $y = \text{cotg}^3(\pi - \theta)$; encontre $\dfrac{dy}{d\theta}$

56. $\lambda = \left(\dfrac{au + b}{cu + d}\right)^6$; encontre $\dfrac{d\lambda}{du}$ (a, b, c, d constantes)

57. $\dfrac{d}{d\omega}[a\cos^2 \pi\omega + b\,\text{sen}^2 \pi\omega]$ (a, b constantes)

58. $x = \text{cossec}^2\left(\dfrac{\pi}{3} - y\right)$; encontre $\dfrac{dx}{dy}$.

59. (a) Use um recurso computacional para obter o gráfico da função $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

(b) Use o gráfico de (a) para fazer um esboço do gráfico de f'.

(c) Encontre $f'(x)$ e verifique seu trabalho em (b) usando o recurso computacional para obter o gráfico de f'.

(d) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ e faça o gráfico de f junto com o da reta tangente.

60. (a) Use um recurso computacional para obter o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\, x^2 \cos x$ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

(b) Use o gráfico de (a) para fazer um esboço do gráfico de f' no intervalo.

(c) Encontre $f'(x)$ e verifique seu trabalho em (b) usando o recurso computacional para obter o gráfico de f' no intervalo.

(d) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ e faça o gráfico de f e da tangente juntos no intervalo dado.

61. Um objeto suspenso por uma mola sofre um pequeno deslocamento vertical e depois é abandonado. Se forem ignoradas a resistência do ar e a massa da mola, então a oscilação do objeto é chamada de ***movimento harmônico simples***. Sob condições apropriadas, o deslocamento y do equilíbrio em termos do tempo t é dado por

$$y = A\cos \omega t$$

onde A é o deslocamento inicial em $t = 0$ e ω é uma constante que depende da massa do objeto e da rigidez da mola (ver figura abaixo). A constante $|A|$ é denominada ***amplitude*** do movimento e ω, ***freqüência angular***.

(a) Mostre que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

(b) O ***período*** T é o tempo necessário para fazer uma oscilação completa. Mostre que $T = 2\pi/\omega$.

(c) A ***freqüência*** f da vibração é o número de oscilações por unidade de tempo. Encontre f em termos do período T.

(d) Encontre a amplitude, o período e a freqüência de um objeto executando um movimento harmônico simples, dado por $y = 0{,}6\cos 15t$, onde t está em segundos e y em centímetros.

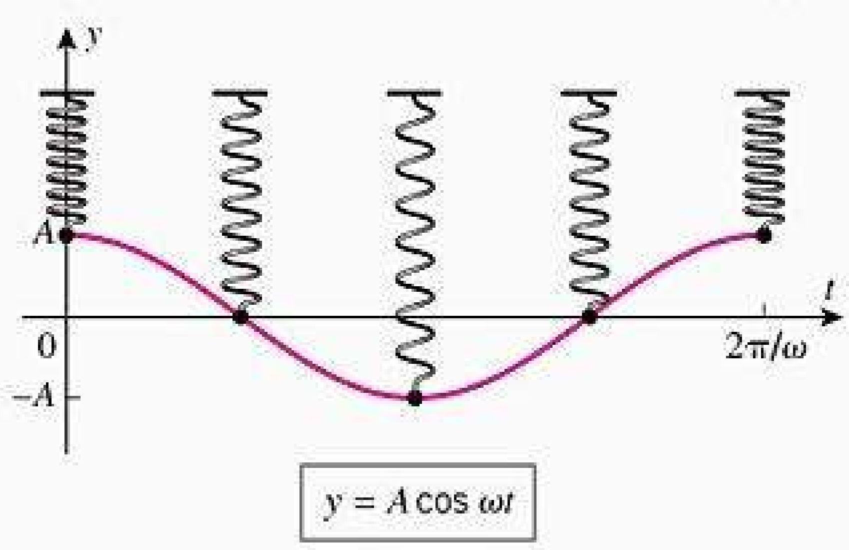


Figura Ex-61

62. Encontre o valor da constante A de forma que $y = A\,\text{sen}\, 3t$ satisfaça a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 4\,\text{sen}\, 3t$$

ENFOCANDO CONCEITOS

63. Considere a função f cujo gráfico está na figura abaixo. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x + f(x)}\right]\Bigg|_{x=-1}$$

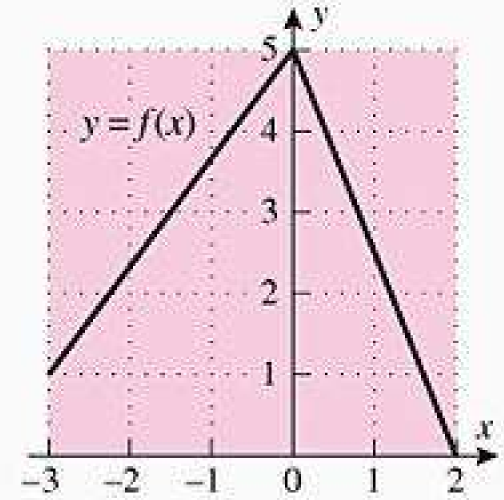


Figura Ex-63

64. Usando a função f do Exercício 63, calcule

$$\frac{d}{dx}[f(2\,\text{sen}\, x)]\Bigg|_{x=\pi/6}$$

65. A figura abaixo mostra o gráfico da pressão atmosférica p (libras/pol^2) *versus* a altitude h (milhas) acima do nível do mar.

(a) A partir do gráfico e da reta tangente em $h = 2$ mostrados no gráfico, estime os valores de p e dp/dh a uma altitude de 2 milhas.

(b) Se a altitude de um veículo espacial aumenta a uma taxa de 0,3 milhas/s quando ele está 2 milhas acima do mar, com que rapidez a pressão variará em relação ao tempo neste instante?

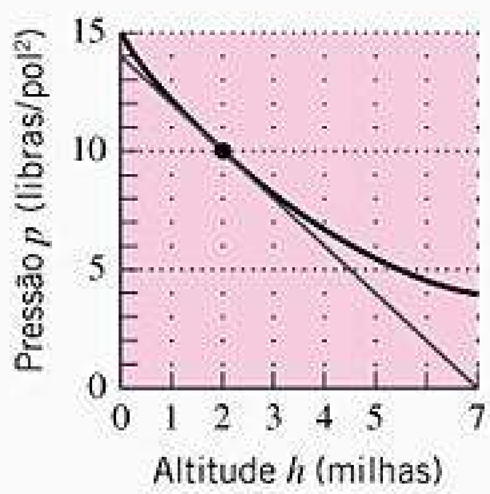


Figura Ex-65

66. A força F (quilogramas) agindo em um ângulo θ com a horizontal necessária para arrastar, ao longo de uma superfície horizontal e a uma velocidade constante, um caixote que pesa W quilos é dada por

$$F = \frac{\mu W}{\cos\theta + \mu \operatorname{sen}\theta}$$

onde μ é uma constante denominada ***coeficiente de atrito de escorregamento*** entre o caixote e a superfície (ver figura abaixo). Suponha o caixote com 70 kg e $\mu = 0{,}3$.

(a) Encontre a $dF/d\theta$ quando $\theta = 30°$. Expresse sua resposta em kg/grau.

(b) Encontre dF/dt quando $\theta = 30°$, se θ está diminuindo a uma taxa de 0,5°/s nesse instante.

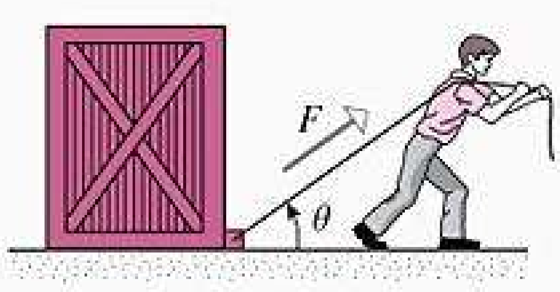


Figura Ex-66

67. Lembre que

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Use esse resultado e a regra da cadeia para encontrar

$$\frac{d}{dx}(|\operatorname{sen} x|)$$

para x diferente de zero no intervalo $(-\pi, \pi)$.

68. Use a fórmula da derivada de sen x e a identidade

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

para obter a fórmula da derivada de cos x.

69. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

(b) Use a Definição 3.2.1 para mostrar que $f'(0)$ não existe.

(c) Encontre $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(d) Determine se $\lim_{x \to 0} f'(x)$ existe.

70. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

(b) Use a Definição 3.2.1 para encontrar $f'(0)$.

(c) Encontre $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(d) Mostre que f' não é contínua em $x = 0$.

71. Dada a Tabela abaixo, encontre as derivadas indicadas em (a) e (b).

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	1	7
8	5	–3

(a) $g'(2)$, onde $g(x) = [f(x)]^3$

(b) $h'(2)$, onde $h(x) = f(x^3)$

72. Dado que $f'(x) = \sqrt{3x + 4}$ e $g(x) = x^2 - 1$, encontre $F'(x)$ se $F(x) = f(g(x))$.

73. Dado que $f'(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ e $g(x) = \sqrt{3x - 1}$, encontre $F'(x)$ se $F(x) = f(g(x))$.

74. Encontre $f'(x^2)$ se $\dfrac{d}{dx}[f(x^2)] = x^2$.

75. Encontre $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ se $\dfrac{d}{dx}[f(3x)] = 6x$.

76. Lembre que uma função f é ***par*** se $f(-x) = f(x)$ e ***ímpar*** se $f(-x) = -f(x)$ para todo x no domínio de f. Supondo que f é diferenciável, prove que:

(a) f' é ímpar se f for par.

(b) f' é par se f for ímpar.

77. Faça alguns esboços para ilustrar os resultados do Exercício 76 e escreva um parágrafo, dando uma explicação informal sobre o porquê de os resultados serem verdadeiros.

78. Sejam $y = f_1(u)$, $u = f_2(v)$, $v = f_3(w)$ e $w = f_4(x)$. Expresse dy/dx em termos de dy/du, dw/dx, du/dv e dv/dw.

79. Encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx}[f(g(h(x)))]$$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.6

1. de fora; de dentro; de dentro **2.** $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ **3.** (a) $10(x^2+5)^9\cdot 2x = 20x(x^2+5)^9$ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{1+6x}}\cdot 6 = \dfrac{3}{\sqrt{1+6x}}$

4. (a) $3\cos(3x+2)$ (b) $4(x^2\text{tg}\,x)^3(2x\,\text{tg}\,x + x^2\sec^2 x)$ **5.** (a) $g'(f(2))f'(2) = -20$ (b) $f'\left(\dfrac{1}{3}g(3)\right)\cdot\dfrac{1}{3}g'(3) = -\dfrac{20}{3}$

3.7 TAXAS RELACIONADAS

Nesta seção estudaremos problemas de taxas relacionadas. Nesses problemas, tentamos encontrar a taxa segundo a qual certa quantidade está variando em relação a outras, cujas taxas de variação são conhecidas.



Figura 3.7.1

■ DERIVANDO EQUAÇÕES PARA RELACIONAR TAXAS

A Figura 3.7.1 mostra um líquido escoando através de um filtro cônico. À medida que o líquido escoa, seu volume V, a altura h e o raio r são funções do tempo decorrido t, e em cada instante essas variáveis estão relacionadas pela equação

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h$$

Se estivéssemos interessados em encontrar a taxa de variação do volume V em relação ao tempo t, poderíamos começar diferenciando ambos os lados dessa equação em relação a t para obter

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[r^2\frac{dh}{dt} + h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)\right] = \frac{\pi}{3}\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right)$$

Assim, para encontrar dV/dt em um instante específico t a partir dessa equação, precisaríamos ter os valores de r, h, dh/dt e dr/dt naquele instante. Esse tipo de problema é chamado ***problema de taxas relacionadas*** porque o objetivo é encontrar uma taxa de variação desconhecida *relacionando-a* a outras variáveis cujos valores e taxas de variação no instante t são conhecidos ou podem ser encontrados de alguma maneira. Comecemos com um exemplo simples.

► Exemplo 1 Suponha que x e y sejam funções diferenciáveis de t relacionadas pela equação $y = x^3$. Encontre dy/dt no instante $t = 1$ se $x = 2$ e $dx/dt = 4$ no instante $t = 1$.

Solução Usando a regra da cadeia para derivar ambos os lados da equação $y = x^3$ em relação a t, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[x^3] = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

Assim, o valor de dy/dt no instante $t = 1$ é

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 3(2)^2\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = 12\cdot 4 = 48 \blacktriangleleft$$

► Exemplo 2 Suponhamos que o óleo derramado através da ruptura de um navio-tanque se espalhe em uma forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de 2 pés/s. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando seu raio for de 60 pés?

Solução Sejam

t = segundos decorridos a partir do instante do derramamento
r = raio do derramamento em pés, depois de t segundos
A = área do derramamento em pés quadrados, depois de t segundos



Figura 3.7.2

(Figura 3.7.2). Sabemos a taxa segundo a qual o raio está crescendo e queremos encontrar aquela na qual a área está crescendo no instante em que $r = 60$; isto é, queremos encontrar

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=60} \quad \text{dado que} \quad \frac{dr}{dt} = 2 \text{ pés/s}$$

Isso sugere que procuremos uma equação relacionando A a r que possamos derivar em relação a t para obter uma relação entre dA/dt e dr/dt. Mas A é a área de um círculo de raio r, portanto

$$A = \pi r^2 \tag{1}$$

Derivando ambos os lados de (1) em relação a t, obtemos

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \tag{2}$$

Assim, quando $r = 60$, a área do derramamento está crescendo à taxa de

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=60} = 2\pi(60)(2) = 240\pi \text{ pés}^2/\text{s} \approx 754 \text{ pés}^2/\text{s} \blacktriangleleft$$

Com variações mínimas, o método usado no Exemplo 2 pode ser utilizado para resolver uma variedade de problemas de taxas relacionadas. O método consiste em cinco passos, especificados a seguir.

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1 Associe uma letra a cada quantidade que varia com o tempo e às demais que possam ser relevantes ao problema. Dê uma definição para cada letra.

Passo 2 Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Interprete cada taxa como uma derivada.

Passo 3 Encontre uma equação que relacione as variáveis cujas taxas de variação foram identificadas no Passo 2. Para isso, muitas vezes é conveniente esboçar uma figura devidamente etiquetada que ilustre as relações.

Passo 4 Derive ambos os lados da equação obtida no Passo 3 em relação ao tempo para obter uma relação entre as taxas de variação conhecidas e a taxa de variação desconhecida.

Passo 5 *Depois* de completar o Passo 4, substitua todos os valores conhecidos das taxas de variação e das variáveis, e só então resolva a equação para a taxa de variação desconhecida.

ADVERTÊNCIA

A palavra "Depois", no passo 5, foi escrita em itálico porque é um erro comum substituir os valores numéricos antes de efetuar a derivação. Assim, no Exemplo 2, se tivéssemos substituído o valor conhecido de $r = 60$ em (1) antes de derivar, teríamos obtido $dA/dt = 0$, obviamente errado.

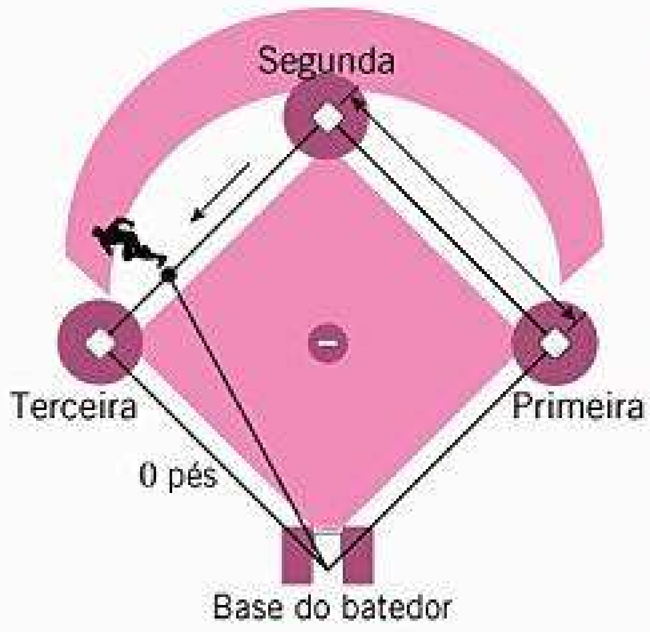


Figura 3.7.3

► **Exemplo 3** Uma quadra de beisebol é um quadrado cujos lados medem 90 pés (Figura 3.7.3). Suponha que um jogador correndo da segunda para a terceira base tenha uma velocidade de 30 pés/s no instante em que está a 20 pés da terceira base. Qual é a taxa de variação da distância do jogador à base do batedor naquele instante?

Solução É dada uma velocidade constante com a que o jogador se aproxima da terceira base, e queremos encontrar a taxa de variação da distância entre o jogador e a base do batedor em um dado instante. Assim, tomamos

t = segundos decorridos desde que o jogador deixou a segunda base
x = distância do jogador até a terceira base (em pés)
y = distância do jogador até a base do batedor (em pés)

A quantidade

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=20}$$

é negativa porque x é decrescente em relação a t.

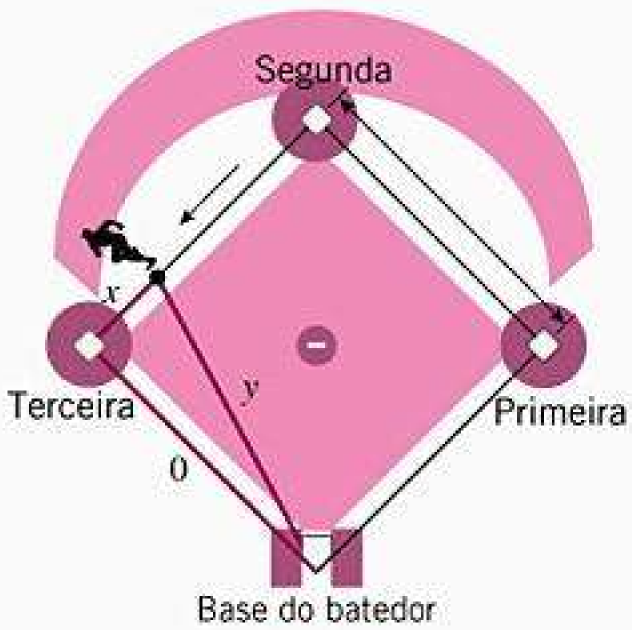


Figura 3.7.4

Assim, queremos encontrar

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20} \quad \text{sabendo que} \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=20} = -30 \text{ pés/s}$$

Conforme sugere a Figura 3.7.4, uma equação relacionando as variáveis x e y pode ser obtida a partir do Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 90^2 = y^2 \tag{3}$$

Derivando ambos os lados dessa equação em relação a t, obtemos

$$2x\frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$$

do que segue

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \tag{4}$$

Quando $x = 20$, tem-se a partir de (3) que

$$y = \sqrt{20^2 + 90^2} = \sqrt{8500} = 10\sqrt{85}$$

assim, (4) resulta em

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20} = \frac{20}{10\sqrt{85}}(-30) = -\frac{60}{\sqrt{85}} \approx -6{,}51 \text{ pés/s}$$

O sinal negativo na resposta nos diz que y é decrescente, o que fisicamente faz sentido a partir da Figura 3.7.4. ◄

► **Exemplo 4** Na Figura 3.7.5 mostramos uma câmera montada em um ponto a 3.000 pés da base de uma plataforma de lançamento de um foguete. Se o foguete estiver subindo verticalmente a 880 pés/s quando estiver 4.000 pés acima da plataforma de lançamento, quão rápido deve mudar o ângulo de elevação da câmera naquele instante para que se mantenha apontada para o foguete?

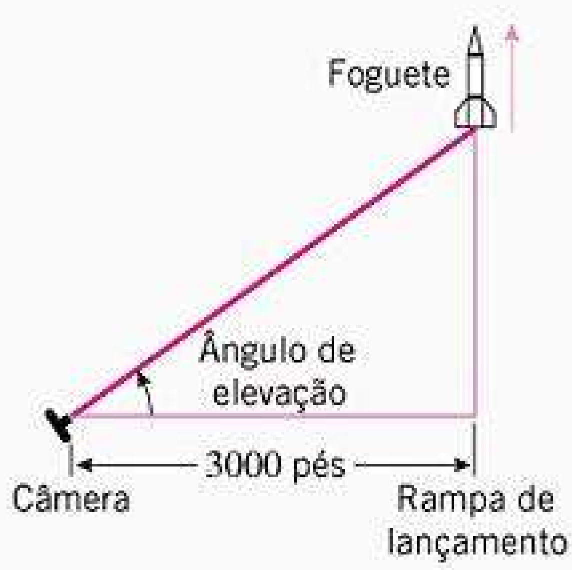


Figura 3.7.5

Solução Sejam

t = segundos decorridos a partir do instante do lançamento
ϕ = ângulo de elevação da câmera em radianos, após t segundos
h = altura do foguete em pés, após t segundos

(Figura 3.7.6). Em cada instante, a taxa segundo a qual o ângulo de elevação da câmera deve variar é $d\phi/dt$, e a taxa segundo a qual o foguete está subindo é dh/dt. Queremos encontrar

$$\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{h=4000} \quad \text{dado que} \quad \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4000} = 880 \text{ pés/s}$$

A partir da Figura 3.7.6, vemos que

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{h}{3000} \tag{5}$$

Derivando ambos os lados de (5) em relação a t, obtemos

$$(\sec^2\phi)\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{3000}\frac{dh}{dt} \tag{6}$$

Quando $h = 4000$, segue que

$$(\sec\phi)_{h=4000} = \frac{5000}{3000} = \frac{5}{3}$$

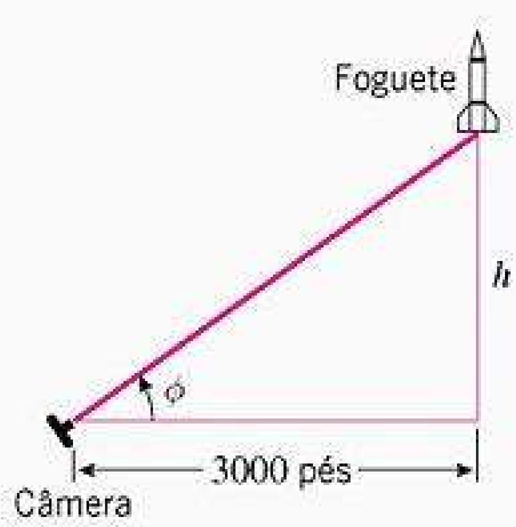


Figura 3.7.6

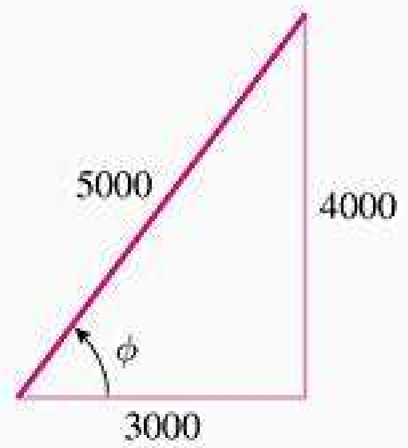


Figura 3.7.7

(ver Figura 3.7.7), de modo que, por (6),

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 \frac{d\phi}{dt}\bigg|_{h=4000} = \frac{1}{3000} \cdot 880 = \frac{22}{75}$$

$$\frac{d\phi}{dt}\bigg|_{h=4000} = \frac{22}{75} \cdot \frac{9}{25} = \frac{66}{625} \approx 0{,}11 \text{ rad/s} \approx 6{,}05 \text{ graus/s}$$ ◀

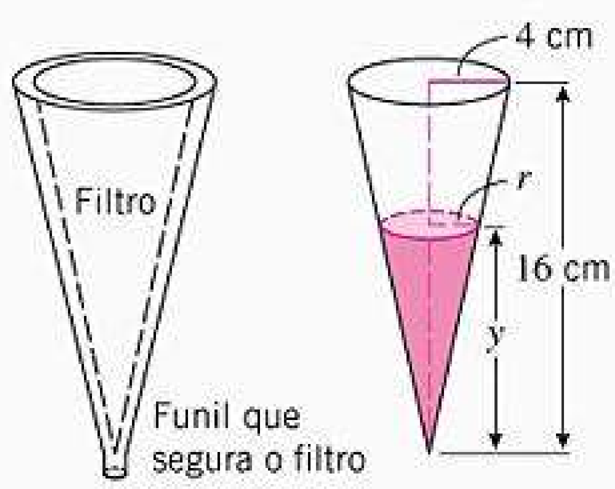


Figura 3.7.8

► Exemplo 5 Suponha que um líquido deva ser purificado por decantação, através de um filtro cônico com 16 cm de altura e raio de 4 cm no topo (Figura 3.7.8). Suponha também que o líquido seja forçado a escoar para fora do cone a uma taxa constante de 2 cm^3/min.

(a) A profundidade do líquido irá decrescer a uma taxa constante? Dê um argumento informal que justifique sua conclusão.

(b) Encontre uma fórmula que expresse a taxa de variação da profundidade do líquido em termos de profundidade e use-a para determinar se sua conclusão em (a) está correta.

(c) Com que taxa está variando a profundidade do líquido no instante em que a profundidade for de 8 cm?

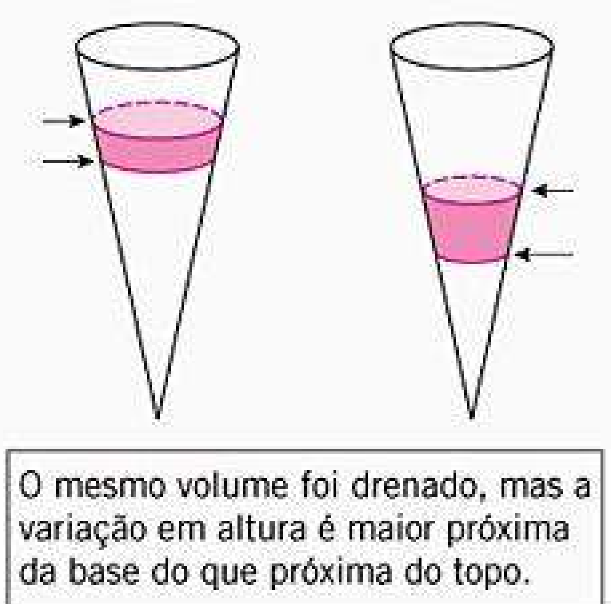


Figura 3.7.9

Solução (a) Para que o volume do líquido decresça por uma *quantidade fixa*, requer-se um maior decréscimo em profundidade quando o cone está quase vazio do que quando está quase cheio (Figura 3.7.9). Isso sugere que, para o volume decrescer a uma taxa constante, a profundidade deve decrescer a uma taxa crescente.

Solução (b) Sejam

t = tempo decorrido a partir da observação inicial (min)
V = volume do líquido no cone no instante de tempo t (cm^3)
y = profundidade do líquido no cone no instante de tempo t (cm)
r = raio da superfície do líquido no instante t (cm).

(Figura 3.7.8). Em cada instante, a taxa segundo a qual o volume de líquido está variando é dV/dt, e a taxa segundo a qual a profundidade está variando é dy/dt. Queremos expressar dy/dt em termos de y, dado que dV/dt tem um valor constante de $dV/dt = -2$. (Devemos usar o sinal menos aqui porque V *decresce* quando t cresce.)

A partir da fórmula para o volume de um cone, o volume V, o raio r e a profundidade y estão relacionados por

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 y \tag{7}$$

Se diferenciarmos ambos os lados de (7) em relação a t, o lado direito irá envolver a quantidade dr/dt. Uma vez que não temos uma informação direta sobre dr/dt, é desejável eliminar r de (7) antes de diferenciar. Isso pode ser feito usando semelhanças de triângulos. A partir da Figura 3.7.8, vemos que

$$\frac{r}{y} = \frac{4}{16} \quad \text{ou} \quad r = \frac{1}{4}y$$

Substituindo essa expressão em (7) obtemos

$$V = \frac{\pi}{48}y^3 \tag{8}$$

Diferenciando ambos os lados de (8) em relação a t, obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48}\left(3y^2\frac{dy}{dt}\right)$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = \frac{16}{\pi y^2}\frac{dV}{dt} = \frac{16}{\pi y^2}(-2) = -\frac{32}{\pi y^2} \qquad (9)$$

a qual expressa dy/dt em termos de y. O sinal de menos nos diz que y decresce com o tempo, e

$$\left|\frac{dy}{dt}\right| = \frac{32}{\pi y^2}$$

nos diz o quão rápido y decresce. A partir dessa fórmula, vemos que $|dy/dt|$ cresce quando y decresce, o que confirma nossa conjectura em (a) de que a profundidade do líquido decresce a uma taxa crescente quando ele escoa através do filtro.

Solução (c) A taxa segundo a qual a profundidade está variando quando for de 8 cm pode ser obtida de (9) com $y = 8$:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=8} = -\frac{32}{\pi(8^2)} = -\frac{1}{2\pi} \approx -0{,}16 \text{ cm/min} \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.7 (*Ver página 224 para respostas.*)

1. Se $A = x^2$ e $\dfrac{dx}{dt} = 3$, encontre $\left.\dfrac{dA}{dt}\right|_{x=10}$
2. Se $A = x^2$ e $\dfrac{dA}{dt} = 3$, encontre $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=10}$
3. Uma escada de 3 m está apoiada em um chão horizontal e uma parede vertical. Use x para denotar a distância ao longo do chão da parede até o pé da escada, e y para denotar a distância ao longo da parede do chão até o topo da escada. Se o pé da escada é arrastado para longe da parede, encontre uma equação que relacione as taxas de variação de x e de y em relação ao tempo.
4. Suponha que um bloco de gelo com formato de cilindro circular reto derreta de tal modo que mantém sua forma cilíndrica. Encontre uma equação que relacione a taxa de variação do volume (V), a altura (h) e o raio (r) desse bloco de gelo.

EXERCÍCIOS 3.7

1-4 Ambos x e y denotam funções de t que estão relacionadas pela equação dada. Use essa equação e a informação sobre a derivada para encontrar a derivada especificada.

1. Equação: $y = 3x + 5$.
   (a) Dado que $dx/dt = 2$, encontre dy/dt quando $x = 1$.
   (b) Dado que $dy/dt = -1$, encontre dx/dt quando $x = 0$.
2. Equação: $x + 4y = 3$.
   (a) Dado que $dx/dt = 1$, encontre dy/dt quando $x = 2$.
   (b) Dado que $dy/dt = 4$, encontre dx/dt quando $x = 3$.
3. Equação: $4x^2 + 9y^2 = 1$.
   (a) Dado que $dx/dt = 3$, encontre dy/dt quando $(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.
   (b) Dado que $dy/dt = 8$, encontre dx/dt quando $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{9}\right)$.
4. Equação: $x^2 + y^2 = 2x + 4y$.
   (a) Dado que $dx/dt = -5$, encontre dy/dt quando $(x, y) = (3, 1)$.
   (b) Dado que $dy/dt = 6$, encontre dx/dt quando $(x, y) = (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3})$.

ENFOCANDO CONCEITOS

5. Seja A a área de um quadrado cujos lados têm comprimento x e suponha que x varie com o tempo t.
   (a) Faça uma figura do quadrado com os dados A e x colocados apropriadamente.
   (b) Escreva uma equação que relacione A e x.
   (c) Use a equação de (b) para encontrar uma equação que relacione dA/dt e dx/dt.
   (d) Em um certo instante, os lados medem 3 cm e crescem a uma taxa em 2 cm/min. Com que rapidez a área está crescendo naquele insante?
6. Em (a) a (d), seja A a área de um círculo de raio r e suponha que r cresça com o tempo t.
   (a) Faça uma figura do círculo colocando A e r apropriadamente.
   (b) Escreva uma equação que relacione A e r.

(c) Use a equação de (b) para encontrar uma equação que relacione dA/dt e dr/dt.
(d) Em certo instante, o raio é 5 cm e está crescendo a uma taxa de 2 cm/s. Com que rapidez a área está crescendo naquele instante?

7. Seja V o volume de um cilindro de altura h e raio r, e suponha que h e r variem com o tempo.
(a) Como estão relacionadas dV/dt, dh/dt e dr/dt?
(b) Em certo instante, a altura é de 6 cm e está crescendo a 1 cm/s, enquanto o raio é de 10 cm e está decrescendo a 1 cm/s. Com que rapidez o volume está variando naquele instante? O volume está crescendo ou decrescendo naquele instante?

8. Seja l o comprimento da diagonal de um retângulo cujos lados têm comprimentos x e y, e suponha que x e y variem com o tempo.
(a) Como estão relacionadas dl/dt, dx/dt e dy/dt?
(b) Se x está crescendo a uma taxa constante de $\frac{1}{2}$ cm/s e y está decrescendo a uma taxa constante de $\frac{1}{4}$ cm/s, com que rapidez o comprimento da diagonal estará variando quando $x = 3$ cm e $y = 4$ cm? A diagonal está crescendo ou está decrescendo naquele instante?

9. Seja θ (em radianos) um ângulo agudo de um triângulo retângulo, e sejam x e y, respectivamente, os comprimentos dos lados adjacente e oposto a θ. Suponha, também, que x e y variem com o tempo.
(a) Como se relacionam $d\theta/dt$, dx/dt e dy/dt?
(b) Em um certo instante, $x = 2$ unidades e está crescendo 1 unidade/s, enquanto $y = 2$ unidades e está decrescendo $\frac{1}{4}$ unidade/s. Com que rapidez θ estará variando naquele instante? θ está crescendo ou decrescendo naquele instante?

10. Suponha que $z = x^3y^2$, onde x e y estão variando com o tempo. Em um certo instante, quando $x = 1$ e $y = 2$, x está decrescendo a uma taxa de 2 unidades/s e y está crescendo a uma taxa de 3 unidades/s. Com que rapidez z estará variando naquele instante? z é crescente ou decrescente?

11. O ponteiro dos minutos de um relógio tem 4 cm de comprimento. Começando do momento em que está apontando diretamente para cima, com que rapidez estará variando a área do setor que é varrido por ele durante uma revolução?

12. Uma pedra jogada em um lago produz uma onda circular, cujo raio cresce a uma taxa constante de 1 m/s. Com que rapidez estará variando a área englobada pela onda crescente ao final de 10 segundos?

13. Pela ruptura de um navio-tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo cuja área cresce a uma taxa constante de 6 km²/h. Com que rapidez estará crescendo o raio da mancha quando a área for de 9 km²?

14. Um balão esférico é inflado de tal forma que seu volume cresce a uma taxa de 3 cm³/min. Com que rapidez o diâmetro do balão estará crescendo quando o raio for de 1 cm?

15. Um balão esférico é esvaziado de tal forma que seu raio decresce a uma taxa constante de 15 cm/min. Com que taxa o ar estará sendo removido quando o raio for de 9 cm?

16. Uma escada de 1,7 m está apoiada em uma parede. Se sua base for puxada ao longo do chão, afastando-se da parede a uma taxa constante de 0,5 m/s, com que rapidez o topo da escada estará se movendo para baixo na parede quando estiver 0,8 m acima do solo?

17. Uma escada de 1,3 m está apoiada em uma parede. Se seu topo desliza sobre a parede para baixo a uma taxa de 0,2 m/s, com que rapidez a base da escada estará se afastando da parede quando o topo estiver 0,5 m acima do chão?

18. Uma prancha de 10 m está apoiada em uma parede. Se, em um certo instante, sua base está a 2 m da parede e sendo empurrada em direção a esta a uma taxa de 0,5 m/s, com que rapidez estará crescendo o ângulo agudo que a prancha faz com o solo?

19. Uma quadra de *softball* é um quadrado cujos lados medem 60 pés de comprimento. Suponha que um jogador correndo da primeira para a segunda base tenha uma velocidade de 25 pés/s no instante em que está a 10 pés da segunda base. Com que taxa estará variando a distância do jogador à base do batedor naquele instante?

20. Um foguete subindo verticalmente é acompanhado por uma estação de radar no solo a 5 km da rampa de lançamento. Com que rapidez o foguete estará subindo quando sua altura for de 4 km e sua distância da estação do radar estiver crescendo a uma taxa de 2000 km/h?

21. Para a câmera e o foguete da Figura 3.7.5, a que taxa estará variando a distância entre câmera e foguete, quando ele estiver a 4.000 pés de altura e subindo verticalmente a 880 pés/s?

22. Para a câmera e o foguete da Figura 3.7.5, a que taxa estará subindo o foguete quando o ângulo de elevação for de $\pi/4$ radianos e se estiver crescendo a uma taxa de 0,2 rad/s?

23. Um satélite está em uma órbita elíptica em torno da Terra. A sua distância r (em milhas) do centro da Terra é dada por

$$r = \frac{4995}{1 + 0{,}12\cos\theta}$$

onde θ é o ângulo medido do ponto da órbita mais próximo da superfície da Terra (veja a figura abaixo).
(a) Encontre a altitude do satélite no ***perigeu*** (ponto mais próximo da superfície da Terra) e no ***apogeu*** (ponto mais distante da superfície da Terra), usando 3.960 milhas como o raio da Terra.
(b) No instante em que θ for 120°, o ângulo θ está crescendo a uma taxa de 2,7°/min. Encontre a altitude do satélite e a taxa segundo a qual a altitude estará variando naquele instante. Expresse a taxa em unidades de milhas/min.

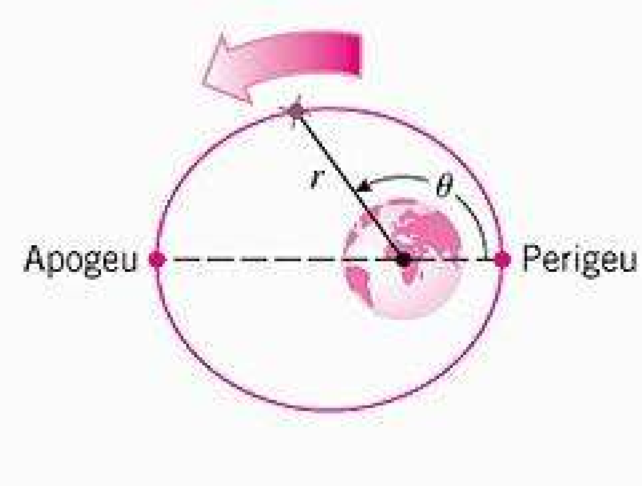


Figura Ex-23

24. Um avião está voando horizontalmente a uma altitude constante de 4.000 pés acima de um ponto de observação fixo (ver figura abaixo). Em um certo instante, o ângulo de elevação θ é de 30° e está decrescendo, enquanto a velocidade do avião é de 300 milhas/h.

(a) Com que velocidade estará θ decrescendo naquele instante? Expresse o resultado em graus por segundo.

(b) Com que rapidez estará variando a distância entre o avião e o ponto de observação naquele instante? Expresse o resultado em pés/s. Use 1 milha = 5.280 pés.

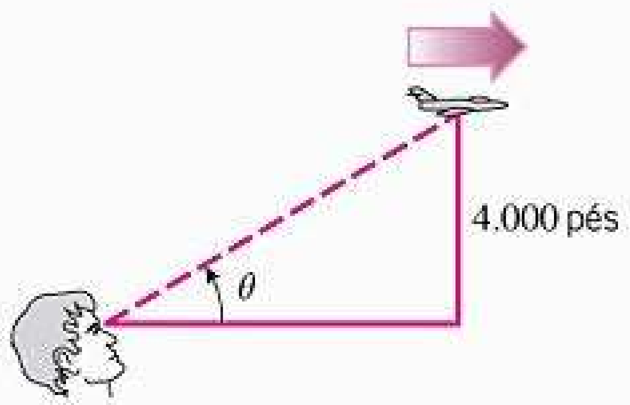


Figura Ex-24

25. Um tanque de água cônico com o vértice para baixo tem um raio de 10 m no topo e uma altura de 24 m. Se a água fluir dentro do tanque a uma taxa de 20 m^3/min, com que velocidade sua profundidade estará crescendo quando ela tiver 16 m de profundidade?

26. Grãos caem de uma calha de escoamento a uma taxa de 8 m^3/min, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre o dobro de seu raio. Com que rapidez a altura da pilha estará crescendo no momento em que sua altura for de 6 m?

27. Areia cai de uma calha de escoamento formando uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao diâmetro. Se a altura crescer a uma taxa constante de 5 pés/min, a que taxa a areia estará escoando quando a pilha tiver 10 pés de altura?

28. Trigo está saindo através de uma calha de escoamento a uma taxa de 10 $pés^3$/min e caindo em uma pilha cônica cujo raio da base é sempre a metade da altura. Com que rapidez estará aumentando a circunferência da base quando a altura da pilha for de 8 pés?

29. Um avião está subindo a um ângulo de 30° com a horizontal. Com que rapidez o avião estará ganhando altura se sua velocidade for de 500 milhas por hora?

30. Um bote é puxado para uma doca por meio de uma corda ligada a uma polia na doca (ver figura abaixo). A corda está ligada à proa do bote em um ponto 10 pés abaixo da polia. Se a corda for puxada através da polia a uma taxa de 20 pés/min, com que taxa estará o bote se aproximando da doca quando restarem 125 pés de corda?

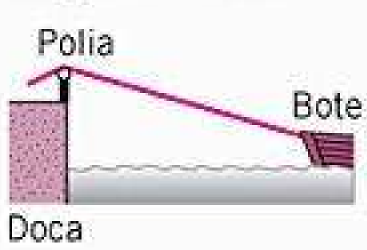


Figura Ex-30

31. Para o bote do Exercício 30, com que rapidez deve a corda ser puxada se quisermos que o bote se aproxime da doca a uma taxa de 12 pés/min, no instante em que restarem 125 pés de corda?

32. Um homem com seis pés de altura está caminhando a uma taxa de 3 pés por segundo em direção a um poste de iluminação, com 18 pés de altura (ver figura a seguir).

(a) A que taxa está variando o comprimento da sombra?

(b) Com que rapidez está se movendo a extremidade de sua sombra?

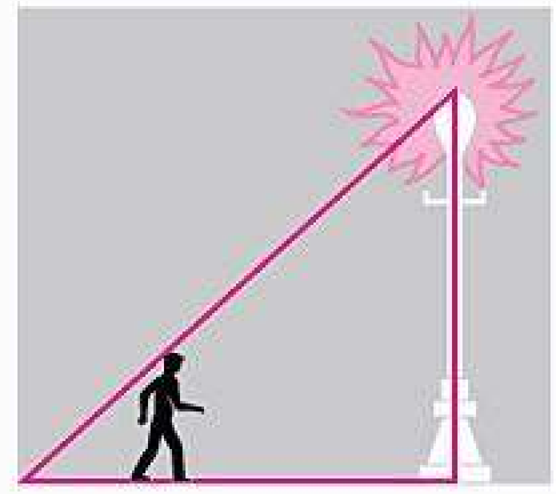


Figura Ex-32

33. Um farol faz uma revolução a cada 10 s e está localizado em um navio, ancorado a 4 km de uma praia reta. Com que rapidez o facho de luz do farol estará se movendo ao longo da praia, quando fizer com ela um ângulo de 45°?

34. Um avião está voando a uma altitude constante e com uma velocidade constante de 600 km/h. Um míssil antiaéreo é disparado em uma linha reta perpendicular à trajetória de vôo do avião, de tal forma que irá atingi-lo em um ponto P (ver figura abaixo). No instante em que o avião está a 2 km do ponto de impacto, o míssil está a 4 km dele e voando a 1.200 km/h. Naquele instante, com que rapidez estará decrescendo a distância entre o míssil e o avião?

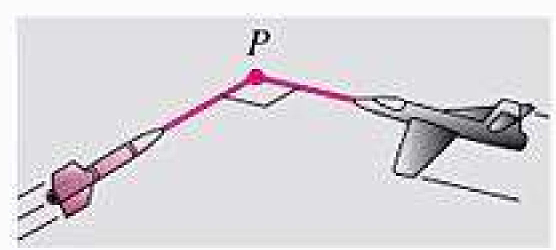


Figura Ex-34

35. Resolva o Exercício 34 considerando a hipótese de que o ângulo entre as duas trajetórias de vôo seja de 120°, em vez de perpendicular. [*Sugestão*: Use a lei dos cossenos.]

36. Um helicóptero está voando em direção ao norte a 100 km/h e a uma altitude constante de 0,5 km. Abaixo, um carro viaja para o oeste em uma estrada a 75 km/h. No momento em que o helicóptero cruza a estrada, o carro está 2 km a leste dele.

(a) Com que velocidade estará mudando a distância entre o carro e o helicóptero, no momento em que o helicóptero cruza a estrada?

(b) Naquele momento, a distância entre o carro e o helicóptero estará crescendo ou decrescendo?

37. Uma partícula move-se ao longo de uma curva cuja equação é

$$\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$$

Suponha que a coordenada x esteja crescendo a uma taxa de 6 unidades por segundo, quando a partícula estiver no ponto (1, 2).

(a) Com que taxa estará variando a coordenada y do ponto naquele instante?

(b) Naquele instante, a partícula estará subindo ou descendo?

38. Um ponto P move-se ao longo de uma curva cuja equação é $y = \sqrt{x^3 + 17}$. Quando P está em (2, 5), y está crescendo a uma taxa de 2 unidades por segundo. Com que rapidez x está variando?

39. Um ponto P está movendo-se ao longo de uma reta cuja equação é $y = 2x$. Com que rapidez estará variando a distância entre P e o ponto (3, 0) no instante em que P estiver em (3, 6) se x estiver decrescendo a uma taxa de 2 unidades por segundo, naquele instante?

40. Um ponto P move-se ao longo de uma curva cuja equação é $y = \sqrt{x}$. Suponha que x esteja crescendo a uma taxa de 4 unidades por segundo quando $x = 3$.

(a) Com que rapidez estará variando a distância entre P e o ponto (2, 0) naquele instante?

(b) Com que rapidez estará variando o ângulo de inclinação do segmento de reta de P a (2, 0) naquele instante?

41. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = x/(x^2 + 1)$. Encontre todos os valores de x nos quais a taxa de variação de x em relação ao tempo é três vezes a de y. [Suponha que dx/dt nunca é nula.]

42. Uma partícula move-se ao longo da curva $16x^2 + 9y^2 = 144$. Encontre todos os pontos (x, y) nos quais as taxas de variação de x e de y em relação ao tempo são iguais. [Suponha que dx/dt e dy/dt nunca são nulas no mesmo ponto.]

43. A ***equação das lentes finas*** em Física é

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f}$$

onde s é a distância do objeto à lente, S é a distância da imagem à lente e f é a distância focal da lente. Suponha que uma certa lente tenha um comprimento focal de 6 cm e que um objeto se move em direção a ela a uma taxa de 2 cm/s. Com que rapidez estará variando a distância da imagem, no instante em que o objeto estiver a 10 cm da lente? A imagem estará afastando-se ou aproximando-se da lente?

44. Água está sendo armazenada em um reservatório cônico (vértice para baixo). Supondo que a água evapora a uma taxa proporcional à área da superfície exposta ao ar, mostre que sua profundidade irá decrescer a uma taxa constante que não depende das dimensões do reservatório.

45. Um meteorito entra na atmosfera da Terra e queima a uma taxa que, em cada instante, é proporcional à área de sua superfície. Supondo que o meteorito é sempre esférico, mostre que o raio decresce a uma taxa constante.

46. Em um relógio, o ponteiro dos minutos tem 4 cm de comprimento e o das horas, 3. Com que rapidez estará variando a distância entre as extremidades do ponteiro às 9 horas?

47. Café está sendo derramado a uma taxa uniforme de 20 cm³/s em uma xícara em forma de cone truncado (ver figura abaixo). Se os raios superior e inferior da xícara forem de 4 e 2 cm e a altura for de 6 cm, com que rapidez estará subindo o nível de café quando ele estiver na metade da xícara? [*Sugestão*: Estenda a xícara para baixo para formar um cone.]



Figura Ex-47

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.7

1. 60 **2.** $\frac{3}{20}$ **3.** $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$ **4.** $\frac{dV}{dt} = 2\pi rh\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}$

3.8 APROXIMAÇÃO LINEAR LOCAL; DIFERENCIAIS

Nesta seção mostraremos como as derivadas podem ser utilizadas para aproximar funções não-lineares por funções lineares. Até aqui interpretamos dy/dx como uma única entidade que representa a derivada. Nesta seção definiremos as quantidades dx e dy por si sós, permitindo, assim, interpretar dy/dx como uma razão autêntica.

Lembre, da Seção 3.2, que se uma função f for diferenciável em x_0, então uma porção suficientemente ampliada do gráfico de f centrada no ponto $P(x_0, f(x_0))$ tem a aparência de um segmento de reta. Isso é ilustrado na Figura 3.8.1 em vários pontos do gráfico de $y = x^2 + 1$. Por essa razão, costuma-se dizer que uma função diferenciável em x_0 é ***localmente linear*** em x_0.

A reta que melhor aproxima o gráfico de f na vizinhança de $P(x_0, f(x_0))$ é a reta tangente ao gráfico de f em x_0, dada pela equação

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

[ver Fórmula (3) da Seção 3.2]. Assim, para valores de x próximos de x_0, podemos aproximar os valores de $f(x)$ por

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Isso é denominado ***aproximação linear local*** de f em x_0. Essa fórmula também pode ser expressa em termos do incremento $\Delta x = x - x_0$ como

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{2}$$

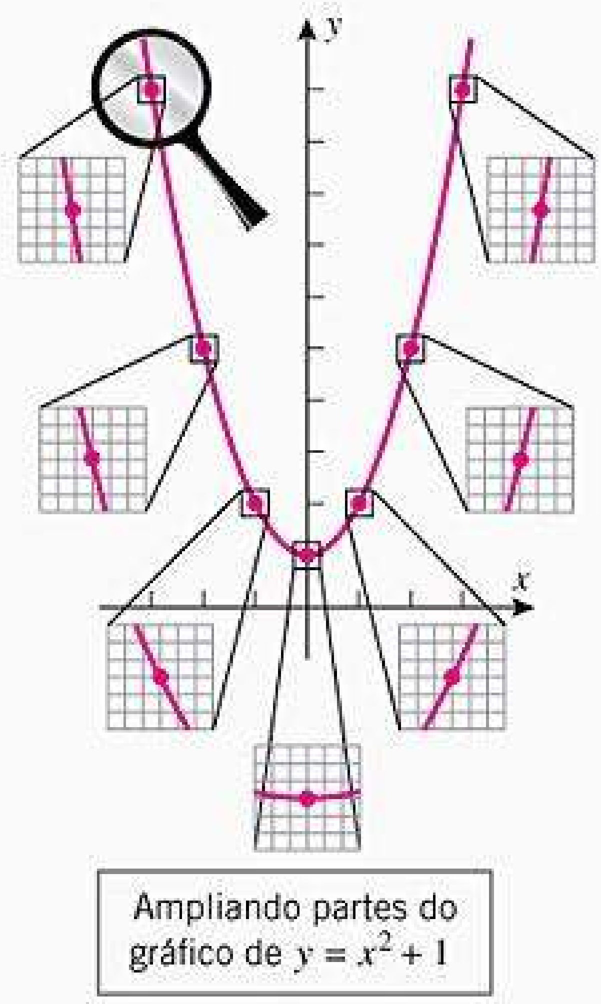


Figura 3.8.1

▶ Exemplo 1

(a) Encontre a aproximação linear local de $f(x) = \sqrt{x}$ em $x_0 = 1$.

(b) Use a aproximação linear local obtida em (a) para aproximar $\sqrt{1{,}1}$ e compare sua aproximação com o resultado obtido com uma calculadora.

Solução (a) Como $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, tem-se, a partir de (1), que a aproximação linear local de $\sqrt{x}$ no ponto x_0 é

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

Assim, a aproximação linear local em $x_0 = 1$ é

$$\sqrt{x} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(x - 1) \tag{3}$$

Os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e da aproximação linear local $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$ aparecem na Figura 3.8.2.

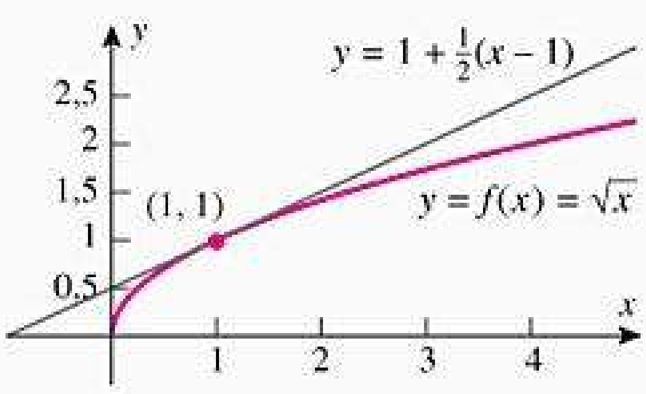


Figura 3.8.2

Solução (b) Aplicando (3) com $x = 1{,}1$, obtemos

$$\sqrt{1{,}1} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(1{,}1 - 1) = 1{,}05$$

Como a reta tangente $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$ na Figura 3.8.2 está acima do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, poderíamos esperar que essa aproximação é um pouco grande demais. Essa expectativa é confirmada pela aproximação $\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}04881$ dada pela calculadora. ◄

Os Exemplos 1 e 2 ilustram idéias importantes e não têm o objetivo de sugerir que devamos usar aproximações lineares locais para cálculos que uma calculadora faça com facilidade. A principal aplicação da aproximação linear local reside nos problemas de modelagem em que é útil para substituir funções complicadas por funções mais simples.

▶ Exemplo 2

(a) Encontre a aproximação linear local de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $x_0 = 0$.

(b) Use a aproximação linear local obtida em (a) para aproximar sen 2° e compare sua aproximação com o resultado obtido diretamente com uma calculadora.

Solução (a) Uma vez que $f'(x) = \cos x$, tem-se, a partir de (1), que a aproximação linear local de sen x no ponto x_0 é

$$\operatorname{sen} x \approx \operatorname{sen} x_0 + (\cos x_0)(x - x_0)$$

Assim, a aproximação linear local em $x_0 = 0$ é

$$\operatorname{sen} x \approx \operatorname{sen} 0 + (\cos 0)(x - 0)$$

que simplifica para

$$\operatorname{sen} x \approx x \tag{4}$$

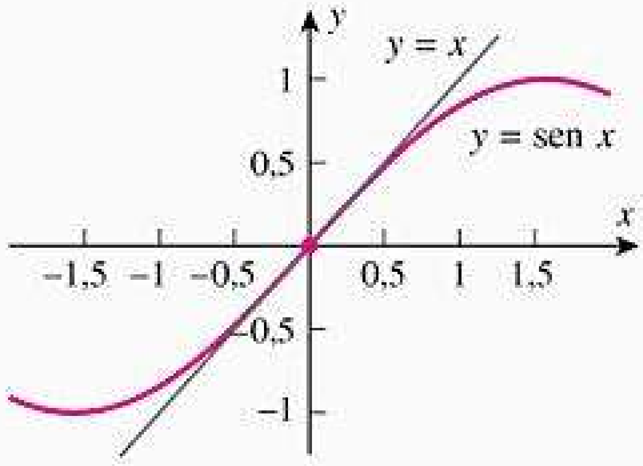


Figura 3.8.3

Solução (b) Em (4), a variável x está medida em radianos. Assim, devemos primeiro converter 2° para radianos, e somente depois aplicar essa aproximação. Como

$$2° = 2\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{90} \approx 0{,}0349066 \text{ radianos}$$

segue por (4) que sen 2º ≈ 0,0349066. Comparando os dois gráficos na Figura 3.8.3, poderíamos esperar que essa aproximação é um pouco maior do que o valor exato. A aproximação sen 2º ≈ 0,0348995 dada pela calculadora mostra que isso realmente ocorre. ◄

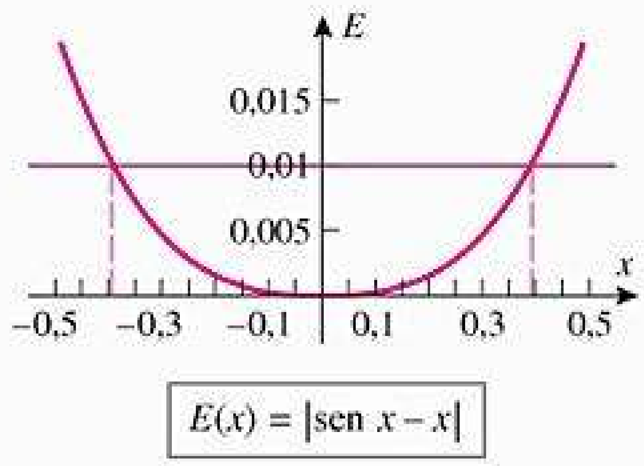


Figura 3.8.4

■ ERRO NA APROXIMAÇÃO LINEAR LOCAL

Como uma regra geral, a precisão da aproximação linear local de $f(x)$ em x_0 se deteriora à medida que x se afasta de x_0. Para ilustrar isso com a aproximação sen $x \approx x$ do Exemplo 2, façamos o gráfico da função

$$E(x) = |\text{sen } x - x|$$

que é o valor absoluto do erro na aproximação (Figura 3.8.4).

O gráfico na Figura 3.8.4 mostra como cresce o erro na aproximação linear local de sen x quando x avança mais para longe de 0, tanto no sentido positivo quanto no sentido negativo. O gráfico também nos diz que, para os valores de x entre as duas linhas tracejadas verticais, o erro absoluto é menor do que 0,01. Assim, por exemplo, poderíamos usar a aproximação linear local sen $x \approx x$ para todos os valores de x no intervalo $-0{,}35 < x < 0{,}35$ (em radianos) com a certeza de que a aproximação estará entre $\pm$ 0,01 do valor exato.

■ DIFERENCIAIS

Quando Newton e Leibniz publicaram suas descobertas de Cálculo, utilizaram notações distintas e, assim, acabaram criando uma grande divisão notacional entre a Grã-Bretanha e o continente europeu, que durou mais de 50 anos. A ***notação de Leibniz***, a saber, dy/dx, acabou prevalecendo por naturalmente sugerir fórmulas corretas, como, por exemplo, a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Até este ponto, sempre interpretamos dy/dx como uma única entidade, representando a derivada de y em relação a x; os símbolos "dy" e "dx", que são denominados ***diferenciais***, não tinham sentido algum associado. Nosso próximo objetivo é definir esses símbolos de tal modo que dy/dx possa ser tratado como uma autêntica razão. Para isso, vamos considerar que f seja diferenciável em um ponto x, *definir dx* como variável independente que possa ter qualquer valor real e vamos *definir dy* pela fórmula

$$dy = f'(x)\,dx \tag{5}$$

Se $dx \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados de (5) por dx para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{6}$$

Assim, alcançamos nosso objetivo de definir dy e dx de tal forma que sua razão seja $f'(x)$. Dizemos que a Fórmula (5) expressa (6) em ***forma diferencial***.

Para interpretar (5) geometricamente, observe que $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em x. As diferenciais dy e dx podem ser vistas como uma correspondente elevação e avanço dessa reta tangente (Figura 3.8.5).

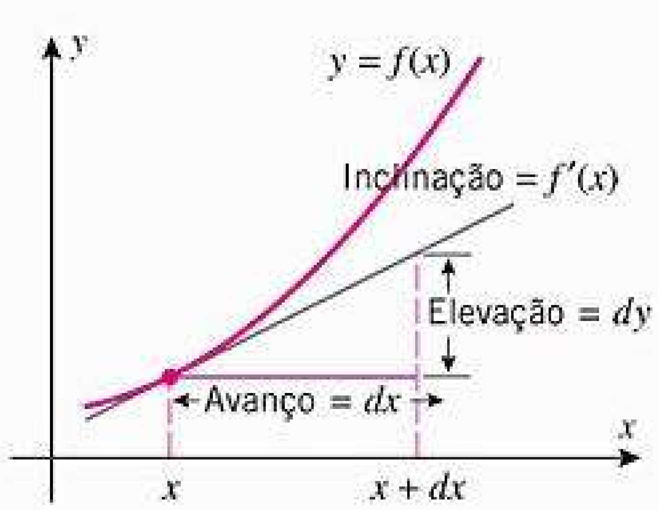


Figura 3.8.5

► Exemplo 3 Expresse a derivada em relação a x de $y = x^2$ em forma diferencial e discuta a relação entre dy e dx em $x = 1$.

Solução A derivada de y em relação a x é $dy/dx = 2x$, que pode ser expressa em forma diferencial por

$$dy = 2x\,dx$$

Tomando $x = 1$, resulta

$$dy = 2\,dx$$

Isso significa que, se percorrermos a reta tangente à curva $y = x^2$ em $x = 1$, então uma variação de dx unidades em x produz uma variação de 2 dx unidades em y. Assim, por exemplo, um avanço de $dx = 2$ unidades produz uma elevação de $dy = 4$ unidades ao longo da reta tangente (Figura 3.8.6). ◄

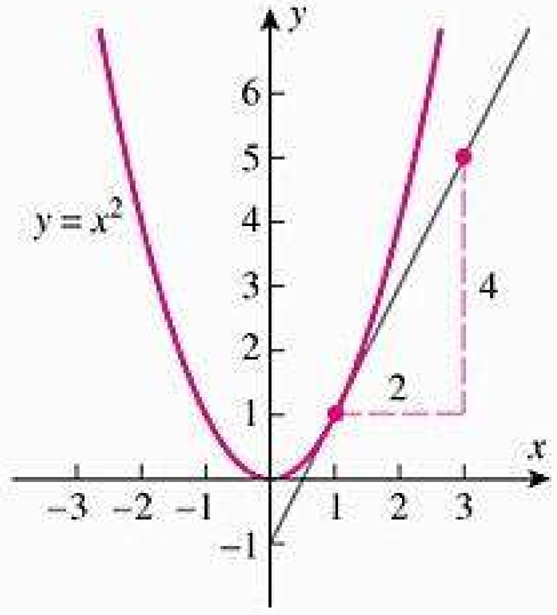


Figura 3.8.6

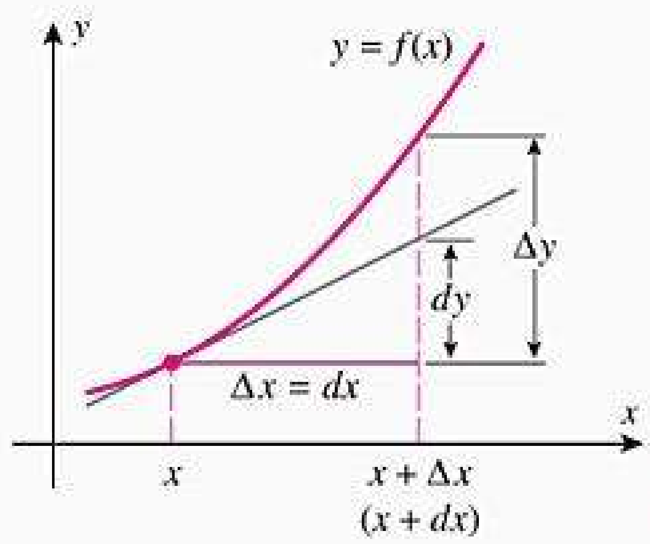


Figura 3.8.7

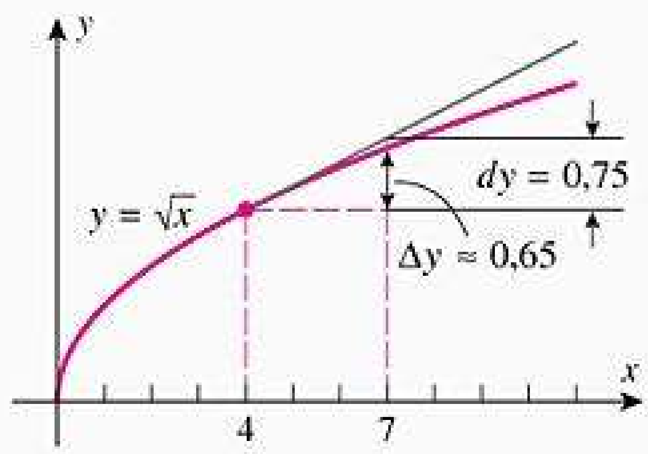


Figura 3.8.8

É importante compreender a distinção entre o incremento Δy e a diferencial dy. Para ver a diferença, vamos atribuir às variáveis independentes dx e Δx o mesmo valor, logo $dx = \Delta x$. Então, Δy representa a variação ocorrida em y quando começamos em x e nos movemos *ao longo da curva* $y = f(x)$, até que sejam percorridas Δx (= dx) unidades na direção x. Já dy representa a variação em y que ocorre quando começamos em x e nos movemos *ao longo da reta tangente* até que dx (= Δx) unidades tenham sido percorridas na direção x (Figura 3.8.7).

▶ Exemplo 4 Seja $y = \sqrt{x}$. Encontre dy e Δy em $x = 4$ com $dx = \Delta x = 3$. Faça, então, um esboço de $y = \sqrt{x}$, mostrando dy e Δy na figura.

Solução Com $f(x) = \sqrt{x}$, obtemos

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{7} - \sqrt{4} \approx 0{,}65$$

Se $y = \sqrt{x}$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{assim} \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{4}}(3) = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

A Figura 3.8.8 mostra a curva $y = \sqrt{x}$ junto com dy e Δy. ◀

■ APROXIMAÇÃO LINEAR LOCAL DO PONTO DE VISTA DIFERENCIAL

Mesmo que Δy e dy sejam geralmente diferentes, a diferencial dy é uma boa aproximação de Δy no caso em que $dx = \Delta x$ esteja próximo de 0. Para isso, lembre da Seção 3.2 que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Segue que, se Δx estiver perto de 0, então teremos $f'(x) \approx \Delta y/\Delta x$ ou, equivalentemente,

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

Se concordarmos em tomar $dx = \Delta x$, então podemos reescrever isso como

$$\Delta y \approx f'(x)\,dx = dy \tag{7}$$

Em palavras, isso afirma que, para valores de dx próximos de zero, a diferencial dy aproxima muito bem o incremento Δy (Figura 3.8.7). É claro que isso deve ser esperado, pois o gráfico da reta tangente é a aproximação linear local do gráfico de f.

■ PROPAGAÇÃO DO ERRO EM APLICAÇÕES

Nas aplicações, pequenos erros ocorrem invariavelmente quando quantidades são medidas. Quando essas quantidades forem usadas em computações, aqueles erros serão propagados para as quantidades computadas e isso é chamado de ***propagação de erros***. Vamos mostrar, agora, como usar a aproximação linear local para estimar o erro em uma quantidade computada a partir das estimativas de erro nas quantidades medidas. Para essa finalidade, vamos supor que

x_0 é o valor exato da quantidade sendo medida
$y_0 = f(x_0)$ é o valor exato da quantidade sendo calculada
x é o valor medido de x_0
$y = f(x)$ é o valor calculado de y

Definimos

dx (= Δx) = $x - x_0$ como o ***erro de medição*** de x
$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ como o ***erro propagado*** de y

Observe que o erro de medição será positivo se o valor medido for maior do que o valor exato, e negativo se for menor do que o valor exato. O sinal do erro propagado transmite uma informação semelhante.

Segue de (7), trocando x por x_0, que o erro propagado Δy pode ser aproximado por

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\,dx \tag{8}$$

Infelizmente, há uma dificuldade prática na aplicação dessa fórmula, já que é desconhecido o valor de x_0. (Lembre que o pesquisador somente conhece o valor medido x.) Por causa disso, é prática comum na pesquisa usar o valor medido x em vez de x_0 em (8) e usar a aproximação

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx \tag{9}$$

para o erro propagado.

Explique por que é razoável uma estimativa de erro entre $\pm\frac{1}{20}$ de centímetro para uma régua que é calibrada em décimos de centímetros.

► Exemplo 5 Suponha que com uma régua meçamos o lado de um quadrado como sendo de 10 cm, com um erro de medição entre $\pm\frac{1}{20}$ cm. Estime o erro na área calculada do quadrado.

Solução Seja x o valor exato de um lado e y a área exata, de modo que $y = x^2$. Segue de (9), com $f(x) = x^2$, que, se dx é o erro de medição, então o erro propagado Δy pode ser aproximado por

$$\Delta y \approx dy = 2x\,dx$$

Substituindo o valor medido $x = 10$ nessa equação, obtemos

$$dy = 20\,dx \tag{10}$$

Dizer que o erro de medição está entre $\pm\frac{1}{20}$ significa que

$$-\frac{1}{20} \le dx \le \frac{1}{20}$$

Multiplicando essas desigualdades por 20 e aplicando (10), obtemos

$$20\left(-\tfrac{1}{20}\right) \le dy \le 20\left(\tfrac{1}{20}\right) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad -1 \le dy \le 1$$

Assim, estimamos o erro propagado no valor calculado da área entre ± 1 cm^2. ◄

Se o valor verdadeiro de uma quantidade é q, e uma medida ou um cálculo produz um erro Δq, então $\Delta q/q$ é chamado de ***erro relativo*** na medida ou no cálculo. Quando expresso como uma percentagem, $\Delta q/q$ é chamado de ***erro percentual***. Na prática, o valor verdadeiro q é geralmente desconhecido; assim, em vez disso é usado o valor medido ou calculado de q, e o erro relativo é aproximado por dq/q.

► Exemplo 6 O raio de uma esfera é medido com um erro percentual entre ±0,04%. Estime o erro percentual no volume da esfera calculado com o raio medido.

Solução O volume V da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, portanto

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

A Fórmula (11) nos diz que, *grosso modo*, o erro percentual no volume calculado de uma esfera é aproximadamente três vezes o erro percentual no valor medido do raio dessa esfera. Em termos vagos, qual é o erro percentual na área calculada de um quadrado em relação ao erro percentual no valor medido de um lado desse quadrado?

e segue que $dV = 4\pi r^2\,dr$. Assim, o erro relativo em V é aproximadamente

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r} \tag{11}$$

O erro relativo na medição de r está entre ±0,04%, o que significa que

$$-0{,}0004 \le \frac{dr}{r} \le 0{,}0004$$

Multiplicando essas desigualdades por 3 e aplicando (11), resulta

$$3(-0{,}0004) \le \frac{dV}{V} \le 3(0{,}0004) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad -0{,}0012 \le \frac{dV}{V} \le 0{,}0012$$

Assim, estimamos o erro percentual no valor calculado de V dentro de $\pm 0{,}12\%$. ◄

MAIS NOTAÇÃO; FÓRMULAS DIFERENCIAIS

O símbolo df é uma outra notação comum para a diferencial de uma função $y = f(x)$. Por exemplo, se $f(x) = \text{sen}\, x$, então podemos escrever $df = \cos x\, dx$. Também podemos interpretar o símbolo "d" como um *operador* que age sobre uma função para produzir a diferencial correspondente. Por exemplo, $d[x^2] = 2x\,dx$, $d[\text{sen}\, x] = \cos x\, dx$, e assim por diante. Todas as regras gerais de derivação têm, então, versões diferenciais correspondentes:

FÓRMULA PARA DERIVADA	FÓRMULA PARA DIFERENCIAL
$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$d[c] = 0$
$\frac{d}{dx}[cf] = c\frac{df}{dx}$	$d[cf] = c\,df$
$\frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$	$d[f+g] = df + dg$
$\frac{d}{dx}[fg] = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$	$d[fg] = f\,dg + g\,df$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$	$d\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} d[x^2 \,\text{sen}\, x] &= (x^2 \cos x + 2x \,\text{sen}\, x)\,dx \\ &= x^2(\cos x\,dx) + (2x\,dx)\,\text{sen}\, x \\ &= x^2 d[\text{sen}\, x] + (\text{sen}\, x)\,d[x^2] \end{aligned}$$

ilustra a versão diferencial da regra do produto.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.8 *(Ver página 232 para respostas.)*

1. A aproximação linear local de f em x_0 usa a reta __________ ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = x_0$ para aproximar os valores de __________ por valores de x próximos de __________.

2. Encontre uma equação para a aproximação linear local de $y = 5 - x^2$ em $x_0 = 2$.

3. Seja $y = 5 - x^2$. Encontre dy e Δy em $x = 2$ com $dx = \Delta x = 0{,}1$.

4. A intensidade de luz de uma fonte luminosa é uma função $I = f(x)$ da distância x da fonte luminosa. Suponha que a distância de uma pequena pedra até a fonte seja de 10 m, $f(10) = 0{,}2$ W/m^2 e $f'(10) = -0{,}04$ W/m^3. Se a distância $x = 10$ m foi obtida com um erro de medição dentro de $\pm 0{,}05$, estime o erro percentual na intensidade da fonte luminosa calculada na pedra.

EXERCÍCIOS 3.8 Recurso Gráfico

1. (a) Use a Fórmula (1) para obter uma aproximação linear local de x^3 em $x_0 = 1$.

(b) Use a Fórmula (2) para reescrever a aproximação obtida em (a) em termos de Δx.

(c) Use o resultado obtido em (a) para aproximar $(1{,}02)^3$ e confirme que a fórmula obtida em (b) produz o mesmo resultado.

2. (a) Use a Fórmula (1) para obter a aproximação linear local de $1/x$ em $x_0 = 2$.
   (b) Use a Fórmula (2) para reescrever a aproximação obtida em (a) em termos de Δx.
   (c) Use o resultado obtido em (a) para aproximar 1/2,05 e confirme que a fórmula obtida em (b) produz o mesmo resultado.

ENFOCANDO CONCEITOS

3. (a) Encontre a aproximação linear local da função $f(x) = \sqrt{1+x}$ em $x_0 = 0$ e use-a para aproximar $\sqrt{0{,}9}$ e $\sqrt{1{,}1}$.
   (b) Faça o gráfico de f e de sua reta tangente em x_0 e use-os para ilustrar a relação entre os valores exatos e as aproximações de $\sqrt{0{,}9}$ e $\sqrt{1{,}1}$.

4. (a) Encontre a aproximação linear local da função $f(x) = 1/\sqrt{x}$ em $x_0 = 4$ e use-a para aproximar $1/\sqrt{3{,}9}$ e $1/\sqrt{4{,}1}$.
   (b) Faça os gráficos de f e de sua tangente em x_0 e use-os para ilustrar a relação entre os valores exatos e as aproximações de $1/\sqrt{3{,}9}$ e $1/\sqrt{4{,}1}$.

5-8 Confirme que a fórmula dada é a aproximação linear local em $x_0 = 0$.

5. $(1+x)^{15} \approx 1 + 15x$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x$
7. $\operatorname{tg} x \approx x$
8. $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$

9-12 Confirme que a fórmula dada é a aproximação linear local de f em $x_0 = 1$, onde $\Delta x = x - 1$.

9. $f(x) = x^4$; $(1+\Delta x)^4 \approx 1 + 4\,\Delta x$
10. $f(x) = \sqrt{x}$; $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$
11. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$; $\dfrac{1}{3+\Delta x} \approx \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}\Delta x$
12. $f(x) = (4+x)^3$; $(5+\Delta x)^3 \approx 125 + 75\Delta x$

13-16 Confirme que a fórmula dada é a aproximação linear local em $x_0 = 0$ e use um recurso computacional para estimar um intervalo de valores de x no qual o erro na aproximação é de, no máximo, ±0,1.

13. $\sqrt{x+3} \approx \sqrt{3} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}x$
14. $\dfrac{1}{\sqrt{9-x}} \approx \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{54}x$
15. $\operatorname{tg} 2x \approx 2x$
16. $\dfrac{1}{(1+2x)^5} \approx 1 - 10x$

17. (a) Use a aproximação linear local de sen x em $x_0 = 0$ obtida no Exemplo 2 para aproximar sen 1° e compare a aproximação ao resultado produzido diretamente por seu recurso computacional.
   (b) Como deve ser escolhido x_0 para aproximar sen 44°?
   (c) Aproxime sen 44° e compare a aproximação ao resultado produzido diretamente por seu recurso computacional.

18. (a) Use a aproximação linear local de tg x em $x_0 = 0$ para aproximar tg 2° e compare a aproximação ao resultado produzido diretamente por seu recurso computacional.
   (b) Como deve ser escolhido x_0 para aproximar tg 61°?
   (c) Aproxime tg 61° e compare a aproximação ao resultado produzido diretamente por seu recurso computacional.

19-27 Use uma aproximação linear local para estimar o valor da quantidade dada.

19. $(3{,}02)^4$
20. $(1{,}97)^3$
21. $\sqrt{65}$
22. $\sqrt{24}$
23. $\sqrt{80{,}9}$
24. $\sqrt{36.03}$
25. sen 0,1
26. tg 0,2
27. cos 31°

ENFOCANDO CONCEITOS

28. A aproximação $(1+x)^k \approx 1 + kx$ é freqüentemente usada por engenheiros para cálculos rápidos.
   (a) Deduza esse resultado e use-o para fazer uma estimativa grosseira de $(1{,}001)^{37}$.
   (b) Compare sua estimativa com aquela produzida diretamente por seu recurso computacional.
   (c) Mostre que essa fórmula produz uma estimativa muito ruim de $(1{,}1)^{37}$ e explique por que isso ocorre.

29. (a) Seja $y = x^2$. Encontre dy e Δy em $x = 2$, sendo $dx = \Delta x = 1$.
   (b) Esboce o gráfico de $y = x^2$, mostrando dy e Δy na figura.

30. (a) Seja $y = x^3$. Encontre dy e Δy em $x = 1$, sendo $dx = \Delta x = 1$.
   (b) Esboce o gráfico de $y = x^3$, mostrando dy e Δy na figura.

31. (a) Seja $y = 1/x$. Encontre dy e Δy em $x = 1$, sendo $dx = \Delta x = -0{,}5$.
   (b) Esboce o gráfico de $y = 1/x$, mostrando dy e Δy na figura.

32. (a) Seja $y = \sqrt{x}$. Encontre dy e Δy em $x = 9$, sendo $dx = \Delta x = -1$
   (b) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{x}$, mostrando dy e Δy na figura.

33-36 Encontre as fórmulas para dy e Δy.

33. $y = x^3$
34. $y = 8x - 4$
35. $y = x^2 - 2x + 1$
36. $y = \operatorname{sen} x$

37-40 Encontre a diferencial dy.

37. (a) $y = 4x^3 - 7x^2$ (b) $y = x \cos x$
38. (a) $y = 1/x$ (b) $y = 5 \operatorname{tg} x$
39. (a) $y = x\sqrt{1-x}$ (b) $y = (1+x)^{-17}$

40. (a) $y = \dfrac{1}{x^3 - 1}$ (b) $y = \dfrac{1 - x^3}{2 - x}$

41-44 Use a diferencial dy para aproximar Δy de acordo com as mudanças de x.

41. $y = \sqrt{3x - 2}$; de $x = 2$ para $x = 2{,}03$

42. $y = \sqrt{x^2 + 8}$; de $x = 1$ para $x = 0{,}97$

43. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; de $x = 2$ para $x = 1{,}96$

44. $y = x\sqrt{8x + 1}$, de $x = 3$ para $x = 3{,}05$

45. O lado de um quadrado mede aproximadamente 10 m, com erro possível de ±0,1 m.

(a) Use diferenciais para estimar o erro na área calculada.

(b) Estime o erro percentual no lado e na área.

46. O lado de um cubo mede aproximadamente 25 cm, com erro possível de ±1 cm

(a) Use diferenciais para estimar o erro no volume calculado.

(b) Estime os erros percentuais no lado e no volume.

47. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede exatamente 10 cm, e um dos ângulos agudos mede 30°, com erro possível de ±1°.

(a) Use diferenciais para estimar os erros nos lados oposto e adjacente ao ângulo medido.

(b) Estime os erros percentuais nos lados.

48. Um lado de um triângulo retângulo mede exatamente 25 cm. O ângulo oposto a este lado mede 60°, com erro possível de ±0,5°.

(a) Use diferenciais para estimar o erro no lado adjacente e na hipotenusa.

(b) Estime os erros percentuais no lado adjacente e na hipotenusa.

49. A resistência elétrica R de um fio é dada por $R = k/r^2$, onde k é uma constante e r, o raio do fio. Supondo que o raio tenha um erro possível de ±5%, use diferenciais para estimar o erro percentual em R (supondo k exato).

50. Uma escada com 12 m está apoiada em uma parede e faz um ângulo θ com o chão. Se o topo da escada está a uma altura de h m na parede, expresse h em termos de θ e, então, use dh para estimar a variação em h se θ variar de 60° a 59°.

51. A área de um triângulo retângulo com uma hipotenusa H é calculada pela fórmula $A = \frac{1}{4}H^2 \operatorname{sen} 2\theta$, onde θ é um dos ângulos agudos. Use diferenciais para aproximar o erro no cálculo de A se $H = 4$ cm (exatamente) e $\theta = 30°$ com erro possível de $\pm 15'$.

52. O lado de um quadrado é medido com um possível erro percentual de ±1%. Use diferenciais para estimar o erro percentual na área.

53. O lado de um cubo é medido com um erro percentual possível de ±2%. Use diferenciais para estimar o erro percentual no volume.

54. O volume de uma esfera é computado a partir do valor medido de seu raio. Estime o máximo erro percentual possível na medida se o erro percentual no volume deve ser mantido em não mais de ±3% ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$ é o volume de uma esfera de raio r).

55. A área de um círculo é computada a partir do valor medido de seu diâmetro. Estime o erro percentual máximo permitido na medida se o erro percentual na área deve ser mantido em não mais de ±1%.

56. Um cubo de aço com 1 cm de lado é coberto com 0,01 cm de cobre. Use diferenciais para estimar o volume de cobre na cobertura. [*Sugestão*: Seja ΔV a variação no volume do cubo.]

57. Uma barra de metal medindo 15 cm de comprimento e 5 cm de diâmetro está coberta, exceto nas pontas, por uma camada de isolante com uma espessura de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o volume do isolante. [*Sugestão*: Seja ΔV a variação no volume da barra.]

58. O tempo necessário para uma oscilação completa de um pêndulo é denominado ***período***. Se o comprimento L do pêndulo e a oscilação forem pequenos, então o período será dado por $P = 2\pi\sqrt{L/g}$, onde g é a aceleração constante devida à gravidade. Use diferenciais para mostrar que o erro percentual em P é aproximadamente a metade do erro percentual em L.

59. Se a temperatura T de uma barra de metal medindo L de comprimento variar por uma quantidade ΔT, então o comprimento irá variar por uma quantidade $\Delta L = \alpha L \Delta T$, onde α é denominado ***coeficiente de expansão linear***. Para variações moderadas na temperatura, α pode ser considerado constante.

(a) Suponha que a barra tem 40 cm de comprimento a 20° C e, quando a temperatura passa a ser 30°C, o comprimento encontrado é de 40,006 cm. Encontre α.

(b) Se um poste de alumínio tem um comprimento de 180 cm a 15°C, qual será seu comprimento se a temperatura for elevada para 40°C? [Tome $\alpha = 2{,}3 \times 10^{-5}$/°C.]

60. Se a temperatura T de um sólido ou líquido com volume V for alterada por uma quantidade ΔT, então o volume irá variar por uma quantidade $\Delta V = \beta V \Delta T$, onde β é denominado ***coeficiente de expansão volumétrica.*** Para variações moderadas na temperatura, β pode ser considerado constante. Suponha que um caminhão-tanque carregue 4.000 galões de álcool etílico a uma temperatura de 35°C e entregue sua carga, mais tarde, a uma temperatura de 15°C. Usando $\beta = 7{,}5 \times 10^{-4}$/°C para o álcool etílico, encontre o número de galões entregues.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 3.8

1. tangente; $f(x)$; x_0 **2.** $y = 1 + (-4)(x - 2)$ ou $y = -4x + 9$ **3.** $dy = -0{,}4$; $\Delta y = -0{,}41$ **4.** entre ±1%

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO Recurso Gráfico C CAS

1. Explique a diferença entre taxa de variação média e instantânea e discuta como elas podem ser calculadas.

2. Complete cada parte para a função $y = \frac{1}{2}x^2$.

(a) Encontre a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[3, 4]$.

(b) Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = 3$.

(c) Encontre a taxa de variação instantânea de y em relação a x em um valor qualquer de x.

(d) Esboce o gráfico de $y = \frac{1}{2}x^2$ junto com o da reta secante cuja inclinação é dada pelo resultado de (a) e indique graficamente a inclinação da reta tangente que corresponde ao resultado obtido em (b).

3. Complete cada parte para a função $f(x) = x^2 + 1$.

(a) Encontre a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em um valor qualquer de x.

(b) Encontre a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$.

4. Um carro percorre uma estrada reta com 120 km de comprimento. Nos primeiros 100 km, ele tem uma velocidade média de 50 km/h. Mostre que, não importando a rapidez com que percorre os últimos 20 km, ele não poderá ter uma velocidade média de 60 km/h para todo o percurso.

5. No instante $t = 0$, um carro ultrapassa um caminhão lento. A velocidade média do carro de $t = 1$ a $t = 1 + h$ é

$$v_m = \frac{3(h+1)^{2,5} + 580h - 3}{10h}$$

Estime a velocidade instantânea do carro em $t = 1$, onde o tempo está em segundos e a distância em pés.

6. Uma pára-quedista pula de um avião. Suponha que a distância que ele cai durante os primeiros t segundos antes de abrir o pára-quedas é de $s(t) = 976((0{,}835)^t - 1) + 176t$, onde s está em pés. Faça o gráfico de s *versus* t para $0 \le t \le 20$ e use-o para estimar a velocidade instantânea em $t = 15$.

7. Uma partícula move-se sobre uma linha reta de tal modo que, depois de t horas, está a $s = 3t^2 + t$ km de sua posição inicial.

(a) Encontre a velocidade média da partícula sobre o intervalo $[1, 3]$.

(b) Encontre a velocidade instantânea em $t = 1$.

8. Dê a definição de derivada e duas interpretações para ela.

9. Use a definição de derivada para encontrar dy/dx e verifique sua resposta calculando a derivada através de fórmulas apropriadas.

(a) $y = \sqrt{9 - 4x}$ (b) $y = \dfrac{x}{x+1}$

10. Suponha que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le 1 \\ k(x-1), & x > 1 \end{cases}$

Para quais valores de k f é

(a) contínua? (b) diferenciável?

11. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f'(x)$ para uma função não-especificada f.

(a) Para quais valores de x a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal?

(b) Sobre quais intervalos a curva $y = f(x)$ tem retas tangentes com inclinação positiva?

(c) Sobre quais intervalos a curva $y = f(x)$ tem retas tangentes com inclinação negativa?

(d) Dado que $g(x) = f(x)$ sen x, encontre $g''(0)$

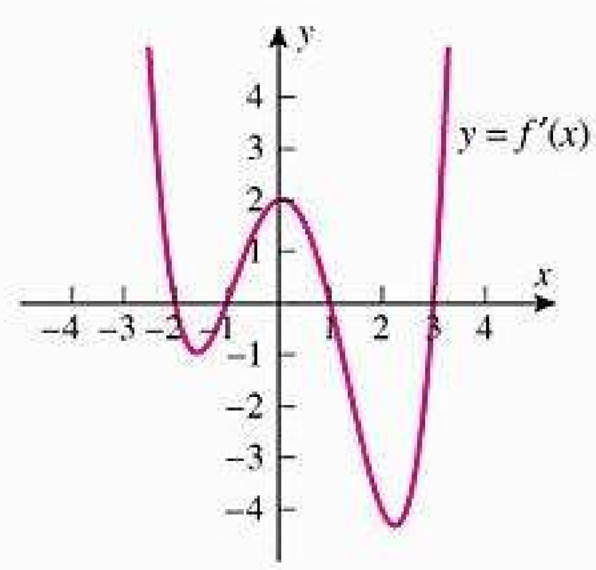


Figura Ex-11

12. Esboce o gráfico de uma função f tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ se $x < 0$, e $f'(x) < 0$ se $x > 0$.

13. De acordo com o Bureau do Censo dos EUA, a população mundial N (em bilhões) estimada e projetada para os meados dos anos de 1950, 1975, 2000, 2025 e 2050 é, respectivamente, 2,555; 4,088; 6,080; 7,841 e 9,104. Embora o crescimento populacional não seja uma função contínua do tempo t, podemos aplicar a idéia de derivada desenvolvida na Seção 3.2 se concordarmos em aproximar o gráfico de N *versus* t por uma curva contínua, como a da figura a seguir.

(a) Use a reta tangente em $t = 2000$ mostrada na figura para aproximar o valor de dN/dt nesse ponto. Interprete o resultado como uma taxa de variação.

(b) A ***taxa de crescimento*** instantânea é definida por

$$\frac{dN/dt}{N}$$

Use a resposta de (a) para aproximar a taxa de crescimento instantânea no início do ano 2000. Expresse o resultado como uma percentagem e inclua as unidades apropriadas.

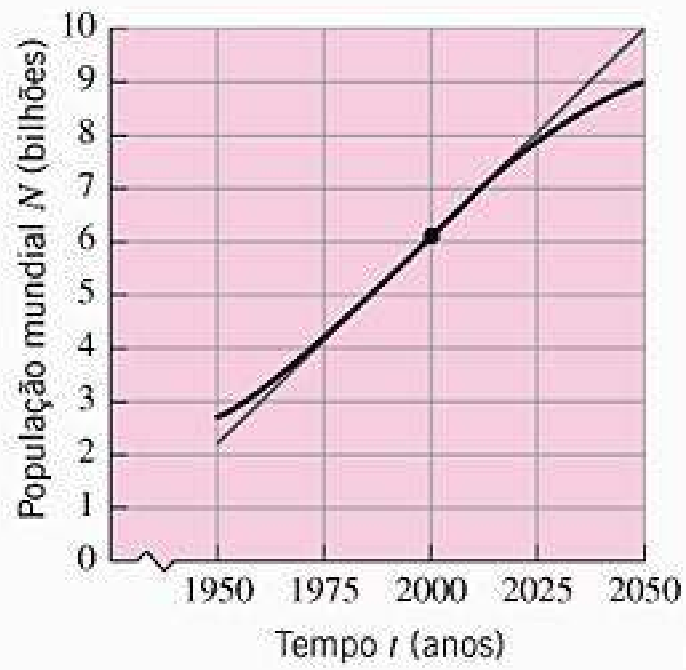


Figura Ex-13

14. Use um recurso computacional para fazer o gráfico da função

$$f(x) = |x^4 - x - 1| - x$$

e estime os valores de x onde a derivada desta função não existe.

15-18 (a) Use um CAS para encontrar $f'(x)$ usando a Definição 3.2.11; (b) confira o resultado encontrando a derivada à mão; (c) use um CAS para encontrar $f''(x)$.

15. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

16. $f(x) = \sqrt{x} + \cos^2 x$

17. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 5}{3x + 2}$

18. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2}$

19. A quantidade de água em um tanque t minutos após ele começar a ser esvaziado é dada por $W = 100(t - 15)^2$ litros.

(a) Com que taxa a água está fluindo no final de 5 minutos?

(b) Qual é a taxa média segundo a qual a água flui durante os 5 primeiros minutos?

20. Use a fórmula $V = l^3$ para o volume de um cubo de lado l para encontrar

(a) a taxa média segundo a qual o volume do cubo varia com l quando l cresce de 2 para 4.

(b) a taxa de variação instantânea segundo a qual o volume de um cubo varia com l quando $l = 5$.

21-22 Faça um *zoom* do gráfico de f em um intervalo contendo $x = x_0$ até que o gráfico pareça uma linha reta. Estime a inclinação dessa reta e, então, verifique sua resposta, encontrando o valor exato de $f'(x_0)$

21. (a) $f(x) = x^2 - 1,\ x_0 = 1{,}8$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2},\ x_0 = 3{,}5$

22. (a) $f(x) = x^3 - x^2 + 1,\ x_0 = 2{,}3$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1},\ x_0 = -0{,}5$

23. Suponha que uma função f seja diferenciável em $x = 1$ e

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h)}{h} = 5$$

Encontre $f(1)$ e $f'(1)$.

24. Suponha que f tenha a propriedade $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todos os valores de x e y e que $f(0) = f'(0) = 1$. Mostre que f é diferenciável e $f'(x) = f(x)$. [*Sugestão*: Comece expressando $f'(x)$ como um limite.]

25. Encontre as equações de todas as retas que passam pela origem que são tangentes à curva $y = x^3 - 9x^2 - 16x$.

26. Encontre todos os valores de x para os quais a reta tangente a $y = 2x^3 - x^2$ é perpendicular à reta $x + 4y = 10$.

27. Seja $f(x) = x^2$. Mostre que, para todos os valores distintos de a e b, a inclinação da reta tangente a $y = f(x)$ em $x = \frac{1}{2}(a + b)$ é igual à inclinação da reta secante que passa pelos pontos (a, a^2) e (b, b^2). Faça uma figura para ilustrar esse resultado.

28. Em cada parte, calcule a expressão, dado que $f(1) = 1$, $g(1) = -2$, $f'(1) = 3$ e $g'(1) = -1$.

(a) $\left.\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right|_{x=1}$

(b) $\left.\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]\right|_{x=1}$

(c) $\left.\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{f(x)}\right]\right|_{x=1}$

(d) $\dfrac{d}{dx}[f(1)g'(1)]$

29-30 Encontre $f'(x)$.

29. (a) $f(x) = x^8 - 3\sqrt{x} + 5x^{-3}$

(b) $f(x) = (2x + 1)^{101}(5x^2 - 7)$

(c) $f(x) = \sqrt{3x + 1}(x - 1)^2$

(d) $f(x) = \left(\dfrac{3x + 1}{x^2}\right)^3$

30. (a) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2\cos^3 x$

(b) $f(x) = (1 + \sec x)(x^2 - \operatorname{tg} x)$

(c) $f(x) = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\operatorname{cossec} 2x}{x^3 + 5}\right)$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2x + \operatorname{sen}^3 x}$

31-32 Encontre os valores de x nos quais a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal.

31. $f(x) = (2x + 7)^6(x - 2)^5$

32. $f(x) = \dfrac{(x - 3)^4}{x^2 + 2x}$

33. Encontre todas as retas que são simultaneamente tangentes ao gráfico de $y = x^2 + 1$ e ao gráfico de $y = -x^2 - 1$.

34. (a) Seja n um número inteiro positivo par. Generalize o resultado do Exercício 33 encontrando todas as retas que são simultaneamente tangentes ao gráfico de $y = x^n + n - 1$ e ao gráfico de $y = -x^n - n + 1$.

(b) Seja n um número inteiro positivo ímpar. Existem retas que são simultaneamente tangentes ao gráfico de $y = x^n + n - 1$ e ao gráfico de $y = -x^n - n + 1$? Explique.

35. Encontre todos os valores de x para os quais a reta que é tangente a $y = 3x - \operatorname{tg} x$ é paralela à reta $y - x = 2$.

36. Aproxime os valores de x nos quais a reta tangente ao gráfico de $y = x^3 - \operatorname{sen} x$ é horizontal.

37. Suponha que $f(x) = M \operatorname{sen} x + N \cos x$ para certas constantes M e N. Se $f(\pi/4) = 3$ e $f'(\pi/4) = 1$, encontre uma equação para a reta tangente a $y = f(x)$ em $x = 3\pi/4$.

38. Suponha que $f(x) = M \operatorname{tg} x + N \sec x$ para certas constantes M e N. Se $f(\pi/4) = 2$ e $f'(\pi/4)$, encontre uma equação para a reta tangente a $y = f(x)$ em $x = 0$.

39. Suponha que $f'(x)\ 2x \cdot f(x)$ e $f(2) = 5$.

(a) Encontre $g'(\pi/3)$ se $g(x) = f(\sec x)$.

(b) Encontre $h'(2)$ se $h(x) = [f(x)/(x-1)]^4$.

40. Sob certas condições, o período T do pêndulo de um relógio (isto é, o tempo necessário para um movimento de ida e volta) é dado em termos de seu comprimento L por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, onde g é a constante gravitacional.

(a) Supondo que o comprimento do pêndulo possa variar (por exemplo, devido a variações na temperatura), encontre a taxa de variação do período T em relação ao comprimento L.

(b) Se L estiver em metros e T em segundos, quais são as unidades para a taxa de variação em (a)?

(c) Se o pêndulo estiver atrasando, seu comprimento deve ser aumentado ou diminuído para corrigir o problema?

(d) A constante g decresce com a altitude. Se mudarmos o relógio a partir do nível do mar para altitudes maiores, o pêndulo andará mais rápido ou mais devagar?

(e) Supondo que o comprimento do pêndulo seja constante, encontre a taxa de variação do período T em relação a g.

(f) Supondo que T está em segundos e g em metros por segundo por segundo (m/s^2), encontre as unidades para a taxa de variação em (e).

41. Uma mancha de óleo em um lago está cercada por uma barreira de contenção circular flutuante. À medida que a barreira é encolhida, a área circular da mancha diminui por bombeamento. Se a barreira está sendo encolhida a uma taxa de 5 metros por minuto, a que taxa estará diminuindo a área da mancha quando essa área tiver um diâmetro de 100 m?

42. A hipotenusa de um triângulo retângulo cresce a uma taxa constante de a centímetros por segundo e um cateto decresce a uma taxa constante de b centímetros por segundo. Qual é a taxa de variação do ângulo formado pela hipotenusa e o outro cateto no instante em que ambos os catetos medem 1 cm?

43. Em cada parte, use a informação dada para encontrar Δx, Δy e dy.

(a) $y = 1/(x-1)$; x decresce de 2 para 1,5.

(b) $y = \operatorname{tg} x$; x cresce de $-\pi/4$ para 0.

(c) $y = \sqrt{25 - x^2}$; x cresce de 0 para 3.

44. Use uma aproximação linear local adequada para estimar o valor de cotg 46° e compare sua resposta com o valor obtido com um recurso computacional.

45. A base da Grande Pirâmide de Giza é um quadrado com 230 m de lado.

(a) Conforme ilustrado na figura abaixo, suponha que um arqueólogo em pé no centro de um lado mede o ângulo de elevação do ápice de $\phi = 51°$, com um erro de $\pm 0{,}5°$. O que é razoável que o arqueólogo diga sobre a altura da pirâmide?

(b) Use diferenciais para estimar o erro permitido no ângulo de elevação que resultará em um erro na altura de, no máximo, ± 5 m.

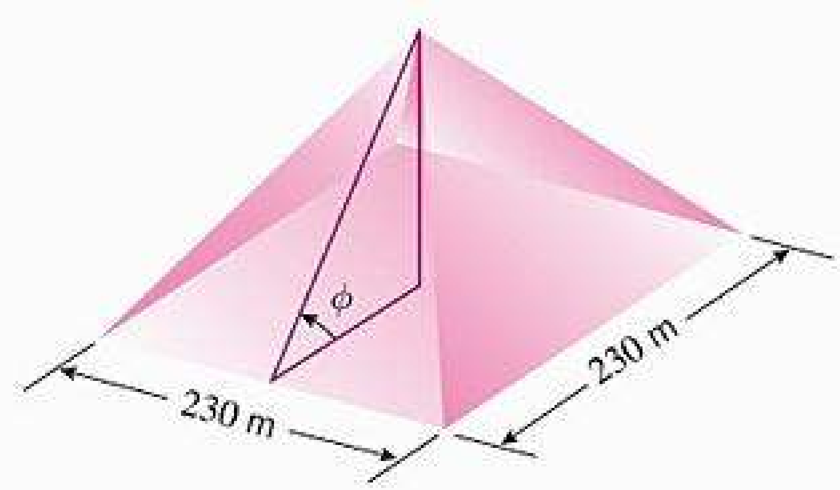


Figura Ex-45

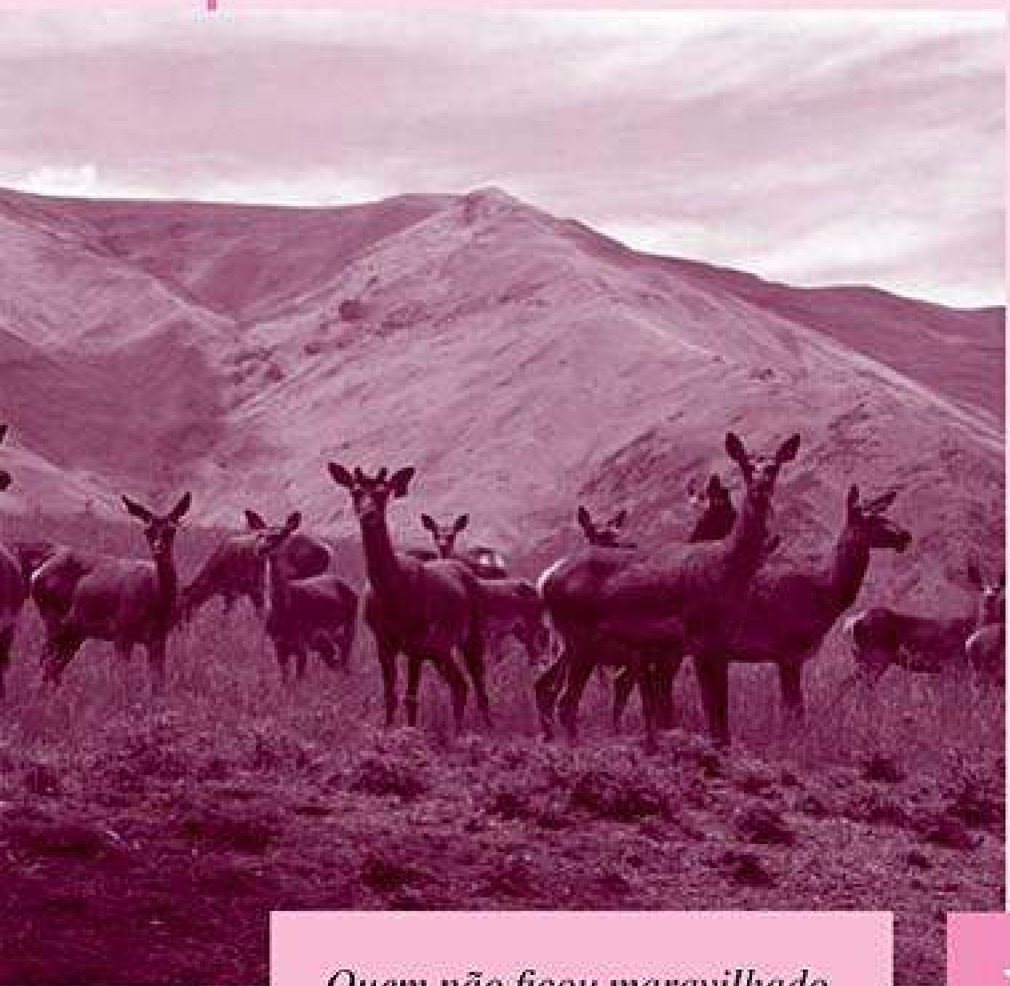
EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Não seria o máximo se dispuséssemos de um robô que executasse todas as nossas tarefas e obrigações básicas mas enfadonhas, de modo que pudéssemos nos concentrar em estudar? Quão fácil seria projetar um tal robô? Para aprender mais sobre a matemática da robótica, e também aplicar o que foi aprendido neste capítulo, visite

www.bookman.com.br

c a p í t u l o q u a t r o

FUNÇÕES EXPONENCIAIS, LOGARÍTMICAS E TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS



Quem não ficou maravilhado ao aprender que a função $y = e^x$, como uma fênix renascendo das cinzas, é sua própria derivada?

—François le Lionnais
Ensaísta Científico e Mestre de Xadrez

Neste capítulo discutiremos funções determinadas por equações em *x* e *y* que são difíceis ou impossíveis de resolver algebricamente para *y* em termos de *x*. Mostraremos como derivar essas funções usando uma equação em vez de alguma fórmula explícita para a própria função. Também voltaremos ao estudo de funções inversas, com o objetivo de estabelecer uma relação entre a derivada de uma função e a derivada de sua inversa. Essa conexão nos permitirá desenvolver algumas novas fórmulas de derivadas, que incluem as derivadas de funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas inversas. Por fim, discutiremos a regra de L'Hôpital, uma poderosa ferramenta para calcular limites.

Foto: ***O crescimento e o declínio de populações animais e recursos naturais podem ser modelados usando funções estudadas no Cálculo.***

4.1 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Até aqui estivemos ocupados com funções diferenciáveis que eram dadas por equações da forma $y = f(x)$. Nesta seção consideraremos métodos para diferenciar funções para as quais é inconveniente ou impossível a expressão dessa forma.

FUNÇÕES DEFINIDAS EXPLÍCITA E IMPLICITAMENTE

Dizemos que uma equação da forma $y = f(x)$ define y ***explicitamente*** como uma função de x, pois a variável y aparece sozinha de um lado da equação. Entretanto, algumas vezes, as funções são definidas por equações nas quais y não está sozinho de um lado; por exemplo, a equação

$$yx + y + 1 = x \tag{1}$$

não está na forma $y = f(x)$. Contudo, ainda define y como uma função de x, uma vez que pode ser reescrita como

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

Assim, dizemos que (1) define y ***implicitamente*** como uma função de x, sendo essa função

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

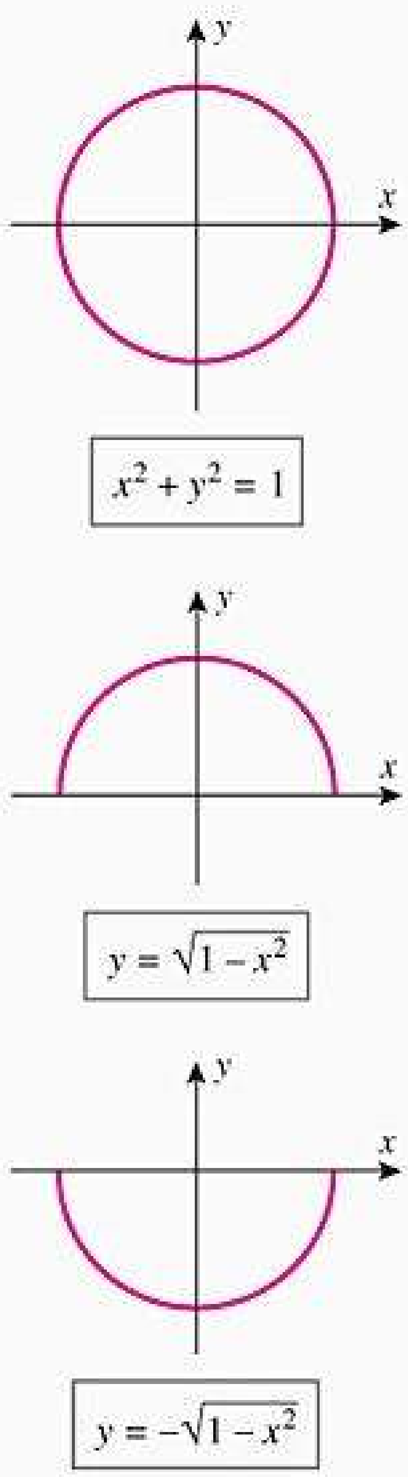


Figura 4.1.1

Uma equação em x e y pode implicitamente definir mais de uma função de x. Isso pode ocorrer quando o gráfico da equação não passa no teste da reta vertical, e portanto não é o gráfico de uma função. Por exemplo, se resolvermos a equação do círculo

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

para y em termos de x, obtemos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; assim, encontramos duas funções que estão definidas implicitamente por (2), isto é:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2} \tag{3}$$

Os gráficos dessas funções são os semicírculos superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ (Figura 4.1.1). Isso nos leva à definição seguinte.

4.1.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma dada equação em x e y define a função f ***implicitamente*** se o gráfico de $y = f(x)$ coincidir com alguma porção do gráfico da equação.

► Exemplo 1 O gráfico da equação $x = y^2$ não é o gráfico de uma função de x, pois não passa no teste da reta vertical (Figura 4.1.2). Contudo, resolvendo essa equação para y em termos de x, obtemos as equações $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$, cujos gráficos passam no teste da reta vertical e são porções do gráfico de $x = y^2$ (Figura 4.1.2). Assim, a equação $x = y^2$ define implicitamente as funções

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{x} \quad ◄$$

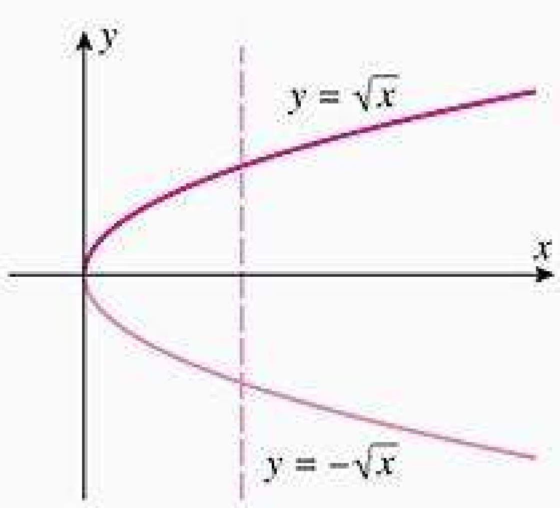


Figura 4.1.2 O gráfico de $x = y^2$ não passa no teste da reta vertical, mas os de $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ passam.

Embora tenha sido elementar resolver a equação $x = y^2$ do último exemplo para y em termos de x, para outras equações isso pode ser difícil ou impossível. Por exemplo, a equação

$$x^3 + y^3 = 3xy \tag{4}$$

pode ser resolvida para y em termos de x, mas as fórmulas resultantes são por demais complicadas para ter alguma utilidade prática. Outras equações, tais como sen $(xy) = y$, não podem ser resolvidas para y em termos de x por quaisquer métodos elementares. Assim, embora uma equação possa definir uma ou mais funções de x, pode não ser possível ou prático encontrar fórmulas explícitas para essas funções.

Felizmente, programas CAS como o *Mathematica* e o *Maple* têm capacidade para traçar "gráficos implícitos", com o que conseguem esboçar gráficos de equações como (4). O gráfico dessa equação, denominada ***fólio de Descartes***, está esboçado na Figura 4.1.3*a*. As partes (*b*) e (*c*) dessa figura mostram os gráficos em azul de duas funções definidas implicitamente por (4).

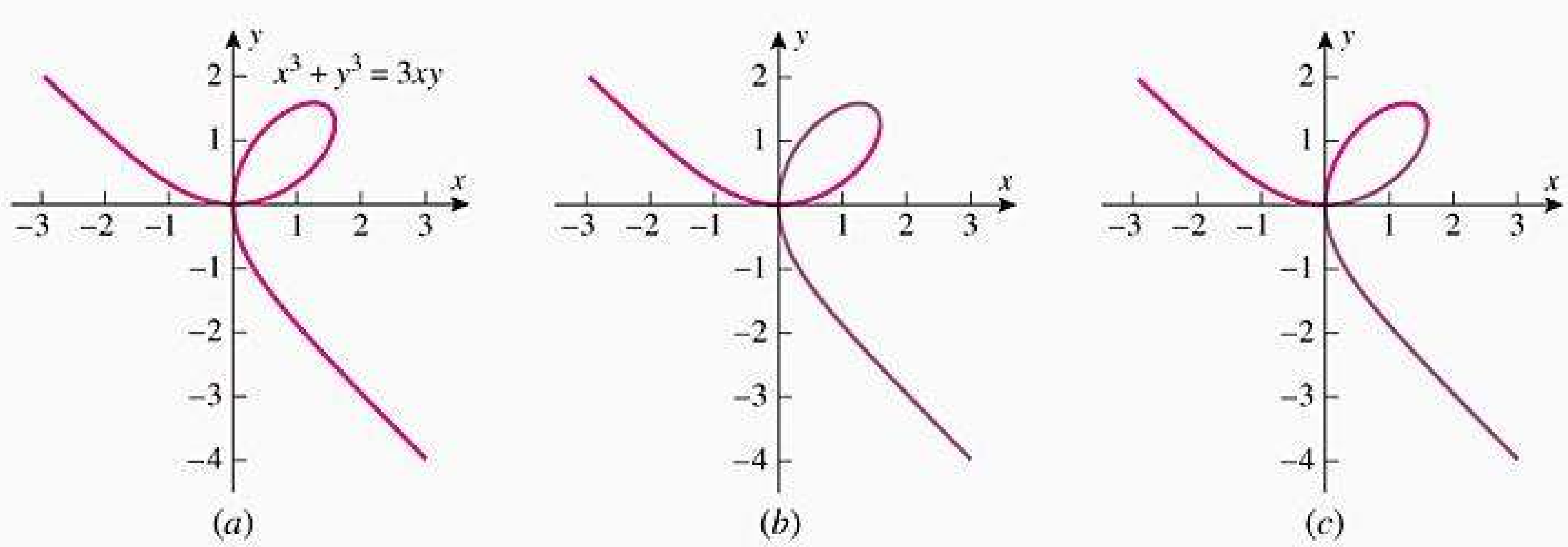


Figura 4.1.3

DIFERENCIAÇÃO IMPLÍCITA

Em geral, não é necessário resolver uma equação de y em termos de x a fim de diferenciar as funções definidas implicitamente por ela. Para ilustrar isso, consideremos a equação simples

$$xy = 1 \tag{5}$$

Uma maneira de encontrar dy/dx é reescrevendo-a como

$$y = \frac{1}{x} \tag{6}$$

da qual tem-se que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \tag{7}$$

Contudo, há uma outra maneira de obter essa derivada. Podemos diferenciar ambos os lados de (5) *antes* de resolver para y em termos de x, tratando y como uma função (por enquanto não-especificada) diferenciável de x. Com essa abordagem, obtemos

$$\frac{d}{dx}[xy] = \frac{d}{dx}[1]$$

$$x\frac{d}{dx}[y] + y\frac{d}{dx}[x] = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Se agora substituirmos (6) na última expressão, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

o que está de acordo com (7). Esse método para obter derivadas é denominado ***diferenciação*** ou ***derivação implícita***.

► Exemplo 2 Use a diferenciação implícita para encontrar dy/dx se $5y^2 + \text{sen}\, y = x^2$.

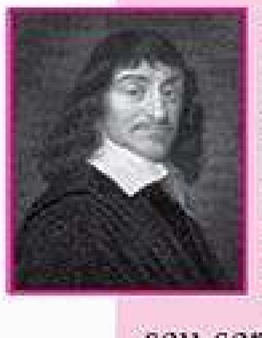
$$\frac{d}{dx}[5y^2 + \text{sen}\, y] = \frac{d}{dx}[x^2]$$

$$5\frac{d}{dx}[y^2] + \frac{d}{dx}[\text{sen}\, y] = 2x$$

$$5\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

A regra da cadeia foi usada aqui porque y é uma função de x

$$10y\frac{dy}{dx} + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$



René Descartes **(1596-1650)** Descartes, um aristocrata francês, era filho de um oficial do governo. Graduou-se em Direito na Universidade de Poitiers aos 20 anos. Após experimentar brevemente os prazeres de Paris, tornou-se engenheiro militar, primeiro para o Príncipe de Nassau e, depois, para o Duque da Bavária. Foi durante seu serviço como soldado que Descartes começou a dedicar-se seriamente à Matemática e a desenvolver sua Geometria Analítica. Após as guerras, retornou a Paris, onde se exibia excentricamente com uma espada na cintura e um chapéu emplumado. Levava uma vida despreocupada, raramente levantando-se antes das 11 horas da manhã e dedicando-se amadoristicamente à Fisiologia humana, à Filosofia, às geleiras, aos meteoros e aos arco-íris. Posteriormente, mudou-se para a Holanda, onde publicou o ***Discurso sobre o Método***, e finalmente para a Suécia, onde morreu enquanto trabalhava como professor particular da Rainha Cristina. Descartes é considerado um gênio de primeira grandeza. Além da grande contribuição para a Matemática e a Filosofia, é considerado, junto com William Harvey, o fundador da Fisiologia moderna.

Resolvendo para dy/dx, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y} \tag{8}$$

Note que essa fórmula envolve ambos x e y. A fim de obter uma fórmula para dy/dx que envolva apenas x, teríamos de resolver a equação original para y em termos de x e, então, substituir em (8). Entretanto, isso é impossível de ser feito; assim, somos forçados a deixar a fórmula dy/dx em termos de x e y. ◀

▶ Exemplo 3 Use a diferenciação implícita para encontrar d^2y/dx^2 se $4x^2 - 2y^2 = 9$.

Solução Diferenciando ambos os lados de $4x^2 - 2y^2 = 9$ implicitamente, obtém-se

$$8x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

de onde obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \tag{9}$$

Diferenciando ambos os lados de (9) implicitamente, obtém-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y)(2) - (2x)(dy/dx)}{y^2} \tag{10}$$

Substituindo (9) dentro de (10) e simplificando, usando a equação original, obtemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y - 2x(2x/y)}{y^2} = \frac{2y^2 - 4x^2}{y^3} = -\frac{9}{y^3}$$ ◀

Nos Exemplos 2 e 3, as fórmulas resultantes para dy/dx envolvem ambos x e y. Embora seja usualmente mais desejável ter a fórmula para dy/dx expressa somente em termos de x, tê-la em termos de x e y não é um impedimento para encontrar as inclinações e as equações das retas tangentes, desde que as coordenadas x e y do ponto de tangência sejam conhecidas. Isso está ilustrado no exemplo seguinte.

▶ Exemplo 4 Encontre as inclinações das retas tangentes nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 1)$ da curva $y^2 - x + 1 = 0$.

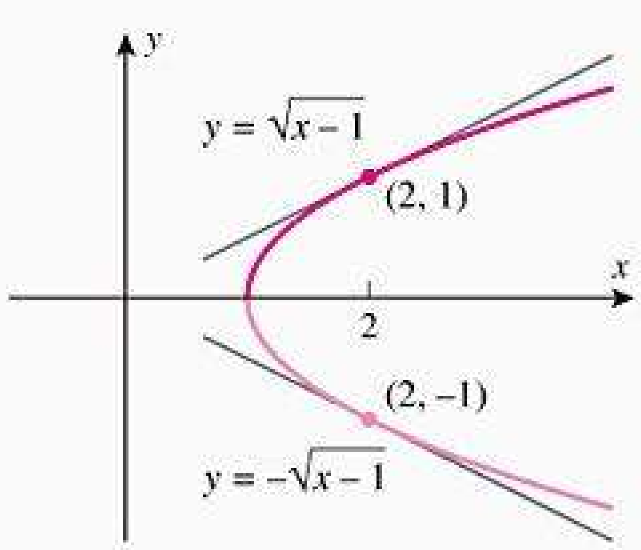


Figura 4.1.4

Solução Poderíamos proceder resolvendo a equação para y em termos de x e, então, calculando a derivada de $y = \sqrt{x-1}$ em $(2, 1)$ e a derivada de $y = -\sqrt{x-1}$ em $(2, -1)$ (Figura 4.1.4). Entretanto, a diferenciação implícita é mais eficiente, uma vez que dá as inclinações de *ambas* as retas tangentes. Diferenciando implicitamente, resulta

$$\frac{d}{dx}[y^2 - x + 1] = \frac{d}{dx}[0]$$

$$\frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[1] = \frac{d}{dx}[0]$$

$$2y\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Em $(2, -1)$ temos $y = -1$ e, em $(2, 1)$, $y = 1$; logo, as inclinações das retas tangentes naqueles pontos são

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=-1}} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{1}{2}$$ ◀

▶ Exemplo 5

(a) Use a diferenciação implícita para encontrar dy/dx para o Fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 3xy$.

(b) Encontre uma equação para a reta tangente ao Fólio de Descartes no ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(c) Em quais pontos do primeiro quadrante é a reta tangente ao Fólio de Descartes horizontal?

Solução (a) Diferenciando ambos os lados da equação dada implicitamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^3 + y^3] &= \frac{d}{dx}[3xy] \\
3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 3x\frac{dy}{dx} + 3y \\
x^2 + y^2\frac{dy}{dx} &= x\frac{dy}{dx} + y \\
(y^2 - x)\frac{dy}{dx} &= y - x^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y - x^2}{y^2 - x} \qquad (11)
\end{aligned}$$

Solução (b) No ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, temos $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{3}{2}$; assim, a partir de (11), a inclinação m_{tg} da reta tangente nesse ponto é

$$m_{\text{tg}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=3/2 \\ y=3/2}} = \frac{(3/2) - (3/2)^2}{(3/2)^2 - (3/2)} = -1$$

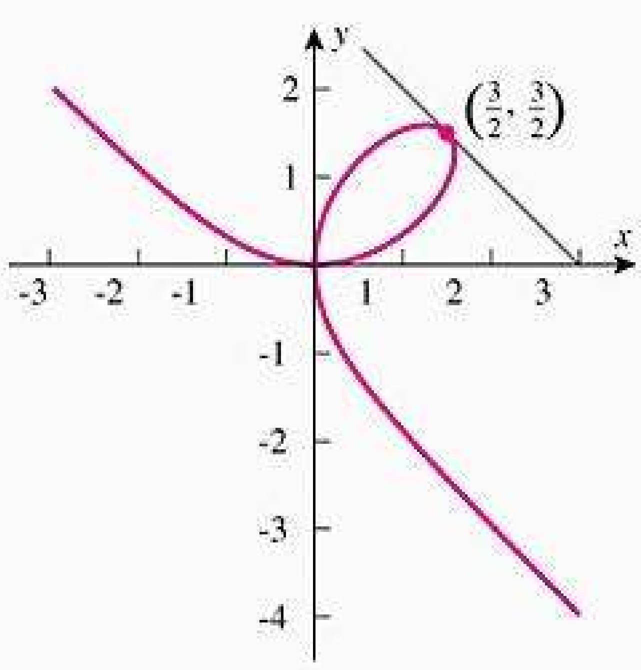


Figura 4.1.5

Assim, a equação da reta tangente no ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é

$$y - \tfrac{3}{2} = -1\left(x - \tfrac{3}{2}\right) \quad \text{ou} \quad x + y = 3$$

que está em conformidade com a Figura 4.1.5.

Solução (c) A reta tangente é horizontal nos pontos em que $dy/dx = 0$, e a partir de (11) isso ocorre somente quando $y - x^2 = 0$ ou

$$y = x^2 \qquad (12)$$

Substituindo essa expressão para y na equação $x^3 + y^3 = 3xy$ da curva, obtemos

$$\begin{aligned}
x^3 + (x^2)^3 &= 3x^3 \\
x^6 - 2x^3 &= 0 \\
x^3(x^3 - 2) &= 0
\end{aligned}$$

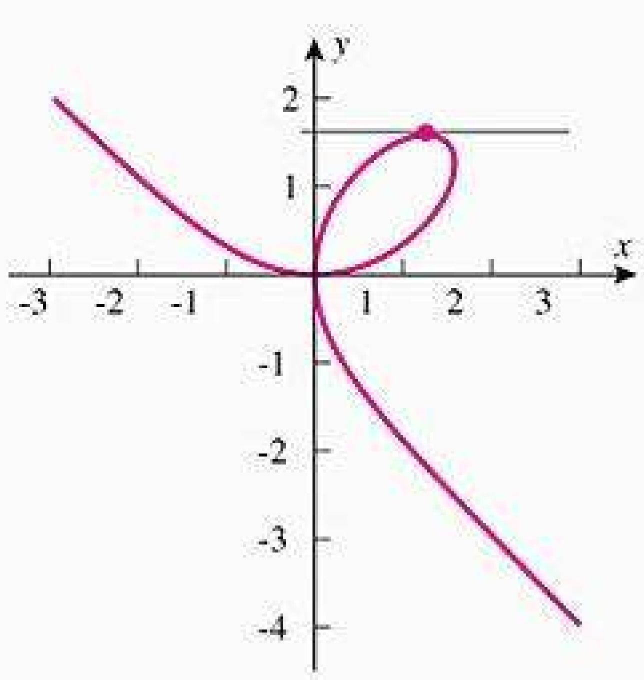


Figura 4.1.6

cujas soluções são $x = 0$ e $x = 2^{1/3}$. Por (12), as soluções $x = 0$ e $x = 2^{1/3}$ fornecem os pontos $(0, 0)$ e $(2^{1/3}, 2^{2/3})$, respectivamente. Desses dois, apenas $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ está no primeiro quadrante. Substituindo $x = 2^{1/3}$ e $y = 2^{2/3}$ em (11), obtemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2^{1/3} \\ y=2^{2/3}}} = \frac{0}{2^{4/3} - 2^{2/3}} = 0$$

Concluímos que $(2^{1/3}, 2^{2/3}) \approx (1{,}26; 1{,}59)$ é o único ponto do Fólio de Descartes no primeiro quadrante em que a reta tangente é horizontal (Figura 4.1.6). ◀

DIFERENCIABILIDADE DE FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE

Ao diferenciar implicitamente, supõe-se que y representa uma função diferenciável de x. Se não for assim, então os cálculos resultantes podem não ter sentido. Por exemplo, se diferenciarmos a equação

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \tag{13}$$

obtemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

A Fórmula (11) não pode ser aplicada em (0, 0) e, portanto, não fornece informação alguma sobre a natureza do Fólio de Descartes na origem. Com base nos gráficos da Figura 4.1.3, o que podemos dizer sobre a diferenciabilidade das funções definidas implicitamente e esboçadas em azul nas partes (*b*) e (*c*)?

Contudo, essa derivada carece de sentido porque não existem valores reais de x e de y que satisfaçam (13) (por quê?). Isso nos diz que (13) não possui gráfico real e, portanto, certamente não define quaisquer funções implicitamente.

A conclusão sem sentido dessas contas transmite a importância de saber se uma dada equação em x e y que deverá ser derivada implicitamente de fato define implicitamente alguma função diferenciável de x. Infelizmente, isso pode ser um problema difícil, portanto deixamos a discussão disso para disciplinas mais avançadas de Análise Matemática.

DERIVADAS DE POTÊNCIAS RACIONAIS DE *x*

No Teorema 3.3.3 e na discussão que o segue, mostramos que a fórmula

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{14}$$

é válida para todos os valores inteiros de n e para $n = \frac{1}{2}$. Usaremos agora a diferenciação implícita para mostrar que essa fórmula é válida para qualquer expoente racional. Mais precisamente, mostraremos que, se r for um número racional, então

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1} \tag{15}$$

sempre que x^r e x^{r-1} estiverem definidas. Por ora, admitiremos sem prova que x^r é diferenciável; a justificativa para isso será dada posteriormente.

Seja $y = x^r$. Uma vez que r é um número racional, pode ser expresso como uma razão de inteiros $r = m/n$. Assim, $y = x^r = x^{m/n}$ pode ser escrita como

$$y^n = x^m \quad \text{logo} \quad \frac{d}{dx}[y^n] = \frac{d}{dx}[x^m]$$

Diferenciando implicitamente em relação a x e usando (14), obtemos

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \tag{16}$$

Mas

$$y^{n-1} = [x^{m/n}]^{n-1} = x^{m-(m/n)}$$

Dessa forma, (16) pode ser escrita como

$$nx^{m-(m/n)}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1} = rx^{r-1}$$

o que demonstra (15).

► Exemplo 6 A partir de (15)

$$\frac{d}{dx}[x^{4/5}] = \frac{4}{5}x^{(4/5)-1} = \frac{4}{5}x^{-1/5}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-7/8}] = -\frac{7}{8}x^{(-7/8)-1} = -\frac{7}{8}x^{-15/8}$$

$$\frac{d}{dx}[\sqrt[3]{x}] = \frac{d}{dx}[x^{1/3}] = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \blacktriangleleft$$

Se u for uma função diferenciável de x e r for um número racional, então a regra da cadeia dá lugar à seguinte generalização de (15):

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1} \cdot \frac{du}{dx} \qquad (17)$$

► Exemplo 7

$$\frac{d}{dx}[x^2 - x + 2]^{3/4} = \frac{3}{4}(x^2 - x + 2)^{-1/4} \cdot \frac{d}{dx}[x^2 - x + 2]$$

$$= \frac{3}{4}(x^2 - x + 2)^{-1/4}(2x - 1)$$

$$\frac{d}{dx}[(\sec \pi x)^{-4/5}] = -\frac{4}{5}(\sec \pi x)^{-9/5} \cdot \frac{d}{dx}[\sec \pi x]$$

$$= -\frac{4}{5}(\sec \pi x)^{-9/5} \cdot \sec \pi x \operatorname{tg} \pi x \cdot \pi$$

$$= -\frac{4\pi}{5}(\sec \pi x)^{-4/5} \operatorname{tg} \pi x \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.1 (*Ver página 243 para respostas.*)

1. Encontre dy/dx.
   (a) $y = x^{2/3}$ (b) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$
   (c) $y = \sqrt[3]{4x - 1}$ (d) $y = (\operatorname{tg}^3 x)^{4/5}$
2. A equação $xy^3 = 1$ define y implicitamente como uma função de x.
   (a) Derivando a equação implicitamente, obtemos $dy/dx =$ ________.
   (b) Confirme que o resultado em (a) confere com o resultado obtido resolvendo a equação dada para y como uma função de x e então derivando.
3. Encontre dy/dx por derivação implícita.
   (a) $x^2 - y^3 = xy$ (b) $\operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{tg} y$
4. A equação da reta tangente ao gráfico de $x + y + xy = 3$ no ponto $(1, 1)$ é ________.
5. Use derivação implícita para encontrar d^2y/dx^2 para $\operatorname{sen} y = x$.

EXERCÍCIOS 4.1 [C] CAS

1-8 Encontre dy/dx.

1. $y = \sqrt[3]{2x - 5}$
2. $y = \sqrt[3]{2 + \operatorname{tg}(x^2)}$
3. $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right)^{2/3}$
4. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 5}}$
5. $y = x^3(5x^2 + 1)^{-2/3}$
6. $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x - 1}}{x}$
7. $y = [\operatorname{sen}(3/x)]^{5/2}$
8. $y = [\cos(x^3)]^{-1/2}$

9-10 (a) Encontre dy/dx por derivação implícita. (b) Resolva a equação para y como uma função de x e obtenha dy/dx dessa equação. (c) Confirme que os dois resultados são consistentes expressando a derivada de (a) como uma função somente de x.

9. $x + xy - 2x^3 = 2$
10. $\sqrt{y} - \operatorname{sen} x = 2$

11-20 Encontre dy/dx por derivação implícita.

11. $x^2 + y^2 = 100$
12. $x^3 + y^3 = 3xy^2$
13. $x^2y + 3xy^3 - x = 3$
14. $x^3y^2 - 5x^2y + x = 1$
15. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 1$
16. $x^2 = \dfrac{x + y}{x - y}$
17. $\operatorname{sen}(x^2y^2) = x$
18. $\cos(xy^2) = y$
19. $\operatorname{tg}^3(xy^2 + y) = x$
20. $\dfrac{xy^3}{1 + \sec y} = 1 + y^4$

21-26 Encontre d^2y/dx^2 por derivação implícita.

21. $2x^2 - 3y^2 = 4$
22. $x^3 + y^3 = 1$
23. $x^3y^3 - 4 = 0$
24. $xy + y^2 = 2$

25. $y + \text{sen}\, y = x$

26. $x \cos y = y$

27-28 Encontre a inclinação da reta tangente à curva nos pontos dados de duas maneiras: primeiro, resolvendo para y em termos de x e derivando; depois, por derivação implícita.

27. $x^2 + y^2 = 1$; $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(1/2, -\sqrt{3}/2)$

28. $y^2 - x + 1 = 0$; $(10, 3)$, $(10, -3)$

29-32 Use diferenciação implícita para encontrar a inclinação da reta tangente à curva no ponto especificado e verifique se sua resposta está de acordo com o gráfico.

29. $x^4 + y^4 = 16$; $(1, \sqrt[4]{15})$ [***quártica especial de Lamé***]

30. $y^3 + yx^2 + x^2 - 3y^2 = 0$; $(0, 3)$ [***trissectriz***]

31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$; $(3, 1)$ [***lemniscata***]

32. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$; $(-1, 3\sqrt{3})$ [***hipociclóide de quatro cúspides***]

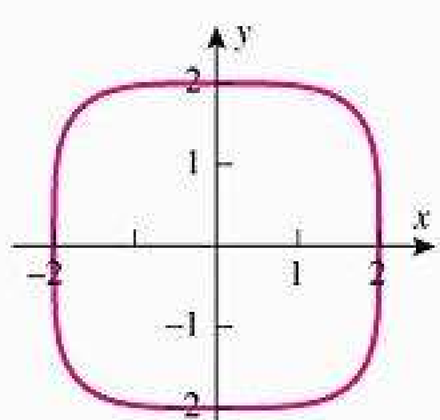


Figura Ex-29

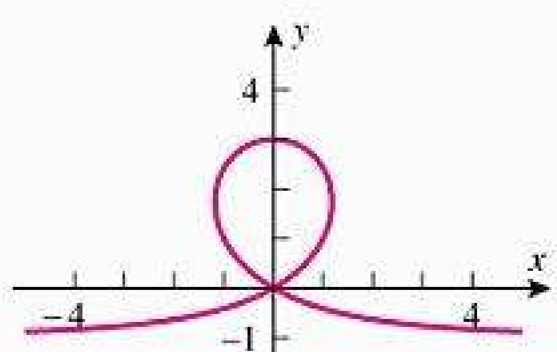


Figura Ex-30

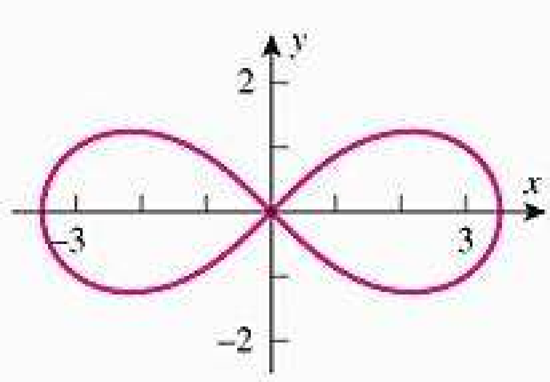


Figura Ex-31

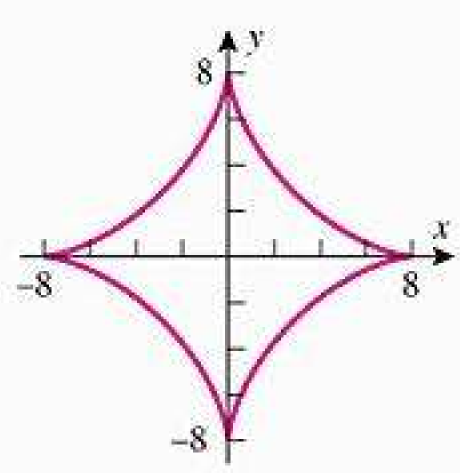


Figura Ex-32

33-36 Use diferenciação implícita para encontrar a derivada especificada.

33. $a^4 - t^4 = 6a^2t$; da/dt

34. $\sqrt{u} + \sqrt{v} = 5$; du/dv

35. $a^2\omega^2 + b^2\lambda^2 = 1$ (a, b constantes); $d\omega/d\lambda$

36. $y = \text{sen}\, x$; dx/dy

C **37.** (a) Use o recurso de traçar gráficos implícitos de um CAS para esboçar o gráfico da equação $y^4 + y^2 = x(x - 1)$.

(b) Use derivação implícita para ajudar a explicar por que o gráfico em (a) não tem retas tangentes horizontais.

(c) Resolva a equação $y^4 + y^2 = x(x - 1)$ para x em termos de y e explique por que o gráfico em (a) consiste em duas parábolas.

C **38.** As curvas com equações da forma $y^2 = x(x - a)(x - b)$, nas quais $a < b$ são chamadas de ***cúbicas bipartidas***.

(a) Use a capacidade de plotagem implícita de um CAS para fazer o gráfico da cúbica bipartida $y^2 = x(x - 1)(x - 2)$.

(b) Em quais pontos da curva em (a) passa uma reta tangente horizontal?

(c) Resolva a equação de (a) para y em termos de x, e use o resultado para explicar por que o gráfico consiste em duas partes separadas (i.e., bipartida).

(d) Faça o gráfico da equação de (a) sem usar a capacidade de plotagem implícita do CAS.

39-40 Estes exercícios tratam da elipse girada C de equação $x^2 - xy + y^2 = 4$.

C **39.** (a) Use o recurso de traçar gráficos implícitos de um CAS para esboçar o gráfico de C.

(b) Use o gráfico para estimar as coordenadas x de todos os pontos onde o gráfico tem uma reta tangente horizontal.

(c) Encontre os valores exatos das coordenadas x em (b).

C **40.** (a) Use o recurso de traçar gráficos implícitos de um CAS para esboçar o gráfico de C.

(b) Use o gráfico para estimar as coordenadas x de todos os pontos onde o gráfico tem uma reta tangente vertical.

(c) Encontre os valores exatos das coordenadas x em (b).

ENFOCANDO CONCEITOS

41-42 Estes exercícios tratam da elipse girada C de equação $x^2 - xy + y^2 = 4$.

41. Mostre que a reta $y = x$ intersecta C em dois pontos P e Q e que as retas tangentes a C em P e Q são paralelas.

42. Prove que, se $P(a, b)$ é um ponto em C, então também $Q(-a, -b)$ é um ponto em C e que as retas tangentes a C por P e Q são paralelas.

43. Encontre os valores de a e b para a curva de equação $x^2y + ay^2 = b$ para que o ponto $(1, 1)$ esteja no gráfico dessa curva e para que a reta tangente em $(1, 1)$ tenha a equação $4x + 3y = 7$.

44. Em que ponto(s) é a reta tangente à curva $y^3 = 2x^2$ perpendicular à reta $x + 2y - 2 = 0$?

C **45.** (a) Use o recurso de traçar gráficos implícitos de um CAS para esboçar o gráfico da curva C cuja equação é $x^3 - 2xy + y^3 = 0$.

(b) Use o gráfico de (a) para estimar a coordenada x de um ponto do primeiro quadrante que está em C e no qual a reta tangente a C é paralela ao eixo x.

(c) Encontre o valor exato da coordenada x em (b).

C **46.** (a) Use o recurso de traçar gráficos implícitos de um CAS para esboçar o gráfico da curva C cuja equação é $x^3 - 2xy + y^3 = 0$.

(b) Use o gráfico de (a) para dar um palpite sobre a coordenada x de um ponto do primeiro quadrante que está em C e no qual a reta tangente a C é paralela à reta $y = -x$.

(c) Use derivação implícita para verificar a conjectura em (b).

ENFOCANDO CONCEITOS

47. (a) Use Geometria Analítica para encontrar as equações de duas retas pela origem que são tangentes ao círculo de equação $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$.

(b) Use derivação implícita para encontrar as retas solicitadas em (a).

48. Encontre as equações de duas retas pela origem que são tangentes à elipse de equação $2x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0$.

49. Sejam a, b e c constantes, com $b \neq 0$, e seja r um número racional não-nulo. Use derivação implícita para mostrar que a reta tangente à curva $ax^r + by^r = c$ em (x_0, y_0) é dada por $ax_0^{r-1}x + by_0^{r-1}y = c$.

50. Prove que, para qualquer número racional não-nulo r, a reta tangente ao gráfico de $x^r + y^r = 2$ no ponto $(1, 1)$ tem inclinação -1.

51. Encontre dy/dx se

$$2y^3t + t^3y = 1 \quad \text{e} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}$$

52. (a) Mostre que $f(x) = x^{4/3}$ é diferenciável em 0, mas não é duas vezes diferenciável em 0.

(b) Mostre que $f(x) = x^{7/3}$ é duas vezes diferenciável em 0, mas não é três vezes diferenciável em 0.

(c) Encontre o expoente k tal que $f(x) = x^k$ é $n - 1$ vezes diferenciável em 0, mas não n vezes diferenciável em 0.

53-54 Encontre todos os valores racionais de r, tais que $y = x^r$ satisfaça a equação dada.

53. $3x^2y'' + 4xy' - 2y = 0$ **54.** $16x^2y'' + 24xy' + y = 0$

55-56 Dizemos que duas curvas são ***ortogonais*** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção, e dizemos que duas famílias de curvas são ***trajetórias ortogonais*** uma da outra se cada membro de uma família for ortogonal a cada membro da outra. Essa terminologia é usada nestes exercícios.

55. A Figura Ex-55 mostra alguns membros típicos das famílias dos círculos $x^2 + (y - c)^2 = c^2$ (curvas escuras) e $(x - k)^2 + y^2 = k^2$ (curvas cinzas). Mostre que essas curvas são trajetórias ortogonais uma da outra. [*Sugestão*: Para as retas tangentes serem perpendiculares em um ponto de intersecção, as inclinações dessas retas tangentes devem ser recíprocas negativas uma da outra.]

56. A Figura Ex-56 mostra alguns membros típicos das famílias de hipérboles $xy = c$ (curvas pretas) e $x^2 - y^2 = k$ (curvas cinzas), onde $c \neq 0$ e $k \neq 0$. Use a sugestão do Exercício 55 para mostrar que essas famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

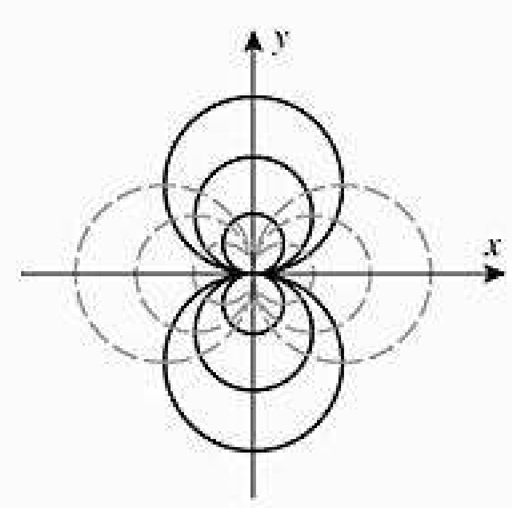


Figura Ex-55

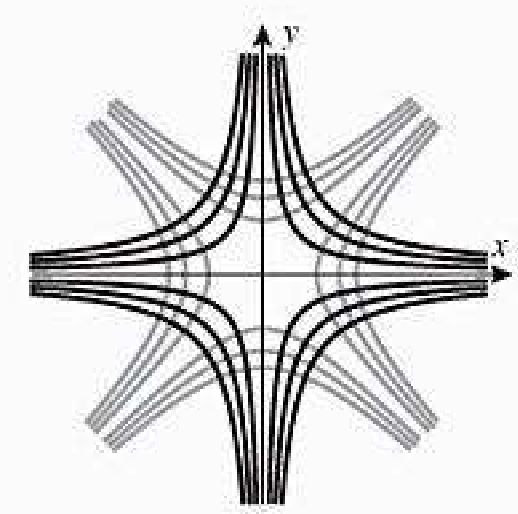


Figura Ex-56

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.1

1. (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{3}x^{-7/3}$ (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{3}(4x - 1)^{-2/3}$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12}{5}(\operatorname{tg} x)^{7/5}\sec^2 x$

2. (a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{3x}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{3}x^{-4/3} = -\dfrac{x^{-1/3}}{3x} = -\dfrac{y}{3x}$ **3.** (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x + 3y^2}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x \cos y}{\sec^2 y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$

4. $y = 2 - x$ **5.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 y \operatorname{tg} y$

4.2 DERIVADAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Nesta seção obteremos fórmulas das derivadas de funções logarítmicas e explicaremos por que, em Cálculo, a função logaritmo natural é preferida em detrimento dos logaritmos de outras bases.

■ DERIVADAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Estabeleceremos que $f(x) = \ln x$ é diferenciável para $x > 0$ aplicando a definição de derivada a $f(x)$. Para calcular o limite resultante, utilizaremos o fato de que $\ln x$ é contínua em $x > 0$

(Exemplo 2 da Seção 2.6) e também que o limite

$$\lim_{v \to 0} (1+v)^{1/v} = e \tag{1}$$

Esse limite pode ser obtido dos limites (7) e (8) da Seção 2.3 fazendo a substituição $v = 1/x$ e usando o fato de que $v \to 0^+$ quando $x \to +\infty$ e $v \to 0^-$ quando $x \to -\infty$. Isso produz dois limites laterais que, juntos, implicam (1) (ver Exercícios 71 e 72 da Seção 2.3).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\ln x] &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) && \text{A propriedade do quociente dos logaritmos no Teorema 1.6.2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\
&= \lim_{v \to 0} \frac{1}{vx} \ln(1+v) && \text{Seja } v = h/x \text{ e note que } v \to 0 \text{ quando } h \to 0 \\
&= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \ln(1+v) && x \text{ está fixo nessa conta, portanto } 1/x \text{ pode ser movido através do sinal do limite} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} \ln(1+v)^{1/v} && \text{A propriedade da potência dos logaritmos do Teorema 1.6.2} \\
&= \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{v \to 0} (1+v)^{1/v}\right] && \ln x \text{ é contínua em } (0, +\infty) \text{, portanto podemos mover o limite através do símbolo da função} \\
&= \frac{1}{x} \ln e \\
&= \frac{1}{x} && \text{Pois } \ln e = 1
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \tag{2}$$

Uma fórmula da derivada da função logaritmo geral $\log_b x$ pode ser obtida de (2) usando a Fórmula (8) da Seção 1.6 para escrever

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{\ln b}\right] = \frac{1}{\ln b}\frac{d}{dx}[\ln x]$$

Segue disso que

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x \ln b}, \quad x > 0 \tag{3}$$

Observe que, dentre todas as possíveis bases, a base $b = e$ é a que produz a fórmula mais simples para a derivada de $\log_b x$. Essa é uma das razões pelas quais o logaritmo natural é preferido aos outros em Cálculo.

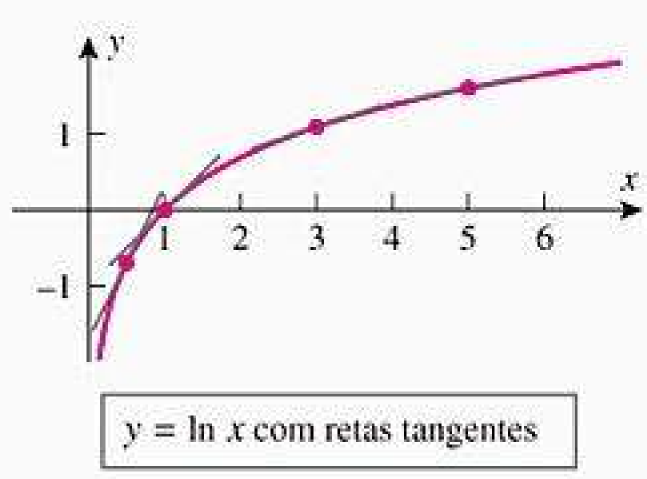


Figura 4.2.1

► Exemplo 1

(a) A Figura 4.2.1 mostra o gráfico de $y = \ln x$ e suas retas tangentes nos pontos $x = \frac{1}{2}$, 1, 3 e 5. Encontre as inclinações dessas retas tangentes.

(b) O gráfico de $y = \ln x$ tem alguma reta tangente horizontal? Use a derivada de $\ln x$ para justificar sua resposta.

Solução (a) A partir de (2), as inclinações das retas tangentes nos pontos $x = \frac{1}{2}$, 1, 3 e 5 são $1/x = 2, 1, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, respectivamente, o que está de acordo com a Figura 4. 2. 1.

Solução (b) A partir do gráfico de $y = \ln x$, não parece haver qualquer reta tangente horizontal. Isso é confirmado pelo fato de que $dy/dx = 1/x$ não é igual a zero para qualquer valor real de x. ◄

Se u for uma função diferenciável de x e se $u(x) > 0$, então a aplicação da regra da cadeia em (2) e (3) produz as seguintes fórmulas generalizadas da derivada:

$$\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[\log_b u] = \frac{1}{u \ln b} \cdot \frac{du}{dx} \tag{4-5}$$

► Exemplo 2 Encontre $\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)]$.

Solução A partir de (4) com $u = x^2 + 1$, obtemos

$$\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{d}{dx}[x^2 + 1] = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$ ◄

Quando possível, as propriedades dos logaritmos do Teorema 1.6.2 devem ser usadas para converter produtos, quocientes e expoentes em somas, diferenças e múltiplos de constantes, *antes* de diferenciar uma função envolvendo logaritmos.

► Exemplo 3

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{1+x}}\right)\right] &= \frac{d}{dx}\left[2\ln x + \ln(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2}\ln(1+x)\right] \\ &= \frac{2}{x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{2(1+x)} \\ &= \frac{2}{x} + \operatorname{cotg} x - \frac{1}{2+2x}\end{aligned}$$ ◄

A Figura 4.2.2 mostra o gráfico de $f(x) = \ln |x|$. Essa função é importante por "estender" o domínio da função logaritmo natural no sentido de os valores de $\ln |x|$ e $\ln x$ serem os mesmos para $x > 0$, mas $\ln |x|$ está definido para todos os valores não-nulos de x, enquanto $\ln x$ só está definido para valores positivos de x.

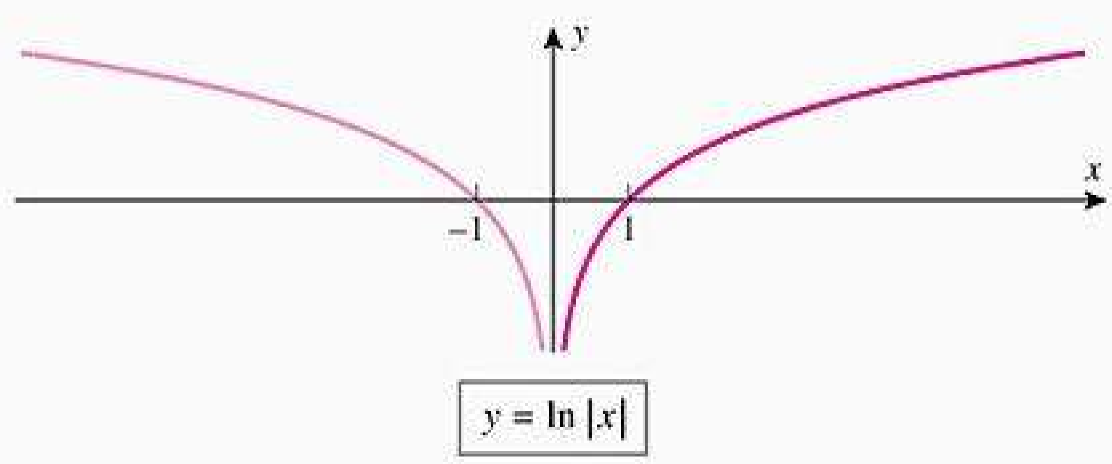


Figura 4.4.2

A derivada de $\ln |x|$ para $x \neq 0$ pode ser obtida considerando os casos $x > 0$ e $x < 0$ separadamente.

Caso $x > 0$ Nesse caso, $|x| = x$; logo

$$\frac{d}{dx}[\ln |x|] = \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

Caso $x < 0$ Nesse caso, $|x| = -x$; logo, a partir de (4), temos

$$\frac{d}{dx}[\ln |x|] = \frac{d}{dx}[\ln(-x)] = \frac{1}{(-x)} \cdot \frac{d}{dx}[-x] = \frac{1}{x}$$

Uma vez que resulta a mesma fórmula em ambos os casos, mostramos que

$$\frac{d}{dx}[\ln |x|] = \frac{1}{x} \quad \text{se } x \neq 0 \tag{6}$$

► Exemplo 4 A partir de (6) e da regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[\ln |\operatorname{sen} x|] = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x \quad ◄$$

■ DIFERENCIAÇÃO LOGARÍTMICA

Consideremos agora uma técnica chamada ***diferenciação*** (ou ***derivação***) ***logarítmica***, que é útil para derivar funções compostas de produtos, quocientes e potências.

► Exemplo 5 A derivada de

$$y = \frac{x^2 \sqrt[3]{7x - 14}}{(1 + x^2)^4} \tag{7}$$

é relativamente difícil de ser calculada diretamente. Contudo, se primeiro tomarmos o logaritmo natural de ambos os lados e, então, usarmos suas propriedades, podemos escrever:

$$\ln y = 2 \ln x + \tfrac{1}{3} \ln(7x - 14) - 4 \ln(1 + x^2)$$

Diferenciando ambos os lados em relação a x, resulta

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{7/3}{7x - 14} - \frac{8x}{1 + x^2}$$

Assim, resolvendo para dy/dx e usando (7), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sqrt[3]{7x - 14}}{(1 + x^2)^4}\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{3x - 6} - \frac{8x}{1 + x^2}\right] \quad ◄$$

Como $\ln y$ está definida somente para $y > 0$, os cálculos no Exemplo 5 são válidos somente para $x > 2$ (verifique). Contudo, como a derivada de $\ln y$ é igual à de $\ln |y|$, e como $\ln |y|$ está definida tanto para $y < 0$ como para $y > 0$, segue que a fórmula obtida para dy/dx é válida tanto para $x < 2$ como para $x > 2$. Em geral, sempre que obtivermos uma derivada dy/dx por derivação logarítmica, a fórmula da derivada que resultar será válida para todos valores de x para os quais $y \neq 0$. Nesses pontos também poderá ser válida, mas isso não pode ser garantido.

DERIVADAS DE POTÊNCIAS IRRACIONAIS DE x

Pela Fórmula (15) da Seção 4.1, sabemos que a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1} \tag{8}$$

é válida para valores racionais de r. Agora usaremos a diferenciação logarítmica para mostrar que essa fórmula é válida se r for *qualquer* número real (racional ou irracional). Em nossos cálculos, vamos supor que x^r é uma função diferenciável e que as leis conhecidas dos expoentes são válidas para os expoentes reais.

Seja $y = x^r$, onde r é um número real. A derivada dy/dx pode ser obtida por diferenciação logarítmica como segue:

$$\ln|y| = \ln|x^r| = r\ln|x|$$

$$\frac{d}{dx}[\ln|y|] = \frac{d}{dx}[r\ln|x|]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x}y = \frac{r}{x}x^r = rx^{r-1}$$

▶ Exemplo 6

$$\frac{d}{dx}[x^{\pi}] = \pi x^{\pi-1}, \quad \frac{d}{dx}[x^{\sqrt{2}}] = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}, \quad \frac{d}{dx}[x^{-e}] = -ex^{-e-1} \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.2 (*Ver página 248 para respostas.*)

1. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$ em $x = e^2$ é __________.

2. Encontre dy/dx.
   (a) $y = x^{\sqrt{3}}$ (b) $y = \ln 3x$
   (c) $y = \ln\sqrt{x}$ (d) $y = \log(1/|x|)$

3. Use derivação logarítmica para encontrar a derivada de
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

4. $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} =$ ________

EXERCÍCIOS 4.2

1-26 Encontre dy/dx.

1. $y = \ln 5x$
2. $y = \ln \frac{x}{3}$
3. $y = \ln|1+x|$
4. $y = \ln(2+\sqrt{x})$
5. $y = \ln|x^2-1|$
6. $y = \ln|x^3-7x^2-3|$
7. $y = \ln\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$
8. $y = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$
9. $y = \ln x^2$
10. $y = (\ln x)^3$
11. $y = \sqrt{\ln x}$
12. $y = \ln\sqrt{x}$
13. $y = x\ln x$
14. $y = x^3\ln x$
15. $y = x^2\log_2(3-2x)$
16. $y = x[\log_2(x^2-2x)]^3$
17. $y = \frac{x^2}{1+\log x}$
18. $y = \frac{\log x}{1+\log x}$
19. $y = \ln(\ln x)$
20. $y = \ln(\ln(\ln x))$
21. $y = \ln(\text{tg}\, x)$
22. $y = \ln(\cos x)$
23. $y = \cos(\ln x)$
24. $y = \text{sen}^2(\ln x)$
25. $y = \log(\text{sen}^2 x)$
26. $y = \log(1-\text{sen}^2 x)$

27-30 Use o método do Exemplo 3 para ajudar a efetuar a derivação indicada.

27. $\frac{d}{dx}[\ln((x-1)^3(x^2+1)^4)]$
28. $\frac{d}{dx}[\ln((\cos^2 x)\sqrt{1+x^4})]$

29. $\dfrac{d}{dx}\left[\ln \dfrac{\cos x}{\sqrt{4-3x^2}}\right]$

30. $\dfrac{d}{dx}\left[\ln \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right]$

31-34 Encontre dy/dx usando diferenciação logarítmica.

31. $y = x\sqrt[3]{1+x^2}$

32. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

33. $y = \dfrac{(x^2-8)^{1/3}\sqrt{x^3+1}}{x^6-7x+5}$

34. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x \operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{x}}$

35. Encontre $f'(x)$ se $f(x) = x^e$

36. Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = \dfrac{1}{x^{\sqrt{10}}}$

37. Encontre

(a) $\dfrac{d}{dx}[\log_x e]$ (b) $\dfrac{d}{dx}[\log_x 2]$

38. Encontre

(a) $\dfrac{d}{dx}[\log_{(1/x)} e]$ (b) $\dfrac{d}{dx}[\log_{(\ln x)} e]$

39-42 Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = x_0$.

39. $f(x) = \ln x$; $x_0 = e^{-1}$

40. $f(x) = \log x$; $x_0 = 10$

41. $f(x) = \ln(-x)$; $x_0 = -e$

42. $f(x) = \ln|x|$; $x_0 = -2$

ENFOCANDO CONCEITOS

43. Encontre a equação de uma reta pela origem que seja tangente ao gráfico de $y = \ln x$.

44. Explique por que o ponto do corte no eixo y da reta tangente à curva $y = \ln x$ deve ter uma unidade a menos do que a coordenada y do ponto de tangência.

45. Encontre uma fórmula para a área $A(w)$ do triângulo delimitado pela reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$ em $P(w, \ln w)$, a reta horizontal por P e o eixo y.

46. Encontre uma fórmula para a área $A(w)$ do triângulo delimitado pela reta tangente ao gráfico de $y = \ln x^2$ em $P(w, \ln w^2)$, a reta horizontal por P e o eixo y.

47. Verifique que $y = \ln(x+e)$ satisfaz $dy/dx = e^{-y}$, com $y = 1$ quando $x = 0$.

48. Verifique que $y = -\ln(e^2 - x)$ satisfaz $dy/dx = e^y$, com $y = -2$ quando $x = 0$.

49. Encontre uma função f tal que $y = f(x)$ satisfaz $dy/dx = e^{-y}$, com $y = 0$ quando $x = 0$.

50. Encontre uma função f tal que $y = f(x)$ satisfaz $dy/dx = e^y$, com $y = -\ln 2$ quando $x = 0$.

51-52 Encontre o limite dado interpretando a expressão como uma derivada apropriada.

51. (a) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(e^2+\Delta x)-2}{\Delta x}$ (b) $\displaystyle\lim_{w \to 1} \frac{\ln w}{w-1}$

52. (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{\sqrt{2}}-1}{h}$

53. Modifique a dedução da Equação (2) para obter outra prova da Equação (3).

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.2

1. $y = \dfrac{x}{e^2} + 1$ 2. (a) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x}$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x \ln 10}$

3. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}\left[\dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{3(x-1)}\right]$ 4. 1

4.3 DERIVADAS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Ver a Seção 1.5 para uma revisão de funções injetoras e inversas.

Nesta seção, estabeleceremos condições sob as quais a inversa de uma função injetora diferenciável também é diferenciável e mostraremos como a derivada de uma função injetora pode ser usada para obter a derivada de sua inversa. Isso nos permitirá obter fórmulas para as derivadas de funções exponenciais a partir das fórmulas das derivadas das funções logarítmicas e fórmulas para as derivadas de funções trigonométricas inversas a partir das fórmulas das derivadas de funções trigonométricas.

Nosso primeiro objetivo nesta seção é estabelecer condições sob as quais a inversa de uma função injetora diferenciável também será diferenciável. Geometricamente, uma função é diferenciável naqueles pontos em que seu gráfico tem uma reta tangente não-vertical e, como

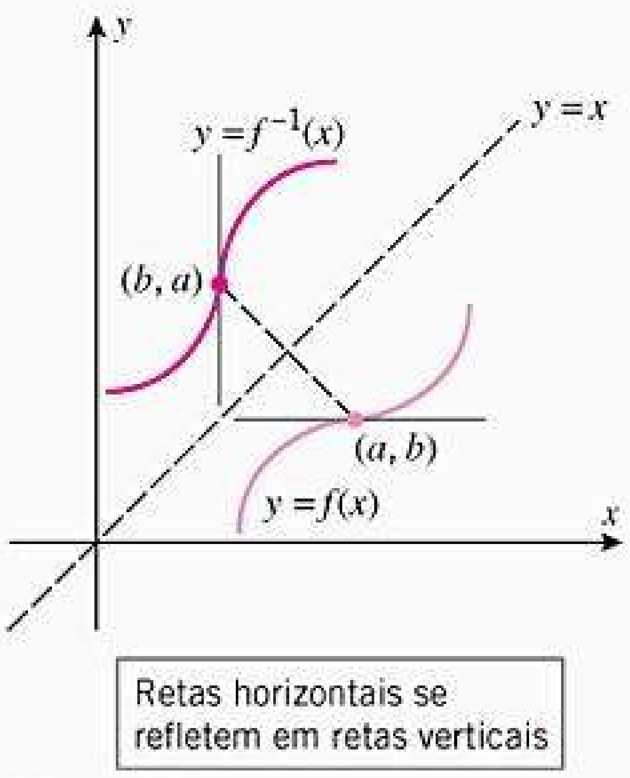


Figura 4.3.1

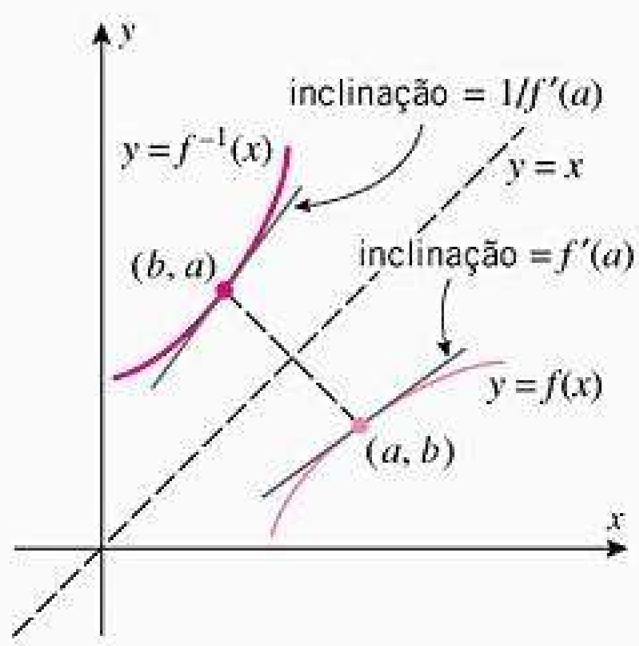


Figura 4.3.2

o gráfico de $y = f^{-1}(x)$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ pela reta $y = x$, decorre que os pontos em que f^{-1} não é diferenciável são reflexões dos pontos em que o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal (Figura 4.3.1). Enunciado algebricamente, f^{-1} deixa de ser diferenciável em um ponto (b, a) de seu gráfico se $f'(a) = 0$.

Supondo que f seja diferenciável no ponto (a, b) e que $f'(a) \neq 0$, tentemos encontrar uma relação entre a inclinação da reta tangente no ponto (a, b) do gráfico de f e a inclinação da reta tangente no ponto (b, a) do gráfico de f^{-1}. Sabemos que a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (a, b) é

$$y - b = f'(a)(x - a)$$

Uma equação da reflexão dessa reta pela reta $y = x$ pode ser obtida pela troca de x por y, portanto, segue que a reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto (b, a) é

$$x - b = f'(a)(y - a)$$

que pode ser reescrita como

$$y - a = \frac{1}{f'(a)}(x - b)$$

Essa equação diz que a inclinação $(f^{-1})'(b)$ da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto (b, a) é

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

(Figura 4.3.2). Resumindo, temos o resultado seguinte.

4.3.1 TEOREMA (*Diferenciabilidade da Função Inversa*) *Suponha que o domínio de uma função f seja um intervalo aberto I e que f seja diferenciável e injetora nesse intervalo. Então, f^{-1} é diferenciável em qualquer ponto da imagem de f no qual $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e sua derivada é*

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad (1)$$

A Fórmula (1) pode ser expressa de uma forma menos imponente introduzindo a variável dependente $y = f^{-1}(x)$ e reescrevendo essa equação como $x = f(y)$. Os dois lados de (1) podem então ser escritos como

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{dx/dy}$$

Assim, obtemos a seguinte versão alternativa da Fórmula (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \qquad (2)$$

► **Exemplo 1** Confirme a Fórmula (2) para a função $f(x) = x^3 + 1$.

Solução Mostramos na Seção 1.5 que, resolvendo $y = f(x) = x^3 + 1$ para x em termos de y, obtemos $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^3 + 1] = 3x^2 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}[\sqrt[3]{y-1}] = \frac{d}{dy}[(y-1)^{1/3}] = \frac{1}{3}(y-1)^{-2/3}$$

Substituindo, agora, $x = \sqrt[3]{y-1}$ na expressão de dy/dx, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = 3(\sqrt[3]{y-1})^2 = 3(y-1)^{2/3} = \frac{1}{dx/dy}$$

que confirma a validade de (2) nesse caso. ◀

■ FUNÇÕES CRESCENTES OU DECRESCENTES SÃO INJETORAS

No Exemplo 1, conseguimos encontrar uma fórmula explícita para f^{-1} resolvendo a equação $y = f(x)$ para x em termos de y. Contudo, a verdadeira importância das Fórmulas (1) e (2) aparece no caso em que sabemos que f é uma função diferenciável injetora mas não conseguimos resolver $y = f(x)$ para x em termos de y. Nesse caso, podemos usar a Fórmula (1) ou (2) para obter propriedades de f^{-1} sem termos uma fórmula explícita dessa inversa. Nosso objetivo é desenvolver um teorema que nos permita fazer isso.

Se o gráfico de uma função f é sempre crescente ou sempre decrescente no domínio de f, então uma reta horizontal cortará o gráfico de f em no máximo um ponto (Figura 4.3.3), de modo que f deve ter uma função inversa. Uma maneira de verificar se o gráfico de uma função é crescente ou decrescente em um intervalo é examinando sua inclinação. Provaremos no próximo capítulo que f é crescente em qualquer intervalo no qual $f'(x) > 0$ (pois o gráfico tem inclinação positiva) e que f é decrescente em qualquer intervalo no qual $f'(x) < 0$ (pois o gráfico tem inclinação negativa). Essas observações intuitivas, junto com o Teorema 4.3.1, sugerem o teorema seguinte, que enunciamos sem prova formal.

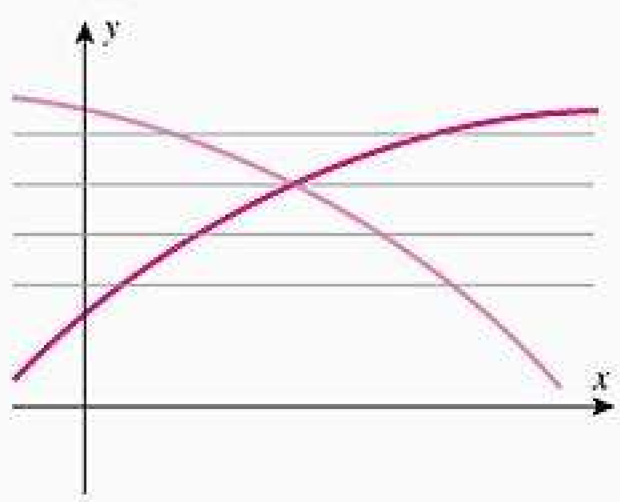


Figura 4.3.3 O gráfico de uma função crescente ou decrescente é cortado no máximo uma vez por qualquer reta horizontal.

4.3.2 TEOREMA *Suponha que o domínio de uma função f seja um intervalo aberto I no qual $f'(x) > 0$ ou no qual $f'(x) < 0$. Então f é injetora, $f^{-1}(x)$ é diferenciável em cada valor x da imagem de f e a derivada de $f^{-1}(x)$ é dada pela Fórmula* (1).

▶ Exemplo 2 Considere a função $f(x) = x^5 + x + 1$.

(a) Mostre que f é injetora no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

(b) Mostre que f^{-1} é diferenciável no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

(c) Encontre uma fórmula para f^{-1} usando a Fórmula (2).

(d) Encontre uma fórmula para f^{-1} usando derivação implícita.

Em geral, uma vez estabelecido que f^{-1} é diferenciável, temos a opção de calcular a derivada de f^{-1} ou pelo uso das Fórmulas (1) ou (2) ou, então, por derivação implícita, como no Exemplo 2.

Solução (a) Como

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$$

para todos os valores reais de x, segue pelo Teorema 4.3.2 que f é injetora no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Solução (b) Como f é um polinômio de grau ímpar, sua imagem é $(-\infty, +\infty)$. (Por quê?) Assim, segue pelo Teorema 4.3.2 que f^{-1} é diferenciável no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Solução (c) Tomando $y = f^{-1}(x)$, obtemos

$$x = f(y) = y^5 + y + 1 \tag{3}$$

do que segue que $dx/dy = 5y^4 + 1$. Então, pela Fórmula (2),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{5y^4 + 1} \tag{4}$$

Como não sabemos resolver (3) para y em termos de x, precisamos deixar (4) em termos de y.

Solução (d) Diferenciando-se (3) implicitamente em relação a x, resulta

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}[y^5 + y + 1]$$

$$1 = (5y^4 + 1)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5y^4 + 1}$$

que está de acordo com (4). ◀

DERIVADAS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Nosso próximo objetivo é mostrar que a função exponencial geral b^x ($b > 0$, $b \neq 1$) é diferenciável em toda parte e encontrar sua derivada. Para isso, usaremos o fato de que b^x é a inversa da função $f(x) = \log_b x$. Vamos supor que $b > 1$ e deixar o caso em que $0 < b < 1$ como um exercício [Exercício 6(d)]. Com essa hipótese, temos $\ln b > 0$ e, portanto,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x \ln b} > 0 \quad \text{para todo } x \text{ no intervalo } (0, +\infty)$$

Segue do Teorema 4.3.2 que $f^{-1}(x) = b^x$ é diferenciável em cada x da imagem de $f(x) = \log_b x$. Mas, pela Tabela 1.6.3, sabemos que a imagem de $\log_b x$ é $(-\infty, +\infty)$; portanto, estabelecemos que b^x é diferenciável em toda parte.

Para obter uma fórmula para a derivada de b^x, reescrevemos $y = b^x$ como

$$x = \log_b y$$

e diferenciamos implicitamente usando a Fórmula (5) da Seção 4.2 para obter

$$1 = \frac{1}{y \ln b} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Resolvendo para dy/dx e substituindo y por b^x, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = y \ln b = b^x \ln b$$

Assim, foi mostrado que

$$\frac{d}{dx}[b^x] = b^x \ln b \tag{5}$$

No caso especial em que $b = e$, temos $\ln e = 1$; assim, (5) torna-se

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \tag{6}$$

Na Seção 1.6 afirmamos que $b = e$ é a única base para a qual a inclinação da reta tangente à curva $y = b^x$ em qualquer ponto P da curva é a coordenada y de P (ver página 68). Verifique essa afirmação.

Além disso, se u for uma função diferenciável de x, então tem-se a partir de (5) e (6) que

$$\frac{d}{dx}[b^u] = b^u \ln b \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot \frac{du}{dx} \tag{7-8}$$

É importante distinguir entre a derivada de uma função exponencial b^x (expoente variável e base constante) e uma função potência x^b (base variável e expoente constante). Por exemplo, compare a derivada

$$\frac{d}{dx}[x^2] = 2x$$

com a derivada de 2^x no Exemplo 3.

▶ Exemplo 3 Os cálculos a seguir usam as Fórmulas (7) e (8).

$$\frac{d}{dx}[2^x] = 2^x \ln 2$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-2x}] = e^{-2x} \cdot \frac{d}{dx}[-2x] = -2e^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{x^3}] = e^{x^3} \cdot \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2 e^{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{\cos x}] = e^{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}[\cos x] = -(\operatorname{sen} x)e^{\cos x} \quad ◀$$

Funções da forma $f(x) = u^v$, em que u e v são funções *não constantes* de x, não são nem funções exponenciais nem funções potências. Funções dessa forma podem ser derivadas com derivação logarítmica.

▶ Exemplo 4 Use derivação logarítmica para encontrar $\frac{d}{dx}[(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}]$.

Solução Tomando $y = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$, obtemos

$$\ln y = \ln[(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}] = (\operatorname{sen} x)\ln(x^2+1)$$

Derivando ambos os lados em relação a x, obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(\operatorname{sen} x)\ln(x^2+1)]$$

$$= (\operatorname{sen} x)\frac{1}{x^2+1}(2x) + (\cos x)\ln(x^2+1)$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2+1} + (\cos x)\ln(x^2+1)\right]$$

$$= (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}\left[\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2+1} + (\cos x)\ln(x^2+1)\right] \quad ◀$$

■ DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Para investigar a diferenciabilidade das funções trigonométricas inversas e para obter as fórmulas de suas derivadas, utilizaremos algumas das identidades dadas nas Fórmulas (10) a (16) na Seção 1.5. Em vez de memorizar essas identidades, recomendamos uma revisão da "técnica do triângulo" que foi usada em sua obtenção.

Comecemos investigando a diferenciabilidade da função arc sen x. Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$ $(-\pi/2 \le x \le \pi/2)$, segue do Teorema 4.3.1 que $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$ será diferenciável em cada ponto x em que $\cos(\text{arc sen } x) \neq 0$. Isso é equivalente à condição

$$\text{arc sen } x \neq -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \text{arc sen } x \neq \frac{\pi}{2}$$

de modo que arc sen x é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$.

Observe que $\text{arc sen}\, x$ só é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$, mesmo que seu domínio seja $[-1, 1]$. Isso ocorre porque o gráfico de $y = \text{sen}\, x$ tem retas tangentes horizontais nos pontos $(\pi/2, 1)$ e $(-\pi/2, -1)$, de modo que o gráfico de $\text{arc sen}\, x$ tem retas tangentes verticais em $x = \pm 1$.

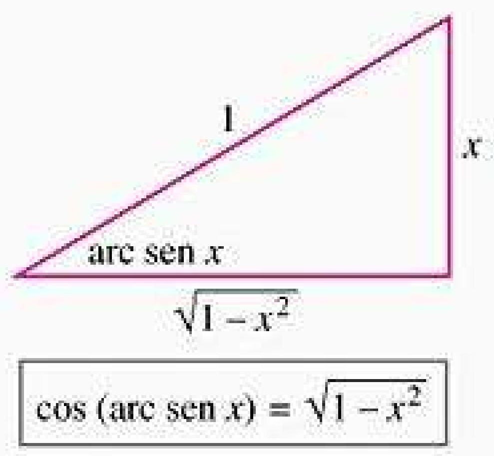


Figura 4.3.4

Uma derivada para arc sen x em $(-1, 1)$ pode ser obtida usando a Fórmula (1) ou (2) ou, então, derivando implicitamente a equação $y = \text{arc sen}\, x$. Utilizaremos esse método. Reescrevendo a equação $y = \text{arc sen}\, x$ como $x = \text{sen}\, y$ e derivando implicitamente em relação a x, obtemos

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}[\text{sen}\, y]$$

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\text{arc sen}\, x)}$$

Até este ponto, fomos bem-sucedidos em obter a derivada; porém, essa fórmula de derivada pode ser simplificada aplicando-se a identidade indicada na Figura 4.3.4, resultando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Assim, mostramos que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

Mais geralmente, se u for uma função diferenciável de x, então a regra da cadeia produz a seguinte versão generalizada dessa fórmula:

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad (-1 < u < 1)$$

O método usado para obter essa fórmula pode também ser usado para obter fórmulas generalizadas de derivadas das demais funções trigonométricas inversas. A seguir, apresentamos a lista completa dessas fórmulas, cada uma das quais válida no domínio natural da função que multiplica du/dx.

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cos}\, u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad (9\text{-}10)$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc tg}\, u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cotg}\, u] = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad (11\text{-}12)$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec}\, u] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cossec}\, u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad (13\text{-}14)$$

► **Exemplo 5** Encontre dy/dx se

(a) $y = \text{arc sen}(x^3)$ (b) $y = \text{arc sec}(e^x)$

Solução (a) A partir de (9),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}(3x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

Solução (b) A partir de (13),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x\sqrt{(e^x)^2-1}}(e^x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.3 (*Ver página 256 para respostas.*)

1. Suponha que uma função injetora f tenha uma reta tangente $y = 5x + 3$ no ponto $(1, 8)$. Calcule $(f^{-1})'(8)$.

2. Em cada caso, usando a dada derivada, determine se a função f é invertível.
   (a) $f'(x) = x^2 + 1$
   (b) $f'(x) = x^2 - 1$
   (c) $f'(x) = \operatorname{sen} x$
   (d) $f'(x) = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x$

3. Calcule a derivada
   (a) $\dfrac{d}{dx}[e^x]$
   (b) $\dfrac{d}{dx}[7^x]$
   (c) $\dfrac{d}{dx}[\cos(e^x + 1)]$
   (d) $\dfrac{d}{dx}[e^{3x-2}]$

4. Seja $f(x) = e^{x^3+x}$. Use $f'(x)$ para verificar se f é injetora.

EXERCÍCIOS 4.3 Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
   (a) Mostre que f é injetora e confirme que $f(1) = 3$.
   (b) Encontre $(f^{-1})'(3)$.

2. Seja $f(x) = x^3 + 2e^x$.
   (a) Mostre que f é injetora e confirme que $f(0) = 2$.
   (b) Encontre $(f^{-1})'(2)$.

3-4 Encontre $(f^{-1})'(x)$ usando a Fórmula (1) e confira sua resposta derivando diretamente f^{-1}.

3. $f(x) = 2/(x + 3)$
4. $f(x) = \ln(2x + 1)$

5-6 Determine se a função f é injetora examinando o sinal de $f'(x)$.

5. (a) $f(x) = x^2 + 8x + 1$
   (b) $f(x) = 2x^5 + x^3 + 3x + 2$
   (c) $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$
   (d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8$
   (b) $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 1$
   (c) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
   (d) $f(x) = \log_b x, \quad 0 < b < 1$

7-10 Encontre a derivada de f^{-1} usando a Fórmula (2) e confira seu resultado com derivação implícita.

7. $f(x) = 5x^3 + x - 7$
8. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$
9. $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1$
10. $f(x) = 5x - \operatorname{sen} 2x, \quad -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$

11-22 Encontre dy/dx.

11. $y = e^{7x}$
12. $y = e^{-5x^2}$
13. $y = x^3 e^x$
14. $y = e^{1/x}$
15. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
16. $y = \operatorname{sen}(e^x)$
17. $y = e^{x \operatorname{tg} x}$
18. $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$
19. $y = e^{(x - e^{3x})}$
20. $y = \exp(\sqrt{1 + 5x^3})$
21. $y = \ln(1 - xe^{-x})$
22. $y = \ln(\cos e^x)$

23-26 Encontre $f'(x)$ pela Fórmula (7) e, então, por diferenciação logarítmica.

23. $f(x) = 2^x$
24. $f(x) = 3^{-x}$
25. $f(x) = \pi^{\operatorname{sen} x}$
26. $f(x) = \pi^{x \operatorname{tg} x}$

27-30 Encontre dy/dx usando o método da diferenciação logarítmica.

27. $y = (x^3 - 2x)^{\ln x}$
28. $y = x^{\operatorname{sen} x}$
29. $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$
30. $y = (x^2 + 3)^{\ln x}$

31. Encontre $f'(x)$ se $f(x) = x^e$.

32. (a) Explique por que a Fórmula (5) não pode ser usada para encontrar $(d/dx)[x^x]$.
    (b) Encontre essa derivada por diferenciação logarítmica.

33-48 Encontre dy/dx.

33. $y = \operatorname{arc\,sen}(3x)$
34. $y = \operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$
35. $y = \operatorname{arc\,sen}(1/x)$
36. $y = \operatorname{arc\,cos}(\cos x)$
37. $y = \operatorname{arc\,tg}(x^3)$
38. $y = \operatorname{arc\,sec}(x^5)$
39. $y = (\operatorname{tg} x)^{-1}$
40. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}$
41. $y = e^x \operatorname{arc\,sec} x$
42. $y = \ln(\operatorname{arc\,cos} x)$
43. $y = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x$
44. $y = x^2(\operatorname{arc\,sen} x)^3$
45. $y = \operatorname{arc\,sec} x + \operatorname{arc\,cossec} x$
46. $y = \operatorname{arc\,cossec}(e^x)$
47. $y = \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{x})$
48. $y = \sqrt{\operatorname{arc\,cotg} x}$

49. (a) Use o Teorema 4.3.1 para provar que

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,cotg} x]\bigg|_{x=0} = -1$$

(b) Use a parte (a) anterior, a parte (a) do Exercício 50 na Seção 1.5 e a regra da cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc cotg } x] = -\frac{1}{1+x^2}$$

para $-\infty < x < +\infty$.

(c) Conclua da parte (b) que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc cotg } u] = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

para $-\infty < u < +\infty$.

50. (a) Use a parte (c) do Exercício 50 na Seção 1.5 e a regra da cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc cossec } x] = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

para $1 < |x|$.

(b) Conclua da parte (a) que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc cossec } u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

para $1 < |u|$.

51-52 Encontre dy/dx por diferenciação logarítmica.

51. $x^3 + x \text{ arc tg } y = e^y$

52. $\text{arc sen}\,(xy) = \text{arc cos}\,(x - y)$

ENFOCANDO CONCEITOS

53. (a) Mostre que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ não é injetora em $(-\infty, +\infty)$.

(b) Encontre o maior valor de k, tal que f é injetora no intervalo $(-k, k)$.

54. (a) Mostre que $f(x) = x^4 - 2x^3$ não é injetora em $(-\infty, +\infty)$.

(b) Encontre o menor valor de k, tal que f é injetora no intervalo $[k, +\infty)$.

55. Seja $f(x) = x^4 + x^3 + 1$, $0 \le x \le 2$.

(a) Mostre que f é injetora.

(b) Seja $g(x) = f^{-1}(x)$ e defina $F(x) = f(2g(x))$. Encontre uma equação para a reta tangente a $y = F(x)$ em $x = 3$.

56. Seja $f(x) = \dfrac{\exp(4-x^2)}{x}$, $x > 0$.

(a) Mostre que f é injetora.

(b) Seja $g(x) = f^{-1}(x)$ e defina $F(x) = f([g(x)]^2)$. Encontre $F'\left(\frac{1}{2}\right)$.

57. Sejam $f(x) = e^{kx}$ e $g(x) = e^{-kx}$. Encontre

(a) $f^{(n)}(x)$ (b) $g^{(n)}(x)$

58. Encontre dy/dt se $y = e^{-\lambda t}(A \text{ sen } \omega t + B \cos \omega t)$, onde A, B, λ e ω são constantes.

59. Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

onde μ e σ são constantes e $\sigma \neq 0$.

60. Mostre que, para quaisquer constantes A e k, as funções $y = Ae^{kt}$ satisfazem a equação $dy/dt = ky$.

61. Mostre que, para quaisquer constantes A e B, a função

$$y = Ae^{2x} + Be^{-4x}$$

satisfaz a equação

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

62. Mostre que

(a) $y = xe^{-x}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x)y$.

(b) $y = xe^{-x^2/2}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x^2)y$.

63. Mostre que a taxa de variação de $y = 100e^{-0,2x}$ em relação a x é proporcional a y.

64. Mostre que a taxa de variação de $y = 3^{(5x+1)}4^{(-x/2)}$ em relação a x é proporcional a y.

65. Mostre que

$$y = \frac{60}{5+7e^{-t}} \quad \text{satisfaz} \quad \frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$

para certas constantes r e K, e determine o valor dessas constantes.

66. Suponha que a população de bactérias aeróbicas em um pequeno lago seja modelada pela equação

$$P(t) = \frac{60}{5+7e^{-t}}$$

onde $P(t)$ é a população (em bilhões) t dias depois da observação inicial no tempo $t = 0$.

(a) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da função $P(t)$.

(b) Descreva o que acontece com a população no decorrer do tempo. Verifique sua conclusão encontrando $\lim_{t\to+\infty} P(t)$.

(c) Descreva o que acontece com a *taxa* de crescimento populacional no decorrer do tempo. Verifique sua conclusão fazendo o gráfico de $P'(t)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

67-72 Encontre o limite dado interpretando a expressão como uma derivada apropriada.

67. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{10^h - 1}{h}$

68. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\text{arc tg }(1+h) - \pi/4}{h}$

69. $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{9\left[\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \Delta x\right)\right]^2 - \pi^2}{\Delta x}$

70. $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^{(2+\Delta x)} - 4}{\Delta x}$

71. $\displaystyle\lim_{w\to 2}\frac{3 \text{ arc sec } w - \pi}{w - 2}$

72. $\displaystyle\lim_{w\to 1}\frac{4(\text{arc tg } w)^w - \pi}{w - 1}$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.3

1. $\frac{1}{5}$ **2.** (a) sim (b) não (c) não (d) sim **3.** (a) e^x (b) $7^x \ln 7$ (c) $-e^x \operatorname{sen}(e^x+1)$ (d) $3e^{3x-2}$

4. $f'(x) = e^{x^3+x} \cdot (3x^2+1) > 0$ para todo x.

4.4 REGRA DE L'HÔPITAL; FORMAS INDETERMINADAS

Nesta seção discutiremos um método geral de usar derivadas para obter limites. Esse método irá nos capacitar a estabelecer, com certeza, limites que até aqui fomos capazes apenas de conjecturar, usando evidências numéricas ou gráficas. O método que discutiremos nesta seção é uma ferramenta muito poderosa, usada internamente por diversos programas de computador para calcular vários tipos de limites.

■ FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO 0/0

Lembre que um limite no formato

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$ é denominado ***forma indeterminada do tipo* 0/0**. Alguns exemplos vistos anteriormente são:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

O primeiro limite foi calculado algebricamente, fatorando o numerador e cancelando o fator comum de $x-1$, e os dois outros limites foram obtidos usando métodos geométricos. Contudo, há muitas formas indeterminadas nas quais nem os métodos algébricos nem os geométricos produzem o limite, de modo que precisamos desenvolver um método mais geral.

Para motivar um tal método, suponha que (1) seja uma forma indeterminada do tipo 0/0 em que f' e g' são contínuas em $x = a$ e $g'(a) \neq 0$. Como f e g podem ser muito bem aproximadas por suas aproximações lineares locais perto de a, é razoável esperar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(a)+f'(a)(x-a)}{g(a)+g'(a)(x-a)} \tag{2}$$

Como estamos supondo que f' e g' são contínuas em $x = a$, temos

$$\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g'(x) = g'(a)$$

e como a diferenciabilidade de f e g em $x = a$ implica a continuidade de f e g em $x = a$, resulta

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g(a) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Assim, podemos reescrever (2) como

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3}$$

Esse resultado, conhecido como ***regra de L'Hôpital***, converte a forma indeterminada dada em um limite envolvendo derivadas, que muitas vezes é mais fácil de calcular.

Embora tenhamos motivado (3) supondo que f e g tenham derivadas contínuas em $x = a$ e que $g'(a) \neq 0$, o resultado é verdadeiro sob condições mais brandas, bem como para limites laterais e limites em $+\infty$ e $-\infty$. Omitiremos a prova do enunciado preciso da regra de L'Hôpital seguinte.

4.4.1 TEOREMA ***(Regra de L'Hôpital para a Indeterminação 0/0)*** *Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis em um intervalo aberto que contenha x = a, exceto, possivelmente, em x = a, e que*

$$\underset{x\to a}{\text{im}}\, f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \underset{x\to a}{\text{im}}\, g(x) = 0$$

Se existe $\underset{x\to a}{\text{im}}\,[f'(x)/g'(x)]$, *ou se esse limite é* $+\infty$ *ou* $-\infty$, *então*

$$\underset{x\to a}{\text{im}}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{\text{im}}\, \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Além disso, essa afirmação também vale no caso de um limite quando $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$, *ou* $x \to +\infty$

ADVERTÊNCIA

Note que na regra de L'Hôpital o numerador e o denominador são diferenciados separadamente, o que não é o mesmo que diferenciar $f\ x\ /g\ x$

ró im e em , a icarem a regra e ' ô ita u an eguinte r ce e trê a :

Aplicando a Regra de L' Hôpital

Passo 1 erifi ue ue im $f\ x\ /g\ x$ é uma rma in etermina a ti 0/0

Passo 2 Di erencie e ara amente f e g

Passo 3 Enc ntre imite e $f'\ x\ /g'\ x$ Se e e imite r finit , $+\infty$ u $-\infty$, entã e e é igua a imite e $f\ x\ /g\ x$

► Exemplo 1 Enc ntre imite u an a regra e ' ô ita e c nfira re u ta r at raçã

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Solução numera r e en mina r têm um imite zer rtant , imite é uma rma in etermina a ti 0/0 ican a regra e ' ô ita , btem

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\dfrac{d}{dx}[x^2-4]}{\dfrac{d}{dx}[x-2]} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{1} = 4$$

O limite no Exemplo 1 pode ser interpretado como o limite de uma certa derivada. Use essa derivada para calcular o limite.

c n ere c m cá cu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4 \ ◄$$



Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704) atemátic rancê ' ô ita na ceu e ai a a ta n breza rance a e tinha títu e ar uê e Sainte e me mte ' utrement em ce m tr u ta ent matemátic e, a 15 an , re eu um i íci r b ema c ca r Pa ca bre cic ói e uan em, er iu bre emente c m ficia a ca a aria, ma e i tiu r er mí e anh u ama em eu tem c m aut r rimeir i r ub ica bre á cu Di erencia , *L'Analyse des Infinimente Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* 1 regra e ' ô ita a areceu e a rimeira ez ne e i r a er a e, tant a regra e ' ô ita c m a mai r arte materia i r bre á cu eram e aut ria e hn ern u i, ue i r e r e ' ô ita ' ô ita e i tiu e eu an e um i r bre cá cu integra uan eibniz in rm u he ue também iria e cre er bre a un t ' ô ita era a arentemente gener e bem a e a , e eu mú ti c ntat c m im rtante matemátic rnece ram um eícu ara i eminaçã a gran e e c berta á cu r t a a Eur a

► Exemplo 2 Em cada parte, confirme que o limite é uma forma indeterminada do tipo 0/0, e calcule-o usando a regra de L'Hôpital

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to \pi/2}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}$$

$$\text{(d)} \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{tg} x}{x^2} \qquad \text{(e)} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \text{(f)} \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{-4/3}}{\operatorname{sen}(1/x)}$$

Solução (a) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L' Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen} 2x]}{\dfrac{d}{dx}[x]} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1} = 2$$

Observe que esse resultado concorda com o obtido por substituição no Exemplo 4(b) da Seção 2.6.

Solução (b) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L' Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to \pi/2}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to \pi/2}\frac{\dfrac{d}{dx}[1-\operatorname{sen} x]}{\dfrac{d}{dx}[\cos x]} = \lim_{x\to \pi/2}\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \frac{0}{-1} = 0$$

ADVERTÊNCIA

Podemos obter resultados incorretos se aplicarmos a regra de L'Hôpital a limites que não são formas indeterminadas. Por exemplo, a conta

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+6}{x+2} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}[x+6]}{\dfrac{d}{dx}[x+2]} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1} = 1$$

não é válida, pois o limite não é uma forma indeterminada. O resultado correto é

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+6}{x+2} = \frac{0+6}{0+2} = 3$$

Solução (c) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L' Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}[e^x-1]}{\dfrac{d}{dx}[x^3]} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2} = +\infty$$

Solução (d) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L' Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sec^2 x}{2x} = -\infty$$

Solução (e) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L' Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}$$

Já que o novo limite é outra forma indeterminada do tipo 0/0, aplicamos novamente a regra de L' Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Solução (f) O numerador e o denominador têm limite zero, de modo que o limite é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L' Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{-4/3}}{\operatorname{sen}(1/x)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-\frac{4}{3}x^{-7/3}}{(-1/x^2)\cos(1/x)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{4}{3}x^{-1/3}}{\cos(1/x)} = \frac{0}{1} = 0 \blacktriangleleft$$

FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO ∞/∞

Quando queremos indicar que o limite (ou limite lateral) de uma função é $+\infty$ ou $-\infty$, sem sermos específicos sobre o sinal, diremos que o limite é ∞. Por exemplo:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \text{significa} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty \quad \text{significa} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{significa} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

O limite da razão $f(x)/g(x)$, no qual o numerador tem limite ∞ e o denominador tem limite ∞, é chamado de ***forma indeterminada do tipo*** ∞/∞. A versão seguinte da regra de L'Hôpital, que enunciamos sem prova, pode freqüentemente ser usada para calcular limites desse tipo.

4.4.2 TEOREMA ***(Regra de L'Hôpital para a Indeterminação ∞/∞)*** *Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis em um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivelmente, em $x = a$, e que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

Se existe $\lim_{x\to a} [f'(x)/g'(x)]$, ou se esse limite é $+\infty$ ou $-\infty$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Além disso, essa afirmação também vale no caso de um limite quando $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.

► Exemplo 3 Em cada parte, confirme que o limite é uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ e aplique a regra de L'Hôpital.

$$\text{(a)} \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cossec} x}$$

Solução (a) O numerador e o denominador têm limite $+\infty$; logo, temos uma forma indeterminada do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Solução (b) O numerador tem limite $-\infty$ e o denominador tem limite $+\infty$; logo, temos uma forma indeterminada do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cossec} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x} \tag{4}$$

Esse último limite é outra vez uma forma indeterminada do tipo ∞/∞. Além disso, qualquer aplicação adicional da regra de L'Hôpital resultará em potências de $1/x$ no numerador e expressões envolvendo cossec x e cotg x no denominador; assim, aplicações repetidas da regra simplesmente produzem novas formas indeterminadas. Portanto, devemos tentar outra coisa. O último limite em (4) pode ser reescrito como

$$\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{\operatorname{sen} x}{x} \operatorname{tg} x\right) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x = -(1)(0) = 0$$

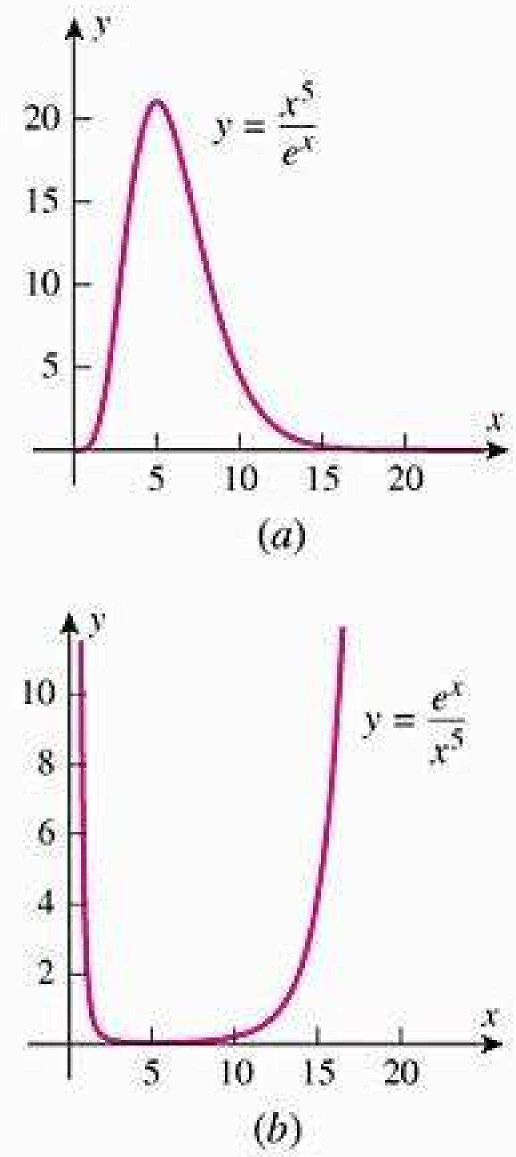


Figura 4.4.1

Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cossec} x} = 0 \blacktriangleleft$$

■ ANALISANDO O CRESCIMENTO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS USANDO A REGRA DE L'HÔPITAL

Se n for qualquer inteiro positivo, então $x^n \to +\infty$ quando $x \to +\infty$. Tais potências inteiras de x são, às vezes, usadas como "padrão de medida" para descrever o quão rapidamente outras funções crescem. Por exemplo, sabemos que $e^x \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e que o crescimento de e^x é muito rápido (Tabela 1.6.5); entretanto, o crescimento de x^n é também rápido quando n for grande; logo, é razoável perguntar se altas potências de x crescem mais ou menos rapidamente do que e^x. Uma maneira de investigar isso é verificar o comportamento da razão x^n/e^x quando $x \to +\infty$. Por exemplo, a Figura 4.4.1a mostra o gráfico de $y = x^5/e^x$. Esse gráfico sugere que $x^5/e^x \to 0$ quando $x \to +\infty$, e isso implica que o crescimento da função e^x é suficientemente rápido para que os seus valores alcancem aqueles de x^5 e forcem a razão em direção a zero. Enunciado informalmente, "e^x cresce mais rapidamente do que x^5". A mesma conclusão poderia ter sido alcançada colocando e^x em cima e examinando o comportamento de e^x/x^5 quando $x \to +\infty$ (Figura 4.4.1b). Nesse caso, os valores de e^x alcançam os de x^5 e forçam a razão em direção a $+\infty$. Mais geralmente, podemos usar a regra de L'Hôpital para mostrar que e^x *cresce mais rapidamente do que qualquer potência inteira positiva de x*, isto é:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad (5\text{-}6)$$

Ambos limites são formas indeterminadas do tipo ∞/∞ que podem ser calculadas usando a regra de L'Hôpital. Por exemplo, para estabelecer (5), necessitaremos aplicar a regra de L'Hôpital n vezes. Para isso, observe que as diferenciações sucessivas de x^n reduzem o expoente em 1 a cada vez, produzindo, assim, uma constante na enésima derivada. Por exemplo, as sucessivas derivadas de x^3 são $3x^2$, $6x$ e 6. Em geral, a enésima derivada de x^n é a constante $n(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$ (verifique).* Assim, aplicando a regra de L'Hôpital n vezes a (5), obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

O limite (6) pode ser provado analogamente.

■ FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO $0 \cdot \infty$

Até agora discutimos formas indeterminadas do tipo 0/0 e ∞/∞. Contudo, essas não são as únicas possibilidades; em geral, o limite de uma expressão que tem uma das formas

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x) \cdot g(x), \quad f(x)^{g(x)}, \quad f(x) - g(x), \quad f(x) + g(x)$$

é chamado de *forma indeterminada* se os limites de $f(x)$ e $g(x)$ individualmente exercem influências conflitantes no limite de toda a expressão. Por exemplo, o limite

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

é uma ***forma indeterminada do tipo 0 · ∞***, pois o limite do primeiro fator é 0 e o do segundo é $-\infty$, sendo que ambos exercem influências conflitantes sobre o produto. Por outro lado, o limite

$$\lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x}(1 - x^2)]$$

não é uma forma indeterminada, pois o primeiro fator tem o limite $+\infty$ e o segundo, $-\infty$, sendo que essas influências trabalham juntas para produzir um limite $-\infty$ para o produto.

* Lembre-se de que, para $n \geq 1$, a expressão $n!$ é lida como ***fatorial de n*** e denota o produto dos primeiros n inteiros positivos.

As formas indeterminadas do tipo $0 \cdot \infty$ podem, às vezes, ser calculadas reescrevendo o produto como uma razão e aplicando a regra de L'Hôpital para formas indeterminadas do tipo 0/0 ou ∞/∞.

ADVERTÊNCIA

É tentador argumentar que uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$ tem o valor 0, uma vez que "zero vezes qualquer coisa é zero". Contudo, isso é enganoso, uma vez que $0 \cdot \infty$ não é produto de números: em vez disso, é uma afirmação sobre limites. Por exemplo, os limites seguintes são $0 \cdot \infty$, mas não são zero:

$$\lim_{x\to 0}\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

► Exemplo 4 Calcule

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0^+} x \ln x \qquad \text{(b)} \lim_{x\to \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x$$

Solução (a) O fator x tem um limite 0 e o fator $\ln x$ tem o limite $-\infty$; logo, o problema dado é uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Existem duas possíveis abordagens: podemos escrever o limite como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

a primeira sendo uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ e a segunda, uma forma indeterminada do tipo 0/0. Contudo, a primeira forma será a escolha preferida, pois a derivada de $1/x$ é menos complicada do que a derivada de $1/\ln x$. A partir dessa escolha, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Solução (b) O problema dado é uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Vamos convertê-la para uma forma indeterminada do tipo 0/0:

$$\lim_{x\to \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x = \lim_{x\to \pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1/\sec 2x} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to \pi/4} \frac{-\sec^2 x}{-2 \operatorname{sen} 2x} = \frac{-2}{-2} = 1 \ ◄$$

■ FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO $\infty - \infty$

Um problema de limite que leva a uma das expressões

$$(+\infty) - (+\infty), \qquad (-\infty) - (-\infty),$$
$$(+\infty) + (-\infty), \qquad (-\infty) + (+\infty)$$

é chamado de ***forma indeterminada do tipo*** $\infty - \infty$. Tais limites são indeterminados, pois os dois termos exercem influências conflitantes na expressão: um empurra na direção positiva e o outro, na negativa. Entretanto, os problemas de limite que levam a uma das expressões

$$(+\infty) + (+\infty), \qquad (+\infty) - (-\infty),$$
$$(-\infty) + (-\infty), \qquad (-\infty) - (+\infty)$$

não são indeterminados, uma vez que os dois termos trabalham na mesma direção (os que estão acima produzem um limite $+\infty$ e os abaixo, $-\infty$).

As formas indeterminadas do tipo $\infty - \infty$ podem, às vezes, ser calculadas combinando-se os termos e manipulando-se o resultado para produzir uma forma indeterminada do tipo 0/0 ou ∞/∞.

► Exemplo 5 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

Solução Ambos os termos têm limite $+\infty$; logo, o problema dado é uma forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Combinando os dois termos, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$$

que é uma forma indeterminada do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital duas vezes, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0 \blacktriangleleft$$

FORMAS INDETERMINADAS DO TIPO $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Os limites da forma

$$\lim f(x)^{g(x)}$$

dão origem a ***formas indeterminadas do tipo*** $\mathbf{0^0}$, $\boldsymbol{\infty^0}$ ***e*** $\mathbf{1^\infty}$. (O significado desses símbolos deve estar claro.) Por exemplo, o limite

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}$$

cujo valor sabemos ser e [veja a Fórmula (1) da Seção 4.2], é uma forma indeterminada do tipo 1^∞. É indeterminada porque as expressões $1+x$ e $1/x$ exercem duas influências conflitantes: a primeira tende a 1, o que leva a expressão em direção a 1, e a segunda tende a $+\infty$, o que leva a expressão em direção a $+\infty$.

As formas indeterminadas dos tipos 0^0, ∞^0 e 1^∞ podem, às vezes, ser calculadas introduzindo primeiro uma variável dependente

$$y = f(x)^{g(x)}$$

e, então, calculando o limite de $\ln y$. Como

$$\ln y = \ln[f(x)^{g(x)}] = g(x)\cdot\ln[f(x)]$$

o limite de $\ln y$ será uma forma indeterminada do tipo $0\cdot\infty$ (verifique), que pode ser calculada pelos métodos que já desenvolvemos. Uma vez conhecido o limite de $\ln y$, o limite de $y = f(x)^{g(x)}$ geralmente pode ser obtido com facilidade, conforme ilustraremos no próximo exemplo.

▶ Exemplo 6 Mostre que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Solução Como discutido acima, começamos introduzindo uma variável dependente

$$y = (1+x)^{1/x}$$

e tomando o logaritmo natural em ambos os lados

$$\ln y = \ln(1+x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

o que é uma forma indeterminada do tipo 0/0; logo, pela regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1} = 1$$

Uma vez que mostramos que $\ln y \to 1$ quando $x \to 0$, a continuidade da função exponencial implica que $e^{\ln y} \to e^1$ quando $x \to 0$, o que implica que $y \to e$ quando $x \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.4 (*Ver página 265 para respostas.*)

1. Em cada parte, verifique se a regra de L'Hôpital é aplicável ao limite dado.

   (a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^3+x-2}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x}$

2. Calcule cada um dos limites do Exercício 1.

3. Usando a regra de L'Hôpital, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{500x^2} =$ ________.

EXERCÍCIOS 4.4 Recurso Gráfico C CAS

1-2 Calcule o limite dado sem usar a regra de L'Hôpital e depois use-a para conferir sua resposta.

1. (a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+2x-8}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{3x+7}$

2. (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$ (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

3-4 Dados as funções $f(x)$ e $g(x)$ e o ponto especificado a: (a) Verifique que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ é uma forma indeterminada do tipo 0/0. (b) Encontre as aproximações lineares locais $T_f(x)$ e $T_g(x)$ das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, em $x = a$. (c) Sem usar a regra de L'Hôpital, verifique que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{T_f(x)}{T_g(x)}$$

3. $f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = x^2 - x - 2,\ a = -1$

4. $f(x) = \cos x,\ g(x) = \operatorname{cotg} x,\ a = \pi/2$

5-36 Encontre o limite.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$

7. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\theta}$

8. $\lim_{t\to 0} \dfrac{te^t}{1-e^t}$

9. $\lim_{x\to \pi^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$

10. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

11. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

12. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

13. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\ln x}$

14. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln x}{e^{1/x}}$

15. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{100}}{e^x}$

16. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen} 2x}{x}$

18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^3}$

19. $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$

20. $\lim_{x\to \pi^-} (x-\pi)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$

21. $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$

22. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x$

23. $\lim_{x\to \pi/2^-} \sec 3x \cos 5x$

24. $\lim_{x\to \pi} (x-\pi)\operatorname{cotg} x$

25. $\lim_{x\to+\infty} (1 - 3/x)^x$

26. $\lim_{x\to 0} (1+2x)^{-3/x}$

27. $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$

28. $\lim_{x\to+\infty} (1 + a/x)^{bx}$

29. $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}[(\pi/2)x]}$

30. $\lim_{x\to+\infty} [\cos(2/x)]^{x^2}$

31. $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cossec} x - 1/x)$

32. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cos 3x}{x^2}\right)$

33. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$

34. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$

35. $\lim_{x\to+\infty} [x - \ln(x^2+1)]$

36. $\lim_{x\to+\infty} [\ln x - \ln(1+x)]$

C 37. Use um CAS para verificar as respostas obtidas nos Exercícios 31 a 36.

38. Mostre que, para todo n inteiro positivo:

    (a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$

ENFOCANDO CONCEITOS

39. (a) Encontre o erro no seguinte cálculo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x-2}{6x-2} = 1$$

   (b) Encontre a resposta correta.

40. (a) Encontre o erro no seguinte cálculo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{3x^2-12x+12}}{x^4-16} = \lim_{x\to 2} \frac{(6x-12)e^{3x^2-12x+12}}{4x^3} = 0$$

   (b) Encontre a resposta correta.

41-44 Faça uma conjectura sobre o limite traçando o gráfico da função envolvida com um recurso computacional; verifique sua conjectura usando a regra de L'Hôpital.

41. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\sqrt{x}}$

42. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

43. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{3/\ln x}$

44. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{4\operatorname{tg} x}{1+\sec x}$

45-48 Faça uma conjectura sobre as equações das assíntotas horizontais, se houver, através do gráfico da equação obtida por um recurso computacional; verifique sua resposta usando a regra de L'Hôpital.

45. $y = \ln x - e^x$

46. $y = x - \ln(1 + 2e^x)$

47. $y = (\ln x)^{1/x}$

48. $y = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$

49. Limites do tipo

$$0/\infty, \quad \infty/0, \quad 0^\infty, \quad \infty \cdot \infty, \quad +\infty + (+\infty),$$
$$+\infty - (-\infty), \quad -\infty + (-\infty), \quad -\infty - (+\infty)$$

não são formas indeterminadas. Encontre por inspeção os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{-x}}$

(c) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$ (d) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x) \operatorname{cotg} x$

(e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \ln x\right)$ (f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + x^3)$

50. Há um mito que circula entre os que começam estudar Cálculo de que todas as formas indeterminadas dos tipos 0^0, ∞^0 e 1^∞ são iguais a 1, pois "qualquer coisa elevada a zero é 1" e "1 a qualquer potência é 1". O engano está em que 0^0, ∞^0 e 1^∞ não são potências de números, mas descrições de limites. Os seguintes exemplos, que foram sugeridos pelo Prof. Jack Staib, da Drexel University, mostram que tais formas indeterminadas podem assumir qualquer valor real positivo.

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} [x^{(\ln a)/(1+\ln x)}] = a$ (tipo 0^0)

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x^{(\ln a)/(1+\ln x)}] = a$ (tipo ∞^0)

(c) $\lim\limits_{x \to 0} [(x+1)^{(\ln a)/x}] = a$ (tipo 1^∞)

Verifique esses resultados.

51-54 Verifique que a regra de L'Hôpital não ajuda a encontrar o limite; se ele existir, encontre-o por outro método.

51. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} 2x}{x}$

52. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \operatorname{sen} x}{3x + \operatorname{sen} x}$

53. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(2 + \operatorname{sen} 2x)}{x + 1}$

54. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(2 + \operatorname{sen} x)}{x^2 + 1}$

55. O diagrama esquemático apresentado representa um circuito elétrico, o qual consiste em uma força eletromotriz que produz uma voltagem V, um resistor com resistência R e um indutor com indutância L. A teoria dos circuitos elétricos mostra que se uma voltagem for aplicada no instante $t = 0$, então a corrente I que percorre o circuito no instante t é dada por

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Qual é o efeito sobre a corrente em um dado tempo t fixo, se a resistência tender a zero (isto é, $R \to 0^+$)?

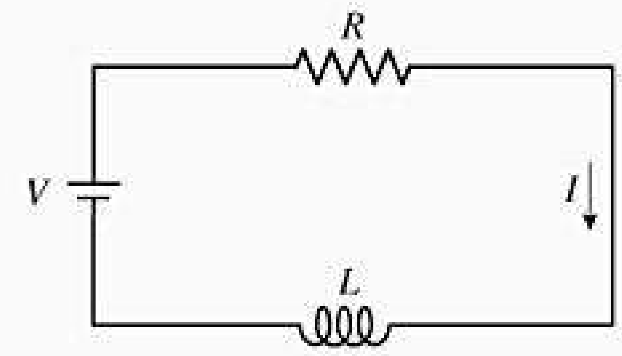


Figura Ex-55

56. (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x = 1$.

(b) Mostre que

$$\lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{1}{\pi/2 - x} - \operatorname{tg} x\right) = 0$$

(c) Segue de (b) que a aproximação

$$\operatorname{tg} x \approx \frac{1}{\pi/2 - x}$$

deve ser boa para valores de x próximos de $\pi/2$. Use uma calculadora para encontrar $\operatorname{tg} x$ e $1/(\pi/2 - x)$ para $x = 1{,}57$; compare os resultados.

C 57. (a) Use um CAS para mostrar que, se k for uma constante positiva, então

$$\lim_{x \to +\infty} x(k^{1/x} - 1) = \ln k$$

(b) Confirme esse resultado usando a regra de L'Hôpital. [*Sugestão*: Expresse o limite em termos de $t = 1/x$.]

(c) Se n for um inteiro positivo, então segue por (a) com $x = n$ que a aproximação

$$n(\sqrt[n]{k} - 1) \approx \ln k$$

deve ser boa para n grande. Use esse resultado e a tecla da raiz quadrada de uma calculadora para aproximar os valores de ln 0,3 e ln 2 com $n = 1024$, e então compare os valores obtidos com aqueles do logaritmo gerados diretamente da calculadora. [*Sugestão*: Cada raiz enésima na qual n é uma potência de dois pode ser obtida como sucessivas raízes quadradas.]

58. Encontre todos os valores de k e l, tais que

$$\lim_{x \to 0} \frac{k + \cos lx}{x^2} = -4$$

ENFOCANDO CONCEITOS

59. Seja $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

(a) Os limites $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ são formas indeterminadas?

(b) Use um recurso computacional para gerar o gráfico de f e use o gráfico para fazer conjecturas sobre os limites em (a).

(c) Use o Teorema do Confronto (2.6.3) para confirmar que suas conjecturas em (b) estão corretas.

60. (a) Explique por que a regra de L'Hôpital não se aplica ao problema

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$$

(b) Encontre o limite.

61. Encontre $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$, se existir.

62. Su nha ue a unções f e g e am i erenciá ei em $x = a$ e ue $f\ a\ = g\ a\ = 0$ Se $g'\ a\ \neq 0$, m tre ue

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

em u ar a regra e ' ô ita *Sugestão:* Di i a numera r e en mina r e $f\ x\ /g\ x$ r $x - a$ e u e a efiniçõe e $f'\ a$ e e $g'\ a$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 4.4

1. a im b nã c im **2.** a $\frac{1}{2}$ b nã e i te c 2 **3.** $+\infty$

✔ EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO Recurso Gráfico

1-4 Enc ntre dy/dx

1. $y = \sqrt[4]{6x - 5}$ **2.** $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$

3. $y = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$ **4.** $y = \dfrac{(3-2x)^{4/3}}{x^2}$

5-6 a Enc ntre dy/dx u an eri açã im ícita b e a a e uaçã ara y c m uma unçã e x e enc ntre dy/dx a artir e a e uaçã c nfirme ue i re u ta ã c n i ten te e re an a eri a a e a c m uma unçã ó e x

5. $x^3 + xy - 2x = 1$ **6.** $xy = x - y$

7-10 Enc ntre dy/dx u an eri açã im ícita

7. $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = 1$ **8.** $x^3 - y^3 =\ xy$

9. ec $xy\ = y$ **10.** $x^2 = \dfrac{\text{cotg}\, y}{1 + \text{cossec}\, y}$

11-12 Enc ntre d^2y/dx^2 u an eri açã im ícita

11. $3x^2 - 4y^2 = 7$ **12.** $2xy - y^2 = 3$

13. e eri açã im ícita ara enc ntrar a inc inaçã a reta tangente à cur a $y = x$ tg $\pi y/2$, $x > 0$, $y > 0$ a ***quadratriz de Hippias*** n nt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

14. Em ua i nt é a reta tangente à cur a $y^2 = 2x^3$ er en icu ar à reta $4x - 3y + 1 = 0$

15. Pr e ue, e P e Q ã i nt i tint na e i e gira a $x^2 + xy + y^2 = 4$, tai ue P, Q e a rigem ã c ineare , entã a reta tangente à e i e em P e Q ã ara e a

16. Enc ntre a c r ena a nt n rimeir ua rante em ue a reta tangente à cur a $x^3 - xy + y^3 = 0$ é ara e a a ei x

17. Enc ntre a c r ena a nt n rimeir ua rante em ue a reta tangente à cur a $x^3 - xy + y^3 = 0$ é ara e a a ei y

18. e eri açã im ícita ara m trar ue a e uaçã a reta tangente à cur a $y^2 = kx$ em x_0, y_0 é

$$y_0 y = \tfrac{1}{2}k(x + x_0)$$

19-20 Enc ntre dy/dx u an rimeir r rie a e a gébrica a unçã garitm natura

19. $y = \text{n}\left(\dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x+3)^3(x+4)^4}\right)$ **20.** $y = \text{n}\left(\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x+1}}{\text{sen}\, x \sec x}\right)$

21-38 Enc ntre dy/dx

21. $y = \ln 2x$ **22.** $y = (\ln x)^2$

23. $y = \sqrt[3]{\ln x + 1}$ **24.** $y = \ln(\sqrt[3]{x+1})$

25. $y = \log(\ln x)$ **26.** $y = \dfrac{1 + \log x}{1 - \log x}$

27. $y = \ln(x^{3/2}\sqrt{1 + x^4})$ **28.** $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x}\cos x}{1 + x^2}\right)$

29. $y = e^{\ln(x^2+1)}$ **30.** $y = \ln\left(\dfrac{1 + e^x + e^{2x}}{1 - e^{3x}}\right)$

31. $y = 2xe^{\sqrt{x}}$ **32.** $y = \dfrac{a}{1 + be^{-x}}$

33. $y = \dfrac{1}{\pi}$ arc tg $2x$ **34.** $y = 2^{\text{arc sen}\, x}$

35. $y = x^{(e^x)}$ **36.** $y = (1 + x)^{1/x}$

37. $y = \text{arc sec}\,(2x + 1)$ **38.** $y = \sqrt{\text{arc cos}\, x^2}$

39-40 Enc ntre dy/dx u an eri açã garítmica

39. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **40.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

41. a Faça uma c n ectura bre a rma gráfic e $y = \frac{1}{2}x - \text{n}\, x$ e trace um e b ç ru imentar e e

b nfira ua c n ectura traçan gráfic a e uaçã n inter a $0 < x < 5$ u an um recur gráfic

c tre ue a inc inaçõe a reta tangente à cur a n nt $x = 1$ e $x = e$ têm inai t

ue a arte c im ica bre a e i tência e uma reta tangente h riz nta à cur a E i ue

e Enc ntre a c r ena a x e ata e t a a reta tangen te h riz ntai a e a cur a

42. Lembre que na Seção 1.6 foi visto que a intensidade β de um som em decibéis (dB) é dada por $\beta = 10 \log(I/I_0)$, onde I é a intensidade do som em watts por metro quadrado (W/m^2) e I_0 é uma constante que é aproximadamente a intensidade do som no limiar da capacidade auditiva do ser humano. Encontre a taxa de variação de β em relação a I no ponto em que

(a) $I/I_0 = 10$ (b) $I/I_0 = 100$ (c) $I/I_0 = 1000$

43. Uma partícula está em movimento ao longo da curva $y = x \ln x$. Encontre todos os valores de x nos quais a taxa de variação de y em relação ao tempo é três vezes a de x. [Suponha que dx/dt não se anule.]

44. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \ln(5 - x^2)$ em $x = 2$.

45. Encontre o valor de b tal que a reta $y = x$ é tangente ao gráfico de $y = \log_b x$. Confirme seu resultado fazendo os dois gráficos no mesmo sistema de coordenadas.

46. Em cada parte, encontre o valor de k para o qual os gráficos de $y = f(x)$ e $y = \ln x$ compartilham uma tangente comum em seu ponto de intersecção. Confirme seu resultado fazendo os gráficos de $y = f(x)$ e $y = \ln x$ no mesmo sistema de coordenadas.

(a) $f(x) = \sqrt{x} + k$ (b) $f(x) = k\sqrt{x}$

47. Se f e g são funções inversas uma da outra e se f é diferenciável em seu domínio, então g também deve ser diferenciável em seu domínio? Dê um argumento razoável informal para corroborar sua resposta.

48. Em cada parte, encontre $(f^{-1})'(x)$ usando a Fórmula (1) da Seção 4.3 e verifique seu resultado diferenciando diretamente f^{-1}.

(a) $f(x) = 3/(x + 1)$ (b) $f(x) = \sqrt{e^x}$

49. Encontre um ponto no gráfico de $y = e^{3x}$ no qual a reta tangente passa pela origem.

50. Mostre que a taxa de variação de $y = 5000e^{1{,}07x}$ é proporcional a y.

51. Mostre que a taxa de variação de $y = 3^{2x}5^{7x}$ é proporcional a y.

52. A constante de equilíbrio k de uma reação química equilibrada varia com a temperatura absoluta T, de acordo com a lei

$$k = k_0 \exp\left(-\frac{q(T - T_0)}{2T_0 T}\right)$$

onde k_0, q e T_0 são constantes. Encontre a taxa de variação de k em relação a T.

53. Mostre que a função $y = e^{ax} \operatorname{sen} bx$ satisfaz

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$$

para todas as constantes reais a e b.

54. Mostre que a função $y = \operatorname{arc\,tg} x$ satisfaz

$$y'' = -2 \operatorname{sen} y \cos^3 y$$

55. Suponha que a população de cervos em uma ilha seja modelada pela equação

$$P(t) = \frac{95}{5 - 4e^{-t/4}}$$

onde $P(t)$ é o número de cervos, t semanas depois da observação inicial no instante $t = 0$.

(a) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da função $P(t)$.

(b) Descreva o que acontece à população no decorrer do tempo. Verifique sua conclusão calculando $\lim_{t \to +\infty} P(t)$.

(c) Descreva que acontece com a *taxa* de crescimento populacional no decorrer do tempo. Verifique sua conclusão fazendo o gráfico de $P'(t)$.

56. Em cada parte encontre o limite dado interpretando a expressão como uma derivada apropriada.

(a) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^{\pi} - 1}{h}$ (b) $\lim_{x \to e} \dfrac{1 - \ln x}{(x - e) \ln x}$

57. Suponha que $\lim f(x) = \pm\infty$ e $\lim g(x) = \pm\infty$. Em cada um dos quatro casos possíveis, estabeleça se $\lim[f(x) - g(x)]$ é uma forma indeterminada e dê um argumento razoável informal que sustente sua resposta.

58. (a) Sob quais condições um limite da forma

$$\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)]$$

será uma forma indeterminada?

(b) Se $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, $\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)]$ deve ser uma forma indeterminada? Dê alguns exemplos que sustentem sua resposta.

59-62 Calcule o limite dado.

59. $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x^2)$

60. $\lim_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{\ln x}{x^4 - 1}}$

61. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 e^x}{\operatorname{sen}^2 3x}$

62. $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}, \quad a > 0$



c a p í t u l o c i n c o

A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES

No outono de 1972, o presidente norte-americano Richard Nixon anunciou que a taxa de crescimento da inflação dos EUA estava decrescendo. Foi a primeira vez que um presidente em exercício daquele país usou a derivada terceira para justificar sua reeleição.

—**Hugo Rossi**
Matemático

Neste capítulo estudaremos várias aplicações da derivada. Por exemplo, utilizaremos métodos do Cálculo para analisar funções e seus gráficos. Nesse processo, mostraremos como o Cálculo e os recursos gráficos computacionais, juntos, conseguem fornecer a maioria das informações importantes sobre o comportamento de funções. Uma outra aplicação importante da derivada será a solução de problemas de otimização. Por exemplo, se a principal consideração num problema for o tempo, podemos querer encontrar a maneira mais rápida de executar uma tarefa, e se a principal consideração for o custo, podemos querer encontrar a maneira mais econômica de executar uma tarefa. Matematicamente, os problemas de otimização podem ser reduzidos à obtenção do maior ou menor valor de uma função em algum intervalo e à determinação de onde esses valores ocorrem. Usando a derivada, desenvolveremos as ferramentas matemáticas necessárias para a solução desses problemas. Também utilizaremos a derivada para estudar o movimento de uma partícula ao longo de uma reta e mostraremos como a derivada pode ajudar na aproximação de soluções de equações.

Foto: ***As derivadas podem ajudar a encontrar a localização mais eficaz, quanto ao custo, de uma plataforma submarina de petróleo.***

5.1 ANÁLISE DE FUNÇÕES I: CRESCIMENTO, DECRESCIMENTO E CONCAVIDADE

Embora os recursos gráficos computacionais sejam úteis na determinação do aspecto geral do gráfico, muitos problemas requerem uma precisão maior do que aquela que eles são capazes de produzir. O propósito desta seção é desenvolver ferramentas matemáticas que possam ser usadas para determinar a forma exata do gráfico e a localização precisa de seus aspectos-chave.

■ FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

Os termos *crescente*, *decrescente* e *constante* são usados para descrever o comportamento de uma função em um intervalo, à medida que percorremos seu gráfico da esquerda para a direita. Por exemplo, a função cujo gráfico está na Figura 5.1.1 pode ser descrita como crescente no intervalo $(-\infty, 0]$, descrescente no intervalo $[0, 2]$, novamente crescente no intervalo $[2, 4]$ e constante no intervalo $[4, +\infty)$.

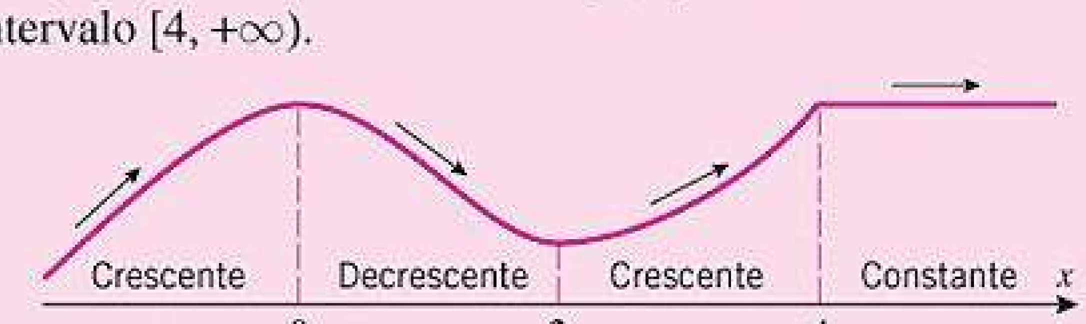


Figura 5.1.1

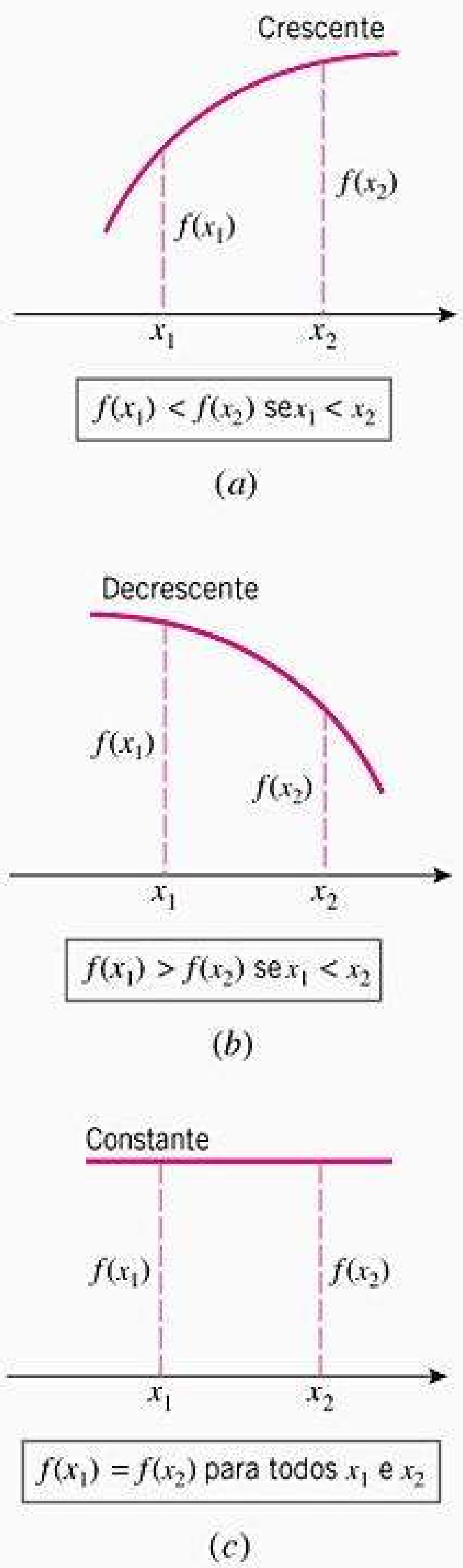


Figura 5.1.2

A definição seguinte, ilustrada na Figura 5.1.2, expressa essas idéias intuitivas com precisão.

> **5.1.1 DEFINIÇÃO** Seja f definida em um intervalo e sejam x_1 e x_2 pontos do intervalo.
>
> (a) f é ***crescente*** no intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.
>
> (b) f é ***decrescente*** no intervalo se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.
>
> (c) f é ***constante*** no intervalo se $f(x_1) = f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2.

A Figura 5.1.3 sugere que uma função diferenciável f é crescente em qualquer intervalo onde cada reta tangente ao gráfico tenha inclinação positiva, decrescente em qualquer intervalo onde cada reta tangente ao gráfico tenha inclinação negativa e constante em qualquer intervalo onde cada reta tangente ao gráfico tenha inclinação zero. Essa observação intuitiva sugere o seguinte teorema importante, o qual será provado na Seção 5.7.

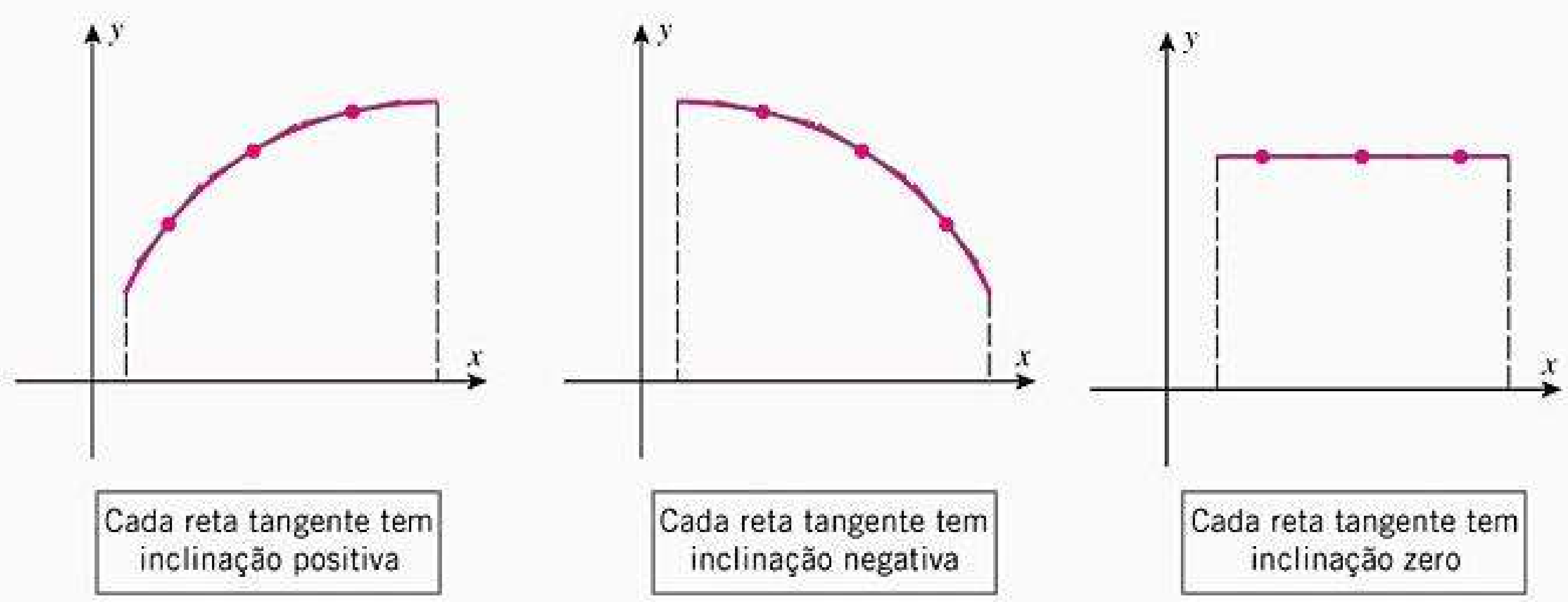


Figura 5.1.3

> **5.1.2 TEOREMA** *Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b).*
>
> (a) *Se $f'(x) > 0$ para todo valor de x em (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.*
>
> (b) *Se $f'(x) < 0$ para todo valor de x em (a, b), então f é decrescente em $[a, b]$.*
>
> (c) *Se $f'(x) = 0$ para todo valor de x em (a, b), então f é constante em $[a, b]$.*

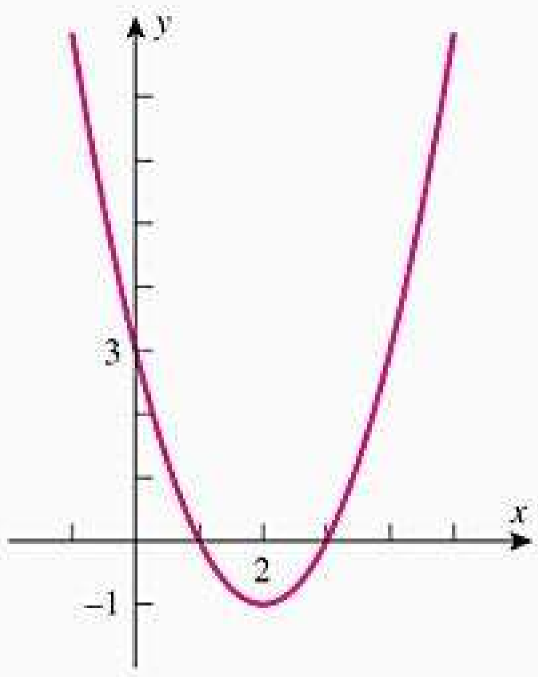
Observe que as condições sobre a derivada no Teorema 5.1.2 precisam ser verificadas somente *no interior* do intervalo $[a, b]$, mesmo que as conclusões do teorema sejam válidas no intervalo inteiro.

Embora o teorema tenha sido enunciado para um intervalo $[a, b]$, ele é aplicável a qualquer intervalo I no qual f é contínua e dentro do qual é diferenciável. Por exemplo, se f for contínua em $[a, +\infty)$ e $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo $(a, +\infty)$, então f é crescente em $[a, +\infty)$; se for contínua em $(-\infty, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ em $(-\infty, +\infty)$, então f é decrescente em $(-\infty, +\infty)$

► Exemplo 1 Encontre os intervalos nos quais $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.

Solução O gráfico de f na Figura 5.1.4 sugere que f seja decrescente para $x \le 2$ e crescente para $x \ge 2$. Para confirmar isso, vamos analisar o sinal de f'. A derivada de f é

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$



$f(x) = x^2 - 4x + 3$

Figura 5.1.4

Tem-se que

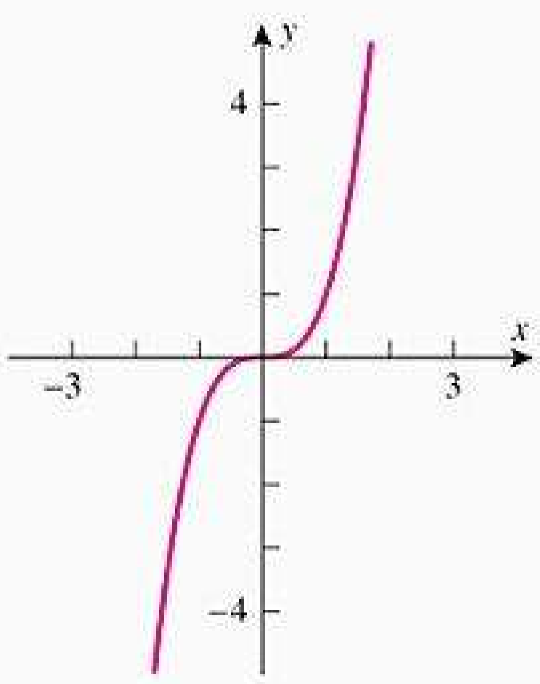
$$f'(x) < 0 \quad \text{se} \quad x < 2$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad 2 < x$$

Uma vez que f é contínua em todos os pontos, deduz-se do Teorema 5.1.2 e da subseqüente observação que:

$$f \text{ é decrescente em } (-\infty, 2]$$
$$f \text{ é crescente em } [2, +\infty)$$

Essas conclusões estão em conformidade com o gráfico de f na Figura 5.1.4. ◄

► Exemplo 2 Encontre os intervalos nos quais $f(x) = x^3$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.



$f(x) = x^3$

Figura 5.1.5

Solução O gráfico de f na Figura 5.1.5 sugere que ela é crescente em todo eixo x. Para confirmar isso, diferenciamos f obtendo $f'(x) = 3x^2$. Assim,

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x < 0$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad 0 < x$$

Uma vez que f é contínua em toda parte,

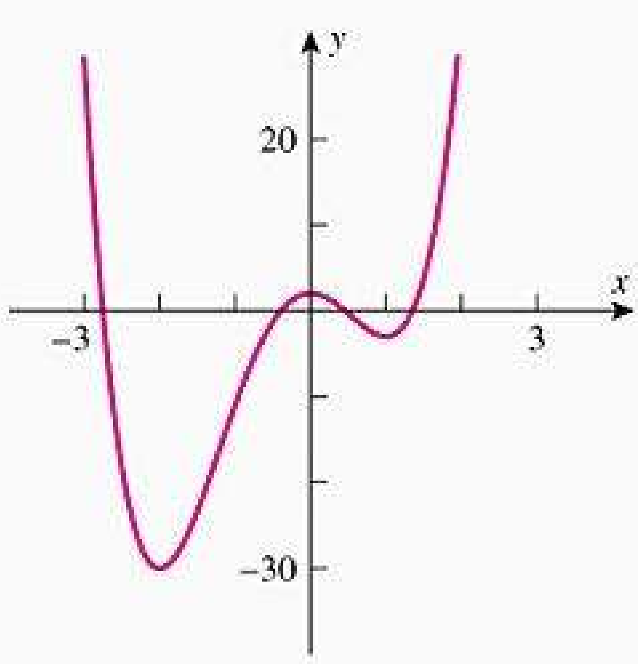
$$f \text{ é crescente em } (-\infty, 0]$$
$$f \text{ é crescente em } [0, +\infty)$$

Como f é crescente nos intervalos concatenados $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$, segue que f é crescente na união $(-\infty, +\infty)$ desses intervalos (Exercício 59). ◄

► Exemplo 3

(a) Use o gráfico de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ na Figura 5.1.6 para fazer uma conjectura sobre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.

(b) Use o Teorema 5.1.2 para verificar se sua conjectura estava correta.



$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$

Figura 5.1.6

Solução (a) O gráfico de f sugere que ela é decrescente se $x \leq -2$, crescente se $-2 \leq x \leq 0$, decrescente se $0 \leq x \leq 1$ e crescente se $x \geq 1$.

Solução (b) Diferenciando f, obtemos

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x\,(x^2 + x - 2) = 12x\,(x + 2)(x - 1)$$

A análise do sinal de f' na Tabela 5.1.1 pode ser obtida usando o método dos pontos-teste, discutido no Apêndice D da internet. As conclusões da tabela confirmam a conjectura da parte (a). ◄

Tabela 5.1.1

INTERVALO	$(12x)(x+2)(x-1)$	$f'(x)$	CONCLUSÃO
$x < -2$	(−) (−) (−)	−	f é decrescente em $(-\infty, -2]$
$-2 < x < 0$	(−) (+) (−)	+	f é crescente em $[-2, 0]$
$0 < x < 1$	(+) (+) (−)	−	f é decrescente em $[0, 1]$
$1 < x$	(+) (+) (+)	+	f é crescente em $[1, +\infty)$

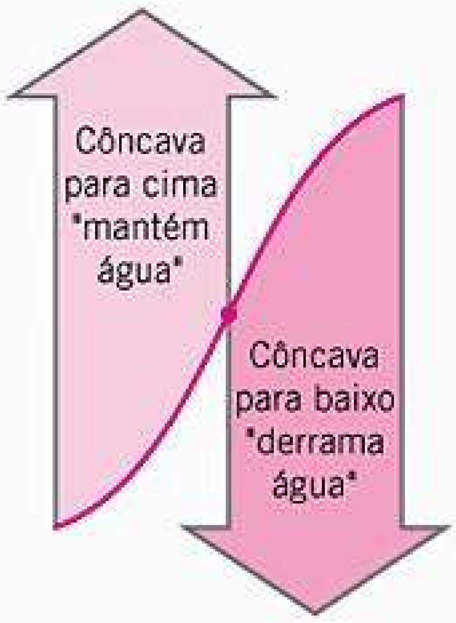


Figura 5.1.7



Figura 5.1.8

CONCAVIDADE

Embora o sinal da derivada de f revele onde o gráfico de f é crescente ou decrescente, ele não revela a direção da *curvatura* do gráfico. Por exemplo, o gráfico está crescendo de ambos os lados do ponto na Figura 5.1.7, mas à esquerda está curvado para cima ("segura água") e à direita, para baixo ("derrama água"). Nos intervalos em que o gráfico de f tiver uma curvatura para cima diremos que f é *côncava para cima*, e nos intervalos em que o gráfico tiver uma curvatura para baixo diremos que f é *côncava para baixo*.

A Figura 5.1.8 sugere duas maneiras de caracterizar a concavidade de uma função diferenciável f em um intervalo aberto:

- f é côncava para cima em um intervalo aberto se as retas tangentes ao gráfico de f têm inclinações crescentes no intervalo, e côncava para baixo se têm inclinações decrescentes.
- f é côncava para cima em um intervalo aberto se o gráfico está sempre acima de suas retas tangentes no intervalo, e côncava para baixo se o gráfico está sempre abaixo de suas retas tangentes.

Nossa definição formal de "côncava para cima" e "côncava para baixo" corresponde à primeira dessas caracterizações.

5.1.3 DEFINIÇÃO Se f é diferenciável em um intervalo aberto I, então dizemos que f é ***côncava para cima*** em I se f' é crescente em I e ***côncava para baixo*** em I se f' é decrescente em I.

Como as inclinações das retas tangentes ao gráfico de uma função diferenciável f são os valores da função derivada f' de f, segue do Teorema 5.1.2 (aplicado a f' no lugar de f) que f' será crescente em intervalos nos quais f'' é positiva e decrescente em intervalos nos quais f'' é negativa. Assim, temos o teorema seguinte.

5.1.4 TEOREMA Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto I.

(*a*) *Se* $f''(x) > 0$ *para cada valor de* x *em* I, *então* f *é côncava para cima em* I.

(*b*) *Se* $f''(x) < 0$ *para cada valor de* x *em* I, *então* f *é côncava para baixo em* I.

► Exemplo 4 A Figura 5.1.4 sugere que a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é côncava para cima no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Isso é consistente com o Teorema 5.1.4, pois $f'(x) = 2x - 4$ e $f''(x) = 2$, de modo que

$$f''(x) > 0 \quad \text{no intervalo} \quad (-\infty, +\infty)$$

Também, a Figura 5.1.5 sugere que $f(x) = x^3$ é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Isso está de acordo com o Teorema 5.1.4, pois $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$, portanto,

$$f''(x) < 0 \quad \text{se } x < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) > 0 \quad \text{se } x > 0 \; ◄$$

PONTOS DE INFLEXÃO

Vimos no Exemplo 4 e na Figura 5.1.5 que o gráfico de $f(x) = x^3$ muda de côncavo para baixo para côncavo para cima em $x = 0$. Os pontos em que uma curva muda de côncavo para cima para côncavo para baixo ou vice-versa são de interesse especial, portanto, existe uma terminologia associada.

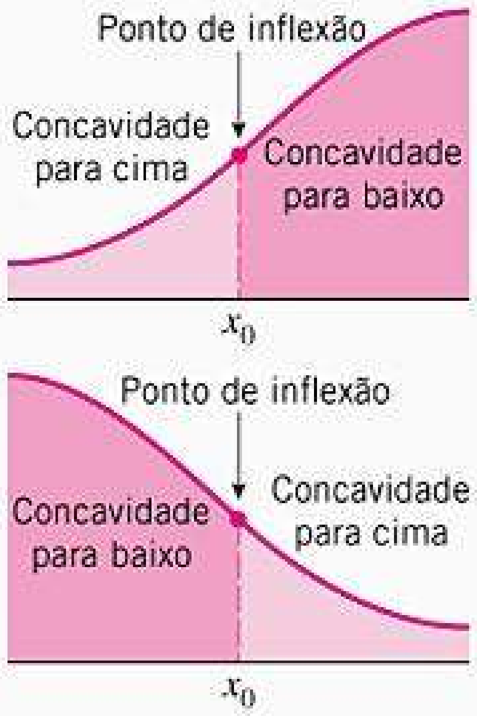


Figura 5.1.9

5.1.5 DEFINIÇÃO Se f é contínua em um intervalo aberto contendo o ponto x_0 e muda de concavidade no ponto $(x_0, f(x_0))$, então dizemos que o ponto x_0 do domínio, ou o ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico, é um ***ponto de inflexão*** de f (Figura 5.1.9).

► Exemplo 5 A Figura 5.1.10 mostra o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Use as derivadas primeira e segunda de f para determinar os intervalos nos quais f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize todos os pontos de inflexão e confirme que suas conclusões são consistentes com o gráfico.

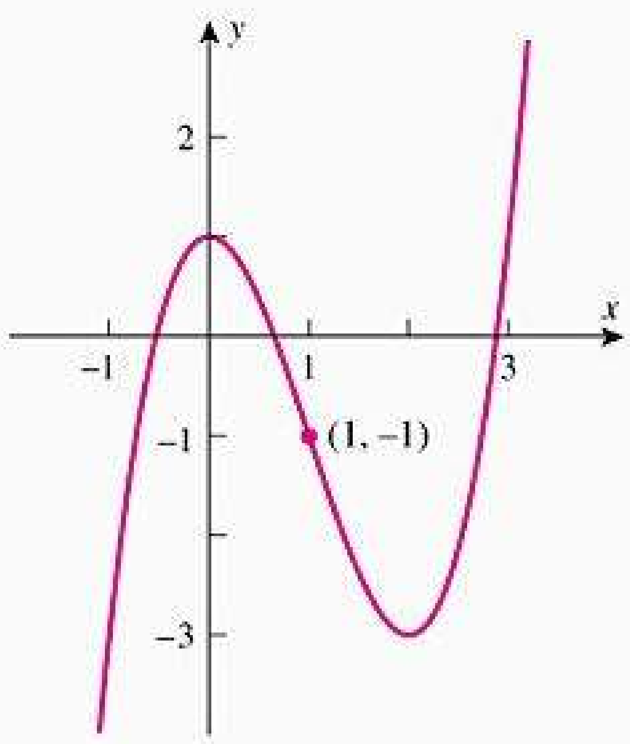
Solução Calculando as derivadas primeira e segunda de f, obtemos

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$
$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

A análise de sinais dessas derivadas é mostrada nas tabelas seguintes:

INTERVALO	$(3x)(x-2)$	$f'(x)$	CONCLUSÃO
$x < 0$	(−)(−)	+	f é crescente em $(-\infty, 0]$
$0 < x < 2$	(+)(−)	−	f é decrescente em $[0, 2]$
$x > 2$	(+)(+)	+	f é crescente em $[2, +\infty)$

INTERVALO	$6(x-1)$	$f''(x)$	CONCLUSÃO
$x < 1$	(−)	−	f é côncava para baixo em $(-\infty, 1)$
$x > 1$	(+)	+	f é côncava para cima em $(1, +\infty)$



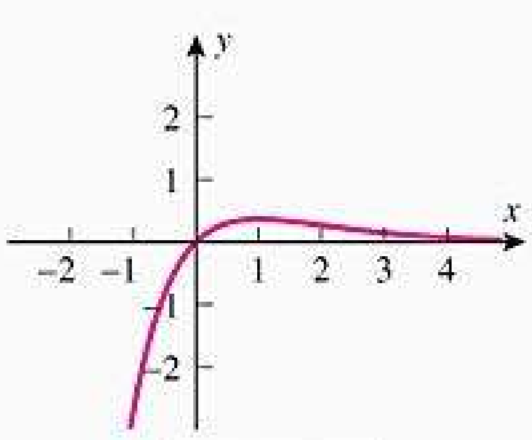
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Figura 5.1.10

A segunda tabela mostra que há um ponto de inflexão em $x = 1$, pois f muda de côncava para baixo para côncava para cima nesse ponto. O ponto de inflexão é $(1, f(1)) = (1, -1)$. Todas essas conclusões são consistentes com o gráfico de f. ◄

Poderíamos ter adivinhado, a partir da Figura 5.1.10, que a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ tem um ponto de inflexão em $x = 1$ sem precisar calcular as derivadas. Contudo, às vezes, as mudanças de concavidade são tão sutis que as contas são essenciais para confirmar sua existência e identificar sua localização. Aqui temos um exemplo.

► Exemplo 6 A Figura 5.1.11 sugere que a função $f(x) = xe^{-x}$ tem um ponto de inflexão, mas sua localização exata não é evidente a partir dessa figura. Use as derivadas primeira e segunda de f para determinar os intervalos nos quais f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize todos os pontos de inflexão.



$f(x) = xe^{-x}$

Figura 5.1.11

Solução Calculando as derivadas primeira e segunda de f, obtemos (confira)

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$
$$f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

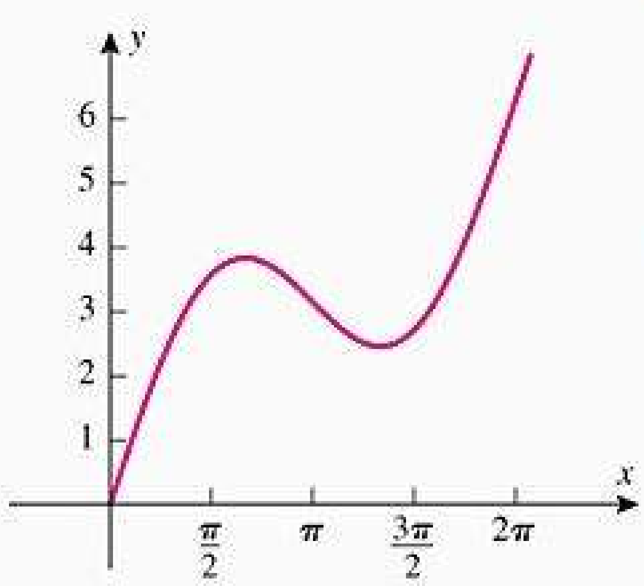
Lembrando que e^{-x} é positiva para todo x, a análise de sinais dessas derivadas é facilmente determinada:

INTERVALO	$(1-x)(e^{-x})$	$f'(x)$	CONCLUSÃO
$x < 1$	$(+)(+)$	$+$	f é crescente em $(-\infty, 1]$
$x > 1$	$(-)(+)$	$-$	f é decrescente em $[1, +\infty)$

INTERVALO	$(x-2)(e^{-x})$	$f''(x)$	CONCLUSÃO
$x < 2$	$(-)(+)$	$-$	f é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$
$x > 2$	$(+)(+)$	$+$	f é côncava para cima em $(2, +\infty)$

A segunda tabela mostra que há um ponto de inflexão em $x = 2$, pois f muda de côncava para baixo para côncava para cima nesse ponto. Todas essas conclusões são consistentes com o gráfico de f. ◄

► Exemplo 7 A Figura 5.1.12 mostra o gráfico da função $f(x) = x + 2$ sen x no intervalo $[0, 2\pi]$. Use as derivadas primeira e segunda de f para determinar onde f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize todos os pontos de inflexão e confirme que suas conclusões são consistentes com o gráfico.



$f(x) = x + 2$ sen x

Figura 5.1.12

Solução Calculando as derivadas primeira e segunda de f, obtemos

$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$
$$f''(x) = -2\,\text{sen}\,x$$

Como f' é uma função contínua, ela só pode mudar de sinal no intervalo $(0, 2\pi)$ em pontos em que $f'(x) = 0$ (por quê?). Esses valores são soluções da equação

$$1 + 2\cos x = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \cos x = -\tfrac{1}{2}$$

Há duas soluções dessa equação no intervalo $(0, 2\pi)$, a saber, $x = 2\pi/3$ e $x = 4\pi/3$ (verifique). Analogamente, f'' é uma função contínua, logo suas mudanças de sinal no intervalo $(0, 2\pi)$ só podem ocorrer nos valores de x em que $f''(x) = 0$. Esses valores são soluções da equação

$$-2\,\text{sen}\,x = 0$$

Há uma única solução dessa equação no intervalo $(0, 2\pi)$, a saber, $x = \pi$. Com o auxílio desses "pontos de transição de sinal", obtemos a análise de sinais mostrada nas tabelas seguintes:

INTERVALO	$f'(x) = 1 + 2\cos x$	CONCLUSÃO
$0 < x < 2\pi/3$	$+$	f é crescente em $[0, 2\pi/3]$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$-$	f é decrescente em $[2\pi/3, 4\pi/3]$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	$+$	f é crescente em $[4\pi/3, 2\pi]$

INTERVALO	$f''(x) = -2$ sen x	CONCLUSÃO
$0 < x < \pi$	$-$	f é côncava para baixo em $(0, \pi)$
$\pi < x < 2\pi$	$+$	f é côncava para cima em $(\pi, 2\pi)$

Duas maneiras de determinar os sinais nas tabelas do Exemplo 7 são o método dos pontos de teste e as definições de seno e cosseno no círculo unitário. Ver Apêndice D na internet e Apêndice A.

A segunda tabela mostra que há um ponto de inflexão em $x = \pi$, pois f muda de côncava para baixo para côncava para cima nesse ponto. Todas essas conclusões são consistentes com o gráfico de f. ◄

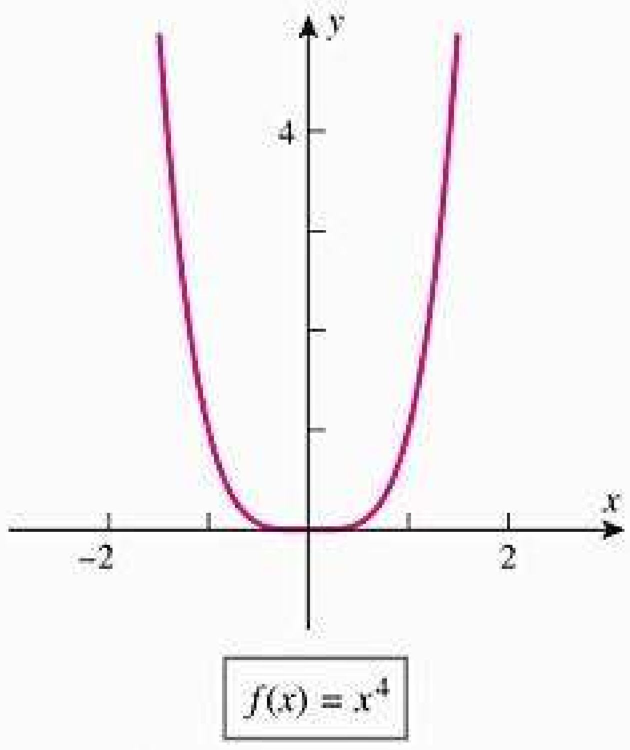


Figura 5.1.13

Nos exemplos precedentes, os pontos de inflexão de f ocorreram nos pontos em que $f''(x) = 0$. Contudo, isso nem sempre é o caso. Aqui temos um exemplo específico.

► **Exemplo 8** Encontre os pontos de inflexão, se houver, de $f(x) = x^4$.

Solução Calculando as derivadas primeira e segunda de f, obtemos

$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2$$

Como $f''(x)$ é positivo para $x < 0$ e para $x > 0$, a função f é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Assim, não há uma mudança de concavidade e, portanto, nenhum ponto de inflexão em $x = 0$, embora tenhamos $f''(0) = 0$ (Figura 5.1.13). ◄

Veremos adiante que, se uma função f tem um ponto de inflexão em $x = x_0$ e se $f''(x_0)$ existe, então $f''(x_0) = 0$. Também veremos na Seção 5.3 que um ponto de inflexão também pode ocorrer onde $f''(x)$ não está definida.

■ PONTOS DE INFLEXÃO EM APLICAÇÕES

Dê um argumento para mostrar que a função $f(x) = x^4$ esboçada na Figura 5.1.13 é côncava para cima no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Os pontos de inflexão de uma função f são os pontos do gráfico de $y = f(x)$ nos quais as inclinações das retas tangentes mudam de crescente para decrescente, ou vice-versa (Figura 5.1.14). Como a inclinação da reta tangente em um ponto do gráfico de $y = f(x)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x naquele ponto, podemos interpretar os pontos de inflexão da seguinte maneira:

> *Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva $y = f(x)$ em que a taxa de variação de y em relação a x muda de crescente para decrescente, ou vice-versa.*

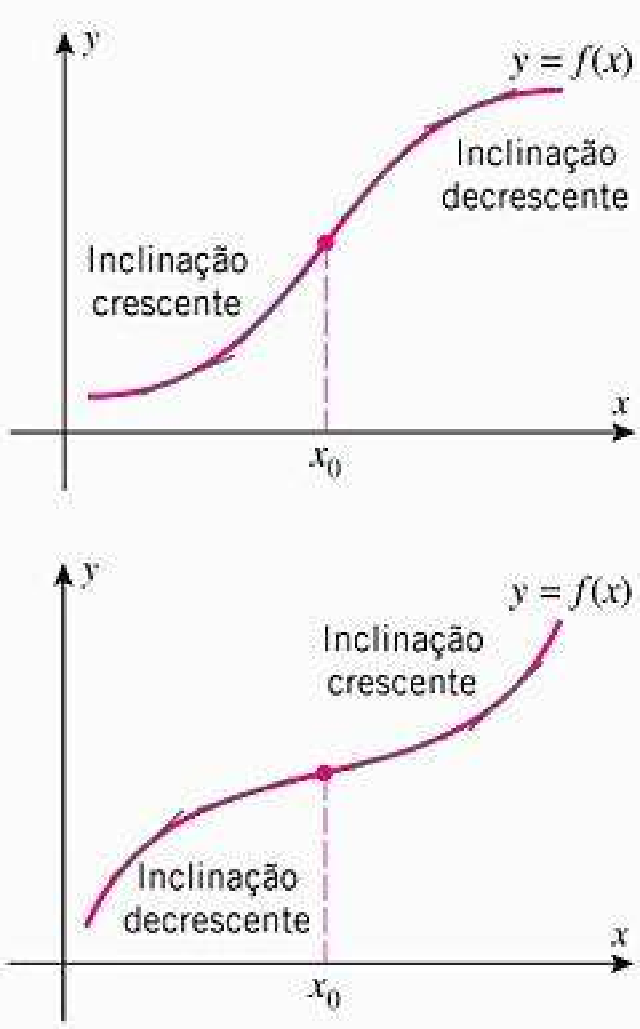


Figura 5.1.14

Essa é uma idéia sutil, já que estamos lidando com uma taxa de variação de uma taxa de variação. Pode ser que ajude a entender essa idéia observar que pontos de inflexão podem ter interpretações em contextos mais familiares. Por exemplo, considere a afirmação: "O preço da gasolina subiu bastante durante a primeira metade do ano, mas desde então tem subido menos". Se o preço da gasolina for esboçado como uma função do tempo, essa afirmação sugere a existência de um ponto de inflexão no gráfico perto do meio do ano. (Por quê?) Para ter um exemplo mais visual, considere o frasco mostrado na Figura 5.1.15. Suponha que esteja sendo colocada água nele, de tal modo que o volume cresça a uma taxa constante em relação ao tempo t. Examinemos a taxa pela qual o nível y de água sobe em relação t. Inicialmente, o nível y cresce lentamente por causa da base larga. Contudo, à medida que o diâmetro do frasco estreitar, a taxa pela qual o nível de água sobe irá aumentar até atingir o ponto mais estreito do gargalo. Desse ponto em diante, a taxa pela qual o nível de água sobe irá diminuir à medida que o gargalo alargar cada vez mais. Assim, o ponto mais estreito do gargalo é aquele em que a taxa de variação de y em relação a t passa de crescente para decrescente.

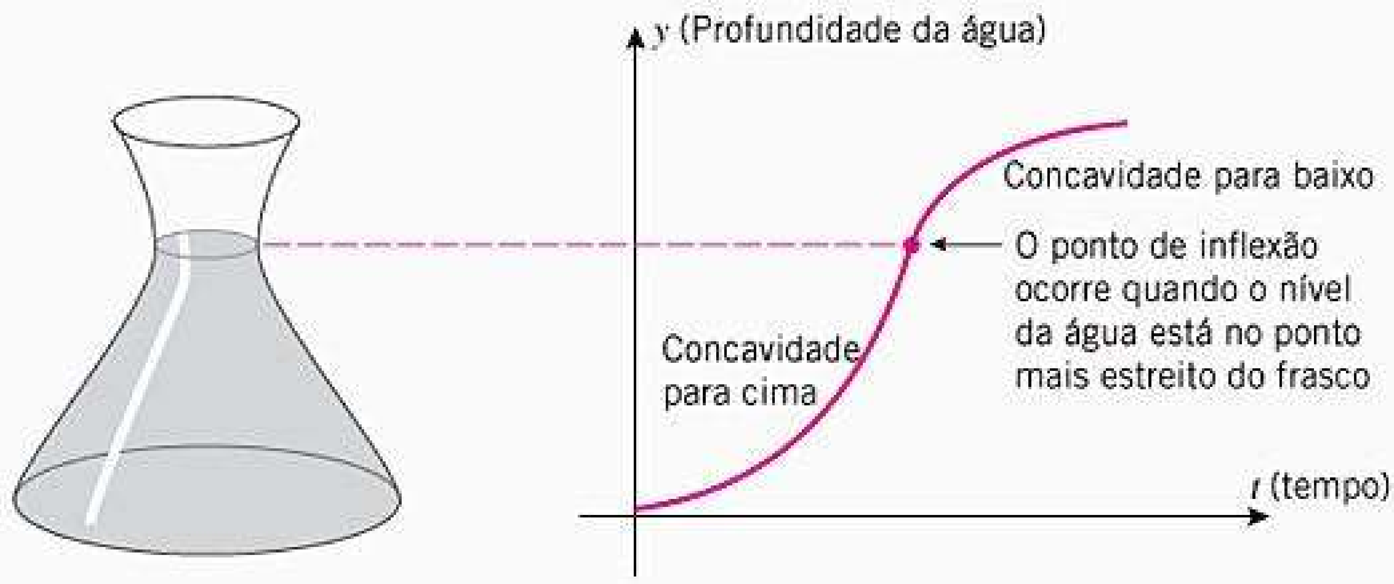


Figura 5.1.15

■ CURVAS LOGÍSTICAS

Quando uma população cresce em um ambiente no qual o espaço ou o alimento é limitado, o gráfico da população *versus* tempo tem uma forma típica de S, conforme a Figura 5.1.16. O cenário descrito por tal curva é o de uma população crescendo a princípio vagarosamente e, então, cada vez mais rápido à medida que cresce o número de indivíduos capazes de produzir descendentes. Porém, em um certo momento do tempo (onde ocorre o ponto de inflexão), os fatores ambientais começam a mostrar seu efeito e a taxa de crescimento começa a declinar uniformemente. Em um período prolongado de tempo, a população tende a um valor limite que representa o limite superior do número de indivíduos que o espaço ou o alimento pode sustentar. As curvas de crescimento populacional desse tipo são chamadas de ***curvas de crescimento logístico***.

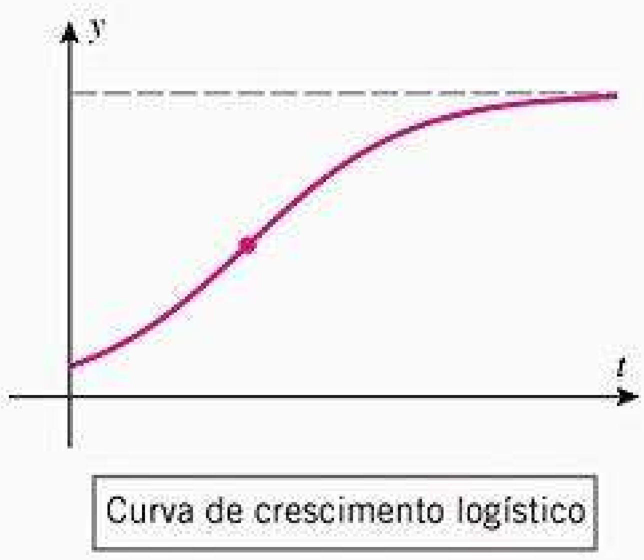


Figura 5.1.16

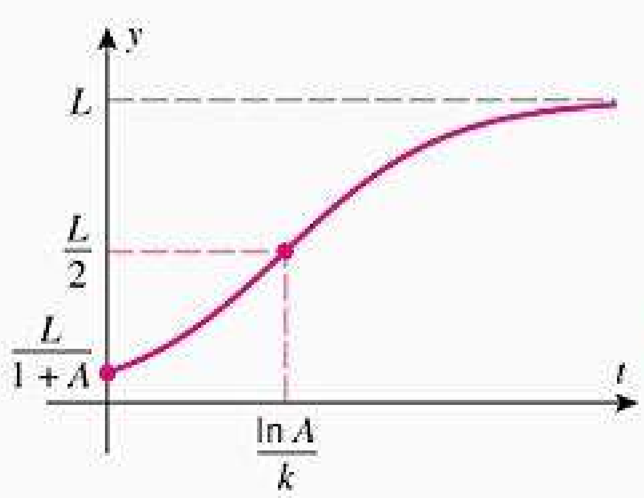


Figura 5.1.17

► Exemplo 9 Iremos mostrar em um capítulo posterior que as curvas do crescimento logístico surgem de equações da forma

$$y = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}} \tag{1}$$

onde y é a população no momento t ($t \geq 0$) e A, k e L são constantes positivas. Mostre que a Figura 5.1.17 descreve corretamente o gráfico dessa equação quando $A > 1$.

Solução Deixamos ao leitor a tarefa de confirmar que, em $t = 0$, o valor de y é

$$y = \frac{L}{1 + A}$$

e que, para $t \geq 0$, a população y satisfaz

$$\frac{L}{1 + A} \leq y < L$$

Isso está de acordo com o gráfico da Figura 5.1.17. A assíntota horizontal em $y = L$ está confirmada pelo limite

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{L}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{L}{1 + 0} = L$$

Fisicamente, L representa o limite superior do tamanho da população.

Para investigar os intervalos de crescimento e de decrescimento, a concavidade e os pontos de inflexão, vamos precisar das derivadas primeira e segunda de y em relação a t. Deixamos ao leitor a tarefa de confirmar que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{L}y(L - y) \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2}{L^2}y(L - y)(L - 2y) \tag{3}$$

Uma vez que $k > 0$, $y > 0$ e $L - y > 0$, tem-se a partir de (2) que $dy/dt > 0$ para todo t. Assim, y é crescente, não havendo pontos estacionários, o que está de acordo com a Figura 5.1.17.

Uma vez que $y > 0$ e $L - y > 0$, tem-se a partir de (3) que

$$\frac{d^2y}{dt^2} > 0 \quad \text{se} \quad L - 2y > 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} < 0 \quad \text{se} \quad L - 2y < 0$$

Assim, o gráfico de y *versus* t é côncavo para cima se $y < L/2$, côncavo para baixo se $y > L/2$ e tem um ponto de inflexão em $y = L/2$, tudo de acordo com a Figura 5.1.17.

Para encerrar, deixamos a cargo do leitor resolver a equação

$$\frac{L}{2} = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}$$

em t para mostrar que o ponto de inflexão ocorre em

$$t = \frac{1}{k}\ln A = \frac{\ln A}{k} \quad ◂ \qquad (4)$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.1 (*Ver página 279 para respostas.*)

1. (a) Uma função f é crescente em (a, b) se ________ sempre que $a < x_1 < x_2 < b$.
   (b) Uma função f é decrescente em (a, b) se ________ sempre que $a < x_1 < x_2 < b$.
   (c) Uma função f é côncava para cima em (a, b) se f' é ________ em (a, b).
   (d) Se $f''(a)$ existe e f tem um ponto de inflexão em $x = a$, então $f''(a)$ ________.
2. Seja $f(x) = 0{,}1(x^3 - 3x^2 - 9x)$.
   (a) As soluções de $f'(x) = 0$ são $x =$ ________.
   (b) A função f é crescente no(s) intervalo(s) ________.
   (c) A função f é côncava para baixo no(s) intervalo(s) _____.
   (d) ________ é um ponto de inflexão do gráfico de f.
3. Considere uma função $f(x)$ cuja *derivada* é dada por $f'(x) = (x - 4)^2 e^{-x/2}$.
   (a) A função f é crescente no(s) intervalo(s) ________.
   (b) A função f é côncava para cima no(s) intervalo(s) ________.
   (c) A função f é côncava para baixo no(s) intervalo(s) ________.
4. Considere a afirmação: "O aumento do custo de vida desacelerou durante a primeira metade do ano". Fazendo um gráfico do custo de vida *versus* tempo para a primeira metade daquele ano, como isso será refletido no gráfico?

EXERCÍCIOS 5.1 Recurso Gráfico [C] CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função f com as propriedades indicadas e discuta os sinais de f' e de f''.
   (a) A função f é côncava para cima e crescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
   (b) A função f é côncava para baixo e crescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
   (c) A função f é côncava para cima e decrescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
   (d) A função f é côncava para baixo e decrescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
2. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função f com as propriedades indicadas.
   (a) f é crescente em $(-\infty, +\infty)$, tem um ponto de inflexão na origem e é côncava para cima em $(0, +\infty)$.
   (b) f é crescente em $(-\infty, +\infty)$, tem um ponto de inflexão na origem e é côncava para baixo em $(0, +\infty)$.
   (c) f é decrescente em $(-\infty, +\infty)$, tem um ponto de inflexão na origem e é côncava para cima em $(0, +\infty)$.
   (d) f é decrescente em $(-\infty, +\infty)$, tem um ponto de inflexão na origem e é côncava para baixo em $(0, +\infty)$.
3. Use o gráfico da equação $y = f(x)$ na figura abaixo para encontrar os sinais de dy/dx e d^2y/dx^2 nos pontos A, B e C.

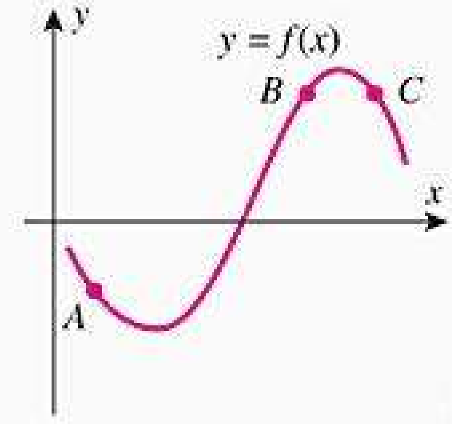


Figura Ex-3

4. Use o gráfico da equação $y = f'(x)$ na Figura Ex-4 para encontrar os sinais de dy/dx e d^2y/dx^2 nos pontos A, B e C.

5. Use o gráfico de $y = f''(x)$ na Figura Ex-5 para determinar as coordenadas x de todos os pontos de inflexão de f. Explique seu raciocínio.

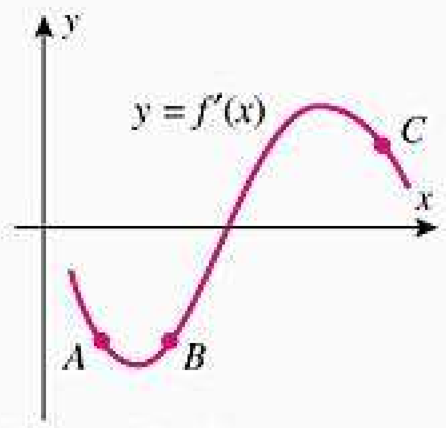


Figura Ex-4

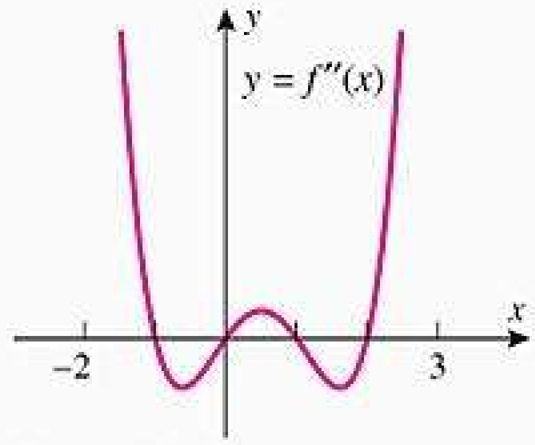


Figura Ex-5

6. Use o gráfico de $y = f'(x)$ na figura abaixo para substituir a interrogação por <, = ou >, conforme apropriado. Explique seu raciocínio.

(a) $f(0)$? $f(1)$ (b) $f(1)$? $f(2)$ (c) $f'(0)$? 0

(d) $f'(1)$? 0 (e) $f''(0)$? 0 (f) $f''(2)$? 0

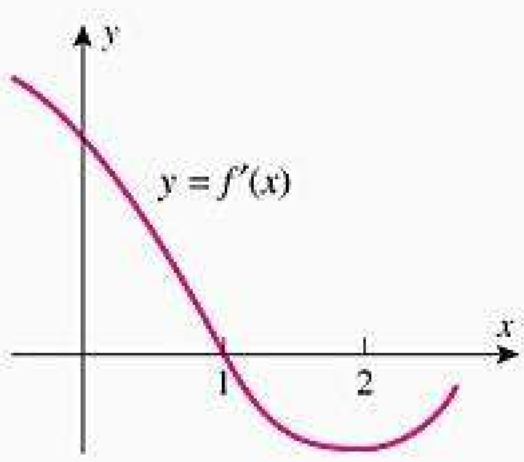


Figura Ex-6

7. Em cada parte, use o gráfico de $y = f(x)$ na figura abaixo para encontrar a informação requisitada.

(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente.

(b) Encontre os intervalos nos quais f é decrescente.

(c) Encontre os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima.

(d) Encontre os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo.

(e) Encontre todos os valores de x nos quais f tem um ponto de inflexão.

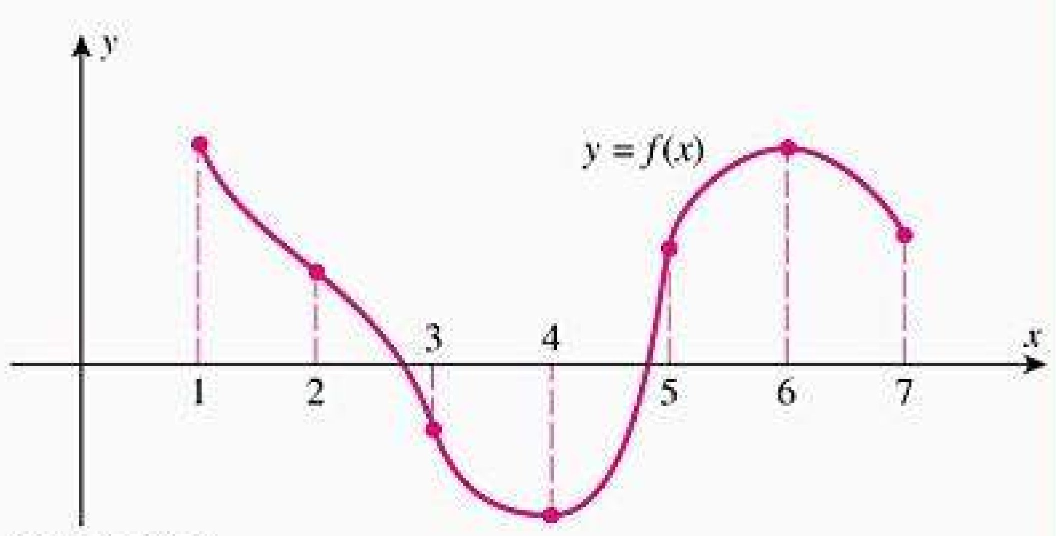


Figura Ex-7

8. Use o gráfico do Exercício 7 para fazer uma tabela que mostre os sinais de f' e f'' nos intervalos (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) e (6, 7).

9-10 É dada uma tabela de sinais para as derivadas primeira e segunda de uma função f. Supondo que f é contínua em toda parte, encontre: (a) os intervalos em que f é crescente, (b) os intervalos em que f é decrescente, (c) os intervalos abertos em que f é côncava para cima, (d) os intervalos abertos em que f é côncava para baixo e (e) as coordenadas x de todos os pontos de inflexão.

9.

INTERVALO	SINAL DE $f'(x)$	SINAL DE $f''(x)$
$x < 1$	–	+
$1 < x < 2$	+	+
$2 < x < 3$	+	–
$3 < x < 4$	–	–
$4 < x$	–	+

10.

INTERVALO	SINAL DE $f'(x)$	SINAL DE $f''(x)$
$x < 1$	+	+
$1 < x < 3$	+	–
$3 < x$	+	+

11-28 Encontre: (a) os intervalos nos quais f é crescente, (b) os intervalos nos quais f é decrescente, (c) os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima, (d) os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo e (e) as coordenadas x de todos os pontos de inflexão.

11. $f(x) = x^2 - 3x + 8$

12. $f(x) = 5 - 4x - x^2$

13. $f(x) = (2x + 1)^3$

14. $f(x) = 5 + 12x - x^3$

15. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

16. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$

17. $f(x) = \dfrac{x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

19. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

20. $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$

21. $f(x) = (x^{2/3} - 1)^2$

22. $f(x) = x^{2/3} - x$

23. $f(x) = e^{-x^2/2}$

24. $f(x) = xe^{x^2}$

25. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 4}$

26. $f(x) = x^3 \ln x$

27. $f(x) = \text{arc tg}\,(x^2 - 1)$

28. $f(x) = \text{arc sen}\, x^{2/3}$

29-34 Analise as funções f nos intervalos especificados indicando onde: f é crescente, f é decrescente, f é côncava para cima, f é côncava para baixo, e as coordenadas x de todos os pontos de inflexão. Verifique se seus resultados estão em conformidade com o gráfico de f gerado por algum recurso computacional.

29. $f(x) = \text{sen}\, x - \cos x;\ [-\pi, \pi]$

30. $f(x) = \sec x \,\text{tg}\, x;\ (-\pi/2, \pi/2)$

31. $f(x) = 1 - \text{tg}(x/2);\ (-\pi, \pi)$

32. $f(x) = 2x + \text{cotg}\, x;\ (0, \pi)$

33. $f(x) = (\text{sen}\, x + \cos x)^2;\ [-\pi, \pi]$

34. $f(x) = \text{sen}^2\, 2x;\ [0, \pi]$

ENFOCANDO CONCEITOS

35. Em cada parte, esboce uma curva contínua $y = f(x)$ com as propriedades indicadas.

(a) $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f''(x) > 0$ para todo x

(b) $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f''(x) < 0$ para $x < 2$, $f''(x) > 0$ para $x > 2$

(c) $f(2) = 4$, $f''(x) < 0$ para $x \neq 2$ e $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$

36. Em cada parte esboce uma curva contínua $y = f(x)$ com as propriedades indicadas.

(a) $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f''(x) < 0$ para todo x

(b) $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f''(x) > 0$ para $x < 2$, $f''(x) < 0$ para $x > 2$

(c) $f(2) = 4$, $f''(x) > 0$ para $x \neq 2$ e $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = +\infty$

37. Suponha que $g(x)$ seja uma função definida e diferenciável em cada x real e que $g(x)$ tenha as propriedades seguintes:

(i) $g(0) = 2$ e $g'(0) = -\frac{2}{3}$

(ii) $g(4) = 3$ e $g'(4) = 3$

(iii) $g(x)$ é côncava para cima em $x < 4$ e côncava para baixo em $x > 4$.

(iv) $g(x) \geq -10$ para todo x.

(a) g tem quantos zeros?

(b) g' tem quantos zeros?

(c) Exatamente um dos limites é possível:

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = -5, \quad \lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} g'(x) = 5$$

Identifique qual desses resultados é possível e faça um esboço aproximado do gráfico de uma tal função $g(x)$. Explique por que os dois outros resultados são impossíveis.

38. Em cada parte, suponha que a seja uma constante e encontre os pontos de inflexão, se houver.

(a) $f(x) = (x - a)^3$ (b) $f(x) = (x - a)^4$

39. Dado que a é constante e n é um inteiro positivo, o que pode ser dito sobre a existência de pontos de inflexão da função $f(x) = (x - a)^n$? Justifique sua resposta.

40. Suponha que f seja uma função crescente em $[a, b]$ e que x_0 seja um ponto de $[a, b]$. Use a definição de $f'(x_0)$ para provar que se f for diferenciável em x_0, então $f'(x_0) \geq 0$.

41-46 Se f for crescente em um intervalo $[0, b)$, tem-se então, a partir da Definição 5.1.1, que $f(0) < f(x)$ para todo x do intervalo $(0, b)$. Use esses resultados nesses exercícios.

41. Mostre que $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x$ se $x > 0$ e confirme a desigualdade com algum recurso gráfico computacional. [*Sugestão*: Mostre que $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{1+x}$ é crescente em $[0, +\infty)$.]

42. Mostre que $x < \operatorname{tg} x$ se $0 < x < \pi/2$ e confirme a desigualdade com algum recurso gráfico computacional. [*Sugestão*: Mostre que a função $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ é crescente em $[0, \pi/2)$.]

43. Use um recurso gráfico computacional para fazer uma conjectura sobre os tamanhos relativos de x e sen x para $x \geq 0$ e prove sua conjectura.

44. Use um recurso gráfico para fazer uma conjectura sobre os tamanhos relativos de $1 - x^2/2$ e de cos x para $x \geq 0$ e prove sua conjectura. [*Sugestão*: Use o resultado do Exercício 43.]

45. (a) Mostre que $\ln(x + 1) \leq x$ se $x \geq 0$.

(b) Mostre que $\ln(x + 1) \geq x - \frac{1}{2}x^2$ se $x \geq 0$.

(c) Confirme as desigualdades em (a) e (b) com um recurso gráfico.

46. (a) Mostre que $e^x \geq 1 + x$ se $x \geq 0$.

(b) Mostre que $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ se $x \geq 0$.

(c) Confirme as desigualdades de (a) e (b) com algum recurso gráfico computacional.

47-48 Use um recurso computacional para gerar os gráficos de f' e f'' no intervalo indicado; use os gráficos para estimar as coordenadas x dos pontos de inflexão de f, os intervalos nos quais f é côncava para cima ou para baixo e os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente. Verifique suas estimativas fazendo o gráfico de f.

47. $f(x) = x^4 - 24x^2 + 12x, \quad -5 \leq x \leq 5$

48. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5$

47-48 Use um CAS para encontrar f'' e para aproximar as coordenadas x dos pontos de inflexão até a sexta casa decimal. Confirme se sua resposta está coerente com o gráfico de f.

49. $f(x) = \dfrac{10x - 3}{3x^2 - 5x + 8}$ **50.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x + 7}{\sqrt{x^2 + 1}}$

51. Use a Definição 5.1.1 para provar que $f(x) = x^2$ é crescente em $[0, +\infty)$.

52. Use a Definição 5.1.1 para provar que $f(x) = 1/x$ é decrescente em $(0, +\infty)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

53-54 Em cada parte, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se falsa, encontre funções para quais a afirmação não é válida.

53. (a) Se f e g forem crescentes em um intervalo, então $f + g$ também o é.

(b) Se f e g forem crescentes em um intervalo, então $f \cdot g$ também o é.

54. (a) Se f e g forem côncavas para cima em um intervalo, então $f + g$ também o é.

(b) Se f e g forem côncavas para cima em um intervalo, então $f \cdot g$ também o é.

55. Em cada parte, encontre funções f e g que sejam crescentes em $(-\infty, +\infty)$ e para as quais $f - g$ tem a propriedade indicada.

(a) $f - g$ é decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

(b) $f - g$ é constante em $(-\infty, +\infty)$.

(c) $f - g$ é crescente em $(-\infty, +\infty)$.

56. Em cada parte, encontre funções f e g que sejam positivas e crescentes em $(-\infty, +\infty)$ e para as quais f/g tem a propriedade indicada.

(a) f/g é decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

(b) f/g é constante em $(-\infty, +\infty)$.

(c) f/g é crescente em $(-\infty, +\infty)$.

57. (a) Prove que o polinômio cúbico geral

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

tem exatamente um ponto de inflexão.

(b) Prove que, se o polinômio cúbico tiver três cortes com o eixo x, o ponto de inflexão ocorre no valor médio dos cortes.

(c) Use o resultado de (b) para encontrar o ponto de inflexão do polinômio cúbico $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ e verifique seu resultado, usando f'' para determinar onde f é côncava para cima e para baixo.

58. A partir do Exercício 57, o polinômio $f(x) = x^3 + bx^2 + 1$ tem um ponto de inflexão. Use um recurso gráfico computacional para tirar conclusões sobre o papel da constante b na localização do ponto de inflexão. Use f'' para explicar o que observou graficamente.

59. Use a Definição 5.1.1 para provar que:

(a) Se f for crescente nos intervalos $(a, c]$ e $[c, b)$, então f é crescente em (a, b).

(b) Se f for decrescente nos intervalos $(a, c]$ e $[c, b)$, então f é decrescente em (a, b)

60. Use a parte (a) do Exercício 59 para mostrar que $f(x) = x + \text{sen}\, x$ é crescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

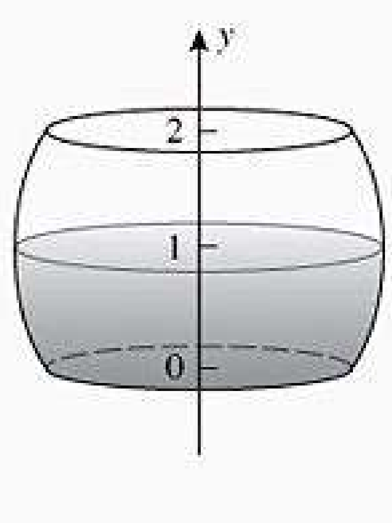
61. Use a parte (b) do Exercício 59 para mostrar que $f(x) = \cos x - x$ é decrescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

62. Seja $y = 1/(1 + x^2)$. Encontre os valores de x para os quais y está crescendo e decrescendo mais rapidamente.

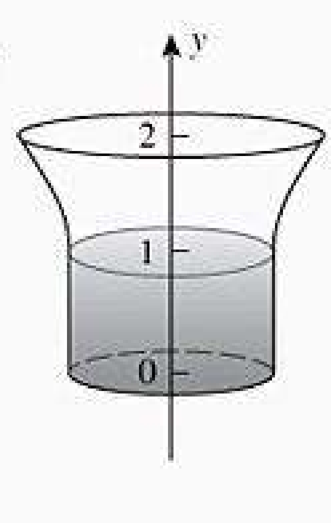
ENFOCANDO CONCEITOS

63-66 Suponha que água esteja fluindo a uma taxa constante para dentro dos frascos mostrados. Faça um esboço grosseiro do gráfico do nível de água y *versus* tempo t. Assegure-se de que o esboço mostre onde o gráfico é côncavo para baixo e para cima, e destaque as coordenadas y dos pontos de inflexão.

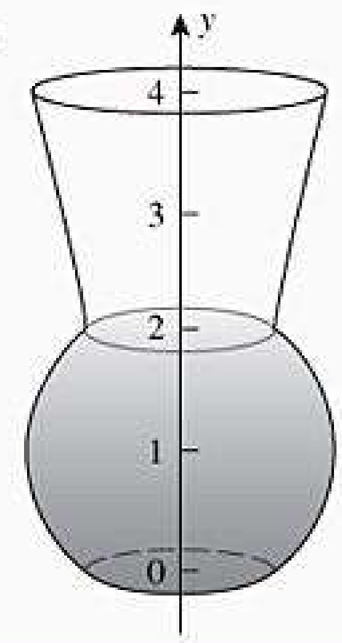
63.



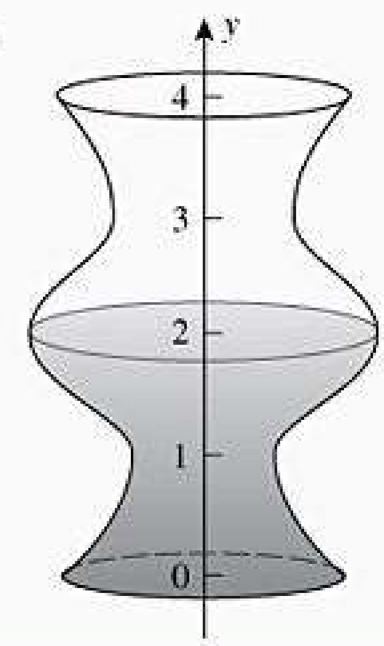
64.



65.



66.



67. Suponha que uma população y cresça de acordo com o modelo logístico dado pela Fórmula (1).

(a) Qual é a taxa de crescimento de y em $t = 0$?

(b) Descreva como a taxa de crescimento de y varia com o tempo.

(c) Em que momento a população cresce mais rapidamente?

68. Suponha que o número de indivíduos no instante t de uma certa população seja dado por

$$N(t) = \frac{340}{1 + 9(0{,}77)^t}, \quad t \geq 0$$

onde t é dado em anos. Use um recurso gráfico para estimar o ano em que o tamanho da população está crescendo mais rapidamente.

69. Suponha que a disseminação de um vírus de gripe em um campus universitário seja modelado pela função

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0{,}9t}}$$

onde $y(t)$ é o número de estudantes infectados no instante t (dado em dias, começando em $t = 0$). Use um recurso gráfico para estimar o dia em que o vírus está sendo disseminado mais rapidamente.

70. Supondo que A, k e L sejam constantes positivas, verifique que o gráfico de $y = L/(1 + Ae^{-kt})$ tem um ponto de inflexão em $\left(\frac{1}{k}\ln A, \frac{1}{2}L\right)$.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.1

1. (a) $f(x_1) < f(x_2)$ (b) $f(x_1) > f(x_2)$ (c) crescente (d) $= 0$ **2.** (a) $-1, 3$ (b) $(-\infty, -1]$ e $[3, +\infty)$ (c) $(-\infty, 1)$ (d) $(1; -1,1)$
3. (a) $(-\infty, +\infty)$ (b) $(4, 8)$ (c) $(-\infty, 4), (8, +\infty)$ **4.** O gráfico é crescente e côncavo para baixo.

5.2 ANÁLISE DE FUNÇÕES II: EXTREMOS RELATIVOS; GRÁFICOS DE POLINÔMIOS

Nesta seção desenvolveremos métodos para encontrar os pontos altos e baixos do gráfico de uma função e discutiremos procedimentos para analisar os gráficos de polinômios.

■ MÁXIMOS MÍNIMOS E RELATIVOS

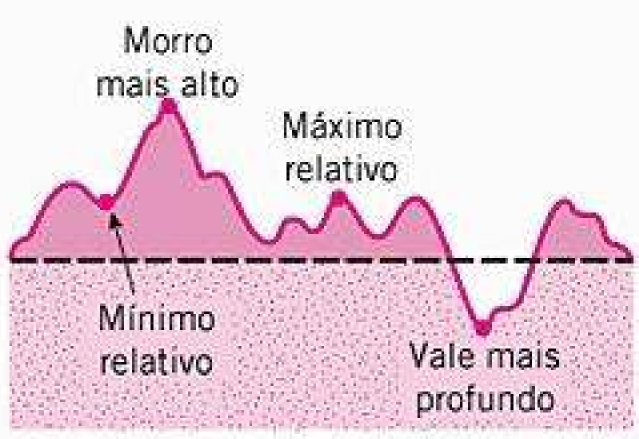


Figura 5.2.1

Se imaginarmos o gráfico de uma função como uma cordilheira bidimensional com morros e vales, então o topo dos morros e o fundo dos vales serão chamados *máximos* e *mínimos relativos*, respectivamente (Figura 5.2.1). Os máximos e os mínimos relativos são os pontos mais altos e mais baixos em sua *vizinhança próxima*. Observe que nem o máximo relativo é necessariamente o ponto mais alto, nem o mínimo relativo é o ponto mais baixo – eles são tão-somente pontos altos e baixos *relativos* à vizinhança imediata. Essas idéias estão relacionadas na seguinte definição.

> **5.2.1 DEFINIÇÃO** Dizemos que uma função f tem um ***máximo relativo*** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o maior valor, isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x no intervalo. Analogamente, se diz que f tem um ***mínimo relativo*** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o menor valor, isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x no intervalo. Quando f tiver um máximo ou um mínimo relativo em x_0, se diz que f tem um ***extremo relativo*** em x_0.

► Exemplo 1 Podemos ver na Figura 5.2.2 que:

- $f(x) = x^2$ tem um mínimo relativo em $x = 0$, mas não máximos relativos.
- $f(x) = x^3$ não tem extremos relativos.
- $f(x) = x^3 - 3x + 3$ tem um máximo relativo em $x = -1$ e um mínimo relativo em $x = 1$.
- $f(x) = \cos x$ tem máximos relativos em todos os múltiplos pares de π e mínimos relativos em todos os múltiplos ímpares de π. ◄

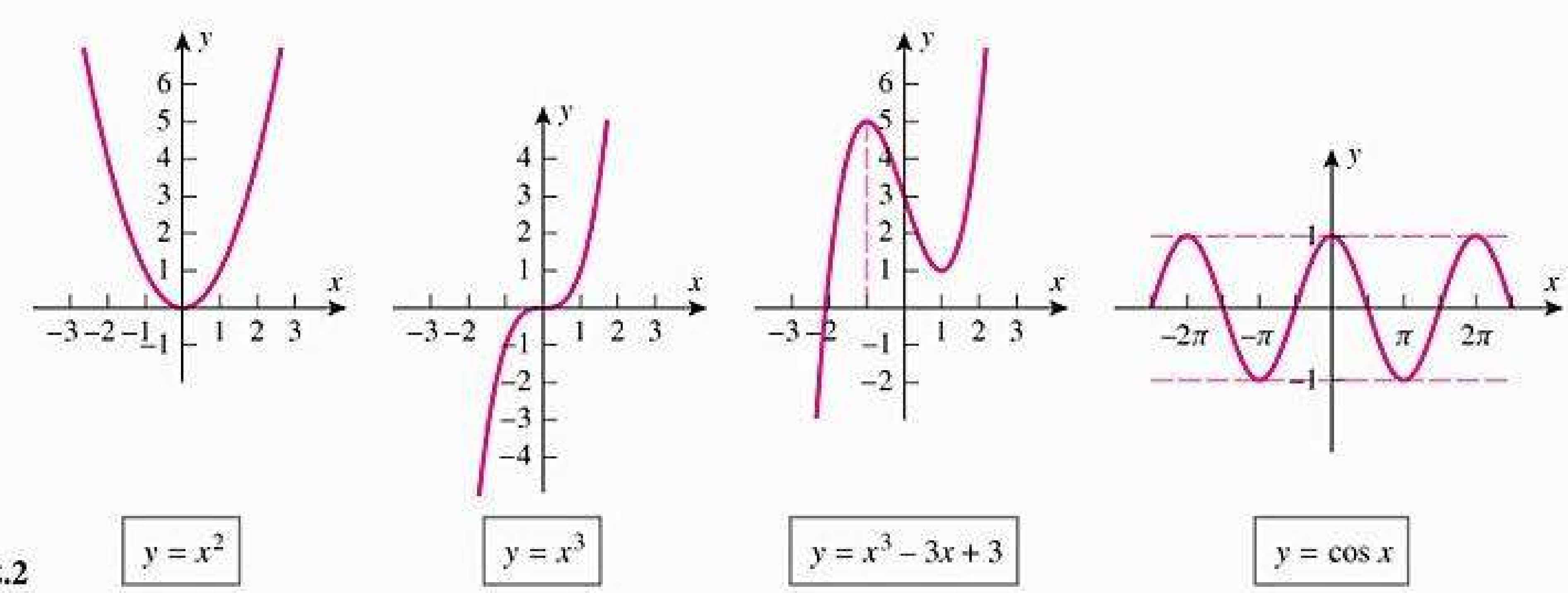


Figura 5.2.2

Os extremos relativos das quatro funções do Exemplo 1 ocorrem em pontos nos quais os gráficos das funções têm retas tangentes horizontais. A Figura 5.2.3 ilustra que um extremo relativo também pode ocorrer em um ponto onde a função não é diferenciável. Em geral, definimos um ***ponto crítico*** de uma função f como um ponto do domínio de f em que o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal ou f não é diferenciável. Para distinguir entre os dois tipos de pontos críticos, dizemos que x é um ***ponto estacionário*** de f se $f'(x) = 0$. O teorema a seguir, cuja prova aparece no Apêndice C, afirma que os pontos críticos de uma função constituem a coleção completa dos candidatos a extremos relativos do interior do domínio da função.

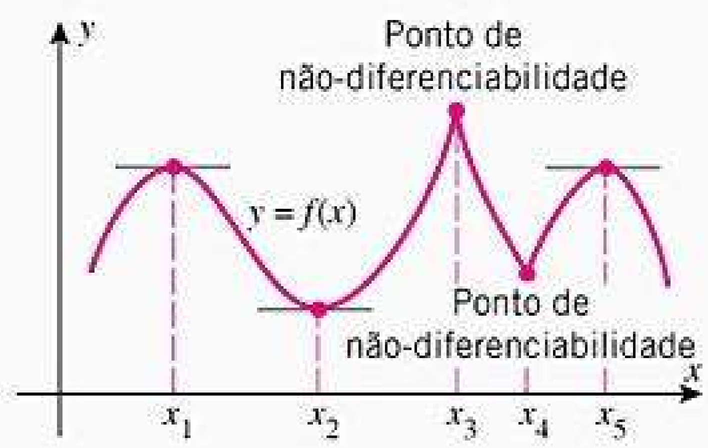


Figura 5.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários

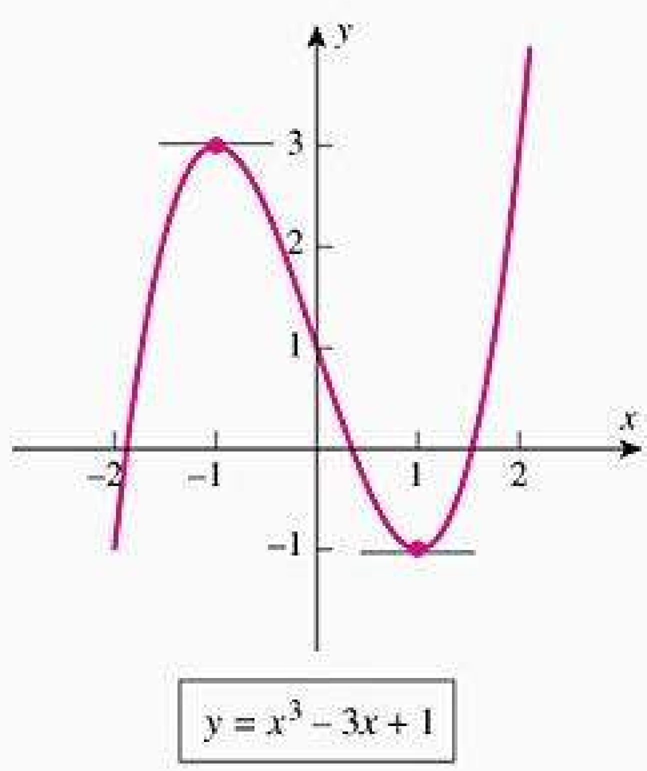


Figura 5.2.4

> **5.2.2 TEOREMA** *Suponha que f seja uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto x_0. Se f tem um extremo relativo em $x = x_0$, então $x = x_0$ é um ponto crítico de f; assim, ou $f'(x_0) = 0$ ou f não é diferenciável em x_0.*

► Exemplo 2 Encontre todos os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Solução A função f, por ser um polinômio, é diferenciável em toda parte, portanto, seus pontos críticos são todos estacionários. Para encontrar esses pontos, devemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Como

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

concluímos que os pontos críticos ocorrem em $x = -1$ e $x = 1$. Isso é consistente com o gráfico de f na Figura 5.2.4. ◄

Qual é o número máximo de pontos críticos que pode ter um polinômio de grau n? Explique por quê.

► Exemplo 3 Encontre todos os pontos críticos de $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$.

Solução A função f é contínua em toda parte e sua derivada é

$$f'(x) = 5x^{2/3} - 10x^{-1/3} = 5x^{-1/3}(x-2) = \frac{5(x-2)}{x^{1/3}}$$

Vemos, então, que $f'(x) = 0$ se $x = 2$ e $f'(x)$ não está definida em $x = 0$. Assim, $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos críticos de f e $x = 2$ é um ponto estacionário. Isso é consistente com o gráfico de f mostrado na Figura 5.2.5. ◄

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Conforme discutimos às páginas 23 e 24, alguns recursos gráficos podem ter dificuldades em produzir partes do gráfico da Figura 5.2.5 por causa dos expoentes fracionários. Use a observação que precede o Exercício 29 da Seção 1.2 para ajudar a gerar o gráfico nessa figura.

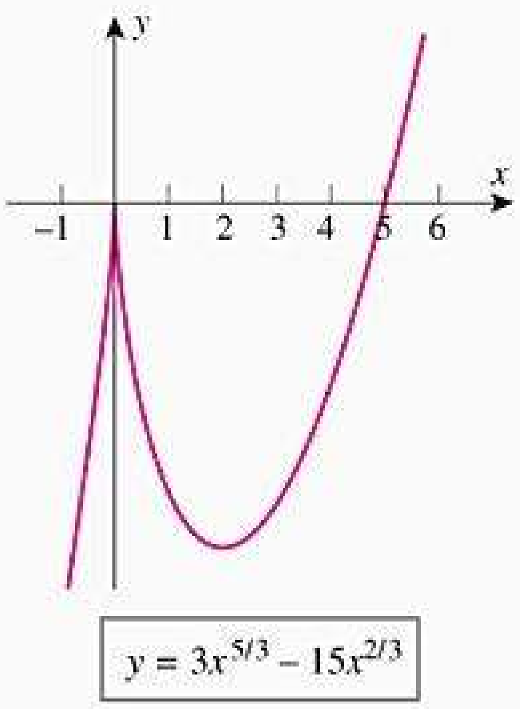


Figura 5.2.5

TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

O Teorema 5.2.2 afirma que os extremos relativos devem ocorrer em pontos críticos, mas *não* diz que *em cada* ponto crítico deve ocorrer um extremo relativo. Por exemplo, para os oito pontos críticos na Figura 5.2.6, ocorrem extremos relativos em cada ponto x_0 da linha superior e em nenhum ponto x_0 da linha inferior. Além disso, nos pontos críticos da primeira linha, as derivadas têm sinais opostos dos dois lados de x_0, enquanto nos pontos críticos da segunda linha os sinais das derivadas são os mesmos de ambos os lados. Assim, podemos concluir que:

Uma função f tem um extremo relativo naqueles pontos críticos em que f' troca de sinal.

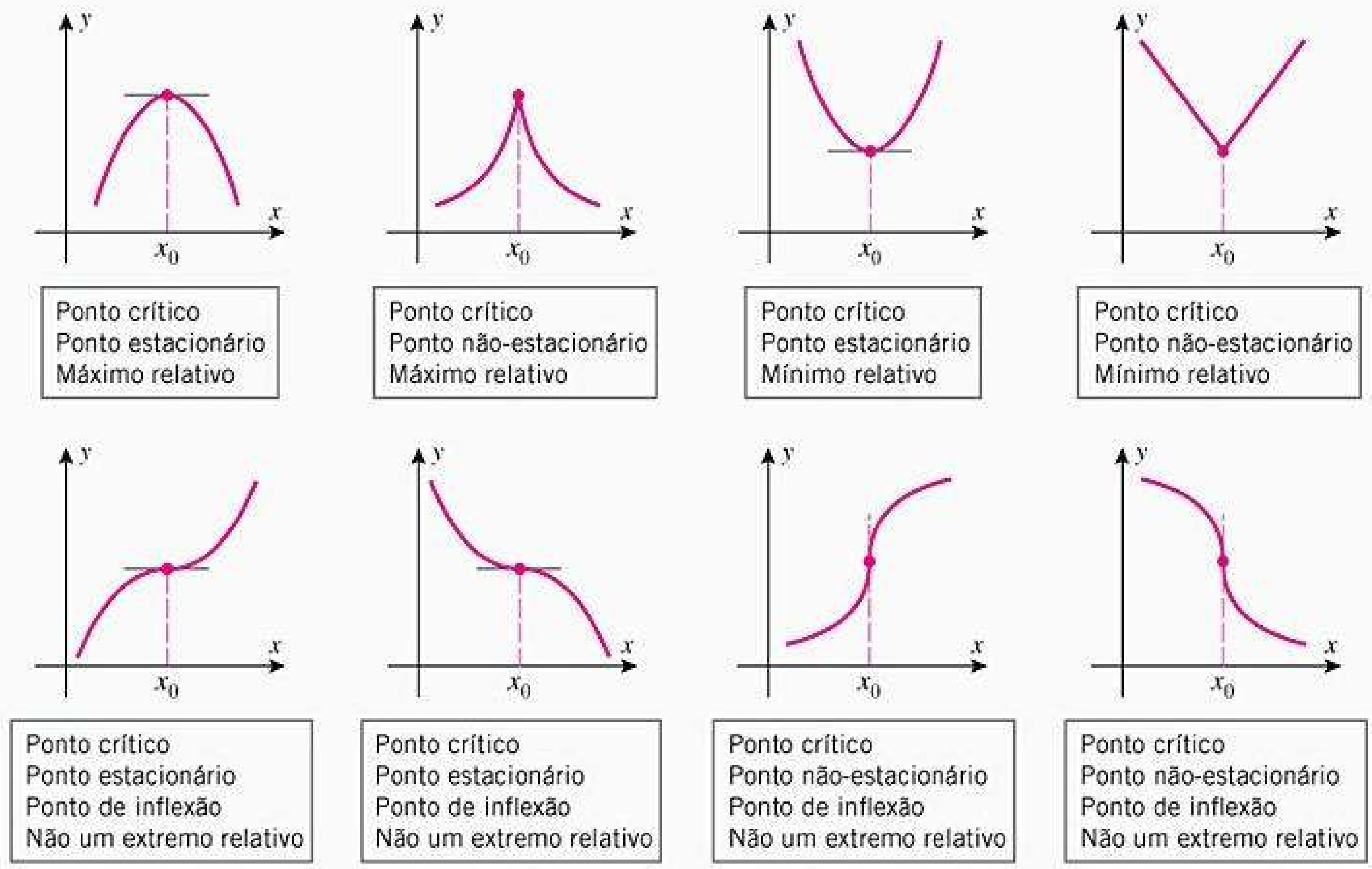


Figura 5.2.6

Podemos, de fato, levar isso um passo adiante. Nos dois máximos relativos da Figura 5.2.6, a derivada é positiva à esquerda e negativa à direita, e nos dois mínimos relativos, a derivada é negativa à esquerda e positiva à direita. Isso tudo está resumido mais precisamente no teorema seguinte.

5.2.3 TEOREMA (***Teste da Derivada Primeira***) *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.*

(*a*) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.*

(*b*) *Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

(*c*) *Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal tanto em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 quanto em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f não tem extremo relativo em x_0.*

Informalmente, as partes (*a*) e (*b*) do Teorema 5.2.3 nos dizem que, para uma função contínua, os máximos relativos ocorrem em pontos críticos onde a derivada troca de + para – e, os mínimos relativos, em pontos críticos onde a derivada troca de – para +.

DEMONSTRAÇÃO Provaremos (a), deixando (b) e (c) como exercícios. Estamos supondo que $f'(x) > 0$ no intervalo (a, x_0) e que $f'(x) < 0$ no intervalo (x_0, b), e queremos mostrar que

$$f(x_0) \geq f(x)$$

para todo x no intervalo (a, b). Contudo, as duas hipóteses, junto com o Teorema 5.1.2 e a nota marginal, implicam que f é crescente no intervalo $(a, x_0]$ e decrescente no intervalo $[x_0, b)$. Assim, $f(x_0) \geq f(x)$ para cada x em (a, b), com igualdade valendo somente no ponto x_0. ■

► **Exemplo 4** Mostramos no Exemplo 3 que a função $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$ tem pontos críticos em $x = 0$ e em $x = 2$. A Figura 5.2.5 sugere que f tem um máximo relativo em $x = 0$ e um mínimo relativo em $x = 2$. Confirme isso usando o teste da derivada primeira.

Solução Mostramos no Exemplo 3 que

$$f'(x) = \frac{5(x-2)}{x^{1/3}}$$

Tabela 5.2.1

INTERVALO	$5(x-2)/x^{1/3}$	$f'(x)$
$x < 0$	$(-)/(-)$	$+$
$0 < x < 2$	$(-)/(+)$	$-$
$x > 2$	$(+)/(+)$	$+$

Uma análise de sinais dessa derivada está na Tabela 5.2.1. O sinal de f' muda de + para − em $x = 0$, de modo que ocorre um máximo relativo nesse ponto. O sinal muda de − para + em $x = 2$, de modo que ocorre um mínimo relativo nesse ponto. ◄

■ TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Há um outro teste para extremos relativos, o qual é freqüentemente mais fácil de aplicar do que o da derivada primeira. Baseia-se na observação geométrica de que uma função f tem um máximo relativo em um ponto estacionário se o gráfico de f é côncavo para baixo em um intervalo aberto contendo aquele ponto estacionário, enquanto tem um mínimo relativo se é côncavo para cima (Figura 5.2.7).

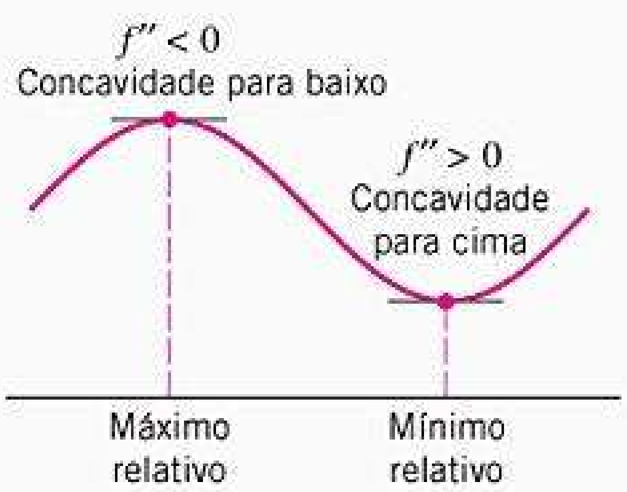


Figura 5.2.7

> **5.2.4 TEOREMA** (***Teste da Derivada Segunda***) *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto* x_0.
>
> (a) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo *em* x_0.
>
> (b) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo *em* x_0.
>
> (c) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo ou mínimo relativo ou nenhum dos dois em x_0.

Provaremos (a) e (c), deixando (b) como exercício.

DEMONSTRAÇÃO (a) Estamos supondo que $f'(x_0) = 0$ e que $f''(x_0) > 0$, e queremos mostrar que f tem um mínimo relativo em x_0. Expressando $f''(x_0)$ como um limite e usando as duas condições dadas, obtemos

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Isso implica que, para x suficientemente próximo mas diferente de x_0, temos

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \qquad (1)$$

Assim, existem um intervalo aberto que se estende à esquerda de x_0 e um intervalo aberto que se estende à direita de x_0 em que (1) é válido. No intervalo aberto que se estende à esquerda, o denominador em (1) é negativo, portanto, $f'(x) < 0$; e no intervalo aberto que se estende à

direita, o denominador é positivo, portanto, $f'(x) > 0$. Agora, segue da parte (*b*) do teste da derivada primeira (Teorema 5.2.3) que f tem um mínimo relativo em x_0.

DEMONSTRAÇÃO (*c*) Para provar essa parte do teorema, basta fornecer funções para as quais $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ em algum ponto x_0, mas com uma delas tendo um mínimo relativo em x_0, uma outra tendo um máximo relativo em x_0 e uma última sem máximo nem mínimo relativo em x_0. Deixamos a cargo do leitor mostrar que três tais funções são $f(x) = x^4$ (mínimo relativo em $x = 0$), $f(x) = -x^4$ (máximo relativo em $x = 0$) e $f(x) = x^3$ (nem máximo relativo nem mínimo relativo em $x = 0$). ■

► Exemplo 5 Encontre os extremos relativos de $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

Solução Temos

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x + 1)(x - 1)$$
$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$$

Resolvendo $f'(x) = 0$, obtemos os pontos estacionários $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$. Como mostramos na tabela a seguir, podemos concluir pelo teste da derivada segunda que f tem um máximo relativo em $x = -1$ e um mínimo relativo em $x = 1$.

PONTO ESTACIONÁRIO	$30x(2x^2 - 1)$	$f''(x)$	TESTE DA DERIVADA SEGUNDA
$x = -1$	-30	$-$	f tem um máximo relativo
$x = 0$	0	0	Inconclusivo
$x = 1$	30	$+$	f tem um mínimo relativo

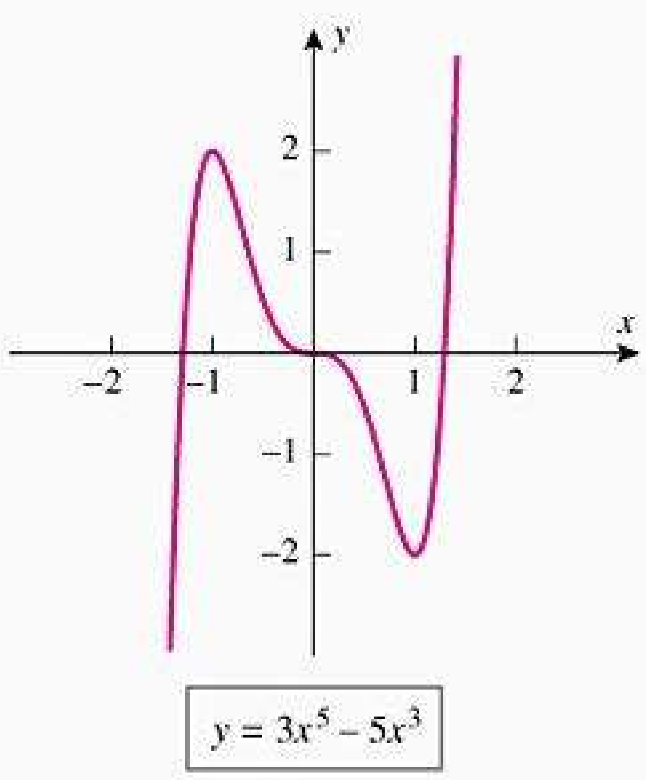


Figura 5.2.8

O teste é inconclusivo em $x = 0$, portanto, tentemos o teste da derivada primeira nesse ponto. Uma análise de sinais de f' é dada na tabela seguinte:

INTERVALO	$15x^2(x + 1)(x - 1)$	$f'(x)$
$-1 < x < 0$	$(+)(+)(-)$	$-$
$0 < x < 1$	$(+)(+)(-)$	$-$

Como não há mudança de sinal de f' em $x = 0$, não ocorre nem um máximo relativo nem um mínimo relativo nesse ponto. Tudo isso é consistente com o gráfico de f mostrado na Figura 5.2.8. ◄

■ IMPLICAÇÕES GEOMÉTRICAS DA MULTIPLICIDADE

Nosso objetivo final nesta seção é delinear um procedimento geral que possa ser usado para analisar e traçar o gráfico de polinômios. Para isso, será útil entender como o gráfico de um polinômio se comporta na vizinhança de suas raízes. Por exemplo, seria bom saber qual propriedade do polinômio no Exemplo 5 produziu o ponto de inflexão com tangência horizontal na raiz $x = 0$.

Lembre que uma raiz $x = r$ de um polinômio $p(x)$ tem ***multiplicidade m*** se $(x - r)^m$ dividir $p(x)$ mas $(x - r)^{m+1}$ não dividir. Uma raiz de multiplicidade 1 é denominada ***raiz simples***. A Figura 5.2.9 e o próximo teorema mostram que o comportamento de um polinômio na vizinhança de uma raiz real é determinado pela multiplicidade dessa raiz (a prova será omitida).

5.2.5 IMPLICAÇÕES GEOMÉTRICAS DA MULTIPLICIDADE *Suponha que $p(x)$ seja um polinômio com uma raiz de multiplicidade m em $x = r$.*

(*a*) *Se m é par, então o gráfico de $y = p(x)$ é tangente ao eixo x em $x = r$, mas não cruza o eixo x nesse ponto nem tem um ponto de inflexão nesse ponto.*

(*b*) *Se m é ímpar e maior do que 1, então o gráfico é tangente ao eixo x em $x = r$, cruza o eixo x nesse ponto e tem um ponto de inflexão nesse ponto.*

(*c*) *Se $m = 1$ (de modo que a raiz é simples), então o gráfico não é tangente ao eixo x em $x = r$, cruza o eixo x nesse ponto e pode ou não ter um ponto de inflexão nesse ponto.*

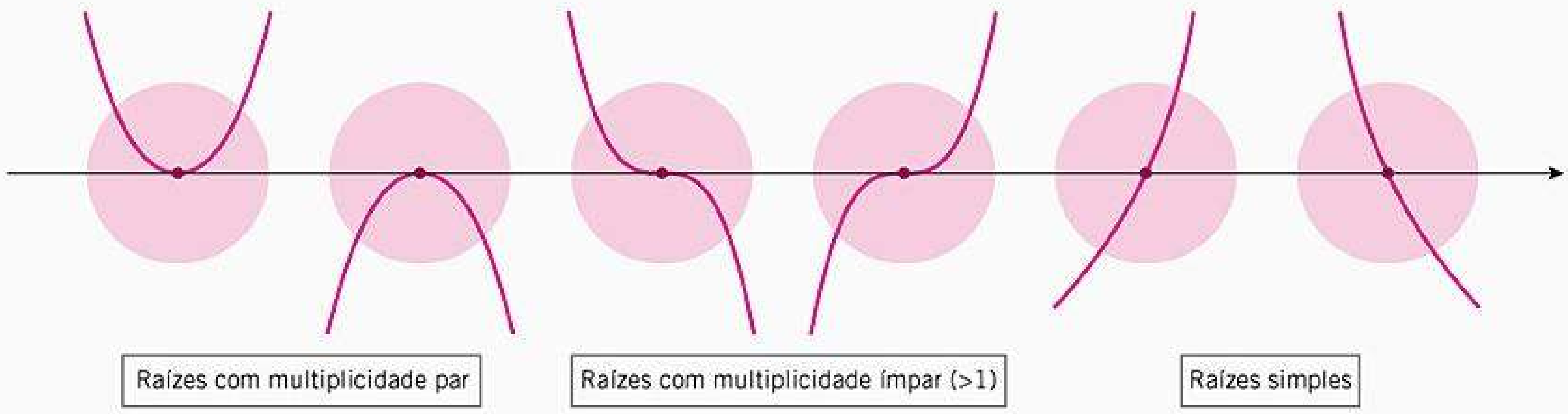


Figura 5.2.9

► **Exemplo 6** Faça uma conjectura sobre o comportamento do gráfico de

$$y = x^3(3x - 4)(x + 2)^2$$

na vizinhança de seus cortes com o eixo x e verifique sua conjectura gerando o gráfico.

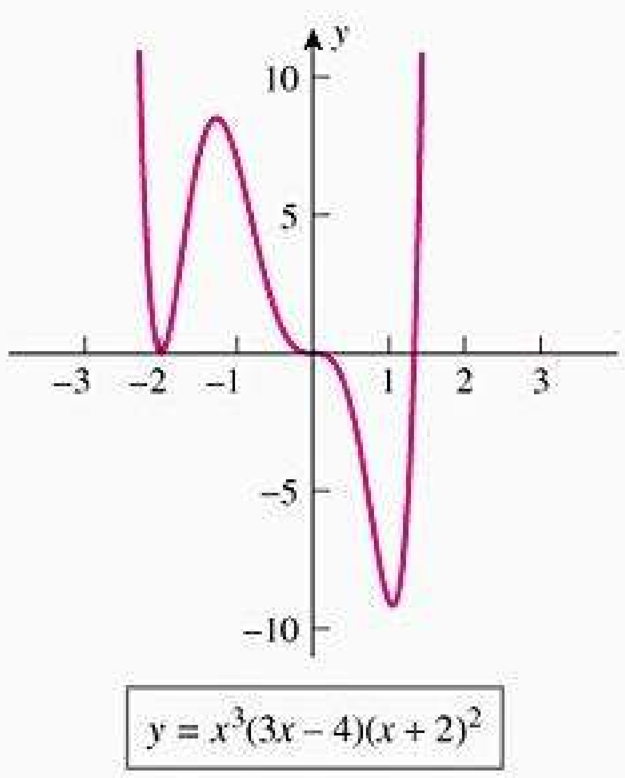


Figura 5.2.10

Solução Os cortes com o eixo x ocorrem em $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$ e $x = -2$. A raiz $x = 0$ tem multiplicidade 3, que é ímpar; assim, naquele ponto, o gráfico deve ser tangente ao eixo x, cruzá-lo e ter um ponto de inflexão. A raiz $x = -2$ tem multiplicidade 2, que é par; assim, o gráfico deve ser tangente ao eixo x, mas não deve cruzá-lo. A raiz $x = \frac{4}{3}$ é simples, logo a curva deve cruzar o eixo x sem ser tangente. Tudo isso está de acordo com o gráfico da Figura 5.2.10. ◄

■ ANÁLISE DE POLINÔMIOS

Historicamente, a expressão "esboçar uma curva" significava usar o Cálculo para ajudar a desenhar o gráfico de uma função à mão: o objetivo era o gráfico em si. Como agora os gráficos podem ser produzidos com grande precisão por meio de calculadoras e computadores, mudou o propósito de esboçar uma curva. Atualmente, já começamos muitas vezes com um gráfico produzido por algum recurso gráfico, e só então passamos a "esboçar a curva" para identificar as características importantes do gráfico que o recurso possa ter omitido. Assim, o objetivo de esboçar curvas não é mais o gráfico em si, mas a informação que ele revela sobre a função.

Dentre as funções mais simples a serem esboçadas e analisadas estão os polinômios. Suas características significativas são a simetria, os cortes com os eixos, os extremos relativos, os pontos de inflexão e o comportamento final, ou seja, quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. A Figura 5.2.11 mostra os gráficos de quatro polinômios em x típicos. Os gráficos na Figura 5.2.11 têm propriedades que são comuns a todos os polinômios:

- O domínio natural de um polinômio é $(-\infty, +\infty)$.
- Os polinômios são contínuos em toda parte.

Para cada um dos gráficos na Figura 5.2.11, conte o número de cortes com o eixo x, os extremos relativos e os pontos de inflexão e confirme se sua conta é consistente com o grau do polinômio.

- Os polinômios são diferenciáveis em toda parte, de modo que seus gráficos não têm bicos ou retas tangentes verticais.
- O gráfico de um polinômio não-constante sempre cresce ou decresce sem cota quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. Isso ocorre porque o limite de um polinômio não-constante quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$ é sempre $\pm\infty$, dependendo do sinal do termo de maior grau e se o polinômio é de grau par ou ímpar [ver Fórmulas (17) e (18) da Seção 2.3 e a discussão a esse respeito].
- O gráfico de um polinômio de grau n (> 2) tem no máximo n cortes com o eixo x, no máximo $n - 1$ extremos relativos e no máximo $n - 2$ pontos de inflexão. Isso ocorre porque os cortes com o eixo x, os extremos relativos e os pontos de inflexão de um polinômio $p(x)$ estão entre as soluções reais das equações $p(x) = 0$, $p'(x) = 0$ e $p''(x) = 0$, e os polinômios dessas equações têm grau n, $n - 1$ e $n - 2$, respectivamente. Assim, por exemplo, o gráfico de um polinômio quadrático tem no máximo dois cortes com o eixo x, um extremo relativo e nenhum ponto de inflexão; e o gráfico de um polinômio cúbico tem no máximo três cortes com o eixo x, dois extremos relativos e um ponto de inflexão.

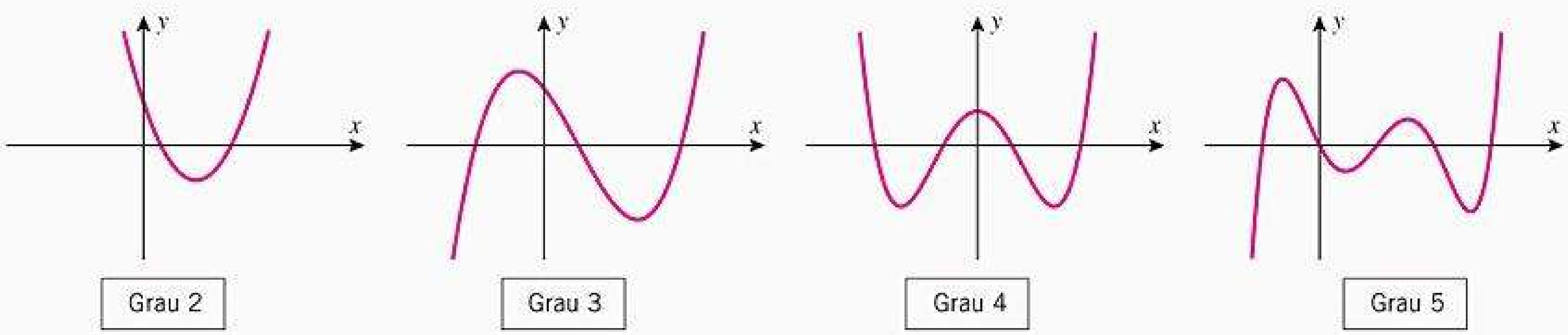
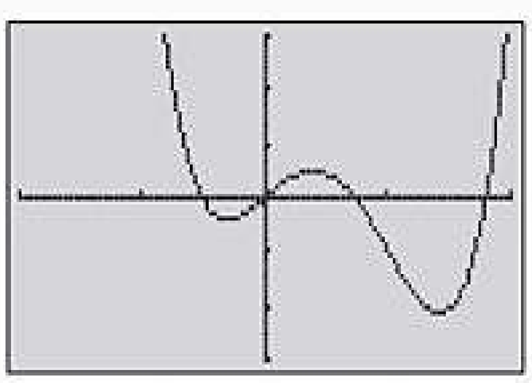


Figura 5.2.11



$[-2, 2] \times [-3, 3]$

$y = 3x^4 - 6x^3 + 2x$

Figura 5.2.12

► Exemplo 7 A Figura 5.2.12 mostra o gráfico de

$$y = 3x^4 - 6x^3 + 2x$$

produzido por uma calculadora gráfica. Confirme que o gráfico não está omitindo características significativas.

Solução Podemos ter certeza de que o gráfico mostra todas as características significativas do polinômio porque o polinômio tem grau 4 e podemos identificar quatro raízes, três extremos relativos e dois pontos de inflexão. Além disso, o gráfico sugere o comportamento correto quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$, pois

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^4 - 6x^3 + 2x) = \lim_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^4 - 6x^3 + 2x) = \lim_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty \blacktriangleleft$$

► Exemplo 8 Esboce o gráfico da equação

$$y = x^3 - 3x + 2$$

e identifique a localização dos cortes com os eixos coordenados, os extremos relativos e os pontos de inflexão.

Solução A seguinte análise fornecerá a informação necessária para esboçar o gráfico.

Uma revisão de fatoração de polinômios é dada no Apêndice B.

- *Cortes com o eixo x:* Fatorando o polinômio, obtemos

$$x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2$$

que nos diz que os cortes com o eixo x ocorrem em $x = -2$ e $x = 1$.

- *Cortes com o eixo y:* Tomando $x = 0$, obtemos $y = 2$.
- *Comportamento final:* Temos

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

de modo que o gráfico cresce sem cota quando $x \to +\infty$ e decresce sem cota quando $x \to -\infty$.

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

- *Cresce, decresce, extremos relativos, pontos de inflexão:* Na Figura 5.2.13 temos uma análise de sinais das derivadas primeira e segunda e uma indicação de seu significado geométrico. Temos pontos estacionários em $x = -1$ e $x = 1$. Como o sinal de dy/dx muda de + para − em $x = -1$, ocorre um máximo relativo em $x = -1$, e como muda de − para + em $x = 1$, ocorre um mínimo relativo em $x = 1$. O sinal de d^2y/dx^2 troca de − para + em $x = 0$, portanto $x = 0$ é um ponto de inflexão.
- *Esboço final:* A Figura 5.2.14 mostra o esboço final, identificando as coordenadas dos cortes com os eixos, os extremos relativos e os pontos de inflexão. ◄

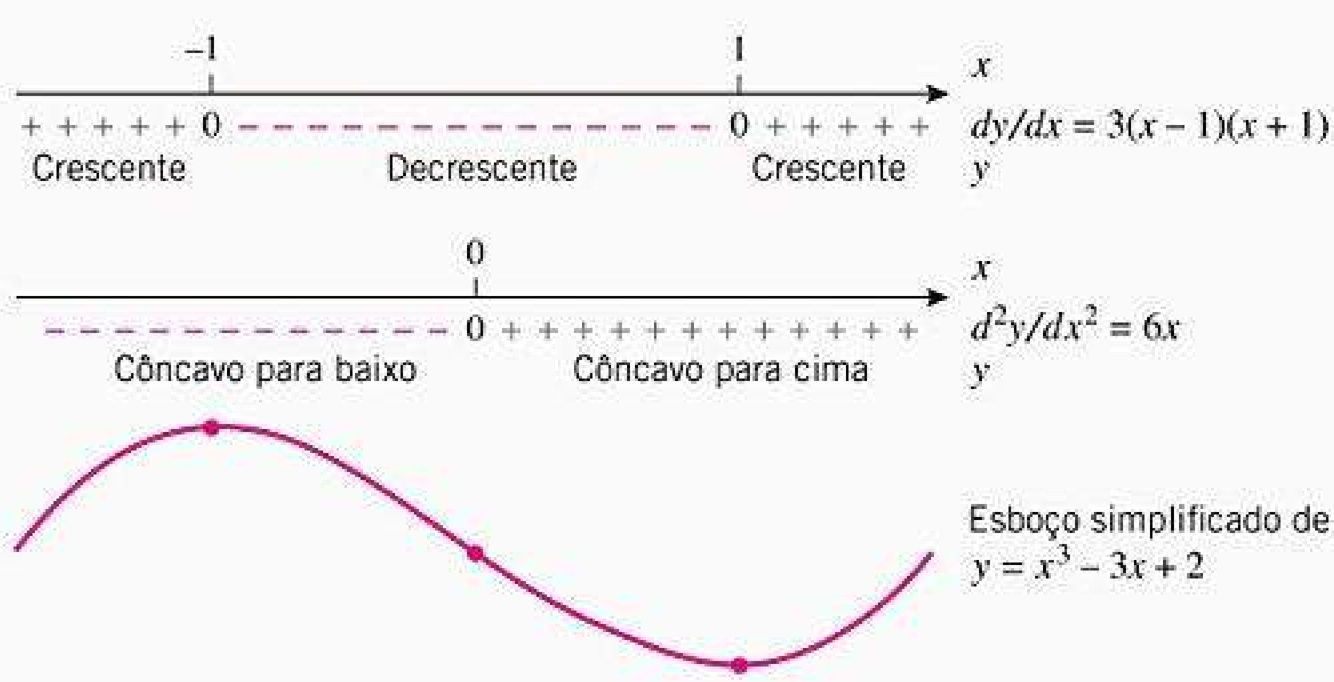


Figura 5.2.13

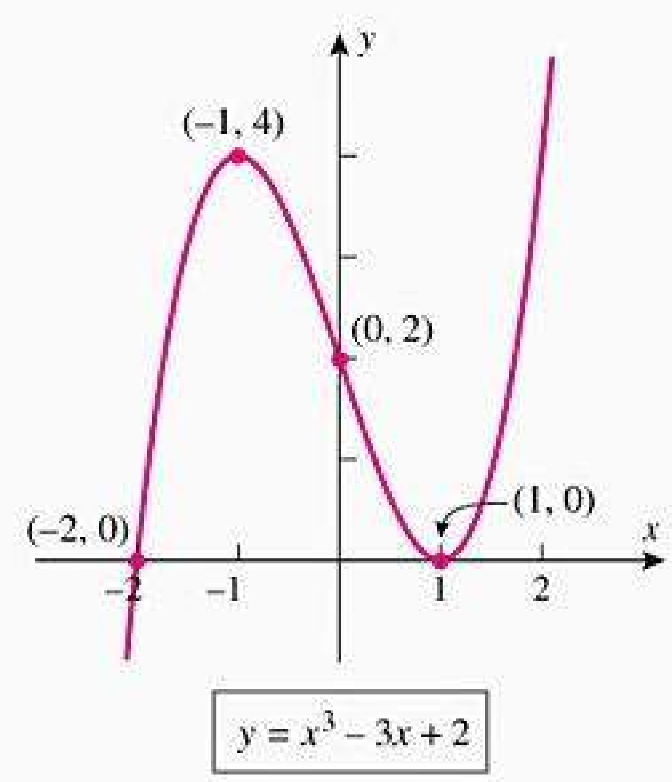


Figura 5.2.14

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.2 *(Ver página 289 para respostas.)*

1. Uma função f tem um máximo relativo em x_0 se existir um intervalo aberto contendo x_0 em que $f(x)$ é ________ $f(x_0)$ para cada x no intervalo.

2. Suponha que f esteja definida em toda parte e que $x = 2, 3, 5$ e 7 sejam pontos críticos de f. Se $f'(x)$ é positiva nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(5, 7)$ e é negativa nos intervalos $(2, 3)$, $(3, 5)$ e $(7, +\infty)$, então f tem máximos relativos em $x =$ ________ e mínimos relativos em $x =$ ________.

3. Suponha que f esteja definida em toda parte e que $x = -2$ e $x = 1$ sejam pontos críticos de f. Se $f''(x) = 2x + 1$, então f tem um ________ relativo em $x = -2$ e um ________ em $x = 1$.

4. Seja $f(x) = (x^2 - 4)^2$. Então $f'(x) = 4x(x^2 - 4)$ e $f''(x) = 4(3x^2 - 4)$. Identifique a localização (a) dos máximos relativos, (b) dos mínimos relativos e (c) dos pontos de inflexão do gráfico de f.

EXERCÍCIOS 5.2 Recurso Gráfico C CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua com as propriedades indicadas, onde $I = (-\infty, +\infty)$.

(a) f é côncava para cima no intervalo I e tem exatamente um extremo relativo.

(b) f é côncava para cima no intervalo I e não tem extremos relativos.

(c) A função f tem exatamente dois extremos relativos no intervalo I e $f(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.

(d) A função f tem exatamente dois extremos relativos no intervalo I e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to +\infty$.

2. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua com as propriedades indicadas, onde $I = (-\infty, +\infty)$.

(a) f tem exatamente um extremo relativo em I e $f(x) \to 0$ para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

(b) f tem exatamente dois extremos relativos em I e $f(x) \to 0$ para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

(c) f tem exatamente um ponto de inflexão e um extremo relativo em I.

(d) f tem infinitos extremos relativos e $f(x) \to 0$ para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

3. (a) Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ tem um mínimo relativo em $x = 1$.

(b) Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que $f(x) = x^3 - 3x + 3$ tem um mínimo relativo em $x = 1$ e um máximo relativo em $x = -1$.

4. (a) Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ tem um mínimo relativo em $x = 0$.

(b) Use os testes da derivada primeira e da derivada segunda para mostrar que $g(x) = \operatorname{tg}^2 x$ tem um mínimo relativo em $x = 0$.

(c) Dê um argumento verbal informal para explicar por que as funções de (a) e (b) têm mínimos relativos em $x = 0$.

5. (a) Mostre que as funções $f(x) = (x - 1)^4$ e $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ têm pontos estacionários em $x = 1$.

(b) O que o teste da derivada segunda diz sobre a natureza desses pontos?

(c) O que o teste da derivada primeira diz sobre a natureza desses pontos?

6. (a) Mostre que $f(x) = 1 - x^5$ e $g(x) = 3x^4 - 8x^3$ têm pontos estacionários em $x = 0$.

(b) O que diz o teste da derivada segunda sobre a natureza desses pontos?

(c) O que diz o teste da derivada primeira sobre a natureza desses pontos?

7-14 Localize todos os pontos críticos e identifique quais deles são pontos estacionários.

7. $f(x) = 4x^4 - 16x^2 + 17$

8. $f(x) = 3x^4 + 12x$

9. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 8}$

11. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 25}$

12. $f(x) = x^2(x - 1)^{2/3}$

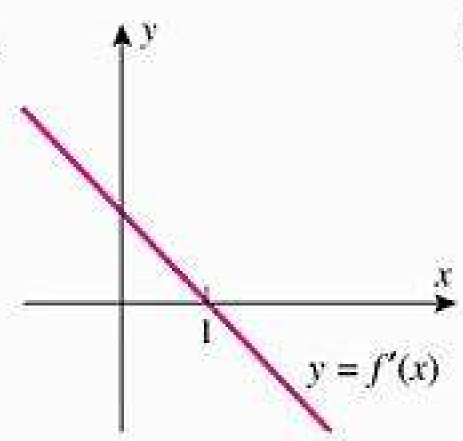
13. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

14. $f(x) = \operatorname{sen} |x|$

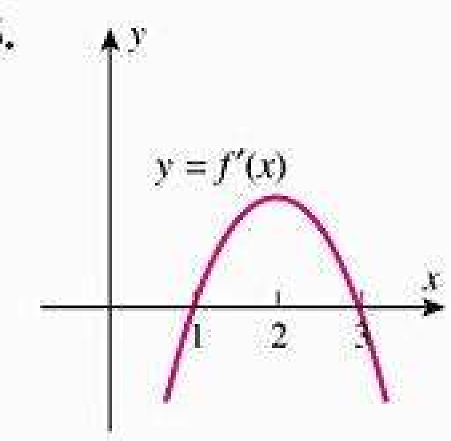
ENFOCANDO CONCEITOS

15-18 Use o gráfico de f' mostrado em cada figura para estimar todos os valores de x nos quais f tem (a) mínimos relativos, (b) máximos relativos e (c) pontos de inflexão.

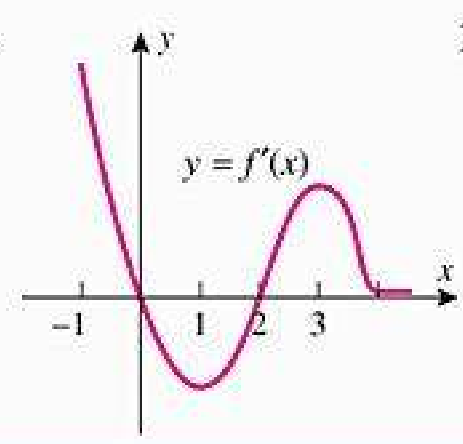
15.



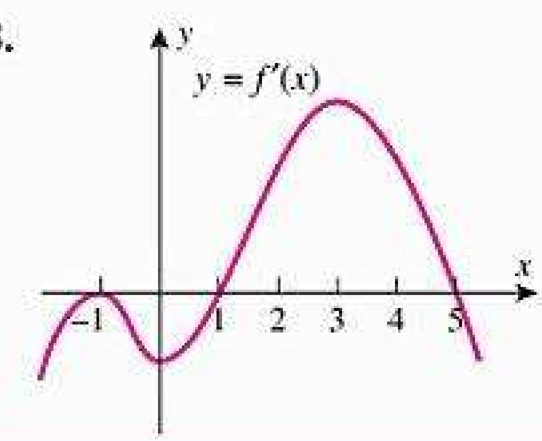
16.



17.



18.



19-26 Use a derivada dada para encontrar todos os pontos críticos de f e, em cada um deles, determine se ocorre um máximo relativo, um mínimo relativo ou nenhum desses. Suponha, em cada caso, que f seja contínua em toda parte.

19. $f'(x) = x^2(x^3 - 5)$

20. $f'(x) = 4x^3 - 9x$

21. $f'(x) = \dfrac{2 - 3x}{\sqrt[3]{x + 2}}$

22. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}$

23. $f'(x) = xe^{1-x^2}$

24. $f'(x) = x^4(e^x - 3)$

25. $f'(x) = \ln\left(\dfrac{2}{1 + x^2}\right)$

26. $f'(x) = e^{2x} - 5e^x + 6$

27-30 Encontre os extremos relativos usando os testes da derivada primeira e da derivada segunda.

27. $f(x) = 1 + 8x - 3x^2$

28. $f(x) = x^4 - 12x^3$

29. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 < x < \pi$

30. $f(x) = (x - 3)e^x$

31-44 Use qualquer método para encontrar os extremos relativos da função f.

31. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

32. $f(x) = x(x - 4)^3$

33. $f(x) = x^3(x+1)^2$

34. $f(x) = x^2(x+1)^3$

35. $f(x) = 2x + 3x^{2/3}$

36. $f(x) = 2x + 3x^{1/3}$

37. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

38. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+16}$

39. $f(x) = \ln((2 + x^2)$

40. $f(x) = \ln|2 + x^3|$

41. $f(x) = e^{2x} - e^x$

42. $f(x) = (xe^x)^2$

43. $f(x) = |3x - x^2|$

44. $f(x) = |1 + \sqrt[3]{x}|$

45-54 Dê um gráfico do polinômio e identifique as coordenadas dos cortes com os eixos, dos pontos estacionários e dos pontos de inflexão. Confira as respostas com um recurso gráfico.

45. $p(x) = x^2 - 3x - 4$

46. $p(x) = 1 + 8x - x^2$

47. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

48. $p(x) = 2 - x + 2x^2 - x^3$

49. $p(x) = (x+1)^2(2x - x^2)$

50. $p(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

51. $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

52. $p(x) = 4x^3 - 9x^4$

53. $p(x) = x(x^2-1)^2$

54. $p(x) = x(x^2-1)^3$

55. Em cada parte: (i) Faça uma conjectura sobre o comportamento do gráfico nas vizinhanças dos cortes com o eixo x. (ii) Faça um esboço do gráfico baseado em sua conjectura e nos limites do polinômio quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. (iii) Compare seu esboço com o gráfico gerado com um recurso computacional.

(a) $y = x(x-1)(x+1)$ (b) $y = x^2(x-1)^2(x+1)^2$

(c) $y = x^2(x-1)^2(x+1)^3$ (d) $y = x(x-1)^5(x+1)^4$

56. Esboce o gráfico de $y = (x-a)^m(x-b)^n$ para os valores indicados de m e n, supondo $a < b$ (seis gráficos no total).

(a) $m = 1$, $n = 1, 2, 3$ (b) $m = 2$, $n = 2, 3$

(c) $m = 3$, $n = 3$

57-60 Encontre os extremos relativos no intervalo $0 < x < 2\pi$ e confirme se seus resultados estão de acordo com o gráfico gerado por um recurso computacional.

57. $f(x) = |\text{sen } 2x|$

58. $f(x) = \sqrt{3}x + 2 \text{ sen } x$

59. $f(x) = \cos^2 x$

60. $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{2 - \cos x}$

61-64 Use um recurso gráfico para fazer uma conjectura sobre os extremos relativos de f e então confira sua conjectura usando o teste da derivada primeira ou derivada segunda.

61. $f(x) = x \ln x$

62. $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

63. $f(x) = x^2 e^{-2x}$

64. $f(x) = 10 \ln x - x$

65-66 Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de f' e de f'' no intervalo indicado, e então use-os para estimar as coordenadas x dos extremos relativos relativos de f. Verifique se as suas estimativas estão de acordo com o gráfico de f.

65. $f(x) = x^4 - 24x^2 + 12x, \quad -5 \le x \le 5$

66. $f(x) = \text{sen } \frac{1}{2}x \cos x, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

67-70 Use um CAS para fazer os gráficos de f' e f''. Use esses gráficos para fazer uma conjectura sobre a localização e a natureza das coordenadas x dos extremos relativos de f e verifique-a pelo gráfico de f.

C 67. $f(x) = \dfrac{10x^3 - 3}{3x^2 - 5x + 8}$

C 68. $f(x) = \dfrac{\text{arc tg } (x^2 - x)}{x^2 + 4}$

C 69. $f(x) = \sqrt{x^4 + \cos^2 x}$

C 70. $f(x) = x^2(e^{2x} - e^x)$

71. Em cada parte, encontre k de tal forma que f tenha um extremo relativo em $x = 3$.

(a) $f(x) = x^2 + \dfrac{k}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + k}$

C 72. (a) Use um CAS para fazer o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

e use o gráfico para estimar as coordenadas x dos extremos relativos.

(b) Encontre as coordenadas x exatas usando um CAS para resolver a equação $f'(x) = 0$.

ENFOCANDO CONCEITOS

73. Os dois gráficos nas figuras abaixo retratam uma função racional $r(x)$ e sua derivada $r'(x)$.

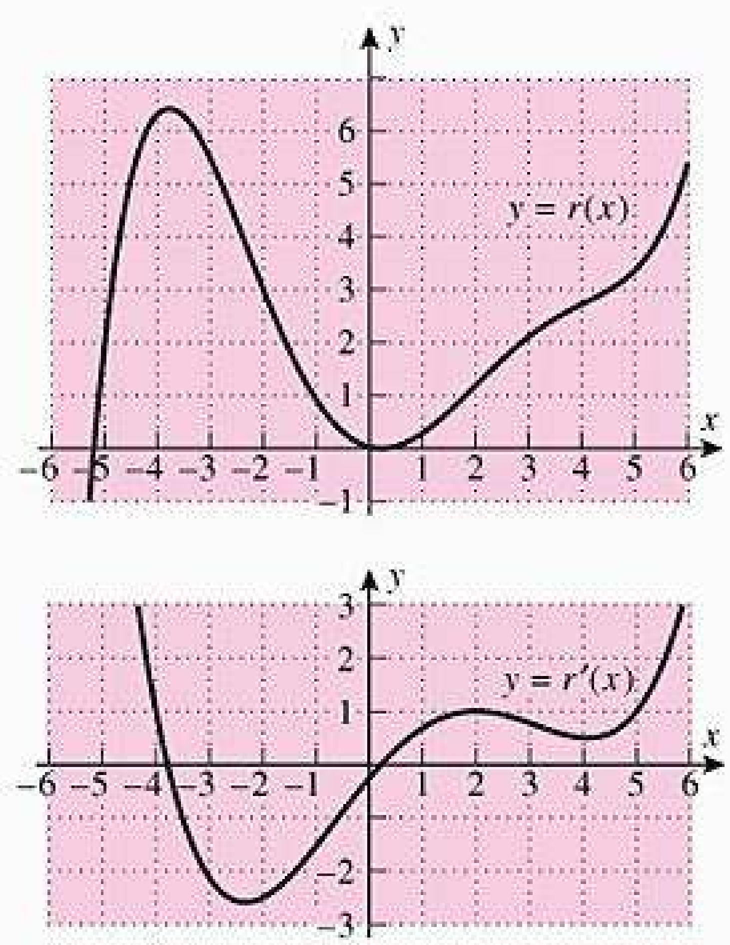
(a) Aproxime as coordenadas de cada ponto de inflexão do gráfico de $y = r(x)$.

(b) Suponha que $f(x)$ seja uma função contínua em toda parte e cuja *derivada* satisfaz

$$f'(x) = (x^2 - 4) \cdot r(x)$$

(i) Quais são os pontos críticos de $f(x)$? Em cada ponto crítico, identifique se $f(x)$ tem um máximo relativo, um mínimo relativo ou nenhum desses.

(ii) Aproxime $f''(1)$.



Figuras Ex-73

74. Com $r(x)$ dado no Exercício 73, seja $g(x)$ uma função contínua em toda parte e tal que $g'(x) = x - r(x)$. A função $g(x)$ tem um ponto de inflexão em quais valores de x?

75. Encontre os valores de a, b, c e d, de tal forma que a função

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenha um mínimo relativo em (0, 0) e um máximo relativo em (1, 1).

76. Funções da forma

$$f(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \quad x > 0$$

onde n é um inteiro positivo, surgem no estudo estatístico do fluxo de trânsito.

(a) Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de f para n = 2, 3, 4 e 5 e elabore uma conjectura sobre o número e a localização dos extremos relativos de f.

(b) Confirme sua conjectura usando o teste da derivada primeira.

77. As funções da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

surgem em uma variedade de problemas estatísticos.

(a) Use o teste da derivada primeira para mostrar que f tem um máximo relativo em $x = 0$ e confirme isso usando um recurso gráfico computacional para esboçar o gráfico de f.

(b) Esboce o gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2}$$

onde μ é uma constante, e identifique as coordenadas dos extremos relativos.

78. Suponha h e g com máximo relativo em x_0. Prove que vale ou que não vale:

(a) $h + g$ tem um máximo relativo em x_0.

(b) $h - g$ tem um máximo relativo em x_0.

79. Esboce algumas curvas para mostrar que as três partes do teste da derivada primeira (Teorema 5.2.3) podem ser falsas, sem a hipótese de que f seja contínua em x_0.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.2

1. menor do que ou igual a **2.** 2, 7; 5 **3.** máximo; mínimo **4.** (a) (0, 16) (b) (−2, 0) e (2, 0) (c) $(-2/\sqrt{3}, 64/9)$ e $(2/\sqrt{3}, 64/9)$

5.3 MAIS SOBRE GRÁFICOS DE CURVAS: FUNÇÕES RACIONAIS; CURVAS COM CÚSPIDES E RETAS TANGENTES VERTICAIS; USANDO RECURSOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção discutiremos procedimentos para obter o gráfico de funções racionais e outros tipos de curvas. Também discutiremos a interação entre o Cálculo e os recursos tecnológicos para traçar gráficos.

PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS

Em muitos problemas, as propriedades de interesse no gráfico de uma função são:

- simetrias
- cortes no eixo x
- extremos relativos
- intervalos de crescimento e decrescimento
- assíntotas
- periodicidade
- cortes no eixo y
- pontos de inflexão
- concavidade
- comportamento no infinito

Algumas dessas propriedades podem não ser relevantes em certos casos; por exemplo, assíntotas são características de funções racionais mas não de polinômios, e a periodicidade é característica de funções trigonométricas mas não de polinômios ou funções racionais. Assim, quando analisamos o gráfico de uma função f, é útil saber algo a respeito das propriedades gerais da família à qual a função pertence.

Em alguns problemas, geralmente temos um objetivo definido para a análise do gráfico. Por exemplo, podemos estar interessados em mostrar todas as características importantes da

função, ou somente no comportamento do gráfico quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$, ou ainda em alguma característica específica, tal como um ponto de inflexão particular. Assim, a escolha das características que enfocamos são ditadas pelos nossos objetivos no problema.

TRAÇANDO O GRÁFICO DE FUNÇÕES RACIONAIS

Lembre que uma função racional é uma função do tipo $f(x) = P(x)/Q(x)$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Os gráficos de funções racionais são mais complicados do que os de polinômios por causa das possibilidades de assíntotas e descontinuidades (ver, por exemplo, a Figura 1.4.11). Se $P(x)$ e $Q(x)$ não têm fator comum, então a informação obtida no procedimento seguinte é, em geral, suficiente para obter um esboço preciso do gráfico de uma dada função racional.

Como Traçar o Gráfico de uma Função Racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ em que $P(x)$ e $Q(x)$ Não Têm Fatores Comuns

Passo 1 Determine se há simetria em relação ao eixo y ou à origem.

Passo 2 Encontre os cortes com os eixos coordenados.

Passo 3 Encontre os valores de x para os quais $Q(x) = 0$. O gráfico tem uma assíntota vertical em cada um desses valores.

Passo 4 Determine o comportamento final do gráfico calculando os limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. Se um desses limites tem um valor finito L, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal.

Passo 5 Os únicos lugares em que $f(x)$ pode trocar de sinal estão nos pontos de corte com o eixo x e nas assíntotas verticais. Marque esses pontos no eixo x e calcule um valor amostral de $f(x)$ em cada um dos intervalos abertos determinados por esses pontos. Isso nos diz se $f(x)$ é positivo ou negativo nesse intervalo.

Passo 6 Use $f'(x)$ e $f''(x)$ para determinar os intervalos em que $f(x)$ é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Determine a localização dos pontos estacionários, dos extremos relativos e dos pontos de inflexão.

▶ Exemplo 1 Esboce um gráfico da equação

$$y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$$

e identifique a localização dos cortes com os eixos, os extremos relativos, os pontos de inflexão e as assíntotas.

Solução Como o numerador e o denominador não têm fatores comuns, utilizaremos o procedimento que acabamos de delinear.

- *Simetrias:* A substituição de x por $-x$ não muda a equação, de modo que o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.
- *Cortes com o eixo x:* Fazendo $y = 0$, obtemos os cortes com o eixo x nos pontos $x = -2$ e $x = 2$.
- *Cortes com o eixo y:* Fazendo $x = 0$, obtemos o corte com o eixo y em $\frac{1}{2}$.
- *Assíntotas verticais:* Fazendo $x^2 - 16 = 0$, obtemos as soluções $x = -4$ e $x = 4$. Como nenhuma solução é uma raiz de $2x^2 - 8$, o gráfico tem assíntotas verticais em $x = -4$ e $x = 4$.
- *Sinal de y:* O conjunto dos pontos em que ocorrem cortes com o eixo x ou assíntotas verticais é $\{-4, -2, 2, 4\}$. Esses pontos dividem o eixo x nos intervalos abertos

$$(-\infty, -4), \quad (-4, -2), \quad (-2, 2), \quad (2, 4), \quad (4, +\infty)$$

Podemos encontrar o sinal de y em cada intervalo escolhendo um ponto de teste arbitrário no intervalo e calculando $y = f(x)$ nesse ponto de teste (Tabela 5.3.1). Essa análise está resumida na primeira linha da Figura 5.3.1*a*.

- *Assíntotas horizontais:* Os limites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-(8/x^2)}{1-(16/x^2)}=2$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-(8/x^2)}{1-(16/x^2)}=2$$

fornecem a assíntota horizontal $y = 2$.

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-16)(4x)-(2x^2-8)(2x)}{(x^2-16)^2}=-\frac{48x}{(x^2-16)^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{48(16+3x^2)}{(x^2-16)^3}\quad\text{(verifique)}$$

Se cancelarmos o fator comum x no numerador e no denominador de

$$y=\frac{x(2x^2-8)}{x(x^2-16)}$$

obteremos a equação retratada no Exemplo 1. Existe alguma diferença entre o gráfico dessa equação e o obtido no Exemplo 1? Em geral, qual é o efeito sobre o gráfico de uma função racional se cancelamos fatores comuns do numerador e do denominador?

Conclusões:

- A análise de sinais de y na Figura 5.3.1*a* revela o comportamento do gráfico na vizinhança das assíntotas verticais $x = -4$ e $x = 4$: o gráfico cresce sem cota quando $x \to -4^-$ e decresce sem cota quando $x \to -4^+$; o gráfico decresce sem cota quando $x \to 4^-$ e cresce sem cota quando $x \to 4^+$ (Figura 5.3.1*b*).
- A análise de sinais de dy/dx na Figura 5.3.1*a* mostra que existe um máximo relativo no ponto estacionário $x = 0$. Não há mínimos relativos.
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 5.3.1*a* mostra que o gráfico é côncavo para cima à esquerda de $x = -4$, côncavo para baixo entre $x = -4$ e $x = 4$ e côncavo para cima à direita de $x = 4$. Não há pontos de inflexão.

O gráfico está dado na Figura 5.3.1*c*. ◄

Tabela 5.3.1

INTERVALO	PONTO-TESTE	$y=\dfrac{2x^2-8}{x^2-16}$	SINAL DE y
$(-\infty, -4)$	$x = -5$	$y = 14/3$	+
$(-4, -2)$	$x = -3$	$y = -10/7$	−
$(-2, 2)$	$x = 0$	$y = 1/2$	+
$(2, 4)$	$x = 3$	$y = -10/7$	−
$(4, +\infty)$	$x = 5$	$y = 14/3$	+

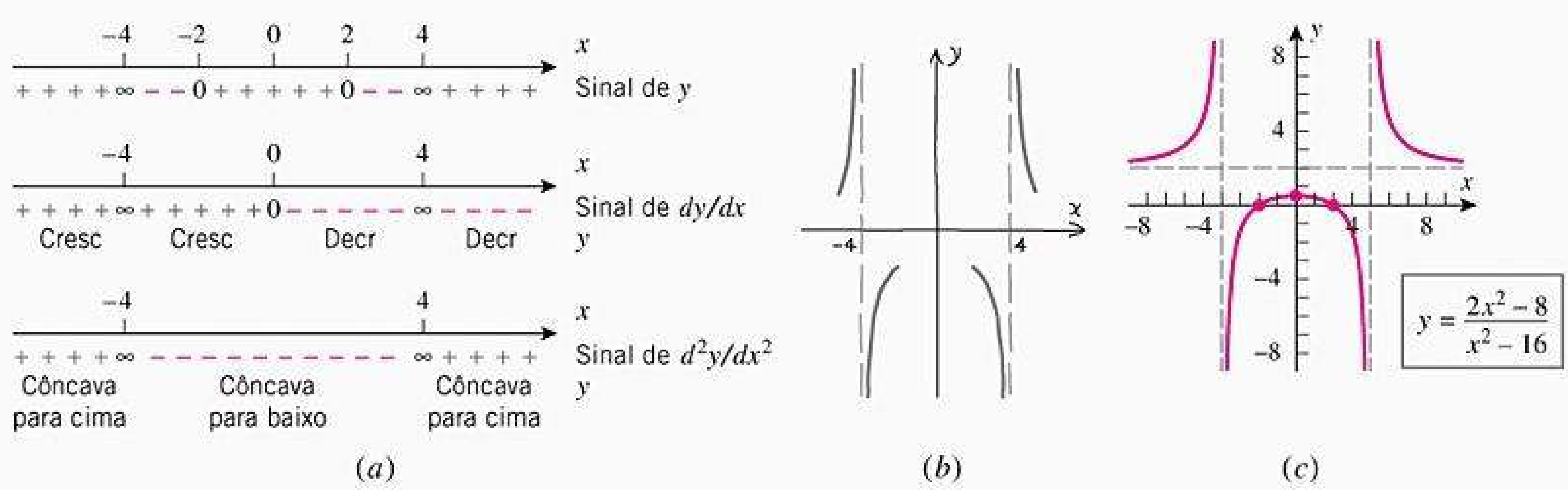


Figura 5.3.1

▶ Exemplo 2 Esboce um gráfico da equação

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

e identifique a localização de todas assíntotas, dos cortes com os eixos, dos extremos relativos e dos pontos de inflexão.

Solução

- *Simetrias:* Substituindo x por $-x$ e y por $-y$, obtemos uma equação que pode ser simplificada à equação original; portanto, o gráfico é simétrico em relação à origem.
- *Cortes com o eixo x:* Fazendo $y = 0$, obtemos os cortes com o eixo x nos pontos $x = -1$ e $x = 1$.
- *Cortes com o eixo y:* Fazendo $x = 0$, obtemos uma divisão por zero; portanto, não existe corte com o eixo y.
- *Assíntotas verticais:* Fazendo $x^3 = 0$, obtemos a solução $x = 0$. Isso não é uma raiz de $x^2 - 1$, portanto, $x = 0$ é uma assíntota vertical.
- *Sinal de y:* O conjunto dos pontos em que ocorrem cortes com o eixo x ou assíntotas verticais é $\{-1, 0, 1\}$. Esses pontos dividem o eixo x nos intervalos abertos

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, +\infty)$$

Na Tabela 5.3.2 utilizamos o método dos pontos de teste para obter o sinal de y em cada um desses intervalos.

Tabela 5.3.2

INTERVALO	PONTO DE TESTE	$y = \frac{x^2-1}{x^3}$	SINAL DE y
$(-\infty, -1)$	-2	$-\frac{3}{8}$	$-$
$(-1, 0)$	$-\frac{1}{2}$	6	$+$
$(0, 1)$	$\frac{1}{2}$	-6	$-$
$(1, +\infty)$	2	$\frac{3}{8}$	$+$

- *Assíntotas horizontais:* Os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 0$$

fornecem a assíntota horizontal $y = 0$.

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(2x) - (x^2-1)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{3 - x^2}{x^4} = \frac{(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^4(-2x) - (3 - x^2)(4x^3)}{(x^4)^2} = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5} = \frac{2(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})}{x^5}$$

Conclusões:

- A análise de sinais de y na Figura 5.3.2*a* revela o comportamento do gráfico na vizinhança da assíntota vertical $x = 0$: o gráfico cresce sem cota quando $x \to 0^-$ e decresce sem cota quando $x \to 0^+$ (Figura 5.3.2*b*).
- A análise de sinais de dy/dx na Figura 5.3.2*a* mostra que existe um mínimo relativo em $x = -\sqrt{3}$ e um máximo relativo em $x = \sqrt{3}$.
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 5.3.2*a* mostra que o gráfico muda a concavidade na assíntota vertical $x = 0$ e que há pontos de inflexão em $x = -\sqrt{6}$ e $x = \sqrt{6}$.

O gráfico é mostrado na Figura 5.3.2*c*. Para produzir um esboço um pouco mais preciso, utilizamos um recurso gráfico para esboçar os extremos relativos e os pontos de inflexão. O leitor

deve conferir que as coordenadas aproximadas dos pontos de inflexão são (−2,45; −0,34) e (2,45; 0,34) e que as coordenadas aproximadas dos pontos de mínimo relativo e máximo relativo são (−1,73; −0,38) e (1,73; 0,38), respectivamente. ◄

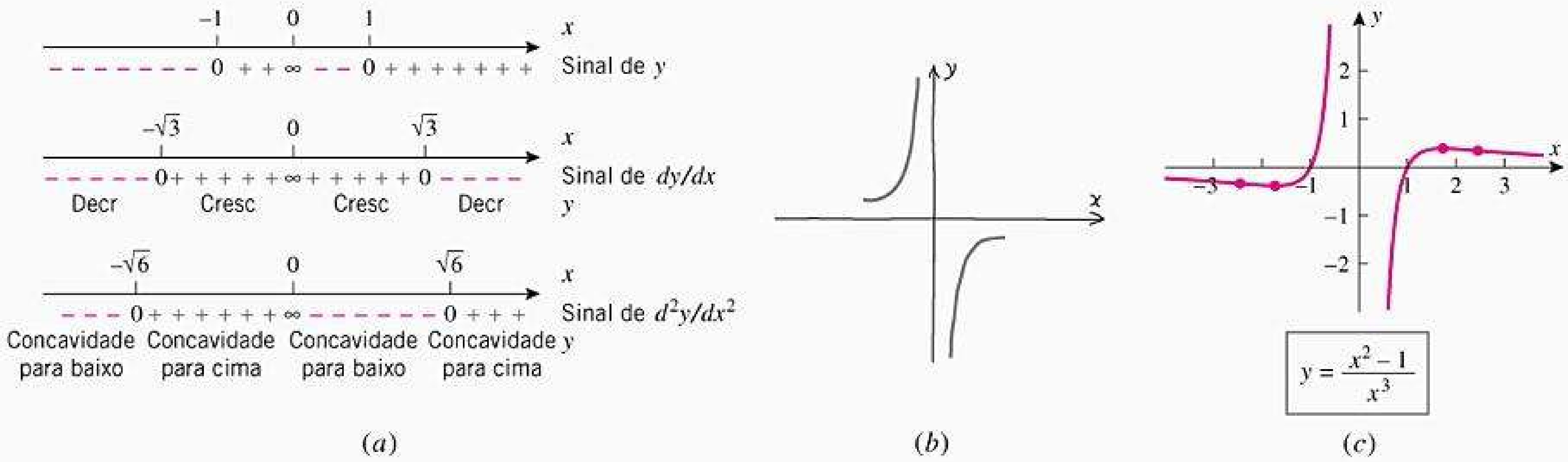


Figura 5.3.2

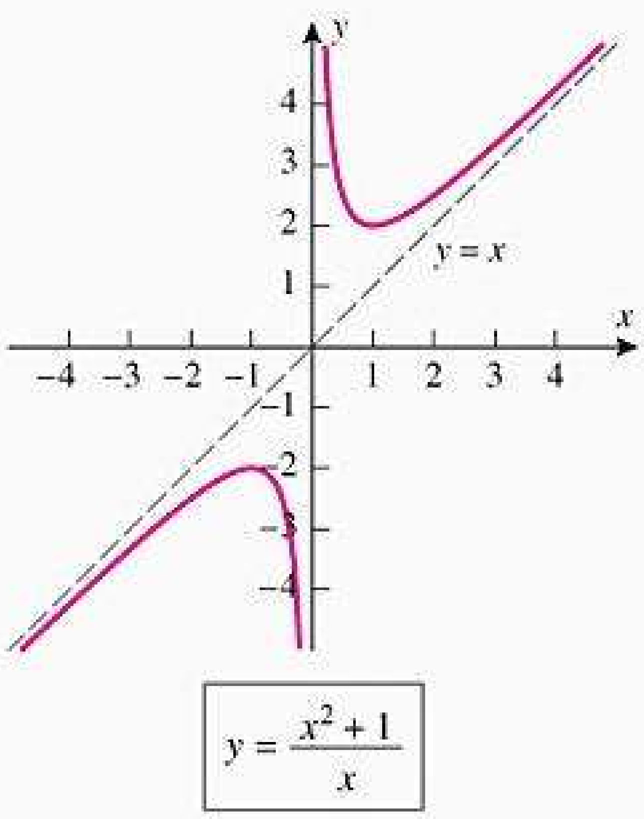


Figura 5.3.3

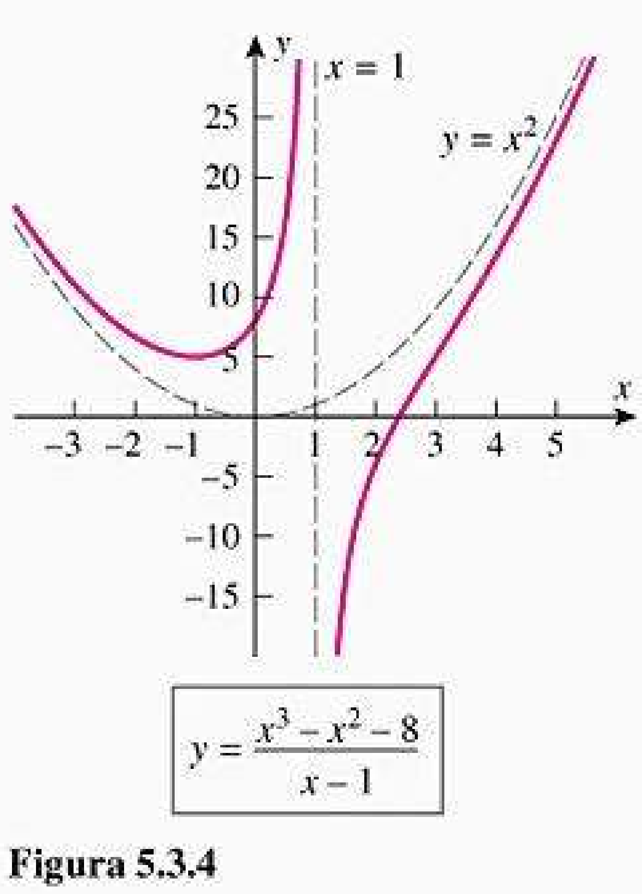


Figura 5.3.4

■ FUNÇÕES RACIONAIS COM ASSÍNTOTAS OBLÍQUAS OU CURVILÍNEAS

Nas funções racionais dos Exemplos 1 e 2, o grau do numerador não excedeu o do denominador, e as assíntotas eram ou verticais ou horizontais. Outros tipos de "assíntotas" são possíveis se o numerador de uma função racional tem grau maior do que o denominador. Por exemplo, considere as funções racionais

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8}{x - 1} \tag{1}$$

Usando divisão, podemos reescrevê-las como

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - \frac{8}{x - 1}$$

Como ambas as segundas parcelas tendem a 0 quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, segue que

$$(f(x) - x) \to 0 \ \text{ quando } \ x \to +\infty \text{ ou quando } x \to -\infty$$
$$(g(x) - x^2) \to 0 \ \text{ quando } \ x \to +\infty \text{ ou quando } x \to -\infty$$

Geometricamente, isso significa que o gráfico de $y = f(x)$ acaba ficando cada vez mais próximo da reta $y = x$ quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$. A reta $y = x$ é, então, denominada ***assíntota oblíqua*** ou ***inclinada*** de f. Analogamente, o gráfico de $y = g(x)$ acaba ficando cada vez mais próximo da parábola $y = x^2$ quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$. A parábola é, então, denominada ***assíntota curvilínea*** de g. Os gráficos das funções em (1) aparecem nas Figuras 5.3.3 e 5.3.4.

Em geral, se $f(x) = P(x)/Q(x)$ é uma função racional, podemos obter polinômios quociente $q(x)$ e resto $r(x)$ tais que

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

sendo o grau de $r(x)$ menor do que o de $Q(x)$. Então $r(x)/Q(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$, de modo que $y = q(x)$ é uma assíntota de f. Essa assíntota será uma reta oblíqua se o grau de $P(x)$ for um a mais do que o de $Q(x)$, e será uma assíntota curvilínea se o grau de $P(x)$ exceder o de $Q(x)$ por dois ou mais. Problemas envolvendo esse tipo de assíntotas são dados nos Exercícios 17 e 18.

■ GRÁFICOS COM TANGENTES VERTICAIS E CÚSPIDES

A Figura 5.3.5 mostra quatro partes de curva que podem ser encontradas facilmente em gráficos de funções que envolvem radicais ou expoentes fracionários. Em todos os quatro casos, a função não é diferenciável em x_0, pois as retas secantes pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ tendem à posição vertical quando x tende a x_0 de qualquer um dos dois lados. Assim, em cada caso, a curva tem uma reta tangente vertical em $(x_0, f(x_0))$. Nas partes (a) e (b) da figura, ocorre uma inflexão em x_0 porque há uma mudança de concavidade nesse ponto. Nas partes (c) e (d), em que $f'(x)$ tende a $+\infty$ por um dos lados e a $-\infty$ pelo outro, dizemos que o gráfico tem uma ***cúspide*** em x_0.

Observe que os pontos de inflexão podem ser distinguidos das cúspides em pontos com tangências verticais pelo comportamento de f' no limite. Ocorre um ponto de inflexão em x_0 se os limites laterais de f' em x_0 tiverem o mesmo sinal e uma cúspide se os sinais forem opostos.

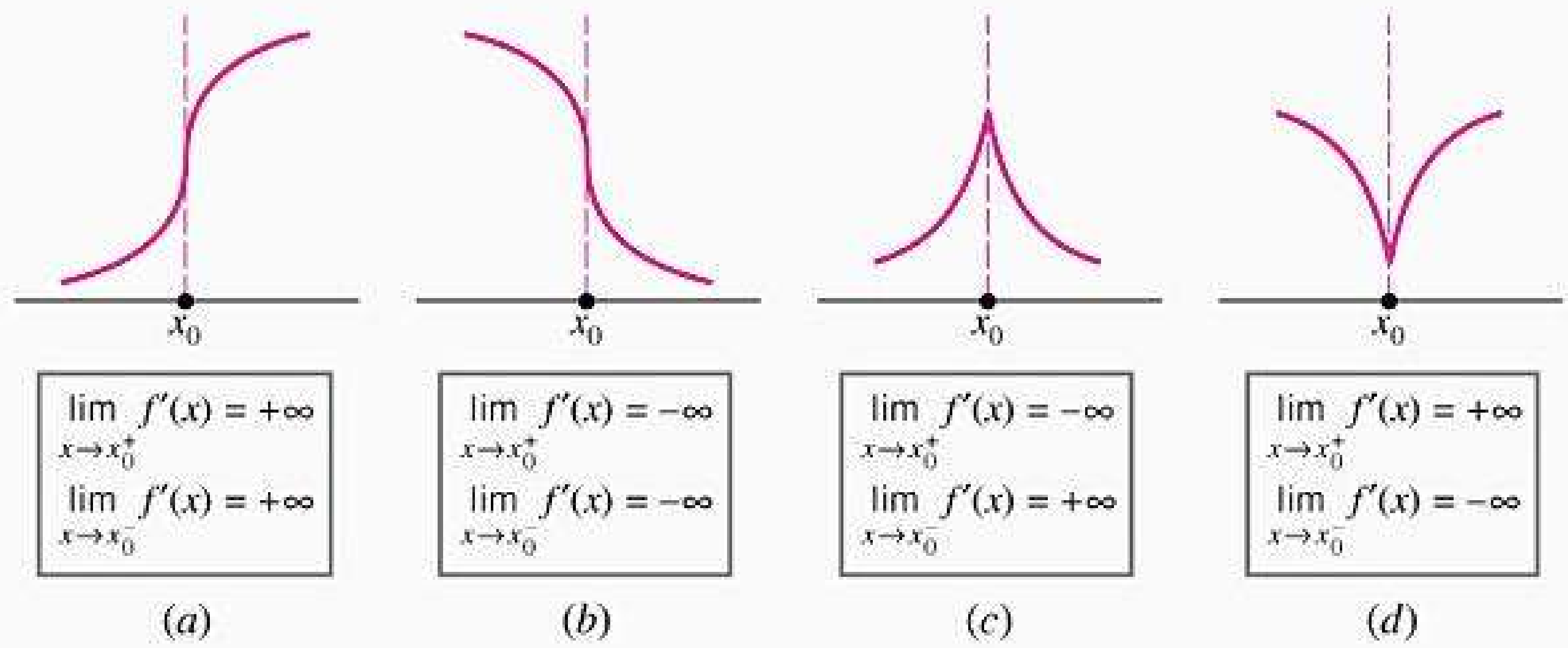


Figura 5.3.5

▶ Exemplo 3 Esboce o gráfico de $y = (x-4)^{2/3}$.

- *Simetrias:* Não há simetrias em relação aos eixos coordenados (verifique). Porém, o gráfico da equação é simétrico em relação a $x = 4$, uma vez que é uma translação (quatro unidades para a direita) do gráfico de $y = x^{2/3}$, que é simétrico em relação ao eixo y.
- *Cortes com o eixo x*: Fazendo $y = 0$, obtemos o corte $x = 4$.
- *Cortes com o eixo y:* Fazendo $x = 0$, obtemos o corte $y = \sqrt[3]{16} \approx 2{,}5$.
- *Assíntotas verticais*: Nenhuma, pois $f(x) = (x-4)^{2/3}$ é contínua em toda parte.
- *Assíntotas horizontais:* Nenhuma, pois

$$\lim_{x\to+\infty} (x-4)^{2/3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} (x-4)^{2/3} = +\infty$$

- *Derivadas*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2}{3}(x-4)^{-1/3} = \frac{2}{3(x-4)^{1/3}}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{2}{9}(x-4)^{-4/3} = -\frac{2}{9(x-4)^{4/3}}$$

- *Retas tangentes verticais:* Há uma reta tangente vertical e uma cúspide em $x = 4$ do tipo da Figura 5.3.5*d*, pois $f(x) = (x-4)^{2/3}$ é contínua em $x = 4$ e

$$\lim_{x\to4^+} f'(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{2}{3(x-4)^{1/3}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to4^-} f'(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{2}{3(x-4)^{1/3}} = -\infty$$

Conclusões:

- A função $f(x) = (x-4)^{2/3} = ((x-4)^{1/3})^2$ é não-negativa para cada x. Existe um zero de f em $x = 4$.

- Existe um ponto crítico em $x = 4$, pois f não é diferenciável nesse ponto. Foi visto anteriormente que nesse ponto ocorre uma cúspide. A análise de sinais de dy/dx na Figura 5.3.6a e o teste da derivada primeira mostram que nessa cúspide ocorre um mínimo relativo, já que $f'(x) < 0$ se $x < 4$ e $f'(x) > 0$ se $x > 4$.
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 5.3.6a mostra que o gráfico é côncavo para baixo em ambos lados da cúspide.

O gráfico está dado na Figura 5.3.6b. ◀

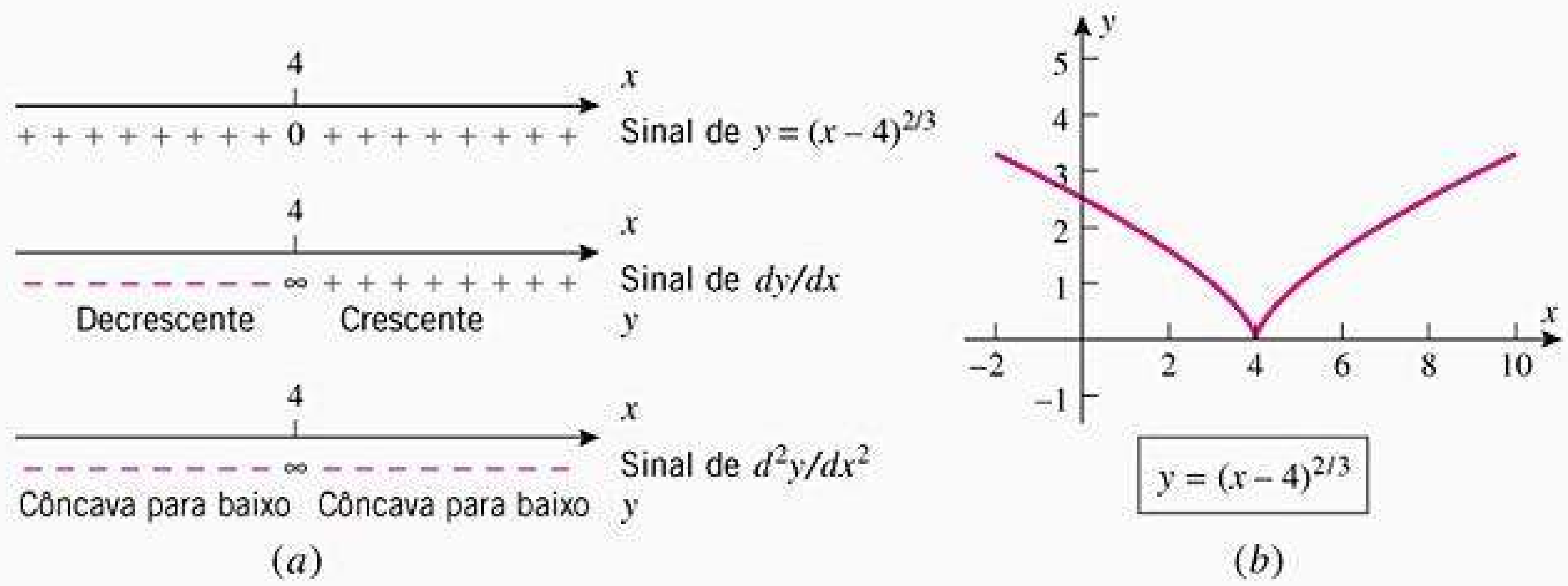


Figura 5.3.6

▶ Exemplo 4 Esboce o gráfico de $y = 6x^{1/3} + 3x^{4/3}$.

Solução Para simplificar nossa análise, escrevemos

$$f(x) = 6x^{1/3} + 3x^{4/3} = 3x^{1/3}(2 + x)$$

- *Simetrias*: Não há simetrias em relação aos eixos e à origem (verifique).
- *Cortes com o eixo x*: Fazendo $y = 3x^{1/3}(2 + x) = 0$, obtemos os cortes $x = 0$ e $x = -2$.
- *Cortes com o eixo y*: Fazendo $x = 0$, obtemos o corte $y = 0$.
- *Assíntotas verticais:* Nenhuma, pois $f(x) = 6x^{1/3} + 3x^{4/3}$ é contínua.
- *Assíntotas horizontais:* Nenhuma, uma vez que

$$\lim_{x \to +\infty} (6x^{1/3} + 3x^{4/3}) = \lim_{x \to +\infty} 3x^{1/3}(2 + x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (6x^{1/3} + 3x^{4/3}) = \lim_{x \to -\infty} 3x^{1/3}(2 + x) = +\infty$$

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x^{-2/3} + 4x^{1/3} = 2x^{-2/3}(1 + 2x) = \frac{2(2x+1)}{x^{2/3}}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{4}{3}x^{-5/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-5/3}(-1 + x) = \frac{4(x-1)}{3x^{5/3}}$$

- *Retas tangentes verticais:* Existe uma reta tangente vertical em $x = 0$, pois f é contínua nesse ponto e

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2(2x+1)}{x^{2/3}} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2(2x+1)}{x^{2/3}} = +\infty$$

Isso e a mudança da concavidade em $x = 0$ implicam que $(0, 0)$ é um ponto de inflexão do tipo dado na Figura 5.3.5a.

Conclusões:

- Pela análise de sinais de y na Figura 5.3.7*a*, o gráfico está abaixo do eixo x entre os cortes $x = -2$ e $x = 0$ do eixo x e acima do eixo x se $x < -2$ ou $x > 0$.
- A partir da fórmula para dy/dx, vemos que há um ponto estacionário em $x = -\frac{1}{2}$ e um ponto crítico em $x = 0$, no qual f não é diferenciável. Vimos que nesse ponto crítico há uma reta tangente vertical e um ponto de inflexão.
- A análise de sinais de dy/dx na Figura 5.3.7*a* e o teste da derivada primeira mostram que há um mínimo relativo no ponto estacionário em $x = -\frac{1}{2}$ (verifique).
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 5.3.7*a* mostra que, além da inflexão na reta tangente vertical, existe outro ponto de inflexão em $x = 1$, no qual o gráfico troca de côncavo para baixo para côncavo para cima.

O gráfico está dado na Figura 5.3.7*b*. ◄

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

A Figura 5.3.7*b* foi gerada com um recurso gráfico. Contudo, o ponto de inflexão em $x = 1$ é tão sutil que não fica aparente. Verifique se seu recurso consegue fazer uma versão desse gráfico que torne evidente o ponto de inflexão.

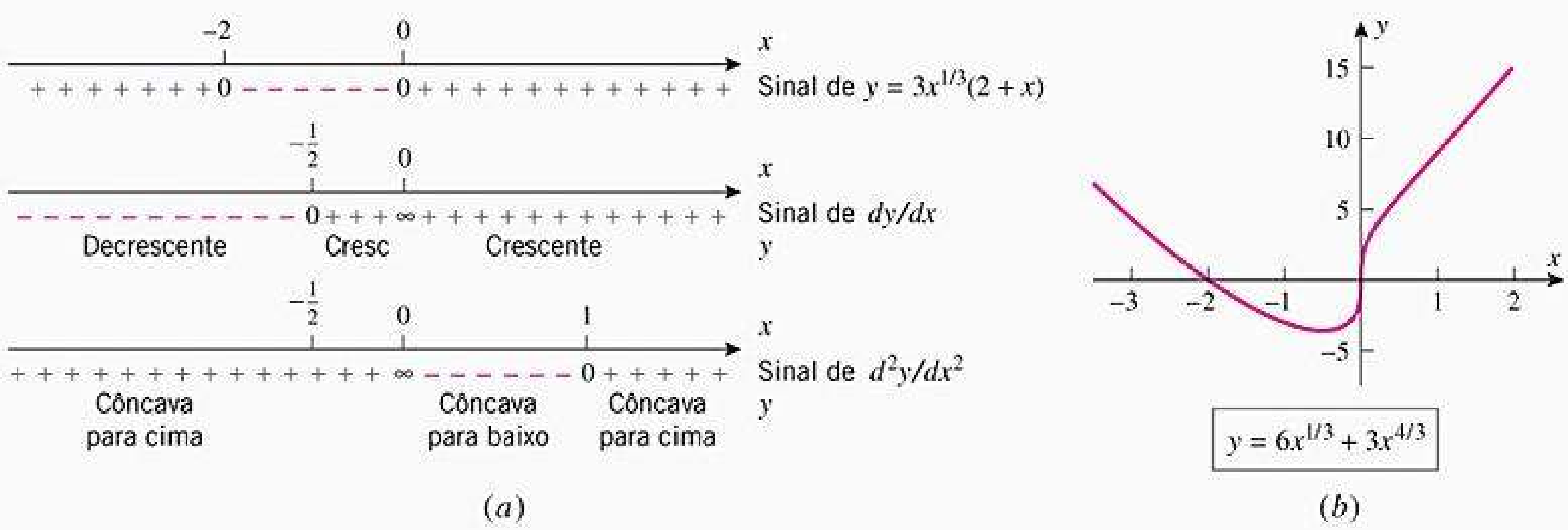


Figura 5.3.7

■ TRAÇANDO O GRÁFICO DE FUNÇÕES DE OUTROS TIPOS

Já discutimos métodos para traçar o gráfico de polinômios, de funções racionais e funções com cúspides e retas tangentes verticais. As mesmas ferramentas do Cálculo que utilizamos para analisar essas funções também podem ser usadas para analisar o gráfico de funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais, bem como uma variedade sem fim de outros tipos de funções.

► Exemplo 5 Esboce o gráfico de $y = e^{-x^2/2}$ e identifique a localização de todos os extremos relativos e dos pontos de inflexão.

Solução

- *Simetrias:* Substituindo x por $-x$ não muda a equação, de modo que o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.
- *Cortes com o eixo x:* Fazendo $y = 0$, obtemos a equação $e^{-x^2/2} = 0$, que não possui solução, pois todas as potências de e têm valores positivos. Assim, não existe corte com o eixo x.
- *Cortes com o eixo y:* Fazendo $x = 0$, obtemos o corte com o eixo y em $y = 1$.
- *Assíntotas verticais:* Não existem assíntotas verticais porque $e^{-x^2/2}$ é contínua em $(-\infty, +\infty)$.

- *Assíntotas horizontais:* O eixo x ($y = 0$) é uma assíntota horizontal, pois

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2/2} = 0$$

- *Derivadas:*

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2/2}\frac{d}{dx}\left[-\frac{x^2}{2}\right] = -xe^{-x^2/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x\frac{d}{dx}[e^{-x^2/2}] + e^{-x^2/2}\frac{d}{dx}[-x]$$

$$= x^2e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} = (x^2-1)e^{-x^2/2}$$

Conclusões:

- A análise de sinais de y na Figura 5.3.8a foi baseada no fato de que $e^{-x^2/2} > 0$ para todo x. Isso mostra que o gráfico está sempre acima do eixo x.
- A análise de sinais de dy/dx na Figura 5.3.8a foi baseada no fato de que $dy/dx = -x\,e^{-x^2/2}$ tem o mesmo sinal que $-x$. Essa análise e o teste da derivada primeira mostram que há um ponto estacionário em $x = 0$, no qual ocorre um máximo relativo. O valor de y no máximo relativo é $y = e^0 = 1$.
- A análise de sinais de d^2y/dx^2 na Figura 5.3.8a foi baseada no fato de que $d^2y/dx^2 = (x^2-1)e^{-x^2/2}$ tem o mesmo sinal que $x^2 - 1$. Essa análise mostra que há pontos de inflexão em $x = -1$ e em $x = 1$. O gráfico troca de côncavo para cima para côncavo para baixo em $x = -1$ e de côncavo para baixo para côncavo para cima em $x = 1$. As coordenadas dos pontos de inflexão são $(-1, e^{-1/2}) \approx (-1, 0{,}61)$ e $(1, e^{-1/2}) \approx (1, 0{,}61)$.

O gráfico está dado na Figura 5.3.8b. ◄

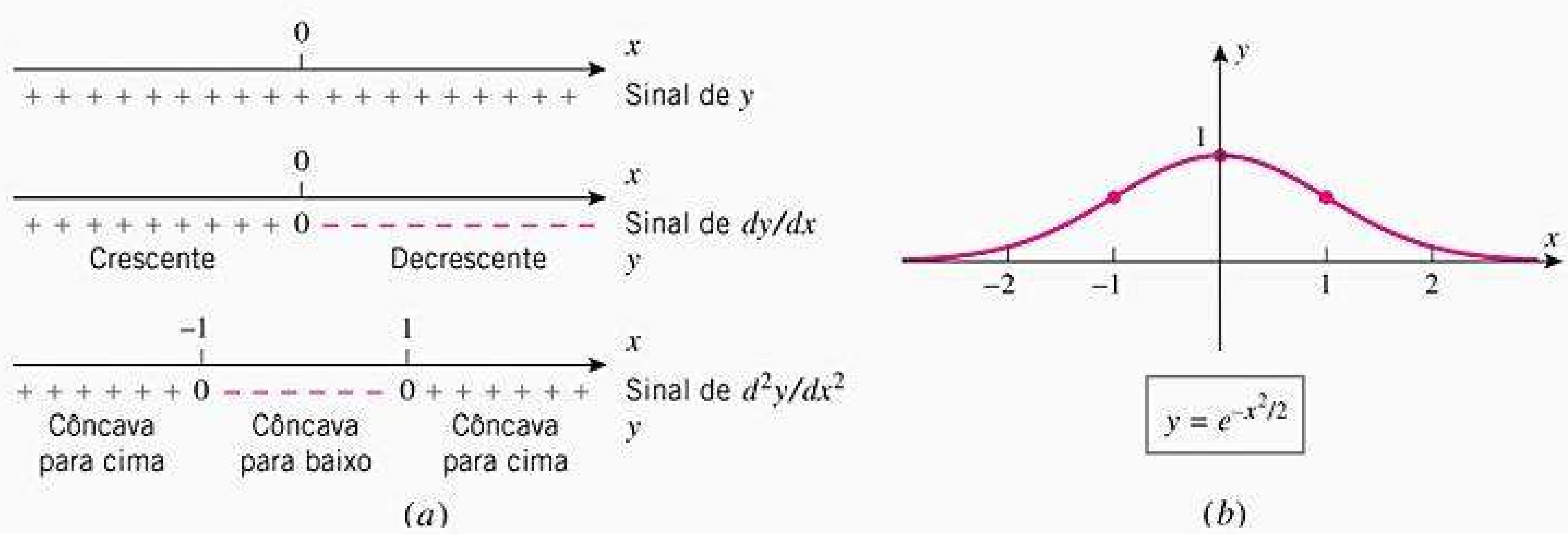
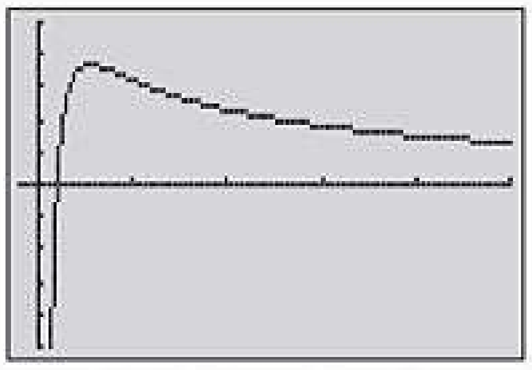


Figura 5.3.8

■ TRAÇANDO GRÁFICOS USANDO CÁLCULO E TECNOLOGIA JUNTOS

Até aqui neste capítulo utilizamos o Cálculo para produzir gráficos de funções, sendo que os gráficos eram o objetivo. Agora trabalharemos na direção contrária, *começando* com um gráfico produzido por um recurso gráfico. Nosso objetivo é utilizar as ferramentas do Cálculo para determinar a localização exata dos extremos relativos, dos pontos de inflexão e outras características sugeridas pelo gráfico, além de determinar se ele pode estar omitindo alguma característica que gostaríamos de ver.

► Exemplo 6 Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de $f(x) = (\ln x)/x$, e discuta o que esse gráfico diz sobre extremos relativos, pontos de inflexão, assíntotas e comportamento final. Use o Cálculo para encontrar a localização de todas as características essenciais do gráfico.



[–1, 25] × [–0,5; 0,5]
xScl = 5, yScl = 0,2

$y = \frac{\ln x}{x}$

Figura 5.3.9

Solução A Figura 5.3.9 mostra um gráfico de f produzido por um recurso gráfico. Esse gráfico sugere que há um corte com o eixo x perto de $x = 1$, um máximo relativo em algum lugar entre $x = 0$ e $x = 5$, um ponto de inflexão perto de $x = 5$, uma assíntota vertical em $x = 0$ e possivelmente um assíntota horizontal $y = 0$. Para uma análise mais precisa dessa informação, temos de considerar as derivadas

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)(2x)}{x^4} = \frac{2x\ln x - 3x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

- *Extremos relativos:* A resolução de $f'(x) = 0$ fornece o ponto estacionário $x = e$ (verifique). Como
$$f''(e) = \frac{2-3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$
existe um máximo relativo em $x = e \approx 2{,}7$ pelo teste da derivada segunda.
- *Pontos de inflexão:* Como $f(x) = (\ln x)/x$ só está definida em valores positivos de x, a derivada segunda $f''(x)$ tem o mesmo sinal que $2 \ln x - 3$. Deixamos a cargo do leitor usar as desigualdades $(2 \ln x - 3) < 0$ e $(2 \ln x - 3) > 0$ para mostrar que $f''(x) < 0$ se $x < e^{3/2}$ e $f''(x) > 0$ se $x > e^{3/2}$. Assim, existe um ponto de inflexão em $x = e^{3/2} \approx 4{,}5$.
- *Assíntotas:* Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1/x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$
de modo que $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Também há uma assíntota vertical em $x = 0$, pois
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$
(por quê?).
- *Cortes com os eixos:* Fazendo $f(x) = 0$, obtemos $(\ln x)/x = 0$. A única solução real dessa equação é $x = 1$, de modo que nesse ponto existe um corte com o eixo x. ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.3 (*Ver página 301 para respostas.*)

1. Seja $f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}$. Sabendo que

$$f'(x) = \frac{-30(x-1)}{(x+2)^2(x-4)^2}, \qquad f''(x) = \frac{90(x^2-2x+4)}{(x+2)^3(x-4)^3}$$

determine as seguintes propriedades do gráfico de f.

(a) Os cortes com os eixos x e y são __________.
(b) As assíntotas verticais são __________.
(c) A assíntota horizontal é __________.
(d) O gráfico está acima do eixo x nos intervalos __________.
(e) O gráfico é crescente nos intervalos __________.
(f) O gráfico é côncavo para cima nos intervalos __________.
(g) O ponto de máximo relativo do gráfico é __________.

2. Seja $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^{8/3}}$. Sabendo que

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-16)}{3x^{11/3}}, \qquad f''(x) = \frac{2(5x^2-176)}{9x^{14/3}}$$

determine as seguintes propriedades do gráfico de f.

(a) Os cortes com o eixo x são __________.
(b) A assíntota vertical é __________.
(c) A assíntota horizontal é __________.
(d) O gráfico está acima do eixo x nos intervalos __________.
(e) O gráfico é crescente nos intervalos __________.
(f) O gráfico é côncavo para cima nos intervalos __________.
(g) Os pontos de inflexão ocorrem em $x =$ __________.

3. Seja $f(x) = (x-2)^2 e^{x/2}$. Sabendo que

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x^2-4)e^{x/2}, \qquad f''(x) = \tfrac{1}{4}(x^2+4x-4)e^{x/2}$$

determine as seguintes propriedades do gráfico de f.

(a) A assíntota horizontal é __________.
(b) O gráfico está acima do eixo x nos intervalos __________.
(c) O gráfico é crescente nos intervalos __________.
(d) O gráfico é côncavo para cima nos intervalos __________.
(e) O ponto de mínimo relativo do gráfico é __________.
(f) O ponto de máximo relativo do gráfico é __________.
(g) Os pontos de inflexão ocorrem em $x =$ __________.

EXERCÍCIOS 5.3 Recurso Gráfico

1-14 Obtenha um gráfico da função racional dada e identifique as coordenadas dos pontos estacionários e de inflexão. Mostre as assíntotas horizontais e verticais e dê suas equações. Identifique (se houver) os pontos em que o gráfico cruza uma assíntota horizontal. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

1. $\dfrac{2x-6}{4-x}$ **2.** $\dfrac{8}{x^2-4}$ **3.** $\dfrac{x}{x^2-4}$

4. $\dfrac{x^2}{x^2-4}$ **5.** $\dfrac{x^2}{x^2+4}$ **6.** $\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$

7. $\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ **8.** $2-\dfrac{1}{3x^2+x^3}$

9. $\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x}+3$ **10.** $\dfrac{3(x+1)^2}{(x-1)^2}$

11. $\dfrac{(3x+1)^2}{(x-1)^2}$ **12.** $3+\dfrac{x+1}{(x-1)^4}$

13. $\dfrac{x^2+x}{1-x^2}$ **14.** $\dfrac{x^2}{1-x^3}$

15. Em cada parte, faça um esboço aproximado do gráfico usando assíntotas e limites apropriados, mas não derivadas. Compare seu esboço ao gerado por um recurso gráfico computacional.

(a) $y=\dfrac{3x^2-8}{x^2-4}$ (b) $y=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$

(c) $y=\dfrac{2x-x^2}{x^2+x-2}$ (d) $y=\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$

16. (a) Esboce o gráfico de

$$y=\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

supondo $a\neq b$.

(b) Prove que, se $a\neq b$, então a função

$$f(x)=\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

é simétrica em relação à reta $x=(a+b)/2$.

17. Mostre que $y=x+3$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de $f(x)=x^2/(x-3)$. Esboce o gráfico de $y=f(x)$, mostrando esse comportamento assintótico.

18. Mostre que $y=3-x^2$ é uma assíntota curvilínea do gráfico de $f(x)=(2+3x-x^3)/x$. Esboce o gráfico de $y=f(x)$, mostrando esse comportamento assintótico.

19-24 Esboce um gráfico da função racional dada e identifique as coordenadas dos pontos estacionários e de inflexão. Mostre as assíntotas horizontais, verticais, oblíquas e curvilíneas e dê suas equações. Identifique (se houver) os pontos em que o gráfico cruza uma assíntota. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

19. $x^2-\dfrac{1}{x}$ **20.** $\dfrac{x^2-2}{x}$ **21.** $\dfrac{(x-2)^3}{x^2}$

22. $x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ **23.** $\dfrac{x^3-4x-8}{x+2}$

24. $\dfrac{x^5}{x^2+1}$

ENFOCANDO CONCEITOS

25. Em cada parte, combine a função com os gráficos I a VI sem usar um recurso gráfico e depois confirme gerando-o com um recurso gráfico computacional

(a) $x^{1/3}$ (b) $x^{1/4}$ (c) $x^{1/5}$

(d) $x^{2/5}$ (e) $x^{4/3}$ (f) $x^{-1/3}$

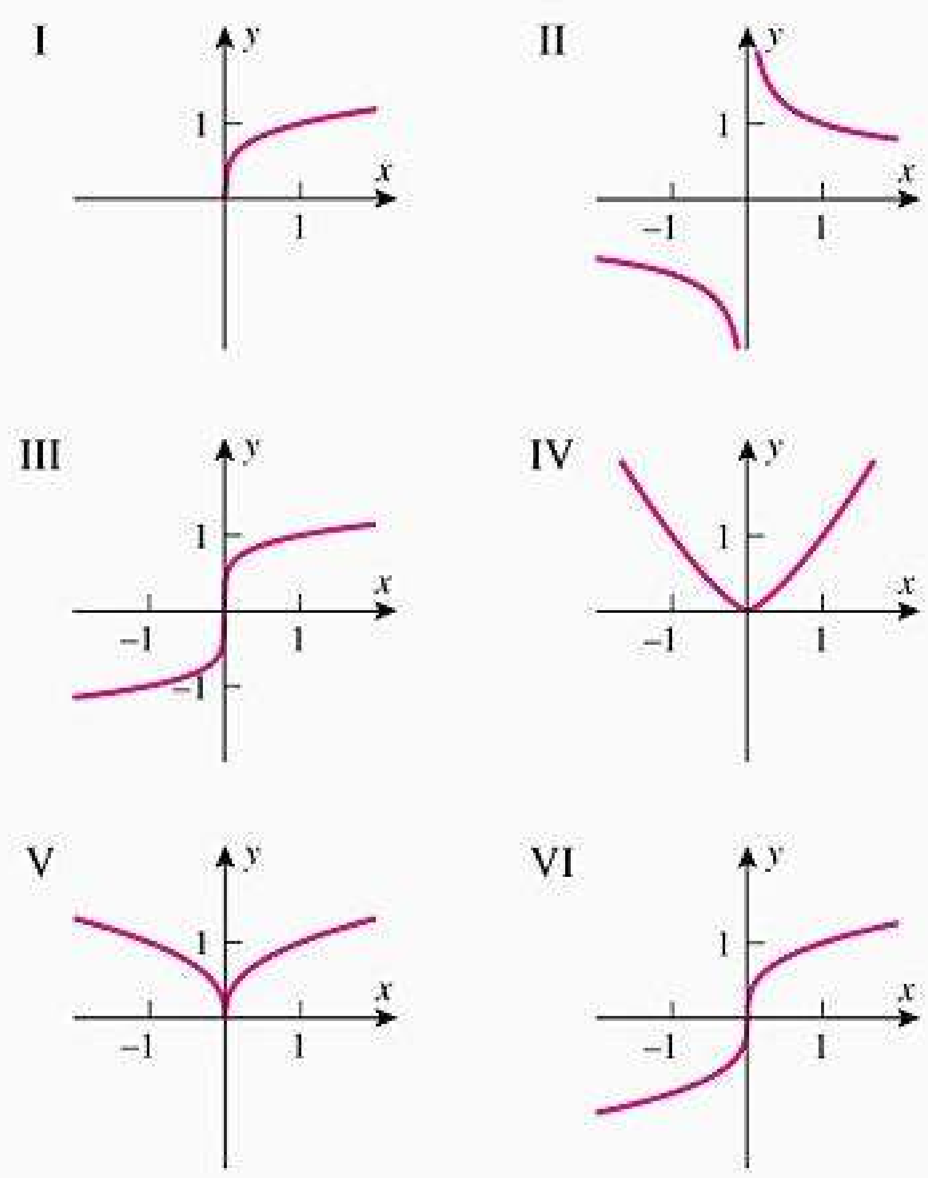


Figura Ex-25

26. Esboce a forma geral do gráfico de $y=x^{1/n}$ e descreva o que acontece com ela quando n cresce se

(a) n for inteiro positivo par;

(b) n for inteiro positivo ímpar.

27-34 Obtenha um gráfico da função e identifique a localização de todos os pontos críticos e de inflexão. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

27. $\sqrt{4x^2-1}$ **28.** $\sqrt[3]{x^2-4}$

29. $2x+3x^{2/3}$ **30.** $2x^2-3x^{4/3}$

31. $4x^{1/3}-x^{4/3}$ **32.** $5x^{2/3}+x^{5/3}$

33. $\dfrac{8+x}{2+\sqrt[3]{x}}$ **34.** $\dfrac{8(\sqrt{x}-1)}{x}$

35-40 Obtenha um gráfico da função e identifique a localização de todos os pontos de extremos relativos e de inflexão. Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

35. $x + \operatin{sen} x$

36. $x - \operatorname{tg} x$

37. $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x$

38. $\operatorname{sen} x + \cos x$

39. $\operatorname{sen}^2 x - \cos x, \quad -\pi \le x \le 3\pi$

40. $\sqrt{\operatorname{tg} x}, \quad 0 \le x < \pi/2$

41-50 Usando a regra de L'Hôpital (Seção 4.4), podemos conferir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

Nesses exercícios: (a) Use esses limites, se necessário, para obter os limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. (b) Esboce o gráfico de $f(x)$ e identifique todos os extremos relativos, os pontos de inflexão e as assíntotas (conforme o caso). Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

41. $f(x) = xe^x$

42. $f(x) = xe^{-x}$

43. $f(x) = x^2e^{-2x}$

44. $f(x) = x^2e^{2x}$

45. $f(x) = x^2e^{-x^2}$

46. $f(x) = e^{-1/x^2}$

47. $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$

48. $f(x) = x^{2/3}e^x$

49. $f(x) = x^2e^{1-x}$

50. $f(x) = x^3e^{x-1}$

51-56 Usando a regra de L'Hôpital (Seção 4.4), podemos conferir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{\ln x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$$

para qualquer número real positivo r. Nestes exercícios: (a) Use esses limites, se necessário, para obter os limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e $x \to 0^+$. (b) Esboce o gráfico de $f(x)$ e identifique todos os extremos relativos, os pontos de inflexão e as assíntotas (conforme o caso). Confira seu trabalho com um recurso gráfico.

51. $f(x) = x \ln x$

52. $f(x) = x^2 \ln x$

53. $f(x) = x^2 \ln(2x)$

54. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

55. $f(x) = x^{2/3} \ln x$

56. $f(x) = x^{-1/3} \ln x$

ENFOCANDO CONCEITOS

57. Considere a família de curvas $y = xe^{-bx}$ $(b > 0)$.

(a) Use um recurso gráfico computacional para gerar alguns membros dessa família.

(b) Discuta o efeito da variação de b na forma do gráfico e a localização tanto dos extremos relativos como dos pontos de inflexão.

58. Considere a família de curvas $y = e^{-bx^2}$ $(b > 0)$.

(a) Use um recurso gráfico computacional para gerar alguns membros dessa família.

(b) Discuta o efeito da variação de b na forma do gráfico e a localização tanto dos extremos relativos como dos pontos de inflexão.

59. (a) Determine se os limites a seguir existem e, em caso afirmativo, encontre-os.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \cos x, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x \cos x$$

(b) Esboce os gráficos de $y = e^x$, $y = -e^x$ e $y = e^x \cos x$ no mesmo sistema de coordenadas e marque todos os pontos de intersecção.

(c) Use um recurso gráfico computacional para gerar alguns membros da família $y = e^{ax} \cos bx$ $(a > 0$ e $b > 0)$ e discuta o efeito da variação de a e b sobre a forma da curva.

60. Considere a família de curvas $y = x^n e^{-x^2/n}$, onde n é um número inteiro positivo.

(a) Use um recurso gráfico para gerar alguns membros dessa família.

(b) Discuta o efeito de variar n no formato do gráfico e discuta tanto a localização dos extremos relativos como dos pontos de inflexão.

61. A figura em anexo mostra o gráfico da *derivada* de uma função h que está definida e é contínua no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Suponha que o gráfico de h' tenha uma assíntota vertical em $x = 3$ e que

$$h'(x) \to 0^+ \text{ quando } x \to -\infty$$
$$h'(x) \to -\infty \text{ quando } x \to +\infty$$

(a) Quais são os pontos críticos de $h(x)$?

(b) Identifique os intervalos em que $h(x)$ é crescente.

(c) Identifique as coordenadas x dos extremos relativos de $h(x)$ e classifique-os como máximo ou mínimo relativos.

(d) Estime as coordenadas x dos pontos de inflexão de $h(x)$.

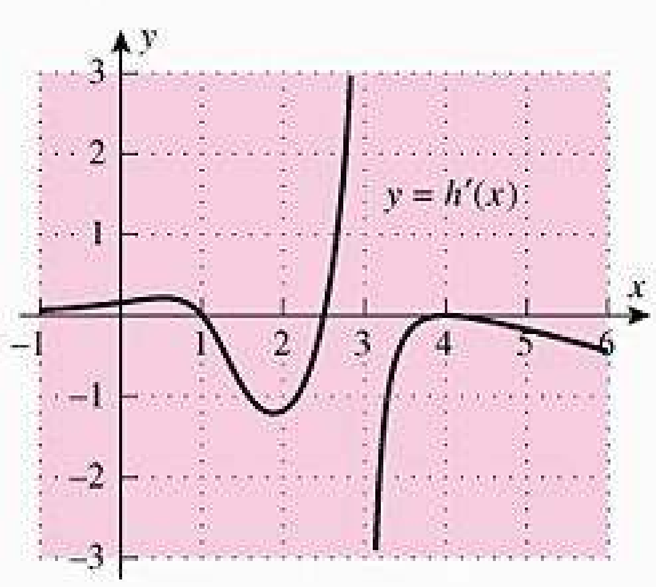


Figura Ex-61

62. Seja $f(x) = (1 - 2x)h(x)$, onde $h(x)$ é a função dada no Exercício 61. Suponha que $x = 5$ seja um ponto crítico de $f(x)$.

(a) Estime $h(5)$.

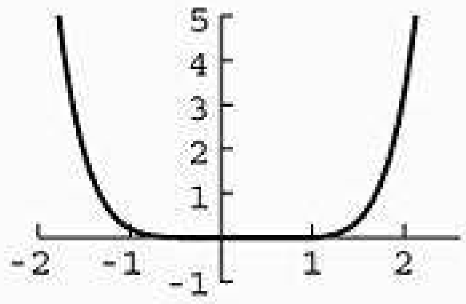
(b) Use o teste da derivada segunda para determinar se $f(x)$ tem um máximo ou um mínimo relativo em $x = 5$.

63. Um lote retangular deve ser cercado de forma que a área interna seja de 400 m². Sejam L o comprimento da cerca necessária e x o comprimento de um lado do retângulo; mostre que $L = 2x + 800/x$ para $x > 0$ e esboce o gráfico de L *versus* x para $x > 0$.

64. Uma caixa com base quadrada e sem tampa deve ser feita a partir de uma folha de metal, de forma que seu volume seja de 500 cm^3. Sejam S a área da superfície da caixa e x o comprimento de um lado da base quadrada. Mostre que $S = x^2 + 2000/x$ para $x > 0$ e esboce o gráfico de S *versus* x para $x > 0$.

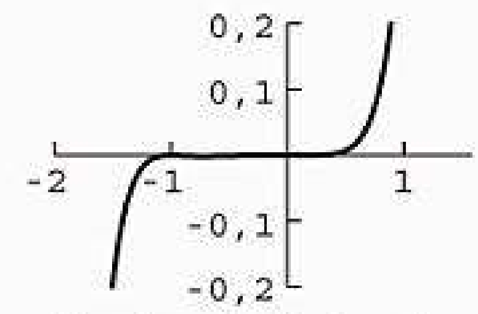
65. A Figura Ex-65 mostra o gráfico do polinômio $y = 0{,}1x^5(x-1)$ gerado em computador usando uma janela de $[-2; 2{,}5] \times [-1, 5]$. Mostre que a escolha da escala vertical faz com que o computador perca aspectos importantes do gráfico. Encontre os aspectos omitidos e faça seu próprio esboço mostrando-os.

66. A Figura Ex-66 mostra o gráfico do polinômio $y = 0{,}1x^5(x+1)^2$ gerado em computador usando uma janela de $[-2; 1{,}5] \times [-0{,}2; 0{,}2]$. Mostre que a escolha da escala vertical faz com que o computador perca aspectos importantes do gráfico. Encontre os aspectos omitidos e faça seu próprio esboço mostrando-os.



Gerado pelo Mathematica

Figura Ex-65



Gerado pelo Mathematica

Figura Ex-66

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.3

1. (a) $(-1, 0), (3, 0), \left(0, \frac{9}{8}\right)$ (b) $x = -2$ e $x = 4$ (c) $y = 3$ (d) $(-\infty, -2), (-1, 3)$ e $(4, +\infty)$ (e) $(-\infty, -2)$ e $(-2, 1]$ (f) $(-\infty, -2)$ e $(4, +\infty)$ (g) $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ **2.** (a) $(-2, 0), (2, 0)$ (b) $x = 0$ (c) $y = 0$ (d) $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$ (e) $(-\infty, -4]$ e $(0, 4]$ (f) $(-\infty, -4\sqrt{11/5})$ e $(4\sqrt{11/5}, +\infty)$ (g) $\pm 4\sqrt{11/5} \approx \pm 5{,}93$ **3.** (a) $y = 0$ (quando $x \to -\infty$) (b) $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$ (c) $(-\infty, -2]$ e $[2, +\infty)$ (d) $(-\infty, -2 - 2\sqrt{2})$ e $(-2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$ (e) $(2, 0)$ (f) $(-2, 16e^{-1}) \approx (-2; 5{,}89)$ (g) $-2 \pm 2\sqrt{2}$)

5.4 MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS

No começo da Seção 5.2 observamos que, se o gráfico de uma função for imaginado como sendo uma cordilheira em duas dimensões (Figura 5.2.1), então os máximos e os mínimos relativos correspondem ao topo de morros e ao fundo de vales, isto é, eles são os pontos mais alto e mais baixo em sua vizinhança próxima. Nesta seção nos preocuparemos com o problema mais abrangente de encontrar os pontos mais alto e mais baixo de toda a paisagem, isto é, procuraremos o mais alto dos topos e o mais fundo dos vales. Em termos matemáticos, procuraremos o maior e o menor valor de uma função em um intervalo.

■ EXTREMOS ABSOLUTOS

Vamos começar por alguma terminologia para descrever o maior e o menor valor de uma função em um intervalo.

5.4.1 DEFINIÇÃO Seja I um intervalo no domínio de uma função f. Dizemos que f tem um ***máximo absoluto*** em I em um ponto x_0 se $f(x) \le f(x_0)$ para todo x em I, e que f tem um ***mínimo absoluto*** em x_0 se $f(x_0) \le f(x)$ para todo x em I. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um ***extremo absoluto***.

Se f tem um máximo absoluto no ponto x_0 em um intervalo I, então $f(x_0)$ é o maior valor de f em I; e se f tem um mínimo absoluto em x_0, então $f(x_0)$ é o menor valor de f em I. Em geral, não há garantia de que uma função f tenha extremos absolutos em um dado intervalo (Figura 5.4.1).

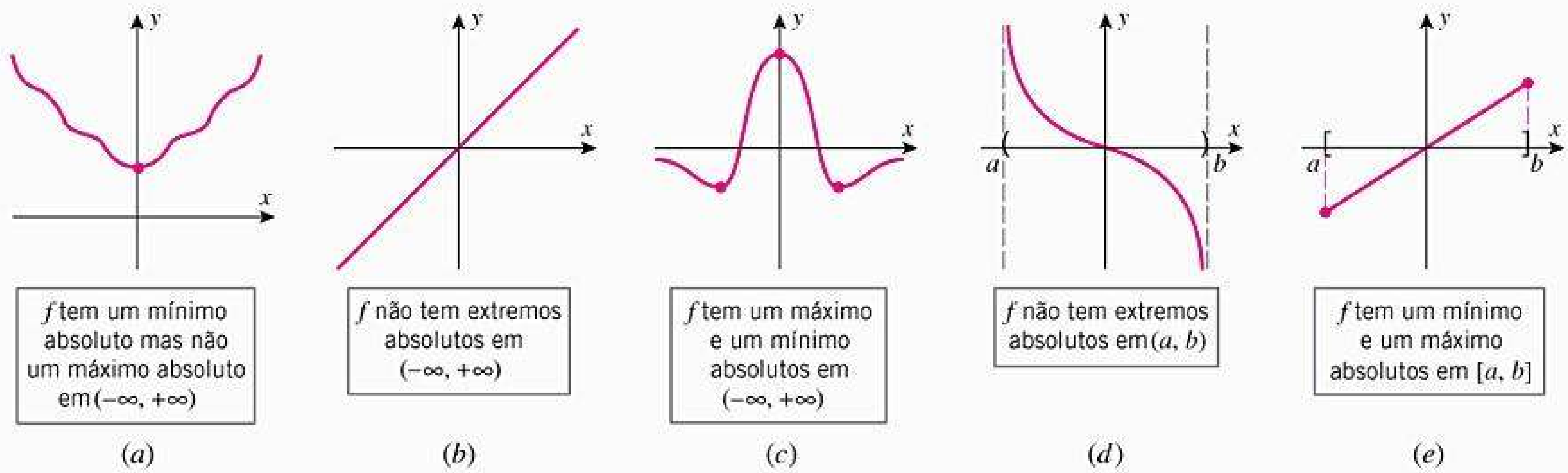


Figura 5.4.1

O TEOREMA DO VALOR EXTREMO

As partes (*a*) a (*d*) da Figura 5.4.1 mostram que uma função contínua pode ou não ter extremos absolutos em um intervalo infinito ou em um intervalo aberto finito. Porém, o teorema a seguir mostra que uma função contínua deve ter um máximo e um mínimo absolutos em todo intervalo *fechado finito* [veja parte (*e*) da Figura 5.4.1].

As hipóteses do Teorema do Valor Extremo são essenciais. Ou seja, se o intervalo não for fechado ou se f não é contínua no intervalo, então f não precisa ter extremos absolutos no intervalo (Exercícios 4 a 6).

5.4.2 TEOREMA (***Teorema do Valor Extremo***) *Se uma função f for contínua em um intervalo fechado finito $[a, b]$, então f tem um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$.*

Embora a prova desse teorema seja muito difícil para ser incluída aqui, o leitor deve se convencer de sua validade com alguns exemplos – tente fazer o gráfico de diversas funções contínuas em [0, 1] e se convença de que não há como evitar um ponto mais alto e um mais baixo no gráfico. Em uma analogia física, se o leitor imaginar o gráfico como os trilhos de uma montanha-russa, começando em $x = 0$ e acabando em $x = 1$, então a montanha-russa deve passar por um ponto mais alto e um mais baixo em seu trajeto.

O Teorema do Valor Extremo é um exemplo do que os matemáticos denominam ***teorema de existência***. Tais teoremas estabelecem condições sob as quais alguma coisa existe, no caso, o extremo absoluto. Entretanto, saber que algo existe é uma coisa, encontrá-lo, porém, é bem diferente. Assim, vamos nos dedicar agora ao problema de encontrar o extremo absoluto sob as condições do Teorema do Valor Extremo.

Se f for contínua em um intervalo finito fechado $[a, b]$, então os extremos absolutos de f podem ocorrer nos extremos do intervalo ou dentro do intervalo aberto (a, b). Se os extremos absolutos ocorrem dentro, então o teorema a seguir nos diz que eles devem ocorrer em pontos críticos de f.

O Teorema 5.4.3 também é válido em intervalos abertos infinitos, ou seja, em intervalos da forma $(-\infty, +\infty)$, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$.

5.4.3 TEOREMA *Se f tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a, b), então ele deve ocorrer em um ponto crítico de f.*

DEMONSTRAÇÃO Se f tiver um máximo absoluto em (a, b) em um ponto x_0, então $f(x_0)$ é também um máximo relativo para f, pois se $f(x_0)$ for o maior valor de f em todo (a, b),

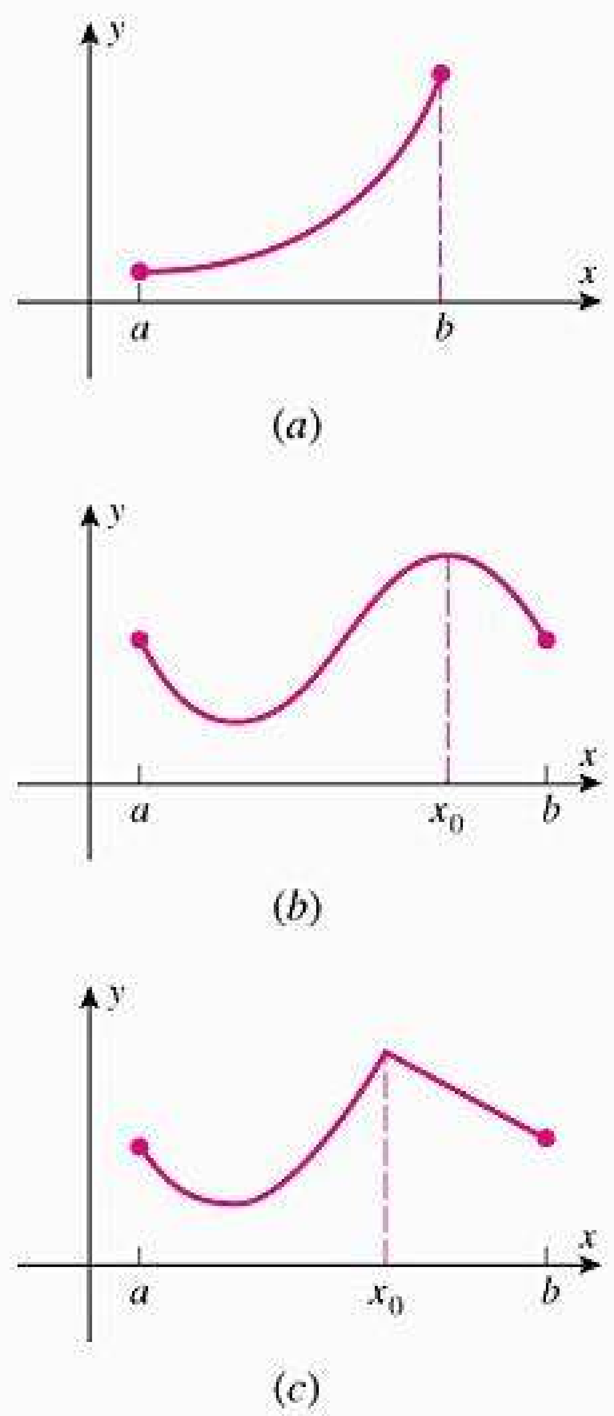


Figura 5.4.2 Em (a), o máximo absoluto ocorre em um extremo de $[a, b]$; em (b), ele ocorre em um ponto estacionário em (a, b); em (c), ele ocorre em um ponto crítico em (a, b), onde f não é diferenciável.

então, certamente, $f(x_0)$ será o maior valor de f em uma vizinhança próxima de x_0. Assim, x_0 é um ponto crítico de f pelo Teorema 5.2.2. A demonstração no caso de mínimo absoluto é semelhante. ■

Segue desse teorema que, se f for contínua no intervalo finito fechado $[a, b]$, então os extremos absolutos ocorrem ou nos pontos extremos ou em pontos críticos do intervalo (Figura 5.4.2). Dessa forma, podemos usar o seguinte procedimento para encontrar os extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo finito fechado $[a, b]$.

Procedimento para Encontrar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua f em um Intervalo Finito Fechado [a, b]

Passo 1 Encontre os pontos críticos de f em (a, b).

Passo 2 Encontre o valor de f em todos os pontos críticos e nos extremos a e b.

Passo 3 O maior entre os valores do Passo 2 é o valor máximo absoluto de f em $[a, b]$, e o menor valor é o mínimo absoluto.

► Exemplo 1 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ no intervalo $[1, 5]$ e determine onde esses valores ocorrem.

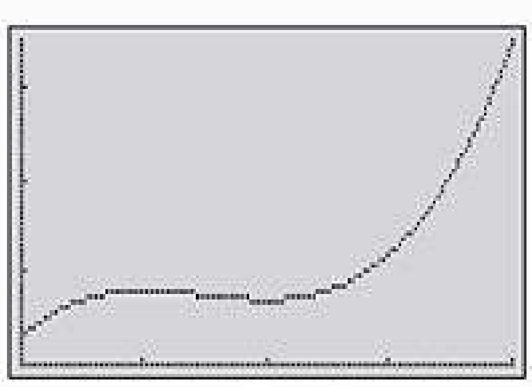
Solução Como f é contínua e diferenciável em toda parte, os extremos absolutos ocorrem ou nos extremos do intervalo $[1, 5]$ ou em pontos estacionários do intervalo aberto $(1, 5)$. Para encontrar os pontos estacionários, precisamos resolver $f'(x) = 0$, que pode ser escrita como

$$6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 6(x - 2)(x - 3) = 0$$

Assim, há pontos estacionários em $x = 2$ e $x = 3$. Calculando o valor de f nos extremos e nos pontos estacionários, obtemos

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^3 - 15(1)^2 + 36(1) = 23 \\ f(2) &= 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) = 28 \\ f(3) &= 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) = 27 \\ f(5) &= 2(5)^3 - 15(5)^2 + 36(5) = 55 \end{aligned}$$

de onde concluímos que um mínimo absoluto de f em $[1, 5]$ é 23 e ocorre em $x = 1$, e um máximo absoluto de f em $[1, 5]$ é 55 e ocorre em $x = 5$. Isso está de acordo com o gráfico de f na Figura 5.4.3. ◄



$[1, 5] \times [20, 55]$
xScl = 1, yScl = 10

$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$

Figura 5.4.3

► Exemplo 2 Encontre os extremos absolutos de $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$ no intervalo $[-1, 1]$ e determine onde eles ocorrem.

Solução Observe que f é contínua em toda parte e que, portanto, o Teorema do Valor Extremo garante que f tem um valor máximo e um valor mínimo no intervalo $[-1, 1]$. Diferenciando, obtemos

$$f'(x) = 8x^{1/3} - x^{-2/3} = x^{-2/3}(8x - 1) = \frac{8x - 1}{x^{2/3}}$$

Assim, $f'(x) = 0$ em $x = \frac{1}{8}$ e $f'(x)$ não está definida em $x = 0$. Calculando o valor de f nesses pontos críticos e nos extremos, obtemos a Tabela 5.4.1, da qual concluímos que um valor mínimo absoluto de $-\frac{9}{8}$ ocorre em $x = \frac{1}{8}$, enquanto um valor máximo absoluto de 9 ocorre em $x = -1$. ◄

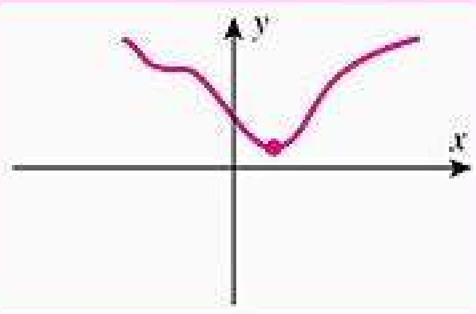
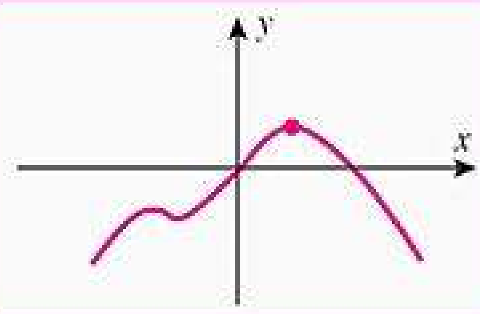
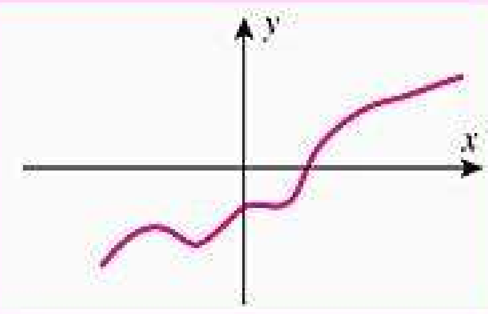
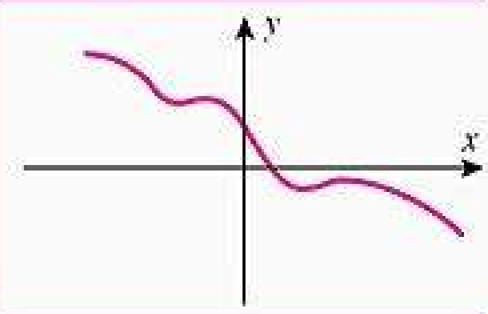
Tabela 5.4.1

x	-1	0	$\frac{1}{8}$	1
$f(x)$	9	0	$-\frac{9}{8}$	3

■ EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS INFINITOS

Observamos anteriormente que, em um intervalo infinito, uma função contínua pode ou não ter extremos absolutos (veja a Figura 5.4.1). Porém, certas conclusões sobre a existência de extremos absolutos de uma função contínua f em $(-\infty, +\infty)$ podem ser deduzidas do comportamento de $f(x)$, quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ (Tabela 5.4.2).

Tabela 5.4.2

LIMITES	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICOS				

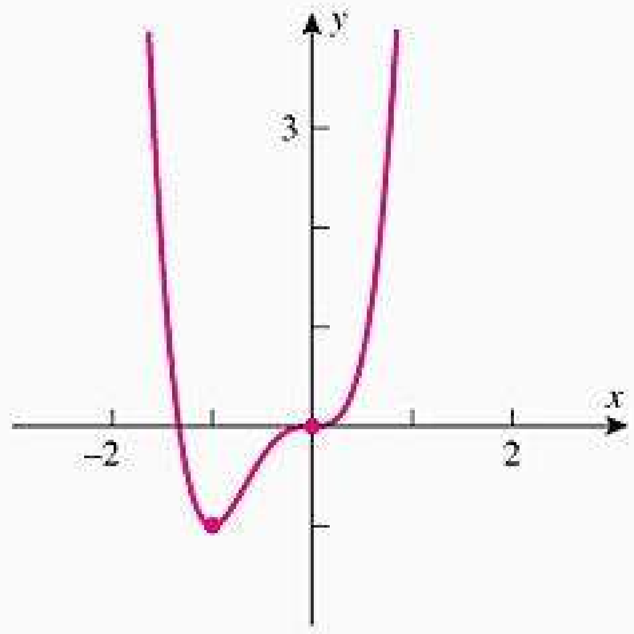
▶ Exemplo 3 O que pode ser dito sobre a existência de extremos absolutos de polinômios em $(-\infty, +\infty)$?

Solução Se $p(x)$ for um polinômio de grau ímpar, então

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) \tag{1}$$

têm sinais opostos (um é $+\infty$ e o outro, $-\infty$), não havendo, assim, extremos absolutos. Por outro lado, se $p(x)$ tiver grau par, então os limites em (1) têm o mesmo sinal (ou ambos $+\infty$, ou ambos $-\infty$). Se o coeficiente dominante for positivo, ambos os limites são $+\infty$ e há um mínimo absoluto, mas não um máximo absoluto; se o coeficiente dominante for negativo, então ambos os limites são $-\infty$ e há um máximo absoluto, mas não um mínimo absoluto. ◀

▶ Exemplo 4 Determine por inspeção se $p(x) = 3x^4 + 4x^3$ tem extremos absolutos. Se tiver, encontre-os e mostre onde eles ocorrem.



$p(x) = 3x^4 + 4x^3$

Figura 5.4.4

Solução Como $p(x)$ tem grau par e o coeficiente dominante é positivo, $p(x) \to +\infty$ quando $x \to \pm\infty$. Dessa forma, há um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto. A partir do Teorema 5.4.3 [aplicado ao intervalo $(-\infty, +\infty)$], o mínimo absoluto deve ocorrer em um ponto crítico de p. Como p é diferenciável em toda parte, podemos encontrar todos os pontos críticos resolvendo a equação $p'(x) = 0$. Essa equação é

$$12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1) = 0$$

de onde concluímos serem $x = 0$ e $x = -1$ os pontos estacionários. Calculando o valor de p nos pontos estacionários, obtemos

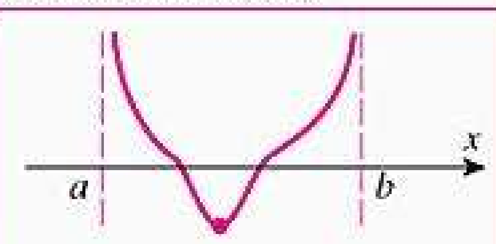
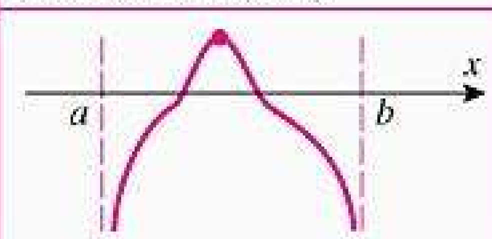
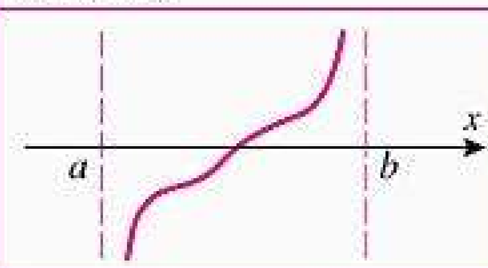
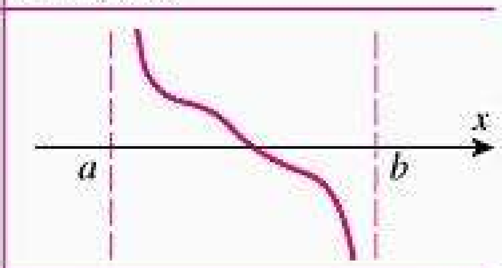
$$p(0) = 0 \quad \text{e} \quad p(-1) = -1$$

Assim, concluímos que p tem um mínimo absoluto de -1 em $x = -1$ (Figura 5.4.4). ◀

EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS ABERTOS

Sabemos que uma função contínua pode ou não ter extremos absolutos em um intervalo aberto. Porém, certas conclusões sobre a existência de extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo aberto (a, b) podem ser tiradas do comportamento de $f(x)$, quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$ (Tabela 5.4.3). Conclusões análogas podem ser deduzidas para intervalos da forma $(-\infty, b)$ ou $(a, +\infty)$.

Tabela 5.4.3

LIMITES	$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO				

▶ Exemplo 5 Determine se a função

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

tem algum extremo absoluto no intervalo (0, 1). Se houver algum, encontre-o e determine onde ocorre.

Solução Como f é contínua no intervalo (0, 1) e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$

a função f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em (0, 1). Pelo Teorema 5.4.3, o máximo absoluto deve ocorrer em um ponto crítico de f no intervalo (0, 1). Temos que

$$f'(x) = -\frac{2x - 1}{\left(x^2 - x\right)^2}$$

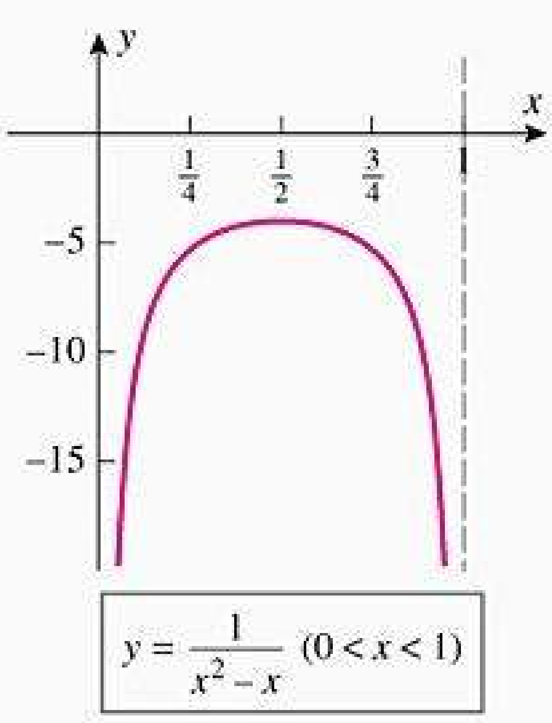


Figura 5.4.5

logo, a única solução da equação $f'(x) = 0$ é $x = \frac{1}{2}$. Embora f não seja diferenciável em $x = 0$ ou em $x = 1$, esses valores são duplamente desqualificados por não pertencerem nem ao domínio de f nem ao intervalo (0, 1). Assim, o máximo absoluto ocorre em $x = \frac{1}{2}$, e esse valor máximo absoluto é

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -4$$

(Figura 5.4.5). ◀

EXTREMOS ABSOLUTOS DE FUNÇÕES COM UM EXTREMO RELATIVO

Se uma função contínua tiver somente um extremo relativo em um intervalo I finito ou infinito, então esse extremo relativo deve necessariamente ser um extremo absoluto. Para entender isso, suponha que f tenha um máximo relativo em um ponto x_0 de um intervalo I e nenhum outro extremo relativo em I. Se $f(x_0)$ *não* for o máximo absoluto de f em I, então o

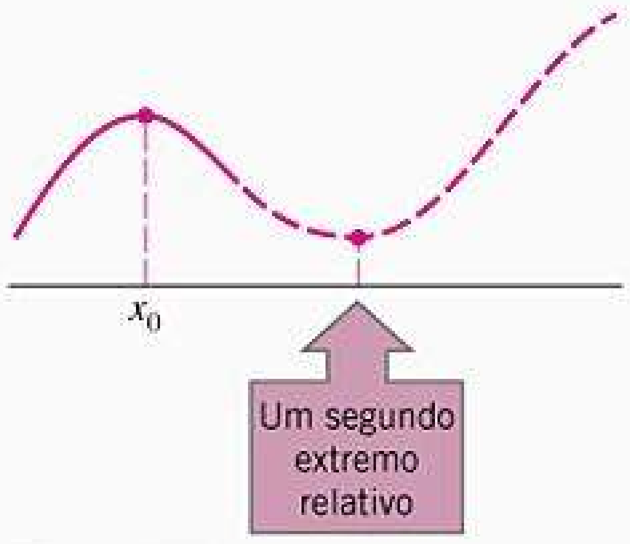


Figura 5.4.6

gráfico de f deve fazer uma virada para cima em algum ponto de I para subir acima de $f(x_0)$. Entretanto, isso não pode acontecer, pois o processo de fazer a virada para cima produziria um segundo extremo relativo em I (Figura 5.4.6). Assim, $f(x_0)$ deve ser o máximo absoluto, além de ser um máximo relativo. Essa idéia está presente no teorema a seguir, o qual enunciamos sem prova.

> **5.4.4 TEOREMA** *Suponha que f é contínua e tem exatamente um extremo relativo em um intervalo I, digamos em x_0.*
>
> (*a*) *Se f tiver um mínimo relativo em x_0, então $f(x_0)$ é o valor mínimo absoluto de f em I.*
>
> (*b*) *Se f tiver um máximo relativo em x_0, então $f(x_0)$ é o valor máximo absoluto de f em I.*

Esse teorema é, muitas vezes, útil onde outros métodos são enfadonhos ou difíceis de aplicar.

► Exemplo 6 Encontre os extremos absolutos, se houver, da função $f(x) = e^{(x^3-3x^2)}$ no intervalo $(0, +\infty)$.

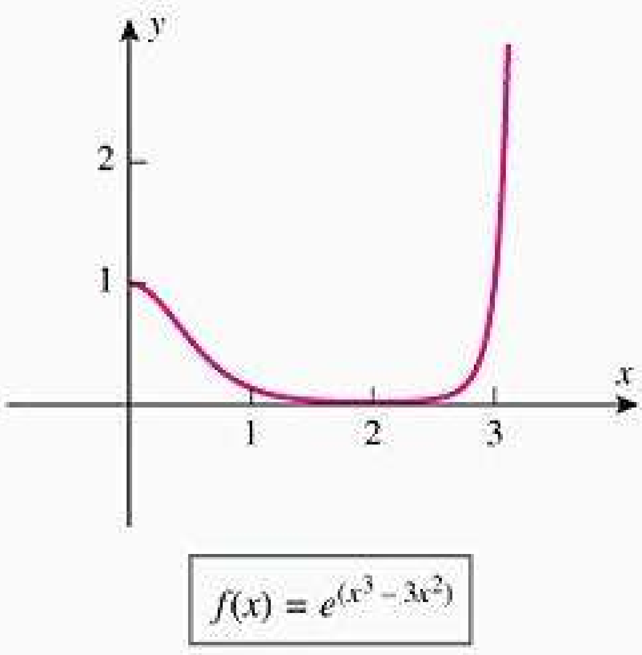


Figura 5.4.7

Solução Temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (verifique), portanto, f não tem um máximo absoluto no intervalo $(0, +\infty)$. Contudo, a continuidade de f, junto com o fato de que $\lim_{x\to0^+} f(x) = e^0 = 1$ é finito, permite a possibilidade de f ter um mínimo absoluto em $(0, +\infty)$. Se f tiver um tal mínimo, deve ocorrer em um ponto crítico, portanto, consideramos

$$f'(x) = e^{(x^3-3x^2)}(3x^2-6x) = 3x(x-2)e^{(x^3-3x^2)}$$

Como $e^{(x^3-3x^2)} > 0$ para todos os valores de x, vemos que $x = 0$ e $x = 2$ são os únicos pontos críticos de f. Desses, somente $x = 2$ está no intervalo $(0, +\infty)$, de modo que nesse ponto f poderia ter um mínimo absoluto. Para verificar se isso ocorre, podemos aplicar a parte (*a*) do Teorema 5.4.4. Como

$$f''(x) = e^{(x^3-3x^2)}(3x^2-6x)^2 + e^{(x^3-3x^2)}(6x-6) = [(3x^2-6x)^2 + (6x-6)]e^{(x^3-3x^2)}$$

temos

$$f''(2) = (0+6)e^{-4} = 6e^{-4} > 0$$

A função do Exemplo 6 tem um mínimo absoluto no intervalo $(-\infty, +\infty)$?

e, portanto, pelo teste da derivada segunda, $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo de f. Assim, $f(x)$ tem um valor mínimo absoluto em $x = 2$, e esse mínimo é $f(2) = e^{-4} \approx 0{,}0183$ (Figura 5.4.7). ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.4 (*Ver página 309 para respostas.*)

1. Use a figura abaixo para encontrar as coordenadas x dos extremos relativos e absolutos de f em $[0, 6]$.

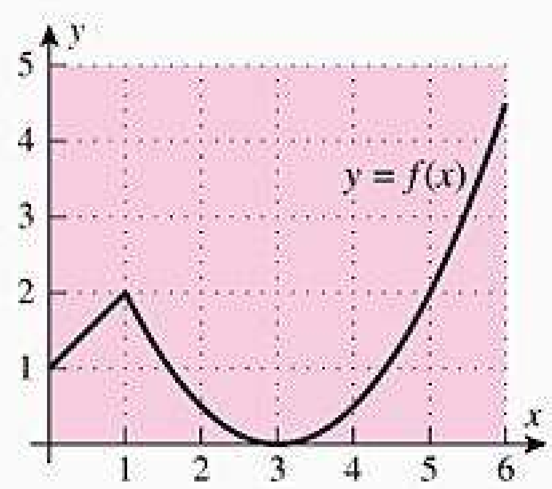


Figura Ex-1

2. Verdadeiro ou falso:

(a) Se uma função f é contínua em $[a, b]$, então f tem um máximo absoluto em $[a, b]$.

(b) Se uma função f é contínua em (a, b), então f tem um mínimo absoluto em (a, b).

(c) Se uma função f tem um valor mínimo absoluto em (a, b), então f tem um ponto crítico em (a, b).

(d) Se uma função f é contínua em $[a, b]$ e f não tem valores extremos relativos em (a, b), então o valor máximo absoluto de f existe e ocorre ou em $x = a$ ou em $x = b$.

3. Suponha que uma função f seja contínua em $[-4, 4]$ e tenha pontos críticos em $x = -3, 0, 2$. Use a tabela para determinar os valores absolutos máximo e mínimo, se houver, para f nos intervalos indicados.

(a) $[1, 4]$ (b) $[-2, 2]$ (c) $[-4, 4]$ (d) $(-4, 4)$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2224	−1333	0	1603	2096	2293	2400	2717	6064

4. Seja $f(x)=x^3-3x^2-9x+25$. Use a derivada $f'(x)=3(x+1)(x-3)$ para determinar os valores absolutos máximo e mínimo, se houver, para f em cada um dos intervalos indicados.

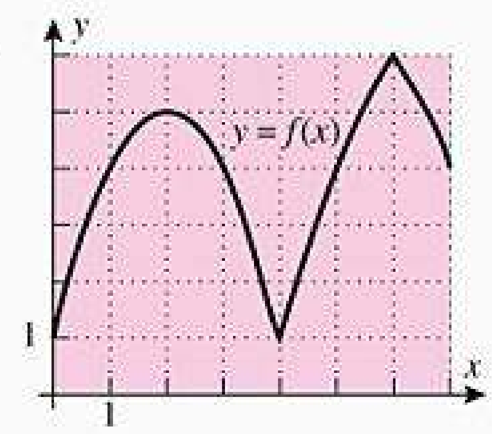
(a) $[0, 4]$ (b) $[-2, 4]$ (c) $[-4, 2]$
(d) $[-5, 10]$ (e) $(-5, 4)$

EXERCÍCIOS 5.4 Recurso Gráfico C CAS

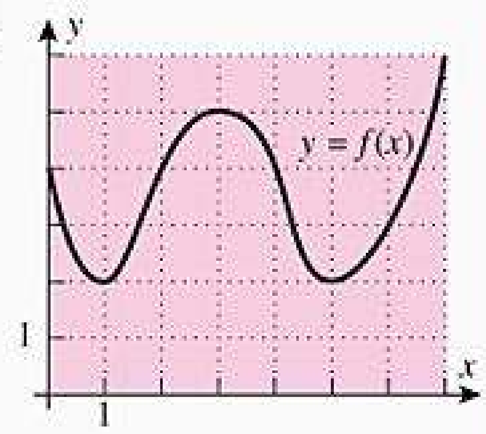
ENFOCANDO CONCEITOS

1-2 Use o gráfico para encontrar as coordenadas x dos extremos absolutos e relativos de f em $[0, 7]$

1.



2.



3. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua f com as propriedades indicadas no intervalo $[0, 10]$.

(a) f tem mínimo e máximo absolutos em $x = 0$ e $x = 10$, respectivamente.
(b) f tem mínimo e máximo absolutos em $x = 2$ e $x = 7$, respectivamente.
(c) f tem mínimos relativos em $x = 1$ e $x = 8$, máximos relativos em $x = 3$ e $x = 7$ e mínimo e máximo absolutos em $x = 5$ e $x = 10$, respectivamente.

4. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua f com as propriedades indicadas no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

(a) f não tem extremos relativos nem absolutos.
(b) f tem um mínimo absoluto em $x = 0$, mas nenhum máximo absoluto.
(c) f tem máximo e mínimo absolutos em $x = -5$ e $x = 5$, respectivamente.

5. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Explique por que f tem um valor mínimo mas não um valor máximo no intervalo fechado $[0, 1]$.

6. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, 1 \end{cases}$$

Explique por que f não tem um valor mínimo nem um valor máximo no intervalo fechado $[0, 1]$.

7-16 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f nos intervalos fechados dados e indique onde ocorrem esses valores.

7. $f(x) = 4x^2 - 12x + 10$; $[1, 2]$

8. $f(x) = 8x - x^2$; $[0, 6]$

9. $f(x) = (x - 2)^3$; $[1, 4]$

10. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; $[-3, 2]$

11. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$; $[-1, 1]$

12. $f(x) = (x^2 + x)^{2/3}$; $[-2, 3]$

13. $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$; $[-\pi/4, \pi/2]$

14. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$; $[0, \pi]$

15. $f(x) = 1 + |9 - x^2|$; $[-5, 1]$

16. $f(x) = |6 - 4x|$; $[-3, 3]$

17-24 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos, se houver, nos intervalos dados e indique onde esses valores ocorrem.

17. $f(x) = x^2 - x - 2$; $(-\infty, +\infty)$

18. $f(x) = 3 - 4x - 2x^2$; $(-\infty, +\infty)$

19. $f(x) = 4x^3 - 3x^4$; $(-\infty, +\infty)$

20. $f(x) = x^4 + 4x$; $(-\infty, +\infty)$

21. $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$; $(-\infty, +\infty)$

22. $f(x) = x^3 - 9x + 1$; $(-\infty, +\infty)$

23. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$; $(-5, -1)$

24. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$; $(-1, 5]$

25-38 Use um recurso gráfico computacional para estimar os valores máximo e mínimo absolutos de f, se houver, nos intervalos indicados e use os métodos do Cálculo para obter os valores exatos.

25. $f(x) = (x^2 - 2x)^2$; $(-\infty, +\infty)$

26. $f(x) = (x-1)^2 (x+2)^2$; $(-\infty, +\infty)$

27. $f(x) = x^{2/3}(20-x)$; $[-1, 20]$

28. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$; $[-1, 4]$

29. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$; $(0, +\infty)$

30. $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+3}{x^2-2x+2}$; $[1, +\infty)$

31. $f(x) = \dfrac{2-\cos x}{\operatorname{sen} x}$; $[\pi/4, 3\pi/4]$

32. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$; $[-\pi, \pi]$

33. $f(x) = x^3 e^{-2x}$; $[1, 4]$

34. $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x}$; $[1, e]$

35. $f(x) = 5\ln(x^2+1) - 3x$; $[0, 4]$

36. $f(x) = (x^2-1)e^x$; $[-2, 2]$

37. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$; $[0, 2\pi]$

38. $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$; $[0, \pi]$

39. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x) = \begin{cases} 4x-2, & x < 1 \\ (x-2)(x-3), & x \geq 1 \end{cases}$$

em $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

40. Seja $f(x) = x^2 + px + q$. Encontre os valores de p e q tais que $f(1) = 3$ é um valor extremo de f em $[0, 2]$. Esse valor é máximo ou mínimo?

41-42 Se f for uma função periódica, então a localização de todos os extremos absolutos no intervalo $(-\infty, +\infty)$ pode ser obtida encontrando os extremos absolutos em um período e usando a periodicidade para localizar os demais. Use essa idéia nestes exercícios para encontrar os valores extremos absolutos da função e indique os valores de x nos quais eles ocorrem.

41. $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$

42. $f(x) = 3\cos\dfrac{x}{3} + 2\cos\dfrac{x}{2}$

43-44 Uma forma de provar que $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um dado intervalo é mostrar que ali $0 \leq g(x) - f(x)$, e uma forma de provar essa última desigualdade é mostrar que o mínimo absoluto de $g(x) - f(x)$ no intervalo é não-negativo. Use essa idéia para provar as desigualdades nestes exercícios.

43. Prove que $\operatorname{sen} x \leq x$ para todo x no intervalo $[0, 2\pi]$.

44. Prove que $\cos x \geq 1 - (x^2/2)$ para todo x no intervalo $[0, 2\pi]$.

45. Qual é a menor inclinação possível para uma reta tangente à equação $y = x^3 - 3x^2 + 5x$?

46. (a) Mostre que $f(x) = \sec x + \operatorname{cossec} x$ tem um valor mínimo mas nenhum valor máximo no intervalo $(0, \pi/2)$.

(b) Encontre o valor mínimo da parte (a).

C 47. Mostre que o valor mínimo absoluto de

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{(8-x)^2}, \quad x > 8$$

ocorre em $x = 10$ usando um CAS para encontrar $f'(x)$ e para resolver $f'(x) = 0$.

48. A concentração $C(t)$ de uma droga na corrente sangüínea t horas após ter sido injetada é usualmente modelada por uma equação da forma

$$C(t) = \frac{K(e^{-bt} - e^{-at})}{a-b}$$

onde $K > 0$ e $a > b > 0$.

(a) Em que momento ocorre a concentração máxima?

(b) Para simplificar, tome $K = 1$; use um recurso gráfico computacional para verificar seu resultado da parte (a) fazendo o gráfico de $C(t)$ para vários valores de a e b.

49. Pode ser provado que, se f for diferenciável em (a, b) e L for uma reta que não intersecta a curva $y = f(x)$ no intervalo (a, b), então os pontos nos quais a curva está mais próxima e mais distante da reta L, se houver, ocorrem em pontos onde a reta tangente à curva é paralela a L (veja a figura abaixo). Use esse resultado para encontrar os pontos sobre o gráfico de $y = -x^2$, $-1 \leq x \leq 1{,}5$ que estão mais próximos e mais distantes da reta $y = 2 - x$.

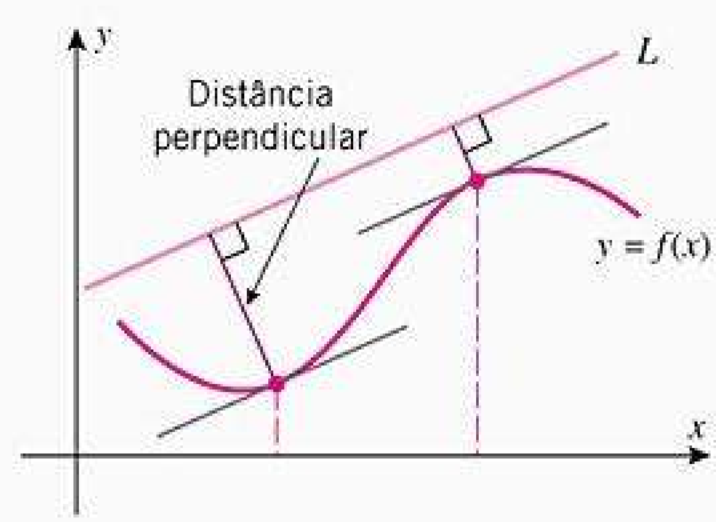


Figura Ex-49

50. Use a idéia discutida no Exercício 49 para encontrar as coordenadas de todos os pontos do gráfico de $y = x^3$ $-1 \leq x \leq 1$ mais próximos e mais distantes da reta $y = \frac{4}{3}x - 1$.

51. Suponha que as equações do movimento de um avião de papel, durante os 12 segundos iniciais de vôo, são

$$x = t - 2\operatorname{sen} t, \quad y = 2 - 2\cos t \quad (0 \leq t \leq 12)$$

Quais são os pontos mais alto e mais baixo da trajetória e em que instantes o avião está nesses pontos?

52. A figura a seguir mostra a trajetória de uma mosca cujas equações do movimento são

$$x = \frac{\cos t}{2 + \operatorname{sen} t}, \quad y = 3 + \operatorname{sen}(2t) - 2\operatorname{sen}^2 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(a) Quais são os pontos mais alto e mais baixo do vôo?

(b) A que distância à esquerda e à direita da origem ela voa?

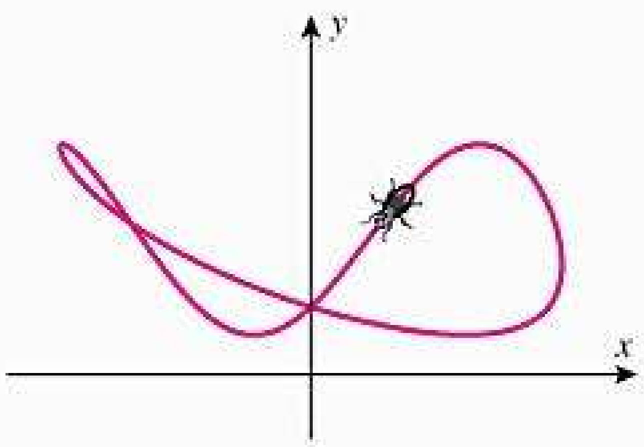


Figura Ex-52

53. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$. Prove que $f(x) \geq 0$ para todo x se, e somente se, $b^2 - 4ac \leq 0$. [*Sugestão*: Encontre o mínimo de $f(x)$.]

54. Prove o Teorema 5.4.3 no caso em que o valor extremo é um mínimo.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.4

1. Ocorre um mínimo relativo em $x = 3$, um máximo relativo em $x = 1$, um mínimo absoluto em $x = 3$ e um máximo absoluto em $x = 6$. **2.** (a) verdadeiro (b) falso (c) verdadeiro (d) verdadeiro **3.** (a) max, 6064; min, 2293 (b) max, 2400; min, 0 (c) max, 6064; min, −1333 (d) não há max; min, −1333 **4.** (a) max, $f(0) = 25$; min $f(3) = -2$ (b) max, $f(-1) = 30$; min, $f(3) = -2$ (c) max, $f(-1) = 30$; min, $f(-4) = -51$ (d) max, $f(10) = 635$; min, $f(-5) = -130$ (e) max, $f(-1) = 30$; não há min

5.5 PROBLEMAS DE MÁXIMOS E DE MÍNIMOS EM APLICAÇÕES

Nesta seção mostraremos como os métodos discutidos na seção anterior podem ser usados para resolver vários problemas de otimização.

■ CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Os problemas aplicados de otimização que consideraremos nesta seção caem em uma das duas seguintes categorias:

- Problemas que se reduzem a maximizar ou minimizar uma função contínua em um intervalo finito fechado.
- Problemas que se reduzem a maximizar ou minimizar uma função contínua em um intervalo infinito ou finito, mas não fechado.

Para os problemas do primeiro tipo, o Teorema do Valor Extremo (5.4.2) garante que o problema tem solução e sabemos que essa solução pode ser obtida examinando os valores da função nos pontos críticos e nos extremos do intervalo. Já os problemas do segundo tipo podem ou não ter solução. Se a função for contínua e tiver exatamente um extremo relativo no intervalo, então o Teorema 5.4.4 garante a existência de uma solução e fornece um método para encontrá-la. Nos casos em que o teorema não se aplica, uma certa engenhosidade pode ser necessária para resolver o problema.

■ PROBLEMAS ENVOLVENDO INTERVALOS FECHADOS E FINITOS

O matemático francês do século XVII Pierre de Fermat, em seu livro *Sobre o método de avaliação de máximos e mínimos*, resolveu um problema de otimização muito parecido com nosso primeiro exemplo. O trabalho de Fermat em tais problemas de otimização levou o matemático francês Laplace a proclamá-lo "o verdadeiro inventor do Cálculo diferencial". Embora essa honra deva caber a Newton e Leibniz, não deixa de ser verdade que Fermat desenvolveu procedimentos que anteciparam partes do Cálculo diferencial.

► Exemplo 1 Devemos projetar um jardim de área retangular e protegido por uma cerca. Qual é a maior área possível de tal jardim se dispusermos de apenas 100 m lineares de cerca?

Solução Sejam

x = comprimento do retângulo (m)
y = largura do retângulo (m)
A = área do retângulo (m^2)

Então

$$A = xy \tag{1}$$

Como o perímetro do retângulo é de 100 m, as variáveis x e y estão relacionadas pela equação

$$2x + 2y = 100 \quad \text{ou} \quad y = 50 - x \tag{2}$$

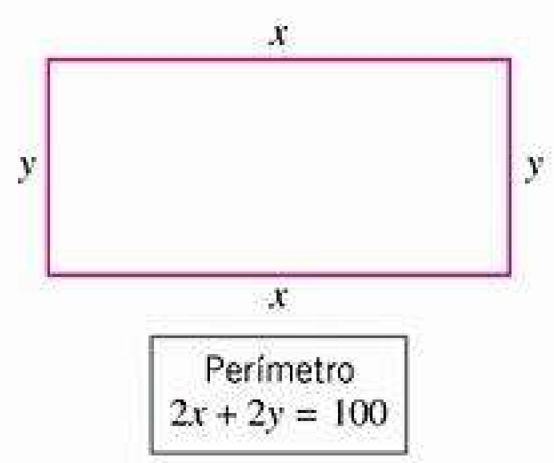


Figura 5.5.1

(ver Figura 5.5.1). Substituindo (2) em (1), obtemos

$$A = x(50 - x) = 50x - x^2 \tag{3}$$

Como representa um comprimento, x não pode ser negativo e, como os dois lados de comprimento x não podem ter um comprimento combinado que ultrapasse o perímetro de 100 m, então a variável x deve satisfazer

$$0 \le x \le 50 \tag{4}$$

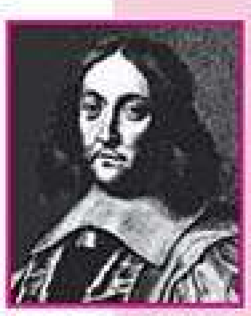
Assim, o problema ficou reduzido a encontrar o valor (ou valores) de x em [0, 50] para os quais A é máxima. Como A é um polinômio em x, é contínua em [0, 50] e o máximo ocorre ou nos extremos desse intervalo ou em um ponto estacionário.

A partir de (3), obtemos

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 2x$$

Equacionando-se $dA/dx = 0$ obtemos

$$50 - 2x = 0$$



Pierre de Fermat (1601-1665) Fermat, filho de um bem-sucedido comerciante de couros francês, era um advogado que praticava a Matemática como passatempo. Ele recebeu o grau de Bacharel em Direito Civil da Universidade de Orleans, em 1631, e posteriormente ocupou várias posições governamentais, inclusive um posto de consultor do parlamento de Toulouse. Embora aparentemente bem-sucedido, documentos confidenciais da época indicam que seu desempenho oficial como advogado foi fraco, talvez devido ao grande tempo dedicado à Matemática. Ao longo de toda a vida, não poupou esforços para impedir a publicação de seus resultados matemáticos. Ele tinha o infeliz hábito de rabiscar seus trabalhos nas margens de livros e, freqüentemente, enviava os resultados para amigos sem manter uma cópia para si. Como conseqüência, nunca lhe foi dado o crédito por muitas de suas maiores realizações, até que seu nome saiu da obscuridade na metade do século XIX. Sabe-se agora que Fermat, simultânea e independentemente de Descartes, desenvolveu a Geometria Analítica. Infelizmente, Descartes e Fermat discutiram asperamente sobre vários problemas, sem que tenha havido qualquer cooperação real entre ambos.

Fermat resolveu muitos problemas fundamentais do Cálculo. Ele obteve o primeiro procedimento para diferenciar polinômios e resolveu muitos problemas importantes de maximização, minimização, área e tangência. Seu trabalho serviu de inspiração a Isaac Newton. Fermat é mais conhecido por seu trabalho sobre a teoria dos números, pelo estudo de propriedades e pelas relações entre os números inteiros. Ele foi o primeiro matemático, após o grego Diofante, a dar contribuições substanciais a esse campo. Infelizmente, nenhum dos contemporâneos de Fermat apreciou seu trabalho nessa área, o que acabou empurrando-o para o isolamento e para a obscuridade, no final da vida. Além de seu trabalho em Cálculo e em teoria dos números, Fermat foi um dos fundadores da teoria da Probabilidade e deu grandes contribuições à teoria da Óptica. Além da Matemática, foi um erudito de certa importância, era fluente em francês, italiano, espanhol, latim e grego e escreveu uma quantidade razoável de poemas em latim.

Um dos grandes mistérios da Matemática está em um trabalho de Fermat em teoria dos números. Na margem de um livro de Diofante, ele rabiscou que, para valores de n maiores do que 2, a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções x, y e z inteiras não-nulas. Ele afirmou: "descobri uma prova verdadeiramente maravilhosa para isso, a qual, porém, não cabe nesta margem". Esse resultado, que ficou conhecido como "o último teorema de Fermat", parecia ser verdadeiro, mas escapou dos maiores gênios matemáticos por 300 anos, até que o professor Andrew Wiles, da Universidade de Princeton, apresentou uma prova em junho de 1993 em uma série dramática de três conferências, que chamou a atenção da mídia mundial (*New York Times*, 27 de junho de 1993). Ocorre que aquela prova tinha uma lacuna séria, que foi preenchida e publicada por Wiles e Richard Taylor em 1995. Um prêmio de 100 mil marcos alemães fora oferecido em 1908 para a solução desse problema, porém seu valor foi consumido pela inflação.

Tabela 5.5.1

x	0	25	50
A	0	625	0

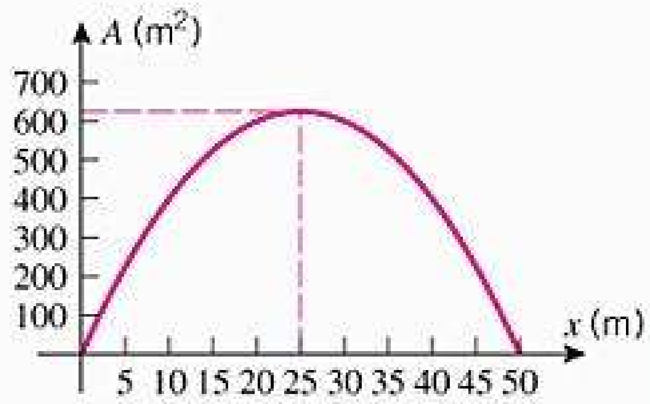


Figura 5.5.2

No Exemplo 1, incluímos $x = 0$ e $x = 50$ como valores possíveis de x, mesmo que nesse caso tenhamos retângulos com dois lados de comprimento zero. Se virmos isso como um problema puramente matemático, não haverá nada de errado em permitir lados de comprimento zero. Porém, se virmos isso como um problema concreto no qual o retângulo será formado com algum material, então esses valores devem ser excluídos.

ou $x = 25$. Assim, o máximo ocorre em um dos pontos

$$x = 0, \quad x = 25, \quad x = 50$$

A substituição desses valores em (3) resulta na Tabela 5.5.1, a qual nos diz que a área máxima de 625 m^2 ocorre em $x = 25$, o que está de acordo com o gráfico de (3) na Figura 5.5.2. A partir de (2), resulta que $y = 25$, de modo que o retângulo de perímetro 100 m com maior área é um quadrado com lados medindo 25 m de comprimento. ◄

O Exemplo 1 ilustra o seguinte procedimento de cinco passos que pode ser usado para resolver muitos problemas de máximos e mínimos em aplicações.

Procedimentos para Resolver Problemas de Máximos e Mínimos em Aplicações

Passo 1 Faça uma figura apropriada e identifique as quantidades relevantes ao problema.

Passo 2 Obtenha uma fórmula para a quantidade a ser maximizada ou minimizada.

Passo 3 Usando as condições dadas no problema para eliminar variáveis, expresse a quantidade a ser maximizada ou minimizada como função de uma variável.

Passo 4 Encontre o intervalo de valores possíveis para essa variável a partir das restrições físicas do problema.

Passo 5 Se aplicável, use as técnicas da seção anterior para obter o máximo ou o mínimo.

► Exemplo 2 Uma caixa aberta deve ser feita de uma folha de papelão medindo 16 por 30 cm, destacando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados (Figura 5.5.3). Qual é o tamanho dos quadrados para se obter uma caixa com o maior volume?

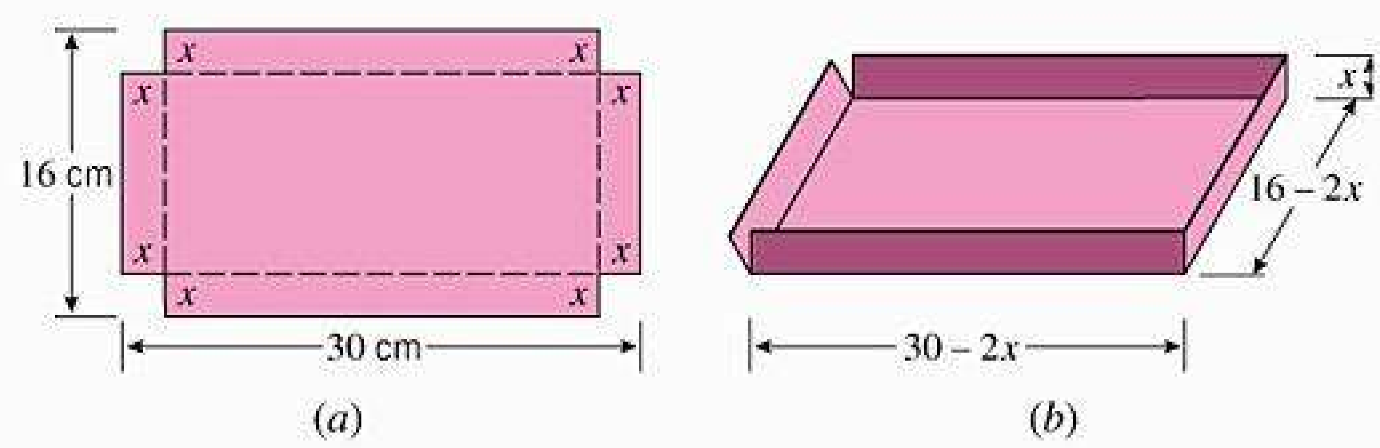


Figura 5.5.3

Solução Para enfatizar, vamos listar explicitamente os cinco passos do procedimento dado acima como um modelo para resolver esse problema. (Em exemplos posteriores, seguiremos esse modelo sem listar os passos.)

- *Passo 1*: Na Figura 5.5.3*a* temos a folha de papelão com os quadrados removidos dos cantos. Sejam

  x = comprimento (em cm) dos lados dos quadrados a serem cortados
  V = volume (em cm^3) da caixa resultante

- *Passo 2*: Como estamos removendo quadrados de lados x de cada canto, a caixa resultante terá dimensões $16 - 2x$ por $30 - 2x$ por x (Figura 5.5.3*b*). Como o volume de uma caixa é o produto de suas dimensões, temos

$$V = (16 - 2x)(30 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3 \tag{5}$$

- *Passo 3*: Observe que a expressão para o volume já se encontra em termos da única variável x.

- *Passo 4*: A variável x em (5) está sujeita a certas restrições. Como x representa um comprimento, não pode ser negativo e, como a largura do papelão é de 16 cm, não podemos cortar quadrados com lados maiores do que 8 cm de comprimento. Assim, a variável x em (5) deve satisfazer

$$0 \leq x \leq 8$$

e, dessa forma, reduzimos nosso problema ao de encontrar o valor (ou valores) de x no intervalo [0, 8] para o(s) qual(is) (5) é um máximo.

Tabela 5.5.2

x	0	$\frac{10}{3}$	8
V	0	$\frac{19600}{27} \approx 726$	0

- *Passo 5*: A partir de (5), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= 480 - 184x + 12x^2 = 4(120 - 46x + 3x^2)\\ &= 4(x - 12)(3x - 10)\end{aligned}$$

Equacionando-se $dV/dx = 0$, obtemos

$$x = \tfrac{10}{3} \quad \text{e} \quad x = 12$$

Como $x = 12$ cai fora do intervalo [0, 8], o valor máximo de V ocorre ou no ponto crítico $x = \frac{10}{3}$ ou em um dos extremos $x = 0$, $x = 8$. Substituindo em (5) esses valores, obtemos a Tabela 5.5.2, a qual nos diz que o maior volume possível $V = \frac{19600}{27}\ \text{cm}^3 \approx 726\ \text{cm}^3$ ocorre quando cortamos quadrados com $\frac{10}{3}$ cm de lado. Isso está de acordo com o gráfico de (5) mostrado na Figura 5.5.4. ◄

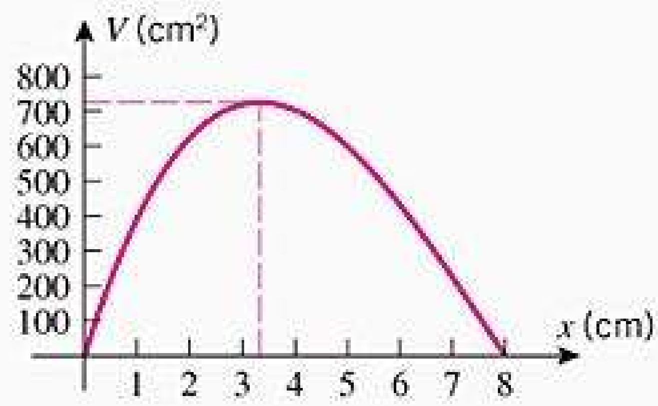


Figura 5.5.4

► **Exemplo 3** A Figura 5.5.5 mostra um poço de petróleo no mar em um ponto W a 5 km do ponto A mais próximo de uma praia reta. O petróleo é bombeado de W até um ponto B na praia a 8 km de A da seguinte forma: de W até um ponto P na praia entre A e B através de uma tubulação colocada sob a água, e de P até B através de uma tubulação colocada ao longo da praia. Se o custo em dólares para colocar a tubulação for de \$ 1.000.000/km sob a água e de \$ 500.000/km por terra, onde deve estar localizado P para minimizar o custo de colocar a tubulação?

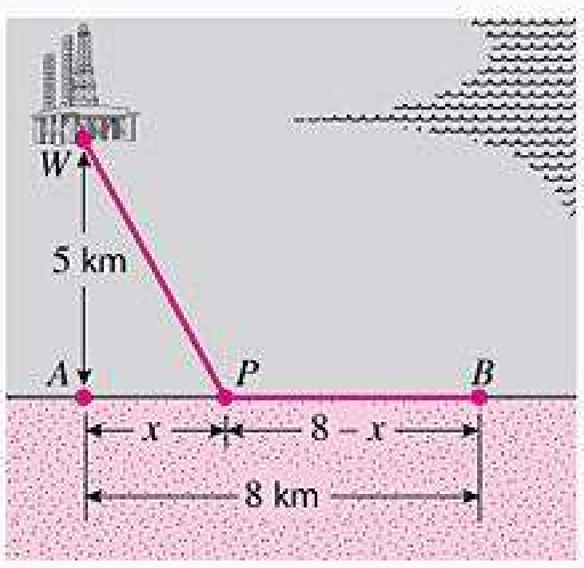


Figura 5.5.5

Solução Sejam

x = a distância (em km) entre A e P

c = o custo (em milhões de dólares) para toda a tubulação

A partir da Figura 5.5.5, o comprimento da tubulação sob a água é a distância entre W e P. Pelo Teorema de Pitágoras, esse comprimento é

$$\sqrt{x^2 + 25} \tag{6}$$

Também a partir da Figura 5.5.5, o comprimento da tubulação em terra é a distância entre P e B, que é

$$8 - x \tag{7}$$

De (6) e (7), tem-se que o custo total c (em milhões de dólares) para a tubulação é

$$c = 1(\sqrt{x^2 + 25}) + \tfrac{1}{2}(8 - x) = \sqrt{x^2 + 25} + \tfrac{1}{2}(8 - x) \tag{8}$$

Como a distância entre A e B é de 8 km, a distância x entre A e P deve satisfazer

$$0 \leq x \leq 8$$

Reduzimos, assim, nosso problema ao de encontrar o valor (ou valores) de x no intervalo [0, 8] para o(s) qual(is) c atinge um mínimo. Como c é uma função contínua de x no intervalo fechado [0, 8], podemos usar os métodos desenvolvidos na seção anterior para encontrar o mínimo.

A partir de (8), obtemos

$$\frac{dc}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{2}$$

Equacionando $dc/dx = 0$ e resolvendo em x, obtemos

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{1}{2} \tag{9}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(x^2+25)$$

$$x = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para verificar os cálculos no Exemplo 3. Especificamente, diferencie c em relação a x, resolva a equação $dc/dx = 0$ e execute todos os cálculos numéricos.

O número $-5/\sqrt{3}$ não é uma solução de (9) e deve ser descartado, restando $x = 5/\sqrt{3}$ como único ponto crítico. Como esse ponto está no intervalo [0, 8], o mínimo deve ocorrer em um dos pontos

$$x = 0, \quad x = 5/\sqrt{3}, \quad x = 8$$

Substituindo esses valores em (8), teremos a Tabela 5.5.3, que nos diz que o menor custo possível da tubulação é c = \$ 8.330.127 até o dólar mais próximo, e isso ocorre quando o ponto P estiver localizado a uma distância de $5/\sqrt{3} \approx 2{,}89$ km de A. ◄

Tabela 5.5.3

x	0	$\frac{5}{\sqrt{3}}$	8
c	9	$\frac{10}{\sqrt{3}} + \left(4 - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right) \approx 8{,}330127$	$\sqrt{89} \approx 9{,}433981$

► Exemplo 4 Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 cm de altura e 6 cm de raio (Figura 5.5.6*a*).

Solução Sejam

r = raio do cilindro (em cm)
h = altura do cilindro (em cm)
V = volume do cilindro (em cm^3)

A fórmula para o volume do cilindro inscrito é

$$V = \pi r^2 h \tag{10}$$

Para eliminar uma das variáveis em (10), precisamos de uma relação entre r e h. Usando semelhança de triângulos (Figura 5.5.6*b*), obtemos

$$\frac{10-h}{r} = \frac{10}{6} \quad \text{ou} \quad h = 10 - \frac{5}{3}r \tag{11}$$

Substituindo-se (11) em (10), obtemos

$$V = \pi r^2\left(10 - \frac{5}{3}r\right) = 10\pi r^2 - \frac{5}{3}\pi r^3 \tag{12}$$

que expressa V só em termos de r. Como r representa um raio, e este não pode ser negativo, e como o raio do cilindro inscrito não pode exceder o raio do cone, a variável r deve satisfazer

$$0 \le r \le 6$$

Assim, reduzimos o problema a encontrar o valor (ou valores) de r em [0, 6] para o(s) qual(is) (12) é um máximo. Como V é uma função contínua de r em [0, 6], podemos aplicar os métodos desenvolvidos na seção precedente.

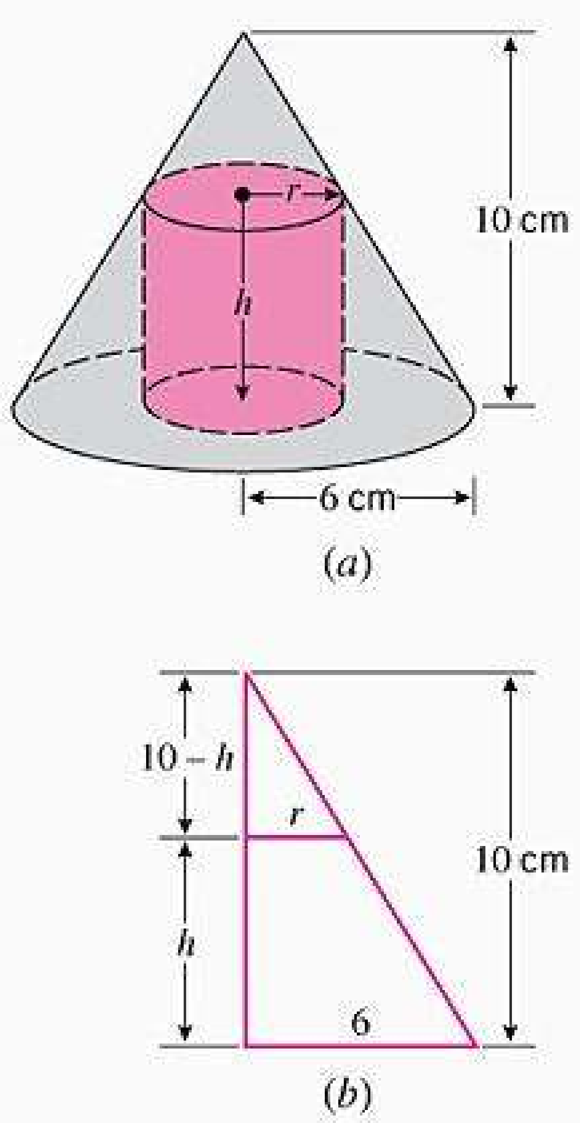


Figura 5.5.6

A partir de (12), obtemos

$$\frac{dV}{dr} = 20\pi r - 5\pi r^2 = 5\pi r(4 - r)$$

Equacionando $dV/dr = 0$, obtemos

$$5\pi r(4 - r) = 0$$

e, portanto, $r = 0$ e $r = 4$ são os pontos críticos. Como esses pontos estão no intervalo [0, 6], o máximo deve ocorrer em um dos pontos

$$r = 0, \quad r = 4, \quad r = 6$$

Tabela 5.5.4

r	0	4	6
V	0	$\frac{160}{3}\pi$	0

Substituindo esses valores em (12), obtemos a Tabela 5.5.4, que nos diz que o volume máximo $V = \frac{160}{3}\pi \approx 168$ cm^3 ocorre quando o cilindro inscrito tiver raio de 4 cm. Quando $r = 4$, tem-se a partir de (11) que $h = \frac{10}{3}$. Assim, o cilindro inscrito com o maior volume tem raio $r = 4$ cm e altura $h = \frac{10}{3}$ cm. ◄

PROBLEMAS ENVOLVENDO INTERVALOS QUE NÃO SÃO FINITOS E FECHADOS

► **Exemplo 5** Uma lata cilíndrica fechada deve conter 1 litro (1.000 cm^3) de líquido. Como poderíamos escolher a altura e o raio para minimizar a quantidade de material usado na confecção da lata?

Solução Sejam

h = altura da lata (em cm)
r = raio da lata (em cm)
S = área da superfície da lata (em cm^2)

Supondo não haver perda nem superposição, a quantidade de material necessária para a confecção será igual à área da superfície da lata. Como a lata consiste em dois discos circulares de raio r e uma folha retangular com dimensões h por $2\pi r$ (Figura 5.5.7), a área da superfície será

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \tag{13}$$

Como S depende de duas variáveis, r e h, vamos procurar por alguma condição no problema que permita expressar uma delas em termos da outra. Para isso, observe que o volume da lata é de 1.000 cm^3; assim, a partir da fórmula $V = \pi r^2 h$ para o volume do cilindro, tem-se que

$$1000 = \pi r^2 h \quad \text{ou} \quad h = \frac{1000}{\pi r^2} \tag{14-15}$$

Substituindo (15) em (13), obtemos

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \tag{16}$$

Assim, reduzimos o problema a encontrar um valor de r no intervalo $(0, +\infty)$ para o qual S é mínimo. Como S é uma função contínua de r no intervalo $(0, +\infty)$ e

$$\lim_{r \to 0^+} \left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \to +\infty} \left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right) = +\infty$$

a análise da Tabela 5.4.3 implica em S ter um mínimo no intervalo $(0, +\infty)$. Como esse mínimo deve ocorrer em um ponto crítico, calculamos

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \tag{17}$$

Equacionando $dS/dr = 0$, obtemos

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 5{,}4 \tag{18}$$

Como (18) é o único ponto crítico no intervalo $(0, +\infty)$, esse valor de r dá lugar ao valor mínimo de S. A partir de (15), o valor de h correspondente a esse r é

$$h = \frac{1000}{\pi(10/\sqrt[3]{2\pi})^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}} = 2r$$

Não é acidental nesse problema que o mínimo ocorra quando a altura da lata é igual ao diâmetro de sua base (Exercício 27).

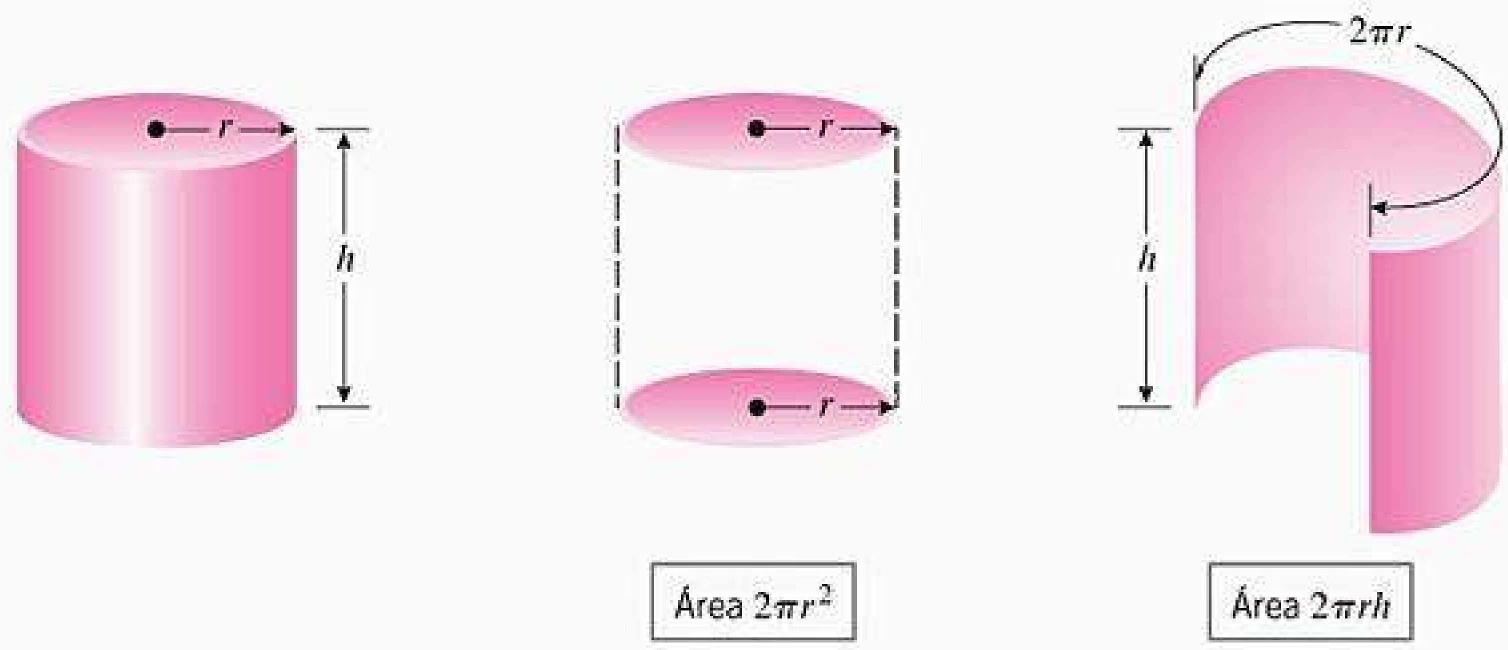


Figura 5.5.7

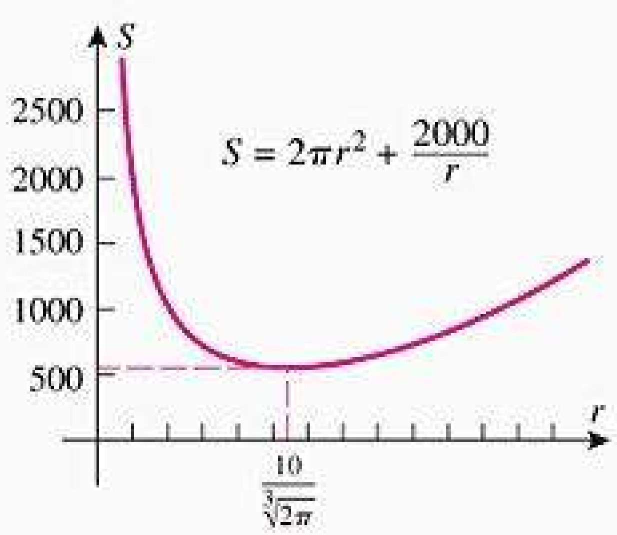


Figura 5.5.8

No Exemplo 5, a área de superfície S não tem máximo absoluto, pois S cresce sem cota quando o raio r tende a 0 (Figura 5.5.8). Assim, se tivéssemos perguntado pela lata que *maximizasse* a quantidade de material usado em sua confecção, não haveria solução do problema. Os problemas de otimização sem solução são chamados de *problemas mal-condicionados*.

Segunda solução A conclusão de que um mínimo ocorre no valor de r em (18) pode ser deduzida do Teorema 5.4.4 e do teste da derivada segunda, observando que

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

é positiva se $r > 0$, e logo é positiva se $r = 10/\sqrt[3]{2\pi}$. Isso implica que no ponto crítico $r = 10/\sqrt[3]{2\pi}$ ocorre um mínimo relativo e, portanto, um mínimo absoluto.

Terceira solução Uma maneira alternativa de justificar que o ponto crítico $r = 10/\sqrt[3]{2\pi}$ corresponde a um mínimo de S é olhar para o gráfico de S *versus* r (Figura 5.5.8). ◄

► Exemplo 6 Encontre um ponto na curva $y = x^2$ que esteja mais próximo do ponto (18, 0).

Solução A distância L entre (18, 0) e um ponto (x, y) arbitrário na curva $y = x^2$ (Figura 5.5.9) é dada por

$$L = \sqrt{(x-18)^2 + (y-0)^2}$$

Como (x, y) está na curva, x e y satisfazem $y = x^2$; assim,

$$L = \sqrt{(x-18)^2 + x^4} \tag{19}$$

Como não há restrições sobre x, o problema se reduz a encontrar um valor de x em $(-\infty, +\infty)$ para o qual (19) é mínima. A distância L e seu quadrado L^2 são minimizados no mesmo ponto (veja o Exercício 62). Assim, o valor mínimo de L em (19) e o valor mínimo de

$$S = L^2 = (x-18)^2 + x^4 \tag{20}$$

ocorrem no mesmo valor de x.

A partir de (20)

$$\frac{dS}{dx} = 2(x-18) + 4x^3 = 4x^3 + 2x - 36 \tag{21}$$

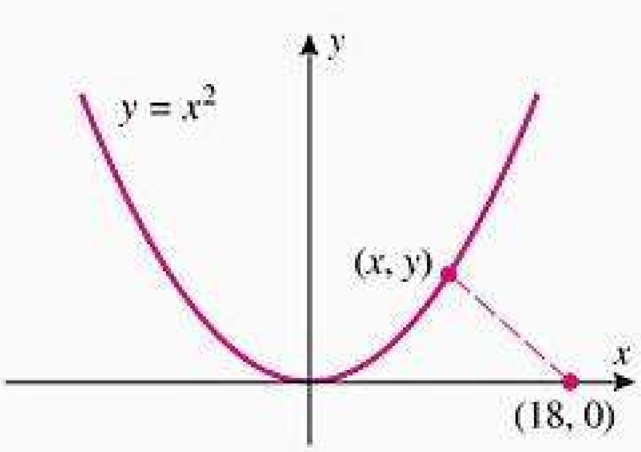


Figura 5.5.9

logo, os pontos críticos satisfazem $4x^3 + 2x - 36 = 0$ ou, de forma equivalente,

$$2x^3 + x - 18 = 0 \tag{22}$$

Para resolver a equação acima, começamos verificando os divisores de −18 para ver se o polinômio à esquerda tem alguma raiz inteira (ver Apêndice B). Os divisores são ±1, ±2, ±3, ±6, ±9 e ±18. Uma verificação desses valores mostra que $x = 2$ é uma raiz, logo $x - 2$ é um fator desse polinômio. Após dividir o polinômio por esse fator, podemos reescrever (22) como

$$(x - 2)(2x^2 + 4x + 9) = 0$$

Assim, as soluções restantes de (22) satisfazem a equação quadrática

$$2x^2 + 4x + 9 = 0$$

Mas essa equação não tem soluções reais (use a fórmula quadrática), de modo que $x = 2$ é o único ponto crítico de S. Para determinar a natureza desse ponto crítico, vamos usar o teste da derivada segunda. A partir de (21),

$$\frac{d^2S}{dx^2} = 12x^2 + 2, \quad \text{logo} \quad \left.\frac{d^2S}{dx^2}\right|_{x=2} = 50 > 0$$

o que mostra que em $x = 2$ ocorre um mínimo relativo. Uma vez que $x = 2$ é o único extremo relativo para L, tem-se a partir do Teorema 5.4.4 que em $x = 2$ também ocorre um valor mínimo absoluto de L. Assim, o ponto sobre a curva $y = x^2$ mais próximo de (18, 0) é

$$(x, y) = (x, x^2) = (2, 4) \blacktriangleleft$$

UMA APLICAÇÃO À ECONOMIA

Três funções de importância para um economista ou um industrial são:

$C(x)$ = custo total da produção de x unidades de um produto, durante certo período de tempo
$R(x)$ = receita total da venda de x unidades do produto, durante o período de tempo
$P(x)$ = lucro total obtido na venda de x unidades do produto, durante o período de tempo

Elas são denominadas, respectivamente, ***função custo***, ***função receita*** e ***função lucro***. Se todas as unidades produzidas forem vendidas, elas estarão relacionadas por

$$\underset{\text{[lucro] = [receita] − [custo]}}{P(x) = R(x) - C(x)} \tag{23}$$

O custo total $C(x)$ da produção de x unidades pode ser expresso como uma soma

$$C(x) = a + M(x) \tag{24}$$

onde a é uma constante denominada ***despesas gerais*** e $M(x)$ é uma função representando o ***custo de manufatura***. As despesas gerais, as quais incluem custos fixos como aluguel e seguro, não dependem de x; devem ser pagas mesmo que não haja produção. Por outro lado, o custo de manufatura $M(x)$, o qual inclui itens como custo do material e do trabalho, depende do número de artigos manufaturados. Mostra-se em Economia que, com hipóteses simplificadoras adequadas, $M(x)$ pode ser expresso na forma

$$M(x) = bx + cx^2$$

onde b e c são constantes. Substituindo isso em (24), obtemos

$$C(x) = a + bx + cx^2 \tag{25}$$

Se uma indústria puder vender todos os artigos produzidos por p dólares cada, então sua receita total $R(x)$ (em dólares) será

$$R(x) = px \tag{26}$$

e seu lucro total $P(x)$ (em dólares) será

$$P(x) = [\text{receita total}] - [\text{custo total}] = R(x) - C(x) = px - C(x)$$

Assim, se a função custo for dada por (25),

$$P(x) = px - (a + bx + cx^2) \tag{27}$$

Dependendo de fatores tais como número de empregados, maquinário disponível, condições econômicas e concorrência, há uma limitação superior l no número de artigos que um fabricante é capaz de produzir e vender. Desse modo, durante um período de tempo fixo, a variável x em (27) irá satisfazer

$$0 \le x \le l$$

Ao determinar o valor (ou valores) de x em $[0, l]$ que maximiza(m) (27), a firma pode determinar quantas unidades de seu produto devem ser fabricadas e vendidas para obter o maior lucro. Isso está ilustrado no exemplo numérico a seguir.

▶ Exemplo 7 Uma forma líquida de penicilina fabricada por uma firma farmacêutica é vendida a granel a um preço de \$200 por unidade. Se o custo total de produção (em dólares) para x unidades for

$$C(x) = 500.000 + 80x + 0{,}003x^2$$

e se a capacidade de produção da firma for de, no máximo, 30.000 unidades em um tempo especificado, quantas unidades de penicilina devem ser fabricadas e vendidas naquele tempo para maximizar o lucro?

Solução Como a receita total da venda de x unidades é $R(x) = 200x$, o lucro $P(x)$ sobre x unidades será

$$P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (500.000 + 80x + 0{,}003x^2) \tag{28}$$

Como a capacidade de produção é de, no máximo, 30.000 unidades, x deve estar no intervalo [0, 30.000]. A partir de (28),

$$\frac{dP}{dx} = 200 - (80 + 0{,}006x) = 120 - 0{,}006x$$

Equacionando $dP/dx = 0$, obtemos

$$120 - 0{,}006x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = 20.000$$

Como esse ponto crítico está no intervalo [0, 30.000], o lucro máximo deve ocorrer em um dos pontos

$$x = 0, \qquad x = 20.000 \qquad \text{ou} \qquad x = 30.000$$

Substituindo esses valores em (28), obtemos a Tabela 5.5.5, que mostra que o lucro máximo P = \$700.000 ocorre quando x = 20.000 unidades forem fabricadas e vendidas no tempo especificado. ◀

Tabela 5.5.5

x	0	20,000	30,000
$P(x)$	−500,000	700,000	400,000

■ ANÁLISE MARGINAL

Os economistas chamam $P'(x)$, $R'(x)$ e $C'(x)$ de ***lucro marginal***, ***receita marginal*** e ***custo marginal***, respectivamente, e interpretam essas quantidades como o lucro, a receita e os custos adicionais que resultam da produção e da venda de uma unidade adicional do produto, quando o nível de produção e de vendas deste é de x unidades. Essas interpretações seguem da aproximação linear local das funções lucro, receita e custo. Por exemplo, tem-se a partir da

Fórmula (2) da Seção 3.8 que, quando os níveis de produção e de vendas são de x unidades, a aproximação linear local da função lucro é

$$P(x + \Delta x) \approx P(x) + P'(x)\Delta x$$

Assim, se $\Delta x = 1$ (uma unidade adicional produzida e vendida), essa fórmula implica que

$$P(x + 1) \approx P(x) + P'(x)$$

e, portanto, o *acréscimo* no lucro, resultante da produção e da venda de uma unidade adicional, pode ser aproximado por

$$P(x + 1) - P(x) \approx P'(x)$$

UM PRINCÍPIO BÁSICO DE ECONOMIA

Tem-se a partir de (23) que $P'(x) = 0$ tem as mesmas soluções que $C'(x) = R'(x)$, o que implica que o lucro máximo deve ocorrer nos pontos em que a receita marginal é igual ao custo marginal; isto é:

> *O lucro máximo ocorre em um ponto no qual o custo de fabricação e de venda de uma unidade adicional de um produto é aproximadamente igual à receita gerada por uma unidade adicional.*

No Exemplo 7, o lucro máximo ocorre com $x = 20.000$ unidades. Observe que

$$C(20.001) - C(20.000) = \$200{,}003 \text{ e } R(20.001) - R(20.000) = \$200,$$

o que é consistente com esse princípio básico de Economia.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.5 (*Ver página 322 para respostas.*)

1. Um número positivo é somado com seu recíproco. O menor valor possível dessa soma é __________.
2. Se a soma de dois números positivos é 10, então o valor máximo do produto desses dois números é __________.
3. Se $x + 2y = 2$, então o menor valor possível de $x^2 + y^2$ é _____.
4. Um retângulo é inscrito em um triângulo cujos vértices estão na origem, no ponto (0, 2) e no ponto (1, 0). Se cada lado do retângulo é paralelo ou coincidente com um dos eixos coordenados, então a maior área possível do retângulo é __________.

EXERCÍCIOS 5.5

1. Encontre um número no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ tal que a soma do número com seu recíproco é
   (a) a menor possível
   (b) a maior possível
2. Como escolher dois números não-negativos tais que sua soma é 1 e a soma de seus quadrados é
   (a) a maior possível?
   (b) a menor possível?
3. Um campo retangular está limitado por uma cerca em três de seus lados e por um córrego reto no quarto lado. Encontre as dimensões do campo com área máxima que pode ser cercado com 1.000 m de cerca.
4. Um campo deve ter o formato de um triângulo retângulo, com a hipotenusa ao longo de um rio reto e uma cerca delimitando os dois catetos do campo. Encontre as dimensões do campo de maior área que pode ser cercado com 1.000 m lineares de cerca.
5. Um terreno retangular deve ser cercado de duas formas. Dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa \$3 o metro, enquanto os dois lados restantes recebem uma cerca-padrão de \$2 o metro. Quais são as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com \$6.000?
6. Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo com lados de comprimento 6, 8 e 10 cm. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área, supondo que ele está posicionado conforme a figura a seguir.
7. Resolva o Exercício 6 supondo o retângulo posicionado conforme a figura a seguir.

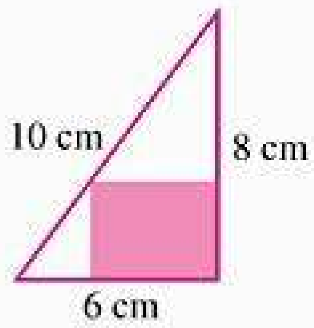


Figura Ex-6

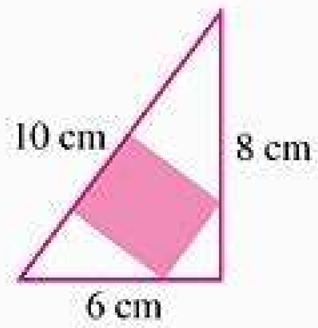


Figura Ex-7

8. Um retângulo tem dois cantos inferiores no eixo x e dois cantos superiores na curva $y = 16 - x^2$. Dentre todos esses retângulos, quais as dimensões daquele que tem maior área?

9. Encontre as dimensões do retângulo com área máxima que pode ser inscrito em um círculo com raio de 10 cm.

10. Qual é a maior área possível de uma região no plano xy contida tanto no retângulo de vértices em $(\pm 8, \pm 10)$ quanto em um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e cujo canto inferior esquerdo está na reta $y = -4x$?

11. Uma área retangular com 288 m^2 deve ser cercada. Em dois lados opostos será usada uma cerca que custa \$1 o metro e nos lados restantes, uma cerca que custa \$2 o metro. Encontre as dimensões do retângulo com o menor custo.

12. Mostre que, dentre todos os retângulos com perímetro p, o quadrado é o que tem área máxima.

13. Mostre que, dentre todos os retângulos com área A, o quadrado tem o perímetro mínimo.

14. Um fio com 12 cm pode ser curvado formando um círculo, dobrado formando um quadrado ou cortado em duas partes formando um círculo e um quadrado. Quanto do fio deve ser usado no círculo para que a área total englobada pela(s) figura(s) seja:

(a) máxima? (b) mínima?

15. Suponha que o número de bactérias em uma cultura no instante t seja dado por $N = 5000(25 + te^{-t/20})$.

(a) Encontre o maior e o menor número de bactérias no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 100$.

(b) Em que momento, no intervalo de tempo de (a), o número de bactérias decresce mais rapidamente?

16. A janela de uma igreja consiste em um retângulo com semicírculo em cima e deve ter um perímetro p. Encontre o raio do semicírculo para que a área da janela seja máxima.

17. Uma caixa de base quadrada é mais alta do que larga. Para poder mandá-la pelo correio dos EUA, sua altura e o perímetro da base devem somar não mais do que 108 polegadas. Qual é o volume máximo dessa caixa?

18. Uma caixa de base quadrada é mais larga do que alta. Para poder mandá-la pelo correio dos EUA, sua largura e o perímetro de um dos lados (não quadrado) devem somar não mais do que 108 polegadas. Qual é o volume máximo dessa caixa?

19. Uma caixa aberta deve ser feita com uma folha de metal de 3 por 8 cm, cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Encontre o volume máximo que uma caixa dessas pode ter.

20. Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2.250 cm^3. O material para a base e a tampa do recipiente custa \$2 por cm^2 e o dos lados, \$3 por cm^2. Encontre as dimensões do recipiente de menor custo.

21. Um recipiente com a forma de um paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2.000 cm^3. O custo da base e da tampa é o dobro do custo dos lados. Encontre as dimensões do recipiente de menor custo.

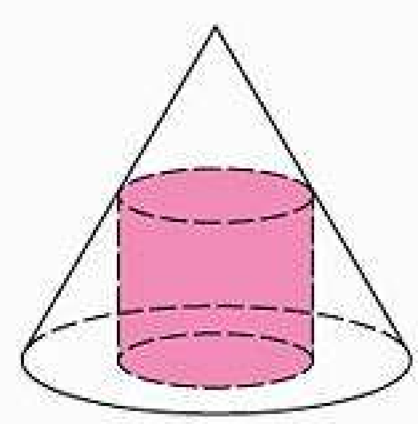
22. Um recipiente de base quadrada, lados verticais e aberto em cima deve ser feito de 90 m^2 de material. Encontre as dimensões do recipiente com o maior volume.

23. Um recipiente em forma de paralelepípedo tem dois lados quadrados e é aberto em cima. Se o volume for V unidades cúbicas, encontre as dimensões do recipiente com a área de superfície mínima.

24. Encontre as dimensões de um cilindro circular reto com o maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio R.

25. Encontre as dimensões de um cilindro circular reto com a maior área de superfície que pode ser inscrito em uma esfera de raio R.

26. Mostre que o cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto tem um volume que é $\frac{4}{9}$ do volume do cone (Figura Ex-26).


Figura Ex-26

27. Uma lata cilíndrica fechada deve ter um volume de V unidades cúbicas. Mostre que uma lata com área superficial mínima é obtida quando a altura for igual ao diâmetro da base.

28. Uma lata cilíndrica fechada deve ter uma área superficial de S unidades quadradas. Mostre que uma lata com volume máximo é obtida quando a altura for igual ao diâmetro da base.

29. Uma lata cilíndrica aberta em cima deve conter 500 cm^3 de líquido. Encontre a altura e o raio que minimizam a quantidade de material necessário para confeccioná-la.

30. Uma lata de sopa com forma de cilindro circular reto, raio r e altura h deve ter um volume V. A tampa e a base são cortadas de quadrados, conforme a Figura Ex-30 a seguir. Se os cantos sombreados forem os únicos refugos, encontre a razão r/h para a lata que requer menos material (incluindo o refugo).

31. Uma armação em arame consiste em dois quadrados idênticos, cujos vértices estão ligados por quatro fios retos de mesmo comprimento (Figura Ex-31 a seguir). Se a armação for feita com um único fio de arame de comprimento L, quais devem ser as dimensões para obter uma caixa com o maior volume?

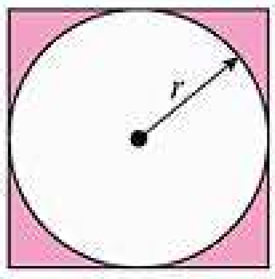


Figura Ex-30

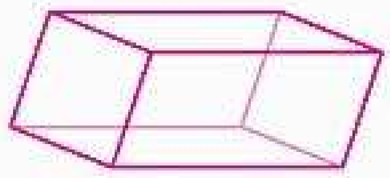


Figura Ex-31

32. Suponha que a soma das áreas das superfícies de uma esfera e de um cubo seja constante.

(a) Mostre que a soma dos volumes é mínima quando o diâmetro da esfera for igual ao comprimento de uma aresta do cubo.

(b) Quando será máxima a soma dos volumes?

33. Encontre a altura e o raio de um cone com altura inclinada L cujo volume é o maior possível.

34. Um cone é feito de uma folha circular com raio R recortando um setor e colando os lados que sobraram (Figura Ex-34). Qual é o máximo volume possível para o cone?

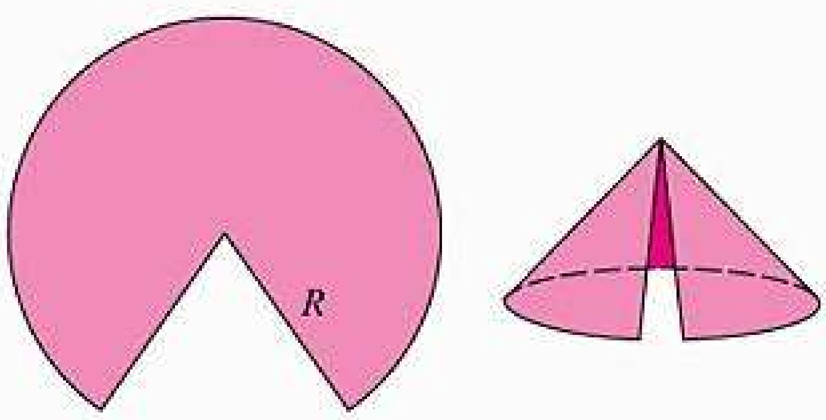


Figura Ex-34

35. Um copo de papel em forma de cone deve conter 10 cm^3 de água. Encontre a altura e o raio do copo que requer a menor quantidade de papel.

36. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de menor área que pode circunscrever um círculo de raio R.

37. Encontre a altura e o raio de um cone circular reto com o menor volume que pode circunscrever uma esfera de raio R.

38. Um trapézio é inscrito em um semicírculo com raio 2, de forma que um lado está sobre o diâmetro (Figura Ex-38). Encontre a maior área possível para o trapézio. [*Sugestão*: Expresse os lados do trapézio em termos de θ.]

39. Um canal de drenagem deve ser feito de tal forma que a secção transversal é um trapézio com os lados igualmente inclinados (Figura Ex-39). Se os lados e a base tiverem um comprimento de 5 m, como escolher o ângulo θ $(0 \le \theta \le \pi/2)$, de forma que a área da secção transversal seja máxima?

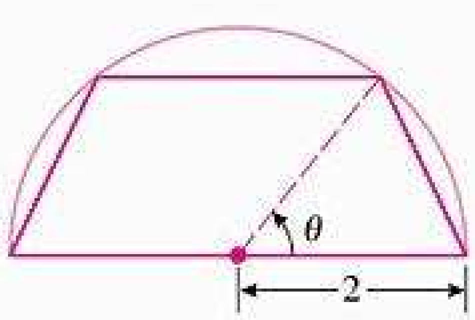


Figura Ex-38

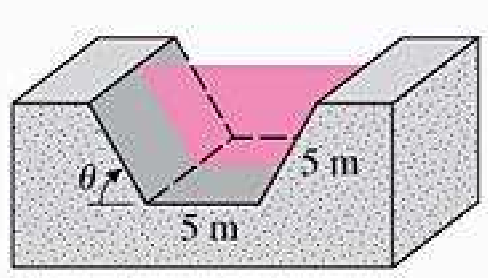


Figura Ex-39

40. Uma lâmpada é suspensa acima do centro de uma mesa circular com raio r. A que altura acima da mesa ela deve ser colocada para se obter o máximo de iluminação na borda da mesa? [Suponha que a iluminação I é diretamente proporcional ao cosseno do ângulo de incidência ϕ dos raios de luz e inversamente proporcional ao quadrado da distância l da fonte de luz (Figura Ex-40).]

41. Uma prancha é usada para escorar um muro e deve passar por cima de uma cerca de 8 pés de altura e a 1 pé do muro (Figura Ex-41). Qual é o comprimento da menor escora que pode ser usada? [*Sugestão*: Expresse o comprimento da escora em termos do ângulo θ mostrado na figura].

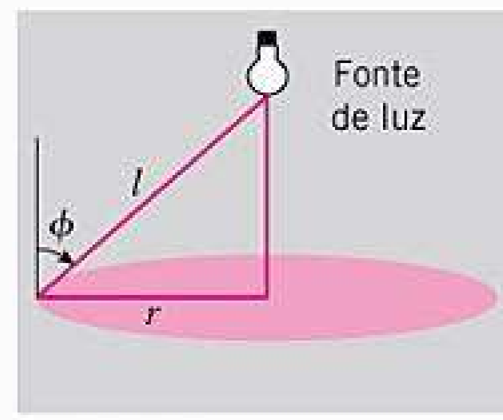


Figura Ex-40

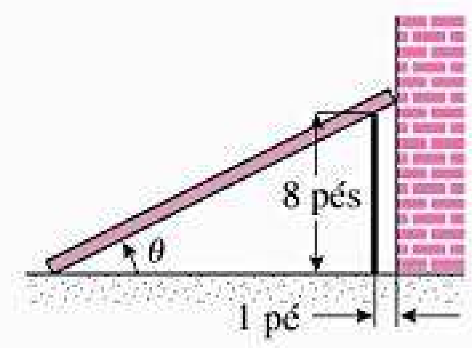


Figura Ex-41

42. Uma fazenda de gado permite 20 novilhos por 50 m^2 de pasto. O peso médio de seus novilhos no mercado é de 900 kg. Estimativas do Departamento de Agricultura (EUA) indicam que o peso médio ficará reduzido em 22,5 kg para cada novilho que for acrescentado nos 50 m^2 de pasto. Quantos novilhos devem ser colocados nos 50 m^2 para que o peso médio deles seja o maior possível?

43. (a) Uma indústria química vende ácido sulfúrico a granel a \$100 por unidade. Se o custo de produção total diário em dólares para x unidades for

$$C(x) = 100.000 + 50x + 0{,}0025x^2$$

e se a capacidade de produção diária for de, no máximo, 7.000 unidades, quantas unidades de ácido sulfúrico devem ser fabricadas e vendidas diariamente para maximizar o lucro?

(b) Beneficiaria ao industrial expandir a capacidade de produção diária?

(c) Usando análise marginal, aproxime o efeito sobre o lucro causado por um aumento de 7.000 para 7.001 unidades na produção diária.

44. Uma firma determina que x unidades de seu produto podem ser vendidas diariamente a p dólares a unidade, onde

$$x = 1000 - p$$

O custo de produção de x unidades diárias é

$$C(x) = 3000 + 20x$$

(a) Encontre a função receita $R(x)$.

(b) Encontre a função lucro $P(x)$.

(c) Supondo que a capacidade máxima de produção é de 500 unidades por dia, determine quantas unidades a companhia deve produzir e vender por dia para maximizar seu lucro.

(d) Encontre o lucro máximo.

(e) Qual é o preço unitário a ser cobrado para obter o lucro máximo?

45. Em um certo processo de fabricação química, o peso diário y de produção defeituosa depende do peso x de toda a produção, de acordo com a fórmula empírica

$$y = 0{,}01x + 0{,}00003x^2$$

onde x e y estão em quilos. Se o lucro for \$100 por kg do produto químico sem defeito e a perda for de \$20 por kg de produto químico defeituoso produzido, quantos quilos do produto devem ser produzidos diariamente para maximizar o lucro diário total?

46. Um motorista de caminhão autônomo cobra de um cliente \$15 por hora dirigida, acrescido do custo do combustível. Dirigindo a uma velocidade de v quilômetros por hora, o caminhão consegue fazer $10 - 0{,}07v$ km por litro de combustível. Se o combustível custa \$1,50 por litro, qual é a velocidade v que minimiza o custo para o cliente?

47. Duas partículas A e B estão em movimento no plano xy. Suas coordenadas em cada instante do tempo t ($t \geq 0$) são dadas por $x_A = t$, $y_A = 2t$, $x_B = 1 - t$ e $y_B = t$. Encontre a distância mínima entre A e B.

48. Siga as instruções do Exercício 47, com $x_A = t$, $y_A = t^2$, $x_B = 2t$ e $y_B = 2$.

49. Prove que o ponto da curva $x^2 + y^2 = 1$ mais próximo de $(2, 0)$ é $(1, 0)$.

50. Encontre todos os pontos na curva $y = \sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 3$ que estão na menor e na maior distância do ponto $(2, 0)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

51. Suponha que $f(x) = mx + b$ seja uma função linear de x e que Q seja um ponto qualquer do plano xy.

(a) Sem utilizar Cálculo, explique como encontrar o ponto do gráfico de f mais próximo de Q.

(b) Use derivadas para conferir sua resposta em (a).

52. Suponha que C seja um círculo no plano xy de centro P e que Q seja um ponto qualquer do plano xy distinto de P.

(a) Sem utilizar Cálculo, explique como encontrar os pontos de C que estão mais próximos, e também aqueles que estão mais afastados, de Q.

(b) Use derivadas para conferir sua resposta em (a).

53. (a) Encontre todos os pontos P que estão na elipse rodada $x^2 - xy + y^2 = 4$ nos quais a reta tangente à elipse é perpendicular à reta por P e pela origem.

(b) Dê uma explicação geométrica sobre por que os pontos encontrados em (a) são aqueles da elipse que estão mais próximos, ou mais afastados, da origem.

54. Usando a derivada, explique por que os pontos encontrados no Exercício 53(a) são aqueles da elipse que estão mais próximos, ou mais afastados, da origem.

55. Encontre as coordenadas do ponto P na curva

$$y = \frac{1}{x^2} \quad (x > 0)$$

de modo que o segmento da reta tangente em P, determinado pelos eixos coordenados, tenha o menor comprimento.

56. Encontre a coordenada x do ponto P na parábola

$$y = 1 - x^2 \quad (0 < x \leq 1)$$

de modo que o triângulo formado pela reta tangente em P e os eixos coordenados tenha a menor área.

57. Onde, na curva $y = (1 + x^2)^{-1}$, a reta tangente tem a maior inclinação?

58. Um homem está sentado em um barco a 1 km da margem (reta) de um lago. Uma cidade está localizada nessa margem a 1 km do ponto da margem do lago que está mais próximo do homem. Ele pretende remar em linha reta até um ponto P na margem oposta e depois caminhar o restante ao longo da margem (Figura Ex-58). Para que ponto ele deve remar a fim de chegar a seu destino no menor tempo se ele

(a) pode andar a 8 km/h e remar a 5 km/h?

(b) pode andar a 8 km/h e remar a 6 km/h?

59. Um cano com diâmetro desprezível deve ser carregado horizontalmente, em torno de um canto ligando duas passagens com 2,40 m e 1,20 m de largura (Figura Ex-59). Qual é o comprimento máximo que o cano pode ter?

Fonte: Uma discussão interessante deste problema, na qual o diâmetro do cano não é desprezível, foi feita por Norman Miller no *American Mathematical Monthly*, Vol. 56, 1949, p. 177-179.

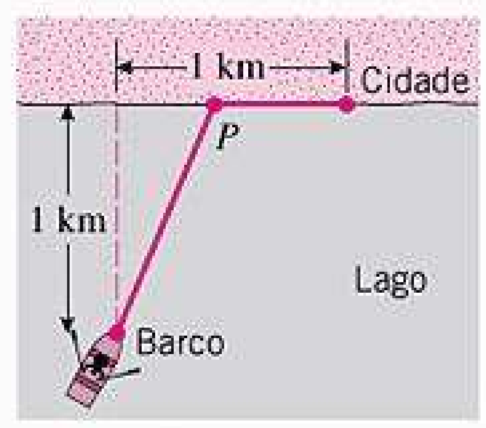


Figura Ex-58

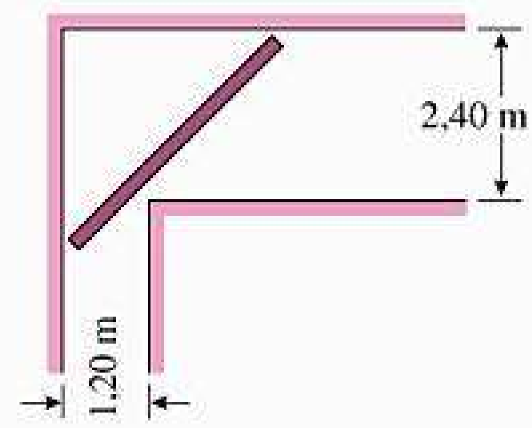


Figura Ex-59

60. Se uma quantidade física desconhecida é medida n vezes, as medidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ muitas vezes variam, dependendo de fatores incontroláveis, como temperatura, pressão atmosférica, etc. Assim, um cientista muitas vezes se depara com o problema de obter, a partir de n medidas observadas distintas, uma estimativa $\bar{x}$ de uma quantidade desconhecida x. Um método de obter tal estimativa está baseado no *princípio dos mínimos quadrados,* que estabelece que a estimativa $\bar{x}$ deve ser escolhida de forma a minimizar

$$s = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2$$

que é a soma dos quadrados dos desvios entre a estimativa $\bar{x}$ e os valores medidos. Mostre que a estimativa resultante do princípio dos mínimos quadrados é

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

isto é, $\bar{x}$ é a média aritmética dos valores observados.

61. Suponha que a intensidade de uma fonte pontual de luz seja diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional à distância da fonte. Dois pontos de luz com potências S e $8S$ estão separados por uma distância de 90 cm. Onde, no segmento de reta entre as duas fontes, a intensidade é mínima?

62. Pr e: e f x ≥ 0 em um inter a I e e f x ti er um a r má im e I em x_0, entã a unçã $\sqrt{f(x)}$ também tem um a r má im em x_0 na gamente ara a re mínim *Sugestão*: e at e ue $\sqrt{x}$ é uma unçã cre cente n inter a 0, $+\infty$

63. Da nt A 2, 1 e B 5, 4 , enc ntre nt P inter a 2, 5 ei x ue ma imize ângu APB

64. beira a in eri r e um ua r e 10 é e a tura em e içã e tá 2 é acima ní e h e um b er a r Su n ue a me h r i ã é bti a uan é má im ân gu ubenten i e ua r n h b er a r, a ua i tância ua r e te e eria ficar

65. Princí i e Fermat bi grafia à ágina 310 na ó tica e ta be ece ue a uz, ia an e um nt ara utr , egue a ue e caminh ara ua tem t ta n ercur é mínim Em um mei uni rme, caminh e "tem mínim " e e "me n r i tância" êm a er iguai a im, a uz, e nã b truí a, ia a em inha reta Su nha ue tenham uma nte e uz, um e e h an e um b er a r em um mei uni rme Se um rai e uz ei a a nte, bate em um e e h e ai até b er a r, entã ua tra etória c n i te em i egment e reta, c n rme m tra a Figura E 5 De ac r c m rincí i e Fermat, a tra etória é ta ue tem t ga t n ercur é mínim u, c m mei é uni rme, a tra etória erá ta ue a i tância t ta erc rri a e A a P a B erá a men r í e Su n ue mínim c rre uan $dt/dx = 0$, m tre ue rai e uz irá atingir e e h em um nt P, ta ue "ângu e inci ência" θ_1 erá igua a "ângu e refle ã " θ_2

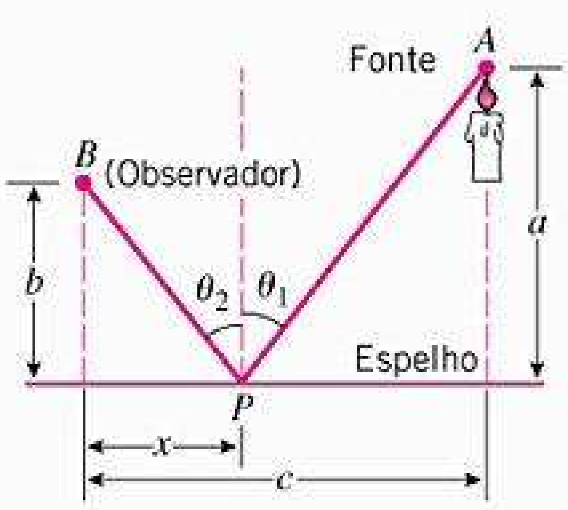


Figura Ex-65

66. rincí i e Fermat E ercíci 5 também e ica r ue rai e uz ue a a entre ar e água e inc ina re ração magine i mei uni rme c m água e ar e um rai e uz ia an e uma nte A em um mei ara um b er a r B em utr mei Figura E Sabe e ue a uz ia a a uma e ci a e c n tante em um mei uni rme, rém mai aga r amente em um mei mai en c m a água ue em um men en c m ar n e üentemente, ercur e men r tem entre A e B nã é nece ariamente uma reta, ma uma reta uebra a e A ara P e ara B, ermitin ue a uz e e antagem e ua mai r e ci a e n mei men en **Lei de Refração de Snell** afirma ue a tra etória rai e uz é ta ue

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}$$

n e v_1 é a e ci a e a uz n rimeir mei , v_2, n egun e θ_1 e θ_2 ã ângu m tra na Figura E tre ue i egue a hi óte e e ue caminh e tem mínim c rre uan $dt/dx = 0$

67. m azen eir e e a caminhar a uma ta a c n tante e eu e tábu até um ri ret , encher um ba e e e ar ara ca a n men r tem

a E i ue c m e te r b ema e re aci na c m rincí i e Fermat e r b ema a refle ã a uz E ercíci 5

b e re u ta E ercíci 5 ara e cre er ge metri camente ua me h r caminh ara azen eir eguir

c e a arte b ara eterminar n e azen eir e erá encher ba e e a ca a e e tábu e ti erem ca iza ta c m na Figura E 7

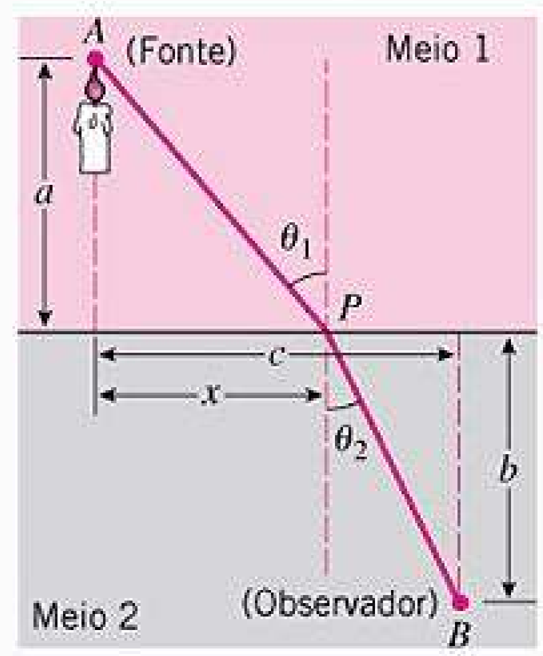


Figura Ex-66

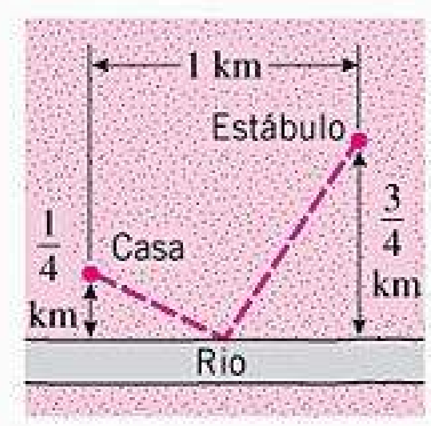


Figura Ex-67

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.5

1. 2 **2.** 25 **3.** $\frac{4}{5}$ **4.** $\frac{1}{2}$

Willebrord van Roijen Snell (1591-1626) atemátic h an ê Sne uce eu a eu ai n t e r e r e a temática na ni er i a e e ei en em 1 13 e é mai am e re u ta bre re raçã a uz ue e a eu n me Em b ra enômen tenha i e tu a e e a récia antiga c m a trôn m Pt meu, até traba h e Sne a re açã era inc rretamente en a a c m en $\theta_1/v_1 = \theta_2/v_2$ ei e Sne i ub ica a r De carte em 1 3 , em ar e i cré it a Sne E e também e c briu um mét e etermi naçã e i tância r triangu açã ue eu iníci à m erna técnica e c n ecçã e ma a

5.6 MÉTODO DE NEWTON

Na Seção 2.5 mostramos como aproximar as raízes de uma equação $f(x) = 0$ usando o Teorema do Valor Intermediário e também fazendo um zoom no corte do eixo x de $y = f(x)$ com um recurso gráfico computacional. Nesta seção estudaremos uma técnica denominada Método de Newton, que, em geral, é mais eficiente do que qualquer uma das outras duas. O Método de Newton é a técnica usada por muitos programas de computadores comerciais e científicos para encontrar raízes.

MÉTODO DE NEWTON

Em Álgebra elementar, aprende-se que a solução de uma equação de primeiro grau $ax + b = 0$ é dada pela fórmula $x = -b/a$ e que as soluções da equação de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

são dadas pela fórmula quadrática. Existem fórmulas também para soluções de equações de terceiro e quarto grau, embora muito complicadas para uso prático. Em 1826, foi mostrado pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel que é impossível construir uma fórmula semelhante para soluções de uma equação *geral* de quinto ou maior grau. Assim, para uma equação polinomial *específica* de quinto grau, tal como

$$x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 17x - 8 = 0$$

pode ser difícil ou impossível encontrar valores exatos para todas as soluções. Dificuldades análogas ocorrem com equações não-polinomiais, tais como

$$x - \cos x = 0$$

Para essas equações, as soluções são geralmente aproximadas de alguma forma, freqüentemente pelo método que vamos expor a seguir.



Niels Henrik Abel (1802-1829) Matemático norueguês. Abel era filho de um pobre ministro luterano e de uma mãe extraordinariamente bela, de quem herdou sua surpreendente beleza. Em sua breve vida de 26 anos, ele viveu em pobreza e sofreu uma sucessão de adversidades; ainda assim, conseguiu provar resultados importantes que alteraram para sempre o panorama da Matemática. Aos 13 anos, foi mandado para longe de casa, para uma escola cujos melhores dias já tinham passado. Por um golpe de sorte, a escola acabara de contratar o professor Bernt Michael Holmboe, o qual rapidamente descobriu a extraordinária habilidade de Abel para a Matemática. Juntos, eles estudaram os livros de Cálculo de Euler, os trabalhos de Newton e os dos matemáticos franceses da época. Quando de sua formatura, Abel já estava a par da maior parte da grande literatura matemática. Em 1820, seu pai morreu, deixando a família em um terrível aperto financeiro. Abel somente conseguiu entrar na Universidade de Christiania, em Oslo, porque ganhou um quarto de graça e vários professores o sustentaram com seus próprios salários. A universidade não tinha cursos avançados em Matemática; assim, Abel recebeu um grau preliminar em 1822 e continuou sozinho seus estudos de Matemática. Em 1824, publicou por conta própria a prova da impossibilidade da solução algébrica de uma equação polinomial geral de quinto grau. Com esperança de que o levaria ao reconhecimento e à aceitação pela comunidade matemática, Abel enviou o artigo ao grande matemático alemão Gauss, que negligentemente o declarou uma monstruosidade, colocando-o de lado. Porém, em 1826, o artigo de Abel sobre equações de quinto grau e outros trabalhos foram publicados na primeira edição de um novo jornal, fundado por seu amigo Leopold Crelle. No verão de 1826, ele completou um trabalho histórico sobre funções transcendentes, que submeteu à Academia de Ciência da França, na esperança de se consolidar como um grande matemático, pois muitos jovens ganharam rápida distinção ao ter seus trabalhos aceitos pela Academia. No entanto, Abel esperou em vão, pois o artigo ou foi ignorado ou perdido por um dos jurados e não apareceu de novo, senão dois anos após sua morte. Esse artigo foi posteriormente descrito por um grande matemático como "... a descoberta matemática do século... ". Após submeter seu artigo, Abel voltou à Noruega, com tuberculose e uma pesada dívida. Enquanto ganhava a vida com dificuldade como professor particular, continuava a produzir grandes trabalhos, e sua fama se espalhou. Logo, grandes esforços foram feitos para obter para ele uma posição matemática adequada. Temendo que seu grande trabalho tivesse sido perdido pela Academia, enviou uma prova do resultado principal para Crelle, em janeiro de 1829. Em abril, sofreu uma violenta hemorragia e morreu. Dois dias após, Crelle escreveu informando-o de que uma nomeação estava assegurada para ele em Berlim e que seus dias de pobreza tinham acabado! O grande artigo de Abel foi, finalmente, publicado pela Academia 12 anos após sua morte.

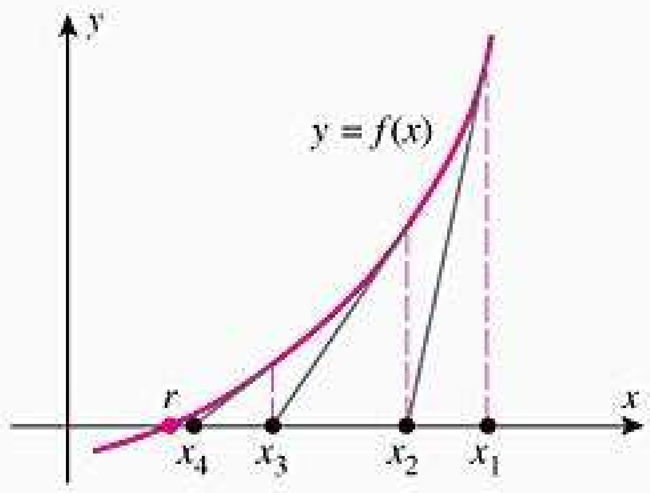


Figura 5.6.1

Vamos supor que estejamos tentando encontrar uma raiz r da equação $f(x) = 0$, e que por algum método, como gerando o gráfico de $y = f(x)$ e examinado seu corte com o eixo x, tenhamos obtido uma aproximação inicial x_1 rudimentar de r. Se $f(x_1) = 0$, então $r = x_1$. Se $f(x_1) \neq 0$, então entendemos que é mais fácil resolver uma equação linear do que a equação proposta. A melhor aproximação linear de $y = f(x)$ perto de $x = x_1$ é dada pela reta tangente ao gráfico de f em x_1; portanto, deve ser razoável esperar que o corte dessa reta com o eixo x forneça uma melhor aproximação de r. Denotemos esse corte por x_2 (Figura 5.6.1). Agora podemos tratar x_2 da mesma maneira que tratamos x_1. Se $f(x_2) = 0$, então $r = x_2$. Se $f(x_2) \neq 0$, então construímos a reta tangente ao gráfico de f em x_2 e tomamos x_3 como sendo o corte dessa reta com o eixo x. Continuando dessa maneira, podemos gerar uma sucessão de valores $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ que geralmente converge para r. Esse procedimento para aproximar r é denominado ***Método de Newton***.

Para implementar analiticamente o Método de Newton, precisamos obter uma fórmula que nos diga como calcular cada aproximação melhorada a partir da aproximação precedente. Para tanto, observamos que a forma ponto-inclinação da reta tangente a $y = f(x)$, na aproximação inicial x_1, é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \tag{1}$$

Se $f'(x_1) \neq 0$, então essa reta não é paralela ao eixo x e, conseqüentemente, corta-o em algum ponto $(x_2, 0)$. Substituindo as coordenadas desse ponto em (1), obtemos

$$-f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Resolvendo em x_2, obtemos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{2}$$

A próxima aproximação pode ser obtida mais facilmente. Se considerarmos x_2 como a aproximação inicial e x_3 como a nova aproximação, podemos simplesmente aplicar (2) com x_2 em lugar de x_1 e x_3 em lugar de x_2. Portanto

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \tag{3}$$

desde que $f'(x_2) \neq 0$. Em geral, se x_n é a enésima aproximação, então é evidente, a partir do padrão em (2) e (3), que a aproximação melhorada x_{n+1} é dada por

Método de Newton

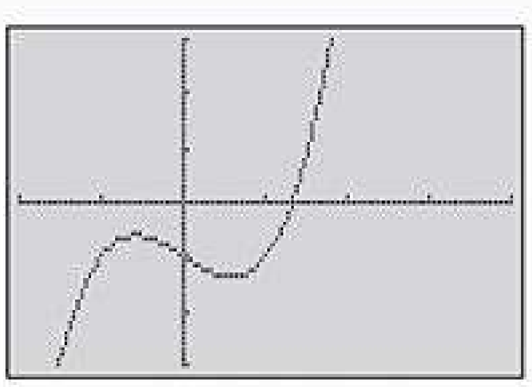
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

▶ Exemplo 1 Use o Método de Newton para aproximar as soluções reais de

$$x^3 - x - 1 = 0$$

Solução Seja $f(x) = x^3 - x - 1$; logo, $f'(x) = 3x^2 - 1$ e (4) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} \tag{5}$$



$[-2, 4] \times [-3, 3]$
$x\text{Scl} = 1, y\text{Scl} = 1$

$y = x^3 - x - 1$

Figura 5.6.2

A partir do gráfico de f na Figura 5.6.2, vemos que a equação dada tem uma só raiz real. Essa solução está entre 1 e 2, pois $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Vamos usar como primeira aproximação $x_1 = 1{,}5$ ($x_1 = 1$ ou $x_1 = 2$ também seriam escolhas razoáveis).

Fazendo $n = 1$ em (5) e substituindo $x_1 = 1{,}5$, obtemos

$$x_2 = 1{,}5 - \frac{(1{,}5)^3 - 1{,}5 - 1}{3(1{,}5)^2 - 1} \approx 1{,}34782609 \tag{6}$$

(Usamos uma calculadora que exibe 9 dígitos.) A seguir, fazendo $n = 2$ em (5) e substituindo x_2, obtemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - x_2 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx 1{,}32520040 \tag{7}$$

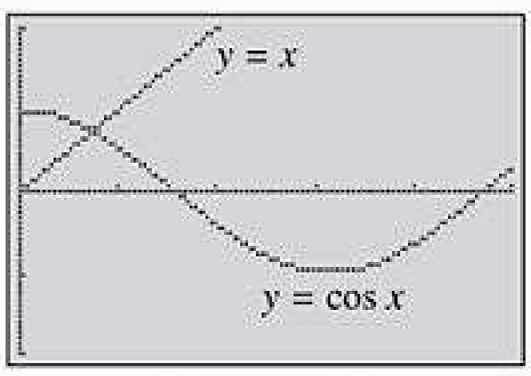
DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Muitas calculadoras e programas de computador calculam internamente com mais casas decimais do que conseguem expor. Sempre que possível, devemos utilizar os valores estocados calculados em contas anteriores, em vez dos valores exibidos na tela do recurso computacional. Assim, no Exemplo 1, o valor de x_2 utilizado em (7) deveria ser o valor estocado de x_2 e não o valor exibido em (6).

Se continuarmos esse processo até que sejam geradas duas aproximações sucessivas iguais, obteremos

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5 \\ x_2 &\approx 1{,}34782609 \\ x_3 &\approx 1{,}32520040 \\ x_4 &\approx 1{,}32471817 \\ x_5 &\approx 1{,}32471796 \\ x_6 &\approx 1{,}32471796 \end{aligned}$$

Neste ponto, não há necessidade de continuar mais adiante, pois atingimos o limite de precisão de nossa calculadora e todas as aproximações subseqüentes geradas por ela provavelmente serão iguais. Assim, a solução é aproximadamente $x \approx 1{,}32471796$. ◄



[0, 5] × [–2, 2]
xScl = 1, yScl = 1

Figura 5.6.3

► **Exemplo 2** Fica evidente, a partir da Figura 5.6.3, que se x estiver em radianos, então a equação

$$\cos x = x$$

tem uma solução entre 0 e 1. Use o Método de Newton para aproximá-la.

Solução Reescreva a equação como

$$x - \cos x = 0$$

e aplique (4) com $f(x) = x - \cos x$. Como $f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x$, (4) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \operatorname{sen} x_n} \tag{8}$$

A partir da Figura 5.6.3, a solução parece mais próxima de $x = 1$ do que de $x = 0$; logo, vamos usar $x_1 = 1$ (em radianos) como aproximação inicial. Fazendo $n = 1$ em (8) e substituindo $x_1 = 1$, obtemos

$$x_2 = 1 - \frac{1 - \cos 1}{1 + \operatorname{sen} 1} \approx 0{,}750363868$$

A seguir, vamos fazer $n = 2$ em (8) e, substituindo o valor de x_2 acima, obteremos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - \cos x_2}{1 + \operatorname{sen} x_2} \approx 0{,}739112891$$

Se continuarmos esse processo até que sejam geradas duas aproximações sucessivas iguais, obteremos

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &\approx 0{,}750363868 \\ x_3 &\approx 0{,}739112891 \\ x_4 &\approx 0{,}739085133 \\ x_5 &\approx 0{,}739085133 \end{aligned}$$

Assim, no limite da precisão de nossa calculadora, a solução da equação $\cos x = x$ é $x \approx 0{,}739085133$. ◄

■ ALGUMAS DIFICULDADES COM O MÉTODO DE NEWTON

Quando o Método de Newton funciona, as aproximações convergem para a solução com grande velocidade. Há situações, porém, nas quais o método falha. Por exemplo, se $f'(x_n) = 0$ para algum n, então (4) envolve uma divisão por zero, tornando impossível gerar x_{n+1}. Porém,



Figura 5.6.4

isso pode ser previsto, pois a reta tangente a $y = f(x)$ é paralela ao eixo x quando $f'(x_n) = 0$, ou seja, ela não cruza o eixo x para gerar a próxima aproximação (Figura 5.6.4).

O Método de Newton também pode falhar por outras razões; às vezes, ele pode ignorar a raiz que tentamos encontrar e convergir para outra; e, às vezes, também pode não convergir de todo. Por exemplo, considere a equação

$$x^{1/3} = 0$$

cuja única solução é $x = 0$. Vamos tentar aproximar essa solução pelo Método de Newton começando com $x_0 = 1$. Tomando $f(x) = x^{1/3}$, a Fórmula (4) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^{1/3}}{\frac{1}{3}(x_n)^{-2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

Começando com $x_1 = 1$, a seqüência de valores gerados por essa fórmula é

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = -8, \ldots$$

que, obviamente, não converge para $x = 0$. A Figura 5.6.5 ilustra o que está acontecendo geometricamente nessa situação.

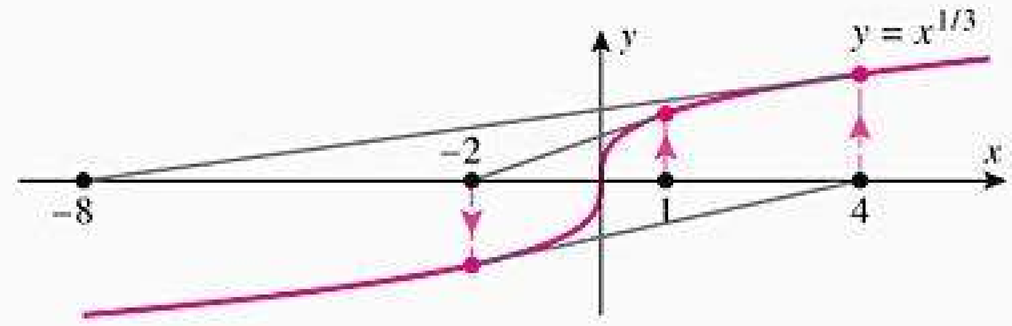


Figura 5.6.5

Para aprender mais sobre as condições de convergência do Método de Newton e para uma discussão sobre a questão dos erros, o leitor deve consultar um livro de Análise Numérica. Para uma discussão mais profunda do Método de Newton e sua relação com os estudos atuais sobre caos e fractais, o leitor pode ler o artigo "Newton's Method and Fractal Patterns", de Phillip Straffin, publicado em *Applications of Calculus,* MAA Notes, Vol. 3, n° 29, 1993, da Mathematical Association of America.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.6 *(Ver página 328 para respostas.)*

1. Use o gráfico ao lado para estimar x_2 e x_3 se o Método de Newton for aplicado à equação $y = f(x)$ com $x_1 = 8$.

2. Suponha que $f(1) = 2$ e que $f'(1) = 4$. Se o Método de Newton for aplicado a $y = f(x)$ com $x_1 = 1$, então $x_2 =$ __________.

3. Suponha que $f(0) = 3$ e que $x_2 = 3$ quando o Método de Newton for aplicado a $y = f(x)$ com $x_1 = 0$. Então $f'(0) =$ __________.

4. Se o Método de Newton for aplicado a $y = e^x - 1$ com $x_1 = \ln 2$, então $x_2 =$ __________.

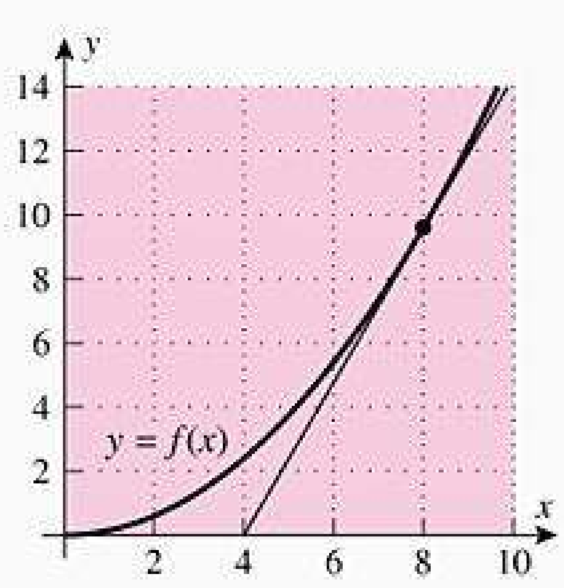


Figura Ex-1

EXERCÍCIOS 5.6 Recurso Gráfico

Nestes exercícios, dê as respostas com tantas casas decimais quantas forem permitidas por seu recurso computacional, mas siga o procedimento delineado na caixa Domínio da Tecnologia à página 325.

1. Aproxime $\sqrt{2}$ aplicando o Método de Newton à equação $x^2 - 2 = 0$.
2. Aproxime $\sqrt{5}$ aplicando o Método de Newton à equação $x^2 - 5 = 0$.
3. Aproxime $\sqrt[3]{6}$ aplicando o Método de Newton à equação $x^3 - 6 = 0$
4. Qual equação devemos usar para aproximar a raiz enésima de a pelo Método de Newton?

5-8 A equação dada tem uma solução real. Aproxime-a pelo Método de Newton.

5. $x^3 - 2x - 2 = 0$
6. $x^3 + x - 1 = 0$
7. $x^5 + x^4 - 5 = 0$
8. $x^5 - 3x + 3 = 0$

9-14 Use um recurso gráfico computacional para determinar quantas soluções tem a equação e, então, use o Método de Newton para aproximar a solução que satisfaça a condição dada.

9. $x^4 + x^2 - 4 = 0$; $x < 0$
10. $x^5 - 5x^3 - 2 = 0$; $x > 0$
11. $2 \cos x = x$; $x > 0$
12. $\text{sen}\, x = x^2$; $x > 0$
13. $x - \text{tg}\, x = 0$; $\pi/2 < x < 3\pi/2$
14. $1 + e^x \,\text{sen}\, x = 0$; $\pi/2 < x < 3\pi/2$

15-20 Use um recurso gráfico computacional para determinar o número de vezes que as curvas se intersectam; aplique, então, o Método de Newton, quando necessário, para aproximar as coordenadas x de todas as intersecções.

15. $y = x^3$ e $y = 1 - x$
16. $y = \text{sen}\, x$ e $y = x^3 - 2x^2 + 1$
17. $y = x^2$ e $y = \sqrt{2x+1}$
18. $y = \frac{1}{8}x^3 - 1$ e $y = \cos x - 2$
19. $y = 1$ e $y = e^x \,\text{sen}\, x$; $0 < x < \pi$
20. $y = e^{-x}$ e $y = \ln x$

21. A ***regra mecânica*** para aproximar raízes quadradas afirma que $\sqrt{a} \approx x_{n+1}$, onde

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e x_1 é qualquer aproximação positiva de $\sqrt{a}$.

(a) Aplique o Método de Newton a

$$f(x) = x^2 - a$$

para deduzir a regra mecânica.

(b) Use-a para aproximar $\sqrt{10}$.

22. Muitas calculadoras computam recíprocos usando a aproximação $1/a \approx x_{n+1}$, onde

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e x_1 é uma aproximação inicial de $1/a$. Essa fórmula torna possível efetuar divisões usando multiplicações e subtrações, o que é um procedimento mais rápido do que dividir diretamente.

(a) Aplique o Método de Newton a

$$f(x) = \frac{1}{x} - a$$

para deduzir essa aproximação.

(b) Use a fórmula para aproximar $\frac{1}{17}$.

23. Use o Método de Newton para aproximar o mínimo absoluto de

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + x^2 - 5x$$

24. Use o Método de Newton para aproximar o máximo absoluto de $f(x) = x \,\text{sen}\, x$ no intervalo $[0, \pi]$.

25. Use o Método de Newton para aproximar, com duas casas decimais, as coordenadas x dos pontos de inflexão da função

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + x^2}$$

26. Use o Método de Newton para aproximar o máximo absoluto de $f(x) = (1 - 2x)\text{arc tg}\, x$.

27. Use o Método de Newton para aproximar as coordenadas do ponto sobre a parábola $y = x^2$ mais próximo do ponto $(1, 0)$.

28. Use o Método de Newton para aproximar as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito sob a curva $y = \cos x$ para $0 \le x \le \pi/2$, conforme a Figura Ex-28.

29. (a) Mostre que, sobre um círculo de raio r, o ângulo central θ que subentende um arco de comprimento 1,5 vezes o comprimento L de sua corda satisfaz a equação $\theta = 3\,\text{sen}\,(\theta/2)$ (ver Figura Ex-29).

(b) Use o Método de Newton para aproximar θ.

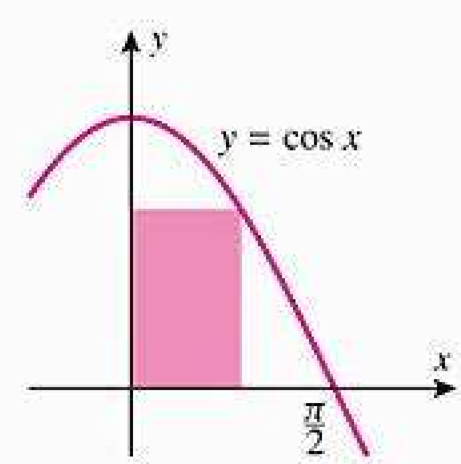


Figura Ex-28

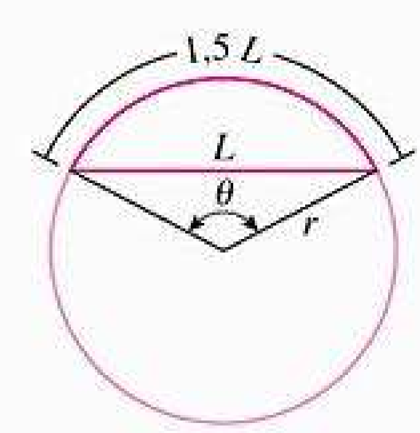


Figura Ex-29

30. Um ***segmento*** de um círculo é a região compreendida por um arco e sua corda (ver figura a seguir). Se r for o raio do círculo e θ o ângulo subentendido no centro do círculo, então pode-se mostrar que a área A do segmento é $A = \frac{1}{2}r^2(\theta - \text{sen}\,\theta)$, onde θ está em radianos. Encontre o valor de θ para o qual a área do segmento é um quarto da área do círculo. Dê o valor de θ até o grau mais próximo.

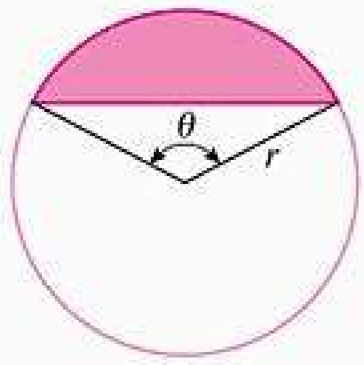


Figura Ex-30

31-32 Use o Método de Newton para aproximar todos os valores reais de y que satisfazem a equação dada para o valor de x indicado.

31. $xy^4 + x^3y = 1; x = 1$

32. $xy - \cos\left(\frac{1}{2}xy\right) = 0; x = 2$

33. Uma ***anuidade*** é uma seqüência de pagamentos iguais que são pagos ou recebidos em intervalos regulares de tempo. Por exemplo, podemos querer depositar quantias iguais ao final de cada ano, em uma poupança, a fim de acumular uma certa quantia em algum momento no futuro. Se, ao final de cada ano, forem acrescentados juros de $i \times 100\%$ sobre o saldo da conta, então dizemos que a poupança paga $i \times 100\%$ de juros, ***compostos anualmente***. Pode-se mostrar que, se os depósitos de Q reais forem feitos ao final de cada ano, em uma poupança que paga $i \times 100\%$ compostos anualmente, então, por ocasião do enésimo depósito e já depositados os juros do ano anterior, a quantia $S(n)$ na poupança é dada pela fórmula

$$S(n) = \frac{Q}{i}[(1+i)^n - 1]$$

Suponha que queiramos depositar \$5.000 em uma poupança ao final de cada ano, com o objetivo de acumular \$250.000 no 25° depósito. Qual é a taxa de juros compostos a ser paga para que possamos atingir essa meta? [*Sugestão*: Mostre que a taxa de juros i satisfaz a equação $50i = (1+i)^{25} - 1$ e resolva-a usando o Método de Newton.]

ENFOCANDO CONCEITOS

34. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

e use-o para explicar o que acontece se aplicamos o Método de Newton com o valor inicial de $x_1 = 2$. Verifique sua conclusão computando x_2, x_3, x_4 e x_5.

(b) Use o gráfico gerado em (a) para explicar o que acontece se aplicarmos o Método de Newton com um valor inicial de $x_1 = 0{,}5$. Verifique sua conclusão computando x_2, x_3, x_4 e x_5.

35. (a) Aplique o Método de Newton à função $f(x) = x^2 + 1$ com valor inicial de $x_1 = 0{,}5$ e determine se os valores $x_2, \ldots, x_{10}$ aparentam convergir.

(b) Explique o que está acontecendo.

36. Em cada parte, explique o que acontece se aplicarmos o Método de Newton a uma função f quando a condição dada é satisfeita para algum valor de n.

(a) $f(x_n) = 0$ (b) $x_{n+1} = x_n$

(c) $x_{n+2} = x_n \neq x_{n+1}$

37. Seja f uma função cuja derivada é contínua em toda parte. Suponha que exista um número real c tal que, quando o Método de Newton é aplicado a f, a desigualdade

$$|x_n - c| < \frac{1}{n}$$

é satisfeita para todos os valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$

(a) Explique por que

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{2}{n}$$

para todos os valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) Mostre que existe uma constante positiva M tal que

$$|f(x_n)| \leq M|x_{n+1} - x_n| < \frac{2M}{n}$$

para todos os valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$

(c) Prove que, se $f(c) \neq 0$, então existe um inteiro positivo N tal que

$$\frac{|f(c)|}{2} < |f(x_n)|$$

para cada $n > N$. [*Sugestão:* Mostre que $f(x) \to f(c)$ quando $x \to c$ e então aplique a Definição 2.4.1 com $\epsilon = \frac{1}{2}|f(c)|$.]

(d) O que pode ser concluído de (b) e (c)?

38. Quais são os elementos importantes no argumento sugerido pelo Exercício 37? É possível estender esse argumento a uma coleção maior de funções?

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.6

1. $x_2 \approx 4, x_3 \approx 2$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** -1 **4.** $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}193147$

5.7 TEOREMA DE ROLLE; TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Nesta seção vamos discutir um resultado chamado Teorema do Valor Médio. Esse teorema tem tantas conseqüências importantes que é considerado um dos grandes princípios do Cálculo.

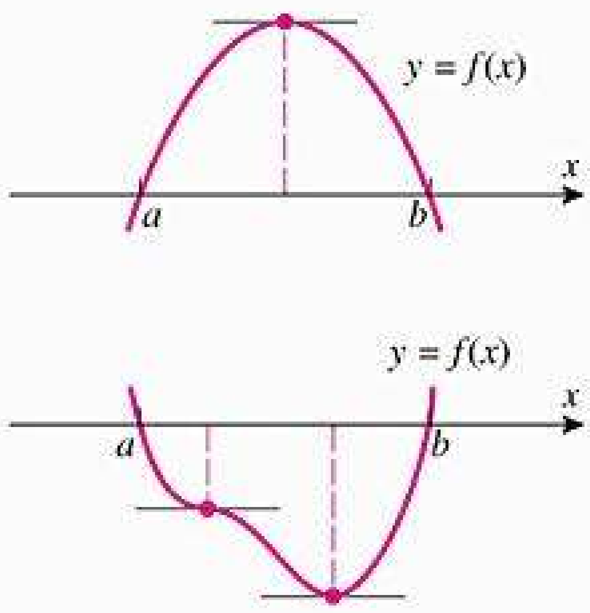


Figura 5.7.1

TEOREMA DE ROLLE

Vamos começar com um caso especial do Teorema do Valor Médio, chamado Teorema de Rolle em homenagem ao matemático Michel Rolle. Esse teorema afirma o fato geometricamente óbvio segundo o qual se o gráfico de uma função diferenciável cruza o eixo x em dois pontos, a e b, então entre eles deve existir pelo menos um ponto onde a reta tangente é horizontal (Figura 5.7.1). O enunciado preciso do teorema é o que segue:

> **5.7.1 TEOREMA** (***Teorema de Rolle***) *Seja f diferenciável no intervalo aberto (a, b) e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se*
>
> $$f(a) = 0 \quad \text{e} \quad f(b) = 0,$$
>
> *então há pelo menos um ponto c em (a, b), tal que $f'(c) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO Dividiremos a prova em três casos: o caso em que $f(x) = 0$ para todo x em (a, b), o caso em que $f(x) > 0$ para algum x em (a, b) e o caso em que $f(x) < 0$ para algum x em (a, b).

CASO 1 Se $f(x) = 0$ para todo x em (a, b), então $f'(c) = 0$ em cada c de (a, b), pois f é uma função constante nesse intervalo.

CASO 2 Suponhamos que $f(x) > 0$ para algum x em (a, b). Como f é contínua em $[a, b]$, segue pelo Teorema do Valor Extremo (5.4.2) que f tem um máximo absoluto em $[a, b]$. O máximo absoluto não pode ocorrer nas extremidades de $[a, b]$ porque $f(a) = f(b) = 0$ e estamos supondo que $f(x) > 0$ para algum ponto de (a, b). Assim, o máximo absoluto precisa ocorrer em algum ponto c de (a, b). Segue do Teorema 5.4.3 que este ponto c é necessariamente um ponto crítico de f e, como f é diferenciável em (a, b), esse ponto crítico é estacionário, ou seja, $f'(c) = 0$.

Michel Rolle (1652-1719) Matemático francês. Rolle, filho de um lojista, freqüentou somente o Ensino Fundamental. Casou-se cedo e trabalhou duro para sustentar a família com um magro salário de escrivão para tabeliões e advogados. Mesmo com seus problemas financeiros e sua pouca instrução, Rolle estudou por si próprio Álgebra e Análise diofantina (um ramo da teoria dos números). Sua sorte mudou drasticamente em 1682, quando publicou uma elegante solução de um difícil e não-resolvido problema em Análise diofantina. O reconhecimento público levou-o a ser amparado com um emprego de professor de escola fundamental e, depois, com um posto administrativo no Ministério da Guerra. Em 1685, entrou para a Academia de Ciências em uma posição inferior pela qual não recebeu salários regulares até 1699. Nela permaneceu até a morte em 1719, por apoplexia.

Embora o forte de Rolle sempre tenha sido a Análise diofantina, seu trabalho mais importante foi um livro sobre a Álgebra de equações, intitulado *Traité d'algèbre*, publicado em 1690. Nesse livro, Rolle estabeleceu firmemente a notação $\sqrt[n]{a}$ [antes escrita como $\sqrt{(n)\ a}$] para raiz enésima de a e provou uma versão para polinômios do teorema que hoje leva seu nome. (O nome Teorema de Rolle foi dado por Giusto Bellavitis, em 1846.) Ironicamente, Rolle foi um dos mais eloqüentes antagonistas iniciais do Cálculo. Ele esforçou-se intensamente para demonstrar que o Cálculo dava resultados errados e baseava-se em raciocínios falsos. Suas discussões sobre o assunto eram tão acaloradas que várias vezes a Academia de Ciências teve de intervir. Entre suas várias realizações, Rolle ajudou a avançar a ordem hoje aceita para os números negativos. Descartes, por exemplo, via −2 como menor do que −5. Rolle antecipou-se à maioria de seus contemporâneos adotando a convenção atual em 1691.

CASO 3 Suponhamos que $f(x) < 0$ para algum x em (a, b). A prova nesse caso é análoga à do Caso 2 e será omitida. ■

▶ Exemplo 1 Encontre os dois pontos do corte do gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$ com o eixo x e confirme que $f'(c) = 0$ em algum ponto c entre esses dois pontos de corte.

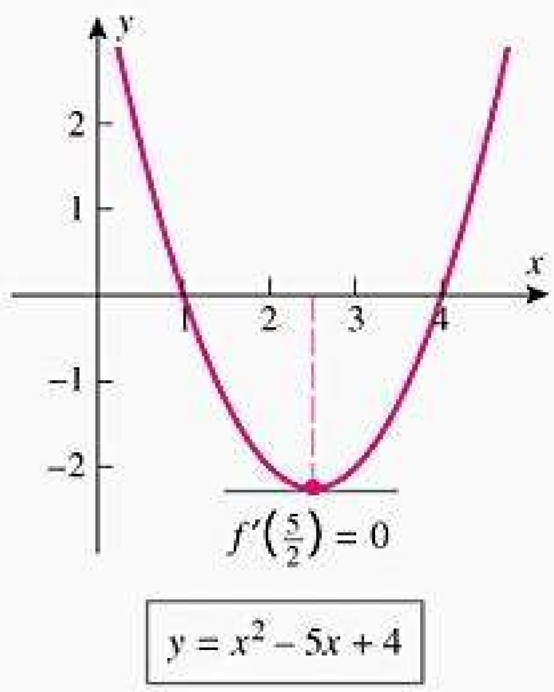


Figura 5.7.2

Solução A função f pode ser fatorada como

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

de modo que os pontos de corte com o eixo x são $x = 1$ e $x = 4$. Como o polinômio f é contínuo e diferenciável em toda parte, estão satisfeitas as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[1, 4]$. Assim, podemos ter certeza de que existe pelo menos um ponto c no intervalo $(1, 4)$, tal que $f'(c) = 0$. Derivando f, obtemos

$$f'(x) = 2x - 5$$

Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos $x = \frac{5}{2}$, de modo que $c = \frac{5}{2}$ é um ponto no intervalo $(1, 4)$ no qual $f'(c) = 0$ (Figura 5.7.2). ◀

▶ Exemplo 2 A exigência de diferenciabilidade no Teorema de Rolle é crítica. Se f deixa de ser diferenciável, mesmo em um único ponto do intervalo (a, b), então a conclusão do teorema pode não valer. Por exemplo, a função $f(x) = |x| - 1$ mostrada na Figura 5.7.3 tem raízes em $x = -1$ e $x = 1$, mas não existe reta tangente horizontal ao gráfico de f no intervalo $(-1, 1)$. ◀

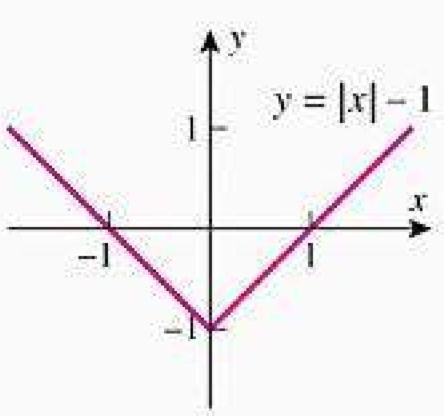


Figura 5.7.3

▶ Exemplo 3 Se f satisfaz as condições do Teorema de Rolle em $[a, b]$, então o teorema garante a existência de *pelo menos* um ponto c em (a, b) no qual $f'(c) = 0$. Pode, entretanto, haver mais de um c. Por exemplo, a função $f(x) = \text{sen } x$ é contínua e diferenciável em toda parte, de modo que satisfaz as hipótese do Teorema de Rolle no intervalo $[0, 2\pi]$, cujos extremos são raízes de f. Conforme indica a Figura 5.7.4, existem dois pontos no intervalo $[0, 2\pi]$ nos quais o gráfico de f tem reta tangente horizontal, $c_1 = \pi/2$ e $c_2 = 3\pi/2$. ◀

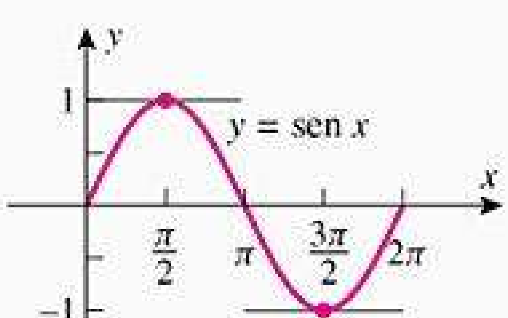


Figura 5.7.4

■ O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O Teorema de Rolle é um caso especial de um resultado mais geral, denominado ***Teorema do Valor Médio***. Geometricamente, esse teorema afirma que, entre dois pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ quaisquer do gráfico de uma função diferenciável f, existe pelo menos um ponto onde a reta tangente ao gráfico é paralela à reta secante que passa por A e B (Figura 5.7.5).

Nos Exemplos 1 e 3 foi possível encontrar os valores exatos de c porque a equação $f'(x) = 0$ foi facilmente resolvida. Contudo, nas aplicações do Teorema de Rolle, geralmente a *existência* de c é mais importante do que seu valor exato.

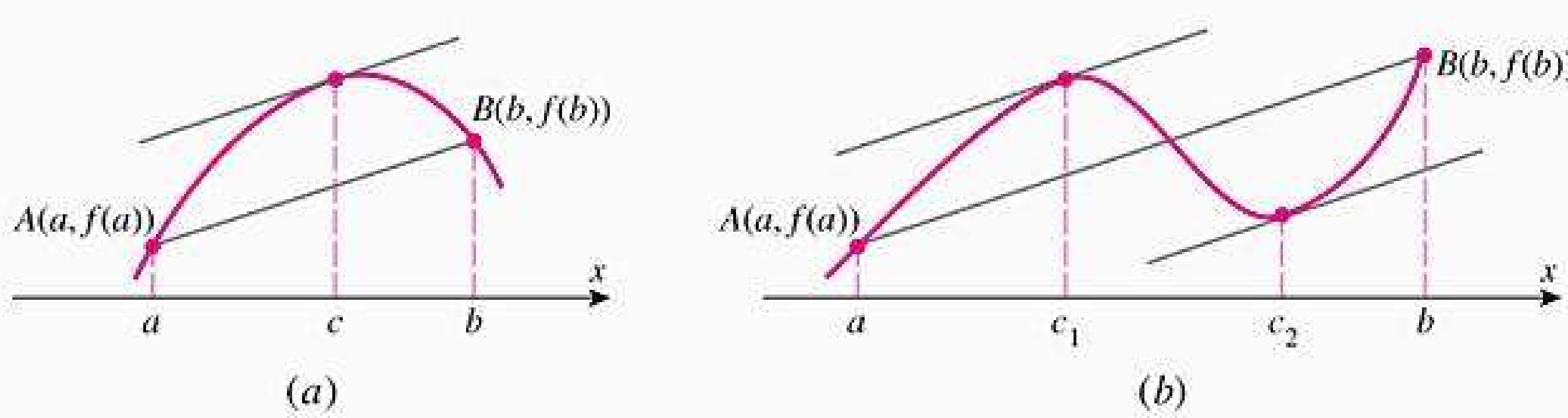


Figura 5.7.5

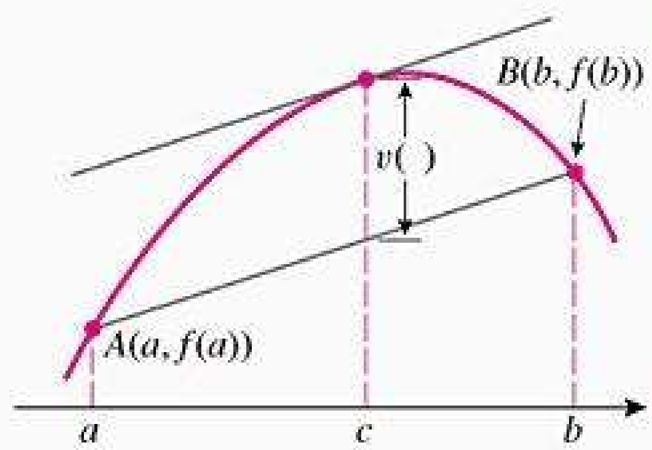
Observe que a inclinação da reta secante que passa por $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é dada por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e que a inclinação da reta tangente em c na Figura 5.7.5a é $f'(c)$. Analogamente, na Figura 5.7.5b, as inclinações das retas tangentes em c_1 e c_2 são $f'(c_1)$ e $f'(c_2)$, respectivamente. Como retas não-verticais paralelas têm a mesma inclinação, o Teorema do Valor Médio pode ser enunciado precisamente como segue.

5.7.2 TEOREMA **(*Teorema do Valor Médio*)** *Seja f contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e diferenciável no intervalo aberto* (a, b). *Então e iste pelo menos um ponto c em* (a, b), *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$



A reta tangente é paralela à reta secante onde é máxima a distância vertical $v(\ )$ entre a reta secante e o gráfico de f.

Figura 5.7.6

MOTIVAÇÃO PARA A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.7.2 A Figura 5.7.6 sugere que (1) será válida (isto é, a reta tangente será paralela à reta secante) em um ponto c no qual a distância entre a curva e a reta secante for máxima. Assim, para provar o teorema, é natural começar por uma fórmula para a distância vertical $v(\ )$ entre a curva $y = f(\ )$ e a reta secante ligando os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.7.2 Como a equação da reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou, de forma equivalente,

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

a diferença $v(\ )$ entre a altura do gráfico de f e a da reta secante é

$$v(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right] \tag{2}$$

Como $f(\ )$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), $v(\ )$ também o é. Além disso,

$$v(a) = 0 \quad \text{e} \quad v(b) = 0$$

logo, $v(\ )$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[a, b]$. Portanto, existe um ponto c em (a, b) tal que $v'(c) = 0$. Mas, a partir da Equação (2),

$$v'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

assim,

$$v'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como $v'(c) = 0$, temos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

► Exemplo 4 Mostre que a função $f(\ ) = \frac{1}{4}x^3 + 1$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo $[0, 2]$ e encontre todos os valores de c do intervalo $(0, 2)$ nos quais a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta secante que liga os pontos $(0, f(0))$ e $(2, f(2))$.

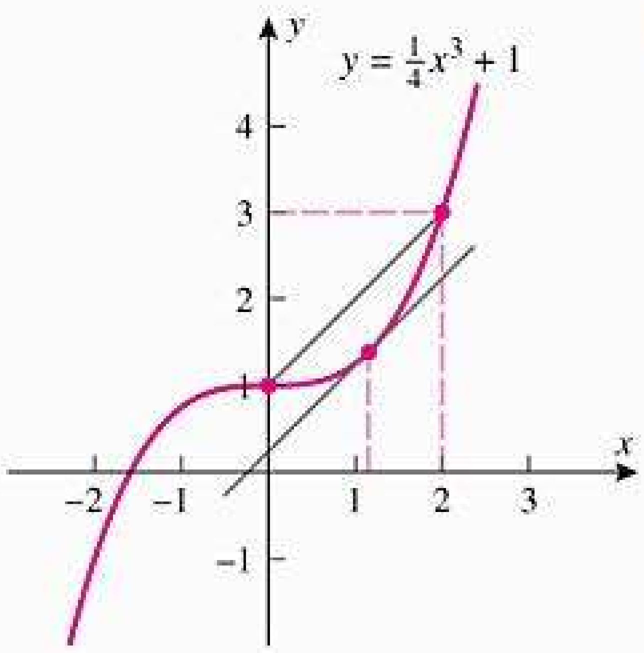


Figura 5.7.7

Solução A função f é contínua e diferenciável em toda parte, pois é um polinômio. Em particular, f é contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $(0, 2)$; assim, as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas com $a = 0$ e $b = 2$. Mas

$$f(a) = f(0) = 1, \quad f(b) = f(2) = 3$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{4}, \qquad f'(c) = \frac{3c^2}{4}$$

Desse modo, a Fórmula (1) torna-se

$$\frac{3c^2}{4} = \frac{3-1}{2-0} \qquad \text{ou} \qquad 3c^2 = 4$$

tendo as duas soluções $c = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 1{,}15$. Porém, somente a solução positiva está no intervalo $(0, 2)$; esse valor de c está de acordo com a Figura 5.7.7. ◀

UMA INTERPRETAÇÃO DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO, USANDO A VELOCIDADE

Há uma interpretação interessante do Teorema do Valor Médio quando $x = f(t)$ é a curva posição *versus* tempo para um carro movendo-se ao longo de uma estrada reta. Nesse caso, o lado direito de (1) é a velocidade média do carro no intervalo de tempo $a \le t \le b$, enquanto o lado esquerdo é a velocidade instantânea em $t = c$. Assim, o Teorema do Valor Médio estabelece que pelo menos uma vez, durante o intervalo de tempo, a velocidade instantânea deve ser igual à velocidade média. Isso está de acordo com a nossa experiência no mundo real: se a velocidade média em uma viagem for de 80 km/h, então, em algum instante, o velocímetro marcou 80 km/h.

▶ Exemplo 5 Um motorista está dirigindo em uma estrada reta com o limite de velocidade de 80 km/h. Às 08 horas e 05 minutos da manhã, um controlador cronometra a velocidade do carro como sendo de 75 km/h e, 5 minutos depois, um segundo controlador, 10 km adiante na estrada, cronometra a velocidade do carro como sendo de 80 km/h. Explique por que o motorista poderia receber uma multa por excesso de velocidade.

Solução O motorista percorreu 10 km em 5 minutos (= 1/12 h); logo, sua velocidade média foi de 120 km/h. O Teorema do Valor Médio garante que, pelo menos uma vez ao longo dos 10 km, o motorista dirigiu a 120 km/h. ◀

CONSEQÜÊNCIAS DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Havíamos afirmado no começo desta seção que o Teorema do Valor Médio é o ponto de partida para muitos resultados importantes em Cálculo. Como exemplo disso, vamos usá-lo para provar o Teorema 5.1.2, uma de nossas ferramentas fundamentais para a análise de gráficos de funções.

5.1.2 TEOREMA (***Revisado***) *Seja f uma função que é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b).*

(*a*) *Se $f'(x) > 0$ para todo valor de x em (a, b), então f é crescente em $[a, b]$.*

(*b*) *Se $f'(x) < 0$ para todo valor de x em (a, b), então f é decrescente em $[a, b]$.*

(*c*) *Se $f'(x) = 0$ para todo valor de x em (a, b), então f é constante em $[a, b]$.*

DEMONSTRAÇÃO (*a*) Sejam x_1 e x_2 pontos em $[a, b]$, sendo $x_1 < x_2$. Precisamos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Como as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas em todo o intervalo $[a, b]$, também estão no subintervalo $[x_1, x_2]$. Assim, há algum ponto c no intervalo aberto (x_1, x_2), tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou, de forma equivalente,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{3}$$

Como c está no intervalo aberto (x_1, x_2), tem-se que $a < c < b$; portanto, $f'(c) > 0$. Porém, como $x_1 < x_2$, tem-se que $x_2 - x_1 > 0$. Segue, a partir de (3), que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou, equivalentemente, $f(x_1) < f(x_2)$, que é o que queríamos provar. As demonstrações de (*b*) e (*c*) são análogas e deixadas como exercícios. ■

■ TEOREMA DA DIFERENÇA CONSTANTE

Sabemos de nosso estudo anterior sobre derivadas que a derivada de uma constante é zero. A parte (*c*) do Teorema 5.1.2 é a recíproca daquele resultado, isto é, uma função cuja derivada é zero em um intervalo deve ser constante naquele intervalo. Se aplicarmos isso à diferença de duas funções, obteremos o seguinte teorema útil.

5.7.3 TEOREMA (***Teorema da Diferença Constante***) *Se f e g são funções diferenciáveis em um intervalo I e se $f'(x) = g'(x)$ para cada x de I, então $f - g$ é constante em I; ou seja, existe uma constante k tal que $f(x) - g(x) = k$ ou, equivalentemente,*

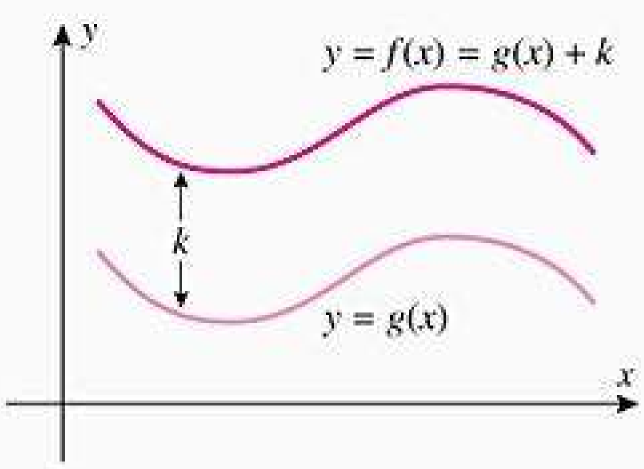
$$f(x) = g(x) + k$$

para cada x em I.

DEMONSTRAÇÃO Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de I tais que $x_1 < x_2$. Como as funções f e g são diferenciáveis em I, elas são contínuas em I. Como $[x_1, x_2]$ é um subintervalo de I, segue que f e g são contínuas em $[x_1, x_2]$ e diferenciáveis em (x_1, x_2). Além disso, segue das propriedades básicas de derivada e continuidade que o mesmo é verdadeiro para a função

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

Como $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, segue da parte (*c*) do Teorema 5.1.2 que $F(x) = f(x) - g(x)$ é constante no intervalo $[x_1, x_2]$. Isso significa que $f(x) - g(x)$ tem o mesmo valor nos dois pontos x_1 e x_2 de I. Como esses dois pontos são arbitrários, segue que $f - g$ é constante em I. ■



Se $f'(x) = g'(x)$ em um intervalo, então os gráficos de f e g são translações verticais um do outro.

Figura 5.7.8

Geometricamente, o Teorema da Diferença Constante nos diz que, se f e g têm a mesma derivada em um intervalo, então, nesse intervalo, os gráficos de f e g são translações verticais um do outro (Figura 5.7.8).

► Exemplo 6 A parte (*c*) do Teorema 5.1.2 pode ser útil para estabelecer identidades. Por exemplo, embora não necessitemos do Cálculo para provar a identidade

$$\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} \qquad (-1 \le x \le 1) \tag{4}$$

isso pode ser feito tomando $f(x) = \text{arc sen } x + \text{arc cos } x$. Segue das Fórmulas (9) e (10) da Seção 4.3 que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\text{arc sen } x] + \frac{d}{dx}[\text{arc cos } x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

de modo que $f(x) = \text{arc sen } x + \text{arc cos } x$ é constante no intervalo $[-1, 1]$. Essa constante pode ser encontrada calculando o valor de f em qualquer ponto conveniente desse intervalo. Por exemplo, usando $x = 0$, obtemos

$$f(0) = \text{arc sen } 0 + \text{arc cos } 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

provando (4). ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.7 (*Ver página 336 para respostas.*)

1. Seja $f(x) = x^2 - x$.

(a) Um intervalo no qual f satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle é ________.

(b) Encontre todos os valores de c que satisfazem a conclusão do Teorema de Rolle para a função f no intervalo de (a).

2. Use o gráfico de f em anexo para encontrar um intervalo $[a, b]$ no qual é aplicável o Teorema de Rolle e encontre todos os valores de c naquele intervalo que satisfazem a conclusão do teorema.

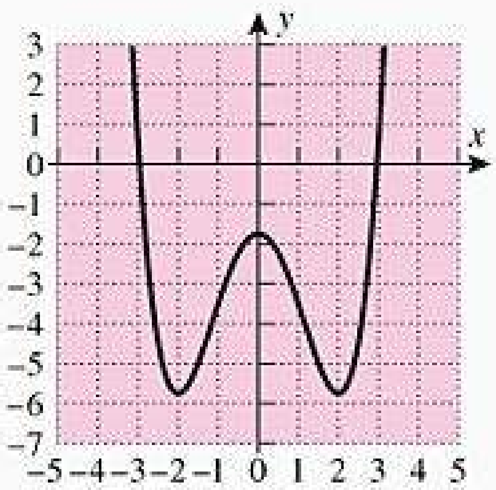


Figura Ex-2

3. Seja $f(x) = x^2 - x$.

(a) Encontre um ponto b tal que a inclinação da reta secante por $(0, 0)$ e $(b, f(b))$ seja igual a 1.

(b) Encontre todos os valores de c que satisfazem a conclusão do Teorema do Valor Médio para a função f no intervalo $[0, b]$, onde b é o ponto encontrado em (a).

4. Use o gráfico de f em anexo para estimar todos os valores de c que satisfazem a conclusão do Teorema do Valor Médio nos intervalos

(a) $[0, 8]$ (b) $[0, 4]$

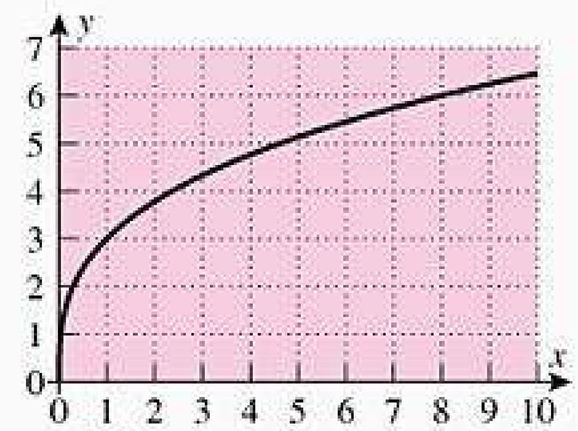


Figura Ex-4

5. Encontre uma função f tal que o gráfico de f contenha o ponto $(1, 5)$ e tal que, para cada valor de x_0, a reta tangente ao gráfico de f em x_0 seja paralela à reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ em x_0.

EXERCÍCIOS 5.7 Recurso Gráfico

1-6 Verifique se as hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas nos intervalos e encontre todos os valores de c nesses intervalos que satisfazem a conclusão do teorema.

1. $f(x) = x^2 - 8x + 15$; $[3, 5]$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$; $[0, 2]$

3. $f(x) = \cos x$; $[\pi/2, 3\pi/2]$

4. $f(x) = \ln(4 + 2x - x^2)$; $[-1, 3]$

5. $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$; $[0, 4]$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{3x} + \dfrac{1}{3}$; $[1, 3]$

7-12 Verifique se as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas nos intervalos e encontre todos os valores de c nesses intervalos que satisfazem a conclusão do teorema.

7. $f(x) = x^2 - x$; $[-3, 5]$

8. $f(x) = x^3 + x - 4$; $[-1, 2]$

9. $f(x) = \sqrt{x+1}$; $[0, 3]$

10. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$; $[3, 4]$

11. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[-5, 3]$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $[2, 5]$

13. (a) Encontre um intervalo $[a, b]$ no qual

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle.

(b) Gere o gráfico de $f'(x)$ e use-o para fazer estimativas de todos os valores de c obtidos em (a) que satisfazem a conclusão do Teorema de Rolle.

(c) Use o Método de Newton para melhorar as estimativas obtidas em (b).

14. Seja $f(x) = x^3 - 4x$.

(a) Encontre a equação da reta secante que passa pelos pontos $(-2, f(-2))$ e $(1, f(1))$.

(b) Mostre que há somente um número c no intervalo $(-2, 1)$ que satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio para a reta secante em (a).

(c) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$.

(d) Use um recurso gráfico computacional para gerar a reta secante de (a) e a tangente de (c) no mesmo sistema de coordenadas, e confirme visualmente que as duas são paralelas.

ENFOCANDO CONCEITOS

15. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$.

(a) Mostre que não há no intervalo $(0, \pi)$ um ponto c tal que $f'(c) = 0$, embora $f(0) = f(\pi) = 0$.

(b) Explique por que o resultado de (a) não viola o Teorema de Rolle.

16. Sejam $f(x) = x^{2/3}$, $a = -1$ e $b = 8$.

(a) Mostre que não há no intervalo (a, b) um ponto c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(b) Explique por que o resultado de (a) não viola o Teorema do Valor Médio.

17. (a) Mostre que, se f for diferenciável no intervalo $(-\infty, +\infty)$ e se os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = f'(x)$ estiverem no mesmo sistema de coordenadas, então entre qualquer par de f há pelo menos um de f'.

(b) Dê alguns exemplos que ilustrem isso.

18. Reveja as Fórmulas (10) e (11) na seção 3.1 e use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, se f for diferenciável em $(-\infty, +\infty)$, então em qualquer intervalo $[x_0, x_1]$ há pelo menos um ponto em (x_0, x_1) no qual a taxa de variação instantânea de y em relação a x é igual à taxa de variação média, no mesmo intervalo.

19-21 Use o resultado do Exercício 18 nestes exercícios.

19. Um automóvel percorre 4 km de uma estrada reta em 5 minutos. Prove que o velocímetro mostra pelo menos uma vez, durante o percurso, exatamente 48 km/h.

20. Às 11h da manhã, a temperatura externa era de 76°F. Às 11h da noite, havia caído para 52°F.

(a) Mostre que, em algum instante durante esse período, a temperatura estava decrescendo a uma taxa de 2°F/h.

(b) Suponha ser de seu conhecimento que a temperatura atingiu os 88°F em algum momento entre as 11h da manhã e as 11h da noite. Mostre que, em algum instante durante esse período, a temperatura estava caindo a uma taxa maior do que 3°F/h.

21. Suponha que dois corredores de 100 metros rasos acabam empatados. Mostre que, pelo menos uma vez durante a corrida, ambos tiveram a mesma velocidade.

22. Use o fato de que

$$\frac{d}{dx}[x \ln(2 - x)] = \ln(2 - x) - \frac{x}{2 - x}$$

para mostrar que a equação $x = (2-x) \ln(2 - x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 1)$.

23. (a) Use o Teorema da Diferença Constante (5.7.3) para mostrar que, se $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo $(-\infty, +\infty)$, e se f e g têm o mesmo valor em algum ponto x_0, então $f(x) = g(x)$ para todo x em $(-\infty, +\infty)$.

(b) Use o resultado de (a) para confirmar a identidade trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

24. (a) Use o Teorema da Diferença Constante (5.7.3) para mostrar que, se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em $(-\infty, +\infty)$, e se $f(x_0) - g(x_0) = c$ em algum ponto x_0, então

$$f(x) - g(x) = c$$

para todo x em $(-\infty, +\infty)$.

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que a função

$$h(x) = (x - 1)^3 - (x^2 + 3)(x - 3)$$

é constante para todo x em $(-\infty, +\infty)$ e encontre a constante.

(c) Verifique o resultado de (b) multiplicando e simplificando a fórmula de $h(x)$.

25. Seja $g(x) = xe^x - e^x$. Encontre $f(x)$, tal que $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

26. Seja $g(x) = \text{arc tg}\, x$. Encontre $f(x)$, tal que $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

ENFOCANDO CONCEITOS

27. (a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, se f for diferenciável em um intervalo aberto I, e se $|f'(x)| \le M$ para todos os valores de x em I, então

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$$

para todos os valores de x e y em I.

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que

$$|\text{sen}\, x - \text{sen}\, y| \le |x - y|$$

para todos os valores reais de x e y.

28. (a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, se f for diferenciável em um intervalo aberto I, e se $|f'(x)| \ge M$ para todos os valores de x em I, então

$$|f(x) - f(y)| \ge M|x - y|$$

para todos os valores de x e y em I.

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que

$$|\text{tg}\, x - \text{tg}\, y| \ge |x - y|$$

para todos os valores de x e y no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

(c) Use o resultado de (b) para mostrar que

$$|\text{tg}\, x + \text{tg}\, y| \ge |x + y|$$

para todos os valores de x e y no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

29. (a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{y - x}{2\sqrt{x}}$$

se $0 < x < y$.

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que, se $0 < x < y$, então $\sqrt{xy} < \frac{1}{2}(x + y)$
(a média aritmética é maior que a média geométrica).

30. Mostre que, se f for diferenciável em um intervalo aberto I e $f'(x) \ne 0$ em I, a equação $f(x) = 0$ pode ter no máximo uma raiz real em I.

31. Use o resultado do Exercício 30 para mostrar o seguinte:

(a) A equação $x^3 + 4x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

(b) Se $b^2 - 3ac < 0$ e se $a \ne 0$, então a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

tem exatamente uma raiz real.

32. Use a desigualdade $\sqrt{3} < 1{,}8$ para provar que

$$1{,}71 < \sqrt{3} < 1{,}75$$

[*Sugestão*: Tome $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$ e $b = 4$ no Teorema do Valor Médio.]

33. Use o Teorema do Valor Médio para provar que

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arc\,tg} x < x \quad (x > 0)$$

34. (a) Mostre que, se f e g forem funções para as quais

$$f'(x) = g(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = f(x)$$

para todo x, então $f^2(x) - g^2(x)$ é uma constante.

(b) Mostre que as funções $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ e $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ têm essa propriedade.

35. (a) Mostre que, se f e g forem funções para as quais

$$f'(x) = g(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = -f(x)$$

para todo x, então $f^2(x) + g^2(x)$ é uma constante.

(b) Dê um exemplo de funções f e g com essa propriedade.

ENFOCANDO CONCEITOS

36. Sejam f e g contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b). Prove: se $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$, então há um ponto c em (a, b) onde $f'(c) = g'(c)$.

37. Ilustre o resultado do Exercício 36 com uma figura apropriada.

38. (a) Prove: se $f''(x) > 0$ para todo x em (a, b), então $f'(x) = 0$ no máximo uma vez em (a, b).

(b) Dê uma interpretação geométrica do resultado em (a).

39. (a) Prove a parte (*b*) do Teorema 5.1.2.

(b) Prove a parte (*c*) do Teorema 5.1.2.

40. Use o Teorema do Valor Médio para provar o resultado seguinte: Seja f uma função contínua em x_0 e suponha que exista $\lim_{x \to x_0} f'(x)$. Então f é diferenciável em x_0 e

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

[*Sugestão:* A derivada $f'(x_0)$ é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

desde que exista esse limite.]

ENFOCANDO CONCEITOS

41. Seja $$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \le 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

Encontre os valores de a e b tais que f seja diferenciável em $x = 1$.

42. (a) Seja $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Mostre que

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

mas que $f'(0)$ não existe.

(b) Seja $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(0)$ existe, mas $f''(0)$ não.

43. Use o Teorema do Valor Médio para provar o resultado seguinte: O gráfico de uma função f tem uma reta tangente vertical em $(x_0, f(x_0))$ se f é contínua em x_0 e $f'(x)$ tende ou a $+\infty$ ou a $-\infty$ quando $x \to x_0^+$ e quando $x \to x_0^-$.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.7

1. (a) $[0, 1]$ (b) $c = \frac{1}{2}$ **2.** $[-3, 3]$; $c = -2, 0, 2$ **3.** (a) $b = 2$ (b) $c = 1$ **4.** (a) 1,5 (b) 0,8 **5.** $f(x) = x^2 + 4$

5.8 MOVIMENTO RETILÍNEO

Nesta seção continuaremos o estudo do movimento retilíneo iniciado na Seção 3.1. Definiremos matematicamente a noção de "aceleração" e mostraremos como utilizar as ferramentas do Cálculo, desenvolvidas anteriormente neste capítulo, para analisar mais profundamente o movimento retilíneo.

■ REVISÃO DE TERMINOLOGIA

Conforme vimos na Seção 3.1, uma partícula que pode se mover em qualquer sentido ao longo de uma reta coordenada é dita em ***movimento retilíneo***. A reta pode ser um eixo x, um eixo y ou qualquer reta coordenada inclinada. Em discussões gerais, utilizaremos um eixo s como a reta do movimento. Vamos supor que foram escolhidas unidades para medir a distância e o tempo e que iniciamos a observação do movimento no instante $t = 0$. Quando a partícula se move ao longo do eixo s, sua coordenada s é alguma função do tempo, digamos $s = s(t)$. Dize-

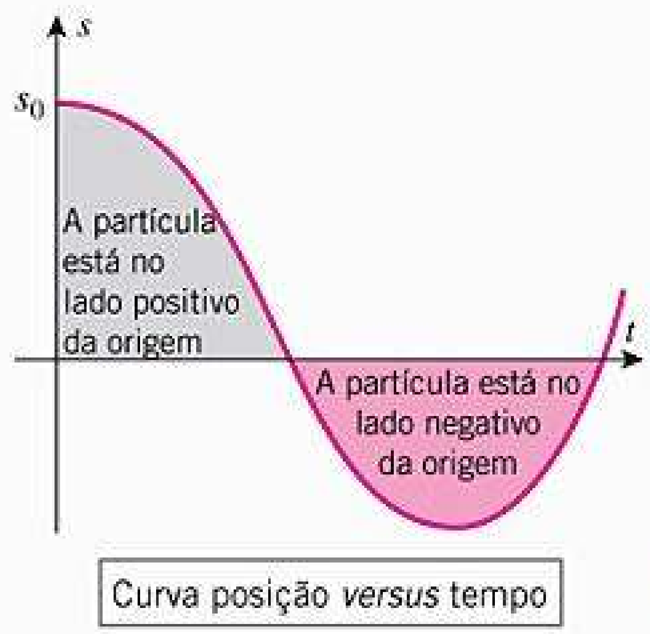


Figura 5.8.1

mos que $s(t)$ é a ***função posição*** da partícula* e que o gráfico de s *versus* t é a ***curva posição versus tempo***. Se a coordenada de uma partícula no instante t_1 é $s(t_1)$ e a coordenada em um tempo t_2 posterior é $s(t_2)$, então $s(t_2) - (t_1)$ é chamado de ***deslocamento*** da partícula sobre o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. O deslocamento descreve a variação na posição da partícula.

A Figura 5.8.1 mostra uma curva posição *versus* tempo típica para uma partícula em movimento retilíneo. Podemos observar, a partir do gráfico, que a coordenada da partícula no instante $t = 0$ é s_0 e deduzir, a partir do sinal de s, quando a partícula está do lado negativo ou positivo da origem durante sua trajetória ao longo da reta coordenada.

► Exemplo 1 A Figura 5.8.2a mostra a curva posição *versus* tempo para uma partícula em movimento em um eixo s. Descreva em palavras como varia a posição da partícula em relação ao tempo.

Solução A partícula está na posição $s = -3$ no instante $t = 0$. Ela se move no sentido positivo até o instante $t = 4$, já que s está crescendo. No instante $t = 4$, a partícula está na posição $s = 3$. Nesse instante, a partícula troca de sentido de movimento e se move no sentido negativo até o instante $t = 7$, pois s é decrescente. No instante $t = 7$, a partícula está na posição $t = -1$; dali em diante, ela permanece estacionada, pois s é constante para $t > 7$. Isso está ilustrado esquematicamente na Figura 5.8.2b. ◄

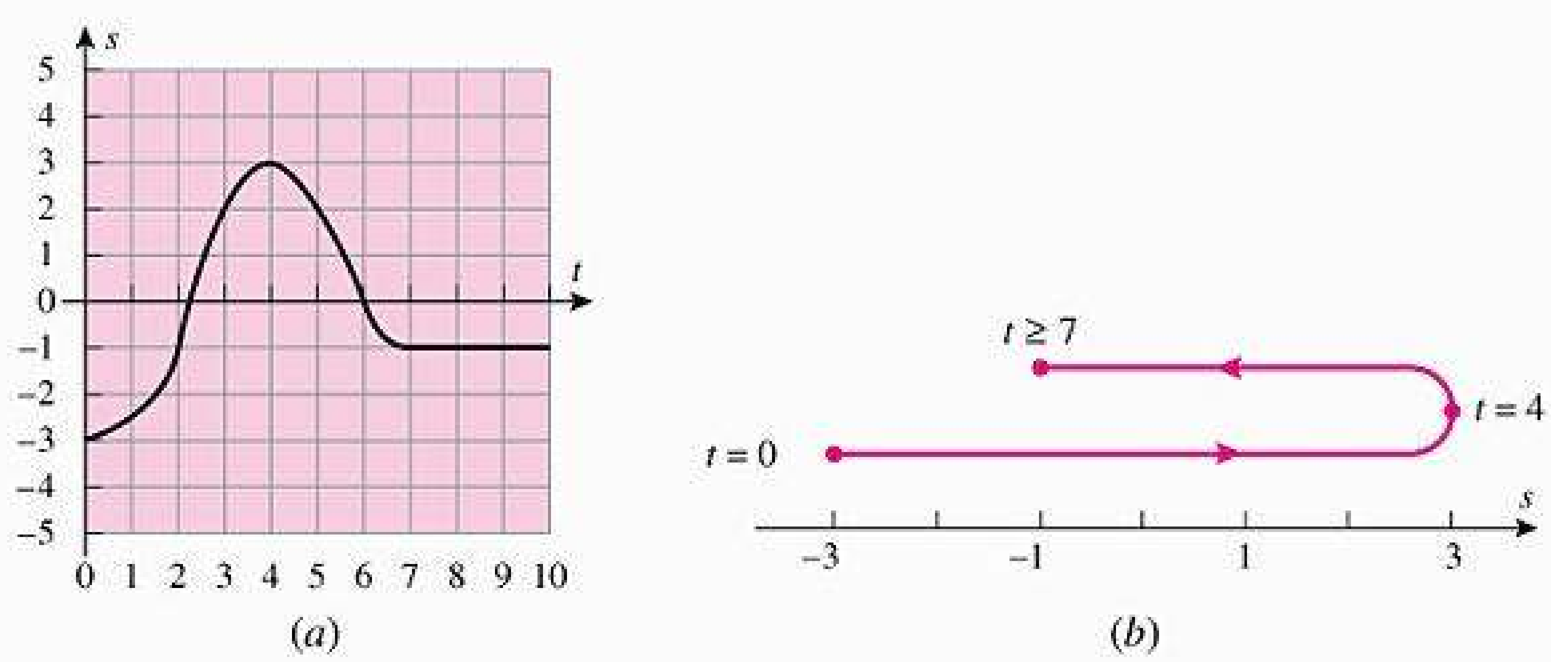


Figura 5.8.2

VELOCIDADE E VELOCIDADE ESCALAR

Conforme vimos nas Fórmulas (6) e (7) da Seção 3.1 e na Fórmula (4) da Seção 3.2, a velocidade instantânea de uma partícula em movimento retilíneo é a derivada da função posição e a velocidade escalar instantânea é o valor absoluto da velocidade instantânea. Assim, se $s(t)$ é a função posição de uma partícula em movimento retilíneo, então definimos a ***função velocidade*** $v(t)$ da partícula por

> Para distinguir a velocidade instantânea da velocidade média, um nome mais adequado para $v(t)$ seria ***função velocidade instantânea***. Contudo, vamos seguir a prática comum de chamá-la de "função velocidade", deixando subentendido que ela descreve a velocidade instantânea.

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} \tag{1}$$

e a ***função velocidade escalar*** por

$$|v(t)| = |s'(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \tag{2}$$

O sinal da velocidade diz o sentido do movimento: um valor positivo de $v(t)$ significa que s está crescendo com o tempo, de modo que a partícula se move no sentido positivo, e um valor negativo de $v(t)$ significa que s está decrescendo com o tempo, de modo que a partícula

* Ao escrever $s = s(t)$ em vez da expressão mais familiar $s = f(t)$, estamos usando a letra s tanto para a variável dependente quanto para o nome da função, o que vem a ser prática comum na Engenharia e na Física.

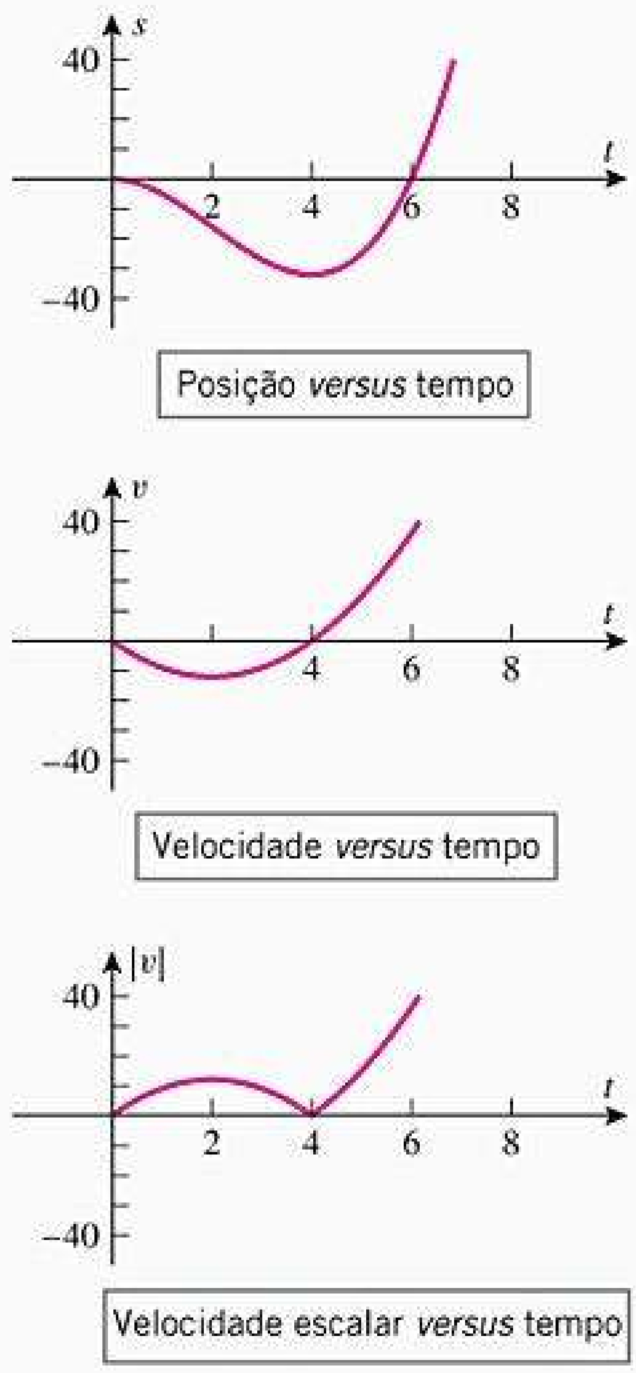


Figura 5.8.3

se move no sentido negativo. Se $v(t) = 0$, então a partícula está momentaneamente parada. A função velocidade escalar, que é sempre não-negativa, diz quão rápido a partícula está se movendo, mas não informa o sentido do movimento.

▶ Exemplo 2 Seja $s(t) = t^3 - 6t^2$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo s, onde s está em metros, enquanto t é dado em segundos. Encontre as funções velocidade e velocidade escalar e mostre os gráficos da posição, da velocidade e da velocidade escalar *versus* tempo.

Solução A partir de (1) e (2), a velocidade instantânea e a velocidade escalar são dadas por

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t \quad \text{e} \quad |v(t)| = |3t^2 - 12t|$$

Os gráficos pedidos estão na Figura 5.8.3. Observe que a velocidade e a velocidade escalar têm por unidades metros por segundo (m/s), pois s está em metros (m) e o tempo, em segundos (s). ◀

Os gráficos da Figura 5.8.3 fornecem uma importante informação visual sobre o movimento da partícula. Por exemplo, a curva posição *versus* tempo nos diz que a partícula está do lado negativo da origem para $0 < t < 6$, do lado positivo da origem para $t > 6$ e está na origem nos instantes $t = 0$ e $t = 6$. A curva velocidade *versus* tempo nos diz que a partícula move-se na direção negativa se $0 < t < 4$, na direção positiva se $t > 4$ e está momentaneamente parada nos instantes $t = 0$ e $t = 4$ (a velocidade é zero). A curva velocidade escalar *versus* tempo nos diz que a velocidade escalar da partícula é crescente para $0 < t < 2$, decrescente para $2 < t < 4$ e novamente crescente para $t > 4$.

■ ACELERAÇÃO

No movimento retilíneo, a taxa segundo a qual a velocidade instantânea de uma partícula varia em relação ao tempo é denominada ***aceleração instantânea*** ou, simplesmente, ***aceleração***. Assim, se uma partícula em movimento retilíneo tem uma função velocidade $v(t)$, então definimos a ***função aceleração*** da partícula por

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} \tag{3}$$

Alternativamente, podemos usar o fato de que $v(t) = s'(t)$ para expressar a função aceleração em termos da função posição por

$$a(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{4}$$

▶ Exemplo 3 Seja $s(t) = t^3 - 6t^2$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo s, onde s está em metros e t, em segundos. Encontre a função aceleração instantânea $a(t)$ e mostre o gráfico da aceleração *versus* o tempo.

Solução Pelo Exemplo 2, a velocidade instantânea da partícula é $v(t) = 3t^2 - 12t$; logo, a aceleração instantânea é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

e a curva da aceleração *versus* tempo é a reta na Figura 5.8.4. Note que, nesse exemplo, a aceleração tem unidades de m/s^2, uma vez que v está em metros por segundo (m/s) e o tempo, em segundos (s). ◀

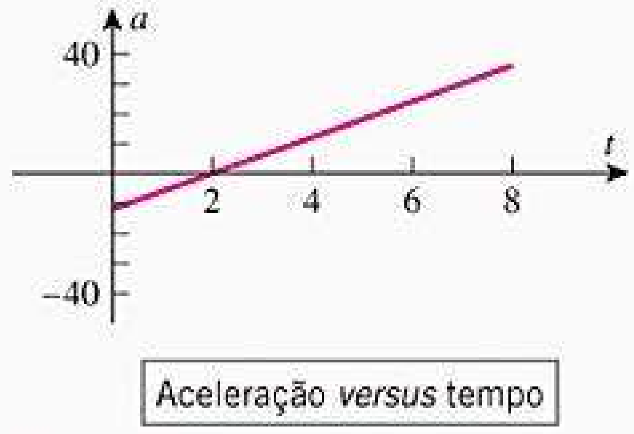


Figura 5.8.4

AUMENTANDO E DIMINUINDO A VELOCIDADE

Dizemos que uma partícula em movimento retilíneo está ***aumentando a velocidade*** se a velocidade escalar é crescente, e está ***diminuindo a velocidade*** se a velocidade escalar é decrescente. Em linguagem corrente, se um objeto está aumentando a velocidade, dizemos que está "acelerando" e, se estiver diminuindo a velocidade, está "desacelerando", o que nos levaria a pensar que uma partícula em movimento retilíneo estará aumentando a velocidade se sua aceleração for positiva e diminuindo a velocidade se sua aceleração for negativa. Embora isso seja verdadeiro para uma partícula em movimento no sentido positivo, *não é válido* para uma partícula em movimento no sentido negativo. Isso é assim porque aceleração positiva implica velocidade crescente, e aumentar uma velocidade negativa decresce seu valor absoluto; analogamente, uma aceleração negativa implica uma velocidade decrescente, e diminuir uma velocidade negativa aumenta seu valor absoluto.

Essa discussão informal pode ser resumida como segue (Exercício 37):

Se $a(t) = 0$ ao longo de um certo intervalo, o que isso implica quanto ao movimento da partícula durante esse intervalo?

INTERPRETAÇÃO DO SINAL DA ACELERAÇÃO *Uma partícula em movimento retilíneo está aumentando sua velocidade quando a velocidade e a aceleração tiverem o mesmo sinal, e diminuindo sua velocidade quando tiverem sinais opostos.*

► Exemplo 4 Nos Exemplos 2 e 3, encontramos as curvas velocidade *versus* tempo e aceleração *versus* tempo para uma partícula com função posição $s(t) = t^3 - 6t^2$. Use essas curvas para determinar quando a partícula está aumentando e diminuindo sua velocidade, e confirme se seus resultados estão consistentes com a curva da velocidade escalar *versus* tempo obtida no Exemplo 2.

Solução No intervalo de tempo $0 < t < 2$, a velocidade e a aceleração são negativas; logo, a partícula está aumentando a velocidade. Isso está de acordo com a curva da velocidade escalar *versus* tempo, pois nesse intervalo a velocidade escalar é crescente. No intervalo $2 < t < 4$, a velocidade é negativa e a aceleração é positiva; assim, a partícula está diminuindo a velocidade. Isso também está de acordo com a curva velocidade escalar *versus* tempo, pois nesse intervalo a velocidade escalar é decrescente. Por fim, no intervalo $t > 4$, a velocidade e a aceleração são positivas, desse modo a partícula está aumentando a velocidade, o que de novo está de acordo com a curva velocidade escalar *versus* tempo. ◄

ANALISANDO A CURVA POSIÇÃO *VERSUS* TEMPO

A curva posição *versus* tempo contém todas as informações significativas sobre a posição e a velocidade de uma partícula em movimento retilíneo.

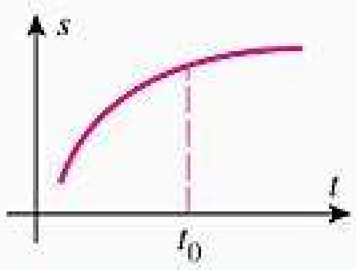
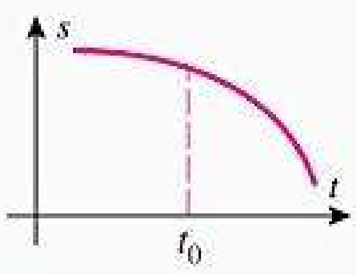
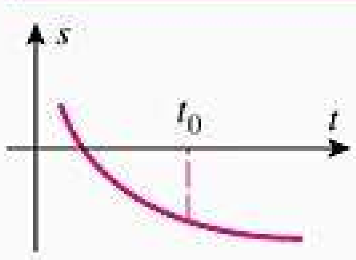
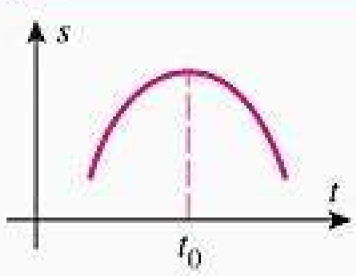
- Se $s(t) > 0$, a partícula está no lado positivo do eixo s.
- Se $s(t) < 0$, a partícula está no lado negativo do eixo s.
- A inclinação da reta tangente em qualquer instante do tempo é a velocidade instantânea naquele instante.
- Quando a curva tiver inclinação positiva, a velocidade é positiva e a partícula se move na direção positiva.
- Quando a curva tiver inclinação negativa, a velocidade é negativa e a partícula se move na direção negativa.
- Quando a curva tiver inclinação nula, a velocidade é zero e a partícula está momentaneamente parada.

Informações sobre a aceleração de uma partícula em movimento retilíneo também podem ser deduzidas da curva posição *versus* tempo, examinando sua concavidade. Por exemplo, sabemos que a curva posição *versus* tempo será côncava para cima nos intervalos onde $s''(t) > 0$ e para baixo onde $s''(t) < 0$. Mas, a partir de (4), sabemos que $s''(t)$ é a

aceleração instantânea; logo, nos intervalos onde a curva posição *versus* tempo for côncava para cima, a partícula terá aceleração positiva, e onde for côncava para baixo, a aceleração será negativa.

A Tabela 5.8.1 resume nossas observações sobre a curva posição *versus* tempo.

Tabela 5.8.1

CURVA POSIÇÃO *VERSUS* TEMPO	CARACTERÍSTICAS DA CURVA EM $t = t_0$	COMPORTAMENTO DA PARTÍCULA NO INSTANTE $t = t_0$
	• $s(t_0) > 0$ • Curva com inclinação positiva • Curva côncava para baixo	• Partícula no lado positivo da origem • Partícula movendo-se no sentido positivo • Velocidade decrescente • Partícula diminuindo a velocidade
	• $s(t_0) > 0$ • Curva com inclinação negativa • Curva côncava para baixo	• Partícula no lado positivo da origem • Partícula movendo-se no sentido negativo • Velocidade decrescente • Partícula aumentando a velocidade
	• $s(t_0) < 0$ • Curva com inclinação negativa • Curva côncava para cima	• Partícula no lado negativo da origem • Partícula movendo-se no sentido negativo • Velocidade crescente • Partícula diminuindo velocidade
	• $s(t_0) > 0$ • Curva com inclinação zero • Curva côncava para baixo	• Partícula no lado positivo da origem • Partícula momentaneamente parada • Velocidade decrescente

► Exemplo 5 Use a curva posição *versus* tempo da Figura 5.8.2 para determinar quando a partícula do Exemplo 1 está aumentando e quando está diminuindo a velocidade.

Solução De $t = 0$ a $t = 2$, a aceleração e a velocidade são positivas; logo, a partícula está aumentando a velocidade. De $t = 2$ a $t = 4$, a aceleração é negativa e a velocidade, positiva; logo, a partícula está diminuindo a velocidade. Em $t = 4$, a velocidade é zero; logo, a partícula parou momentaneamente. De $t = 4$ a $t = 6$, a aceleração é negativa e a velocidade também; logo, a partícula está aumentando a velocidade. De $t = 6$ a $t = 7$, a aceleração é positiva e a velocidade é negativa; logo, a partícula está diminuindo a velocidade. Daí por diante, a velocidade é zero e, assim, a partícula parou. ◄

► Exemplo 6 Suponha que $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$ seja a função posição de uma partícula movendo-se ao longo do eixo s. Analise o movimento da partícula para $t \geq 0$.

Solução As funções velocidade e aceleração são dadas por

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 6(t-2)(t-5)$$
$$a(t) = v'(t) = 12t - 42 = 12\left(t - \tfrac{7}{2}\right)$$

- *Direção do movimento:* A análise de sinais da função velocidade na Figura 5.8.5 mostra que a partícula está se movendo no sentido positivo ao longo do intervalo de tempo $0 \le t < 2$, pára momentaneamente no instante $t = 2$, move-se no sentido negativo ao longo do intervalo de tempo $2 < t < 5$, pára momentaneamente no instante $t = 5$ e, daí em diante, segue no sentido positivo.

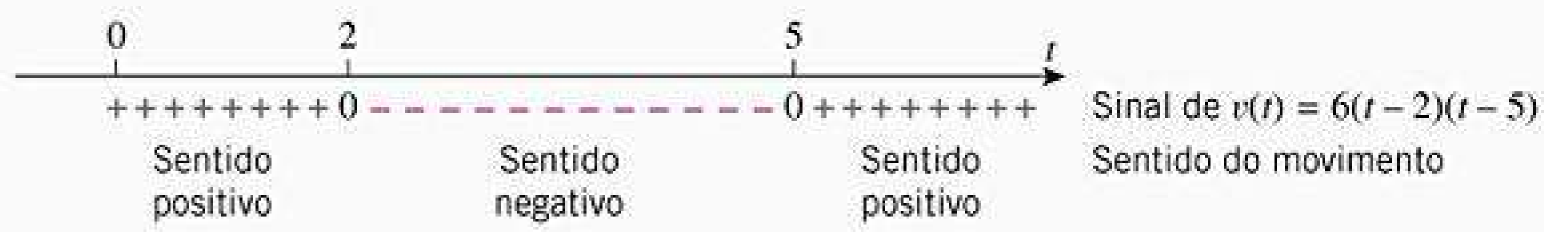


Figura 5.8.5

- *Variação na velocidade escalar*: A Figura 5.8.6 mostra uma comparação dos sinais das funções velocidade e aceleração. Como a partícula está aumentando a velocidade quando os sinais são iguais e diminuindo quando são opostos, vemos que a partícula está diminuindo a velocidade no intervalo de tempo $0 \le t < 2$ e então pára momentaneamente no instante $t = 2$. Em seguida, ela acelera ao longo do intervalo de tempo $2 < t < \frac{7}{2}$. A aceleração instantânea no instante $t = \frac{7}{2}$ é zero, de modo que a partícula não está nem aumentando nem diminuindo a velocidade. Ao longo do intervalo de tempo $\frac{7}{2} < t < 5$, a partícula está diminuindo a velocidade e então pára momentaneamente no instante $t = 5$. Daí em diante, aumenta a velocidade.

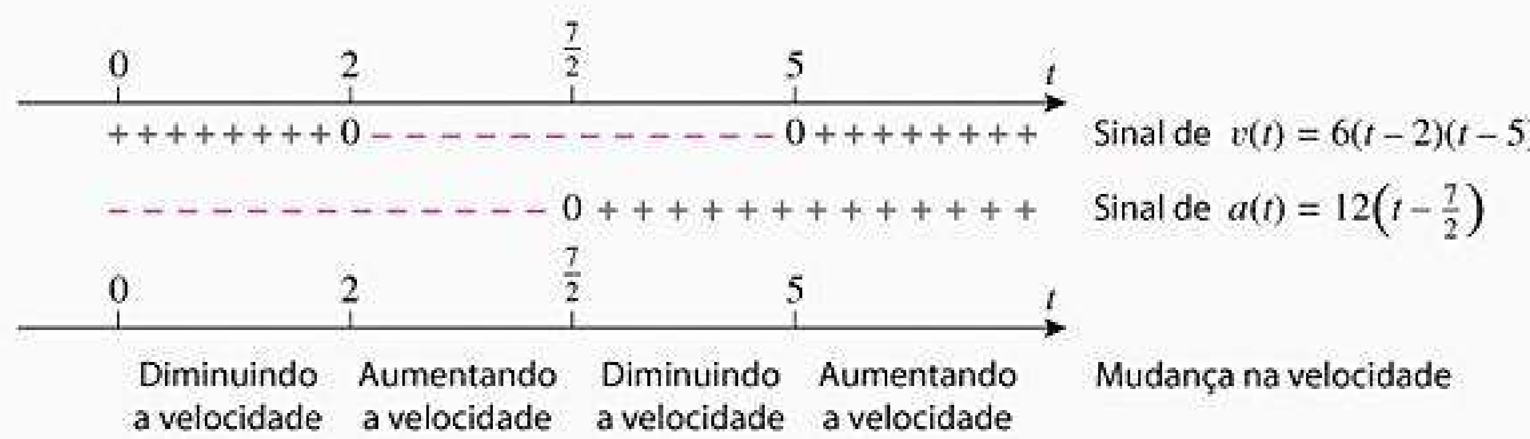


Figura 5.8.6

- *Conclusões*: O diagrama na Figura 5.8.7 resume esquematicamente a informação acima. A linha marcada abaixo da figura é apenas descritiva, com o verdadeiro trajeto ocorrendo no eixo coordenado, para lá e para cá. As coordenadas da partícula nos instantes $t = 0$, $t = 2$, $t = \frac{7}{2}$ e $t = 5$ foram calculadas a partir de $s(t)$. Os segmentos cinzas indicam que a partícula está aumentando a velocidade e os azuis indicam que está diminuindo. ◀

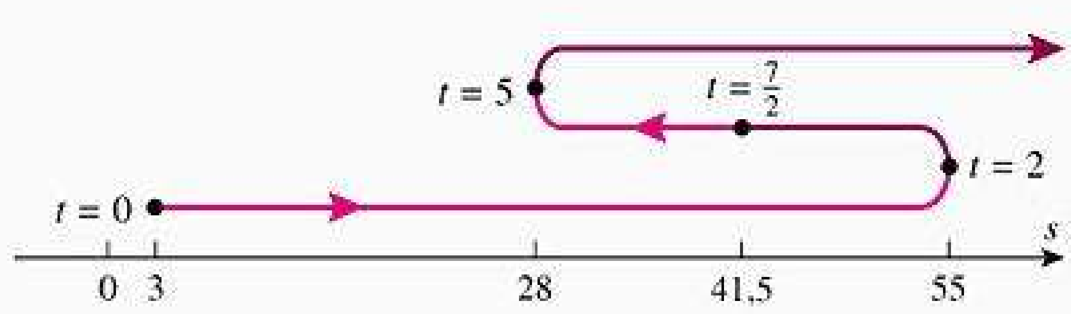


Figura 5.8.7

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.8 (*Ver página 344 para respostas.*)

1. As funções velocidade $v(t)$ e posição $s(t)$ de uma partícula em movimento retilíneo estão relacionadas pela equação_______ e as funções aceleração $a(t)$ e velocidade $v(t)$ estão relacionadas pela equação________.

2. Suponha que uma partícula se mova ao longo do eixo s com função posição $s(t) = 7t - 2t^2$. No instante $t = 3$, a posição da partícula é __________, sua velocidade é __________, sua velocidade escalar é __________ e sua aceleração é __________.

3. Uma partícula em movimento retilíneo está aumentando a velocidade se os sinais de sua velocidade e aceleração são ________, e diminuindo a velocidade se os sinais são ________.

4. Suponha que uma partícula se mova ao longo do eixo s com função posição $s(t) = t^4 - 24t^2$ ao longo do intervalo $t \geq 0$. A partícula desacelera no(s) intervalo(s) de tempo________.

EXERCÍCIOS 5.8 Recurso Gráfico

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Abaixo estão os gráficos de três funções posição. Em cada caso, determine o sinal da velocidade e o da aceleração e, então, se a partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade.

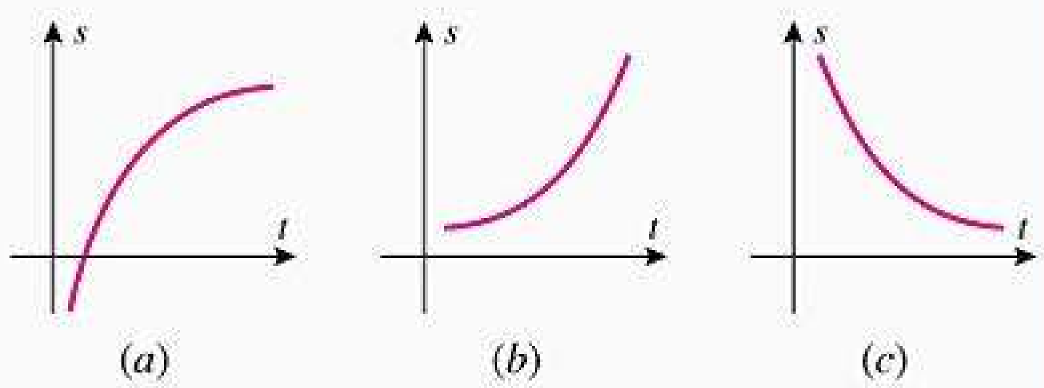


Figura Ex-1

2. Abaixo estão os gráficos de três funções velocidade. Em cada caso, determine o sinal da aceleração e, então, se a partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade.

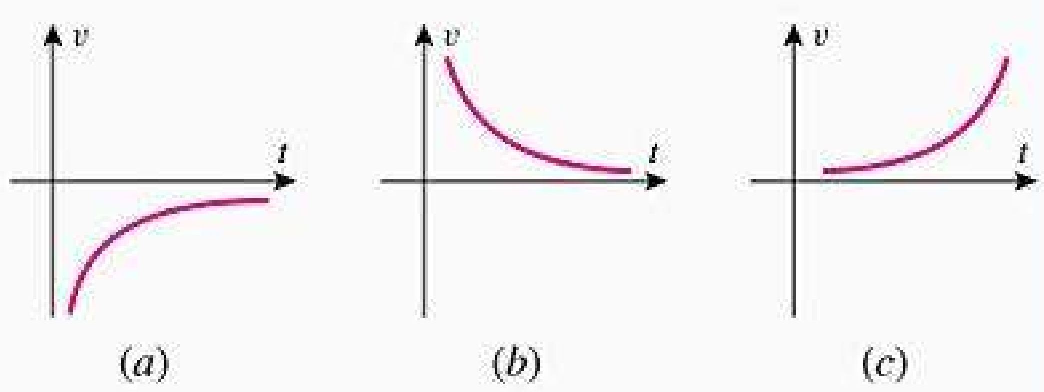


Figura Ex-2

3. Abaixo, está o gráfico de uma função posição de uma partícula movendo-se em um eixo horizontal x.

(a) A partícula está se movendo para a esquerda ou para a direita no instante t_0?

(b) A aceleração é positiva ou negativa no instante t_0?

(c) A partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade no instante t_0?

(d) E no instante t_1, está aumentando ou diminuindo a velocidade?

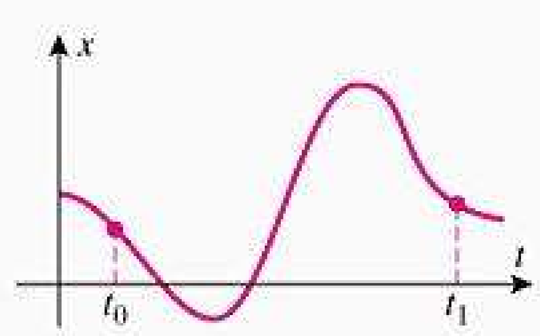


Figura Ex-3

4. Para os gráficos a seguir, associe as funções posição com as funções velocidade correspondentes.

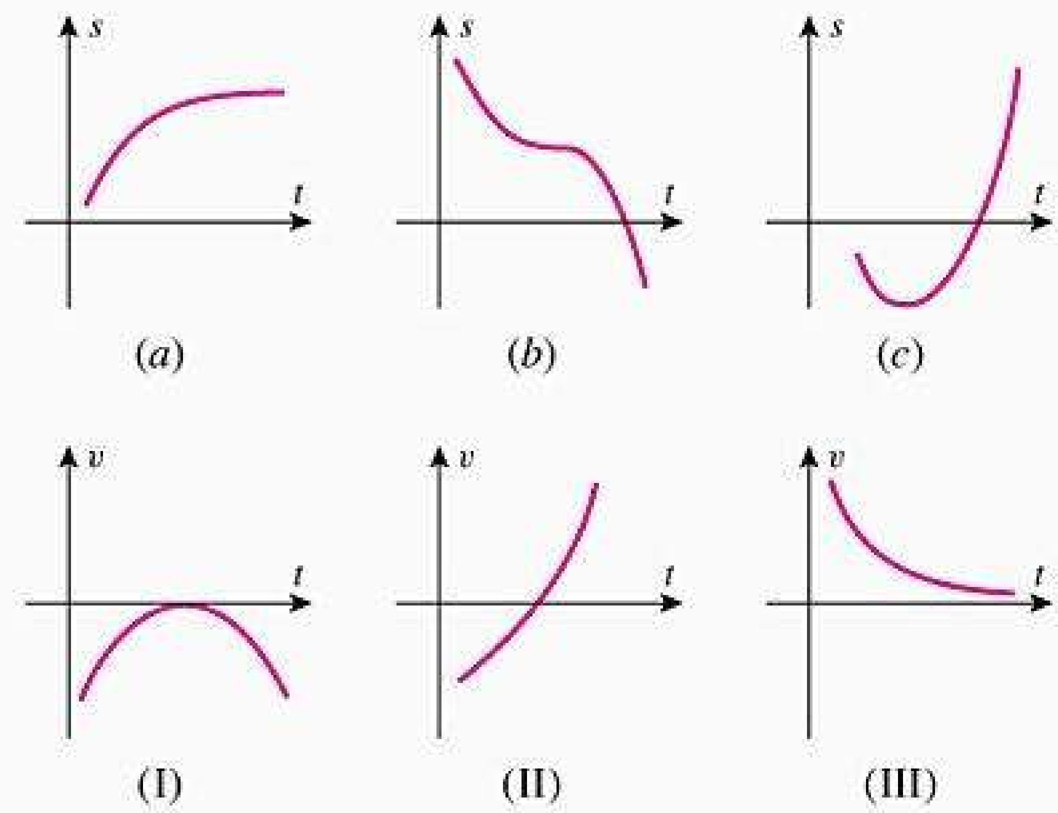


Figura Ex-4

5. Esboce um gráfico razoável de s *versus* t para um camundongo fechado em um corredor estreito (um eixo s com o sentido positivo para a direita) correndo para frente e para trás da seguinte forma: corre para a direita com uma velocidade constante de 1,2 m/s por um tempo, então gradualmente diminui para 0,6 m/s, logo em seguida passa para 2,0 m/s e, então, gradualmente vai diminuindo até parar, mas imediatamente reverte a direção e logo atinge 1,2 m/s.

6. A figura abaixo mostra o gráfico de s *versus* t para uma formiga movendo-se ao longo de um cano estreito vertical (um eixo s com sentido positivo para cima).

(a) Quando, se é que ocorre, a formiga atinge a origem?

(b) Quando, se é que ocorre, a formiga está com a velocidade zero?

(c) Quando, se é que ocorre, a formiga move-se para baixo?

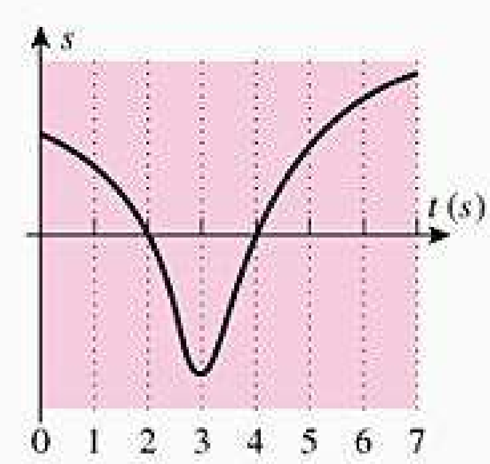


Figura Ex-6

7. A figura a seguir mostra o gráfico velocidade *versus* tempo, para uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado. Faça um esboço dos gráficos velocidade escalar *versus* tempo e aceleração *versus* tempo.

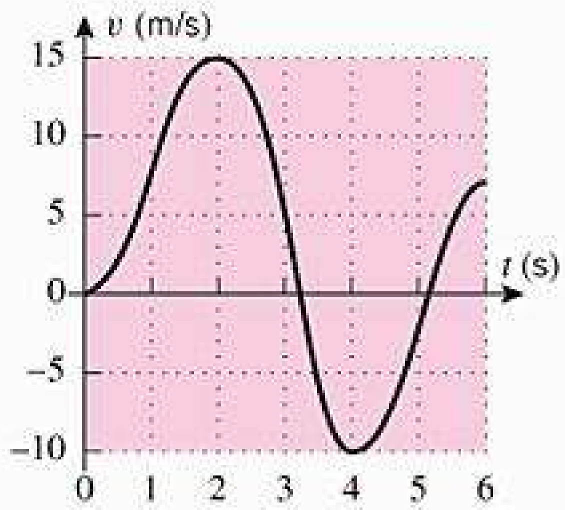


Figura Ex-7

8. A figura abaixo mostra o gráfico posição *versus* tempo para um elevador que sobe 40 m entre uma parada e outra.

(a) Estime a velocidade do elevador no meio da subida.

(b) Faça um esboço dos gráficos das curvas velocidade *versus* tempo e aceleração *versus* tempo.

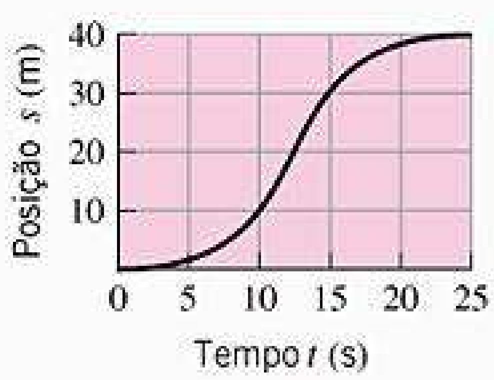


Figura Ex-8

9. A figura abaixo mostra o gráfico velocidade *versus* tempo em um teste classificatório de uma corrida Grand Prix GTP Pontiac. Usando esse gráfico, estime:

(a) A aceleração a 60 milhas por hora (em pés por segundo ao quadrado, lembrando que 1 milhas/h/s = 1,467 pés/s^2).

(b) O instante em que ocorre a aceleração máxima.

Fonte: Dados da *Car and Driver Magazine*, July 2003.

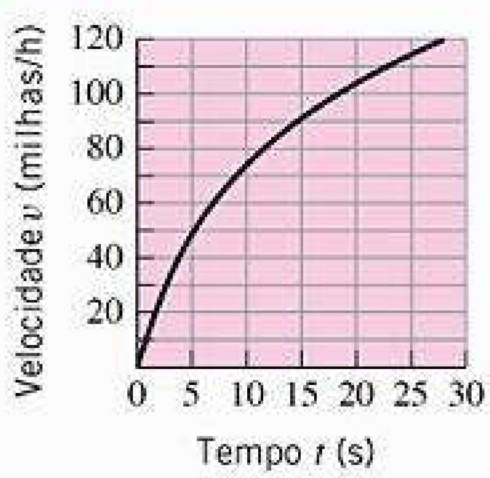


Figura Ex-9

10. A figura abaixo mostra o gráfico velocidade *versus* tempo em um teste classificatório de uma corrida Chevrolet Malibu. Usando esse gráfico, estime:

(a) A aceleração a 60 milhas por hora (em pés por segundo ao quadrado, lembrando que 1 milhas/h/s = 1,467 pés/s^2).

(b) O instante em que ocorre a aceleração máxima.

Fonte: Dados da *Car and Driver Magazine*, November 2003.

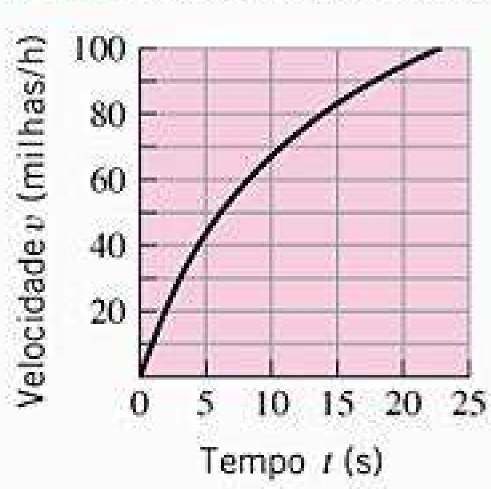


Figura Ex-10

11-12 A função $s(t)$ descreve a posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, onde s está em metros e t em segundos.

(a) Faça uma tabela mostrando a posição, a velocidade e a aceleração com duas casas decimais nos instantes $t = 1, 2, 3, 4$ e 5.

(b) Em cada um dos tempos de (a), verifique se a partícula está parada; se não estiver, determine o sentido do movimento.

(c) Em cada um dos tempos de (a), verifique se a partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade, ou nenhum dos dois.

11. $s(t) = \text{sen}\,\dfrac{\pi t}{4}$ **12.** $s(t) = t^4 e^{-t}, \quad t \geq 0$

13-18 A função $s(t)$ descreve a posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, onde s está em metros e t em segundos.

(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.

(b) Encontre no instante $t = 1$ a posição, a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração.

(c) Em que instantes a partícula está parada?

(d) Quando a partícula está aumentando ou diminuindo a velocidade?

(e) Encontre a distância total percorrida pela partícula entre $t = 0$ e $t = 5$.

13. $s(t) = t^3 - 3t^2, \quad t \geq 0$

14. $s(t) = t^4 - 4t^2 + 4, \quad t \geq 0$

15. $s(t) = 9 - 9\cos(\pi t/3), \quad 0 \leq t \leq 5$

16. $s(t) = \dfrac{t}{t^2 + 4}, \quad t \geq 0$

17. $s(t) = (t^2 + 8)e^{-t/3}, \quad t \geq 0$

18. $s(t) = \frac{1}{4}t^2 - \ln(t + 1), \quad t \geq 0$

19. Seja $s(t) = t/(t^2 + 5)$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, onde s está em metros e t em segundos. Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para $t \geq 0$ e use os gráficos onde for necessário a seguir.

(a) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa do instante em que ocorre a primeira reversão do sentido do movimento da partícula e, então, encontre esse instante.

(b) Encontre a posição exata da primeira reversão do sentido do movimento da partícula.

(c) Use o gráfico apropriado para fazer estimativas dos intervalos onde a partícula está aumentando e diminuindo sua velocidade e depois encontre esses intervalos.

20. Seja $s(t) = t/e^t$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, onde s está em metros e t em segundos. Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para $t \geq 0$ e use os gráficos onde for necessário a seguir.

(a) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa do instante em que há a primeira reversão do sentido do movimento da partícula e, então, encontre esse instante.

(b) Encontre a posição exata da primeira reversão do sentido do movimento da partícula.

(c) Use o gráfico apropriado para fazer estimativas dos intervalos onde a partícula está aumentando e diminuindo sua velocidade e, depois, encontre esses intervalos.

21-28 É dada uma função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado. Use o método do Exemplo 6 para analisar o movimento da partícula em $t \geq 0$ e faça um esboço esquemático do movimento (como o da Figura 5.8.7).

21. $s = -4t + 3$

22. $s = 5t^2 - 20t$

23. $s = t^3 - 9t^2 + 24t$

24. $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$

25. $s = 16te^{-(t^2/8)}$

26. $s = t + \dfrac{25}{t+2}$

27. $s = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 1, & t \geq 2\pi \end{cases}$

28. $s = \begin{cases} 2t(t-2)^2, & 0 \leq t < 3 \\ 13 - 7(t-4)^2, & t \geq 3 \end{cases}$

29. Seja $s(t) = 5t^2 - 22t$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado, sendo s em metros e t em segundos.

(a) Encontre a velocidade escalar máxima da partícula no intervalo $1 \leq t \leq 3$.

(b) No intervalo de (a), quando a partícula está mais longe da origem? Qual é sua posição nesse instante?

30. Seja $s = 100/(t^2 + 12)$ a função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta coordenada, onde s está em metros e t em segundos. Encontre a velocidade escalar máxima da partícula para $t \geq 0$ e o sentido do movimento dela quando está com velocidade escalar máxima.

31-32 É dada uma função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta coordenada. (a) Estime s e v quando $a = 0$. (b) Estime s e a quando $v = 0$.

31. $s = \ln(3t^2 - 12t + 13)$

32. $s = t^3 - 6t^2 + 1$

33. Seja $s = \sqrt{2t^2 + 1}$ a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado.

(a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de v *versus* t e faça uma conjectura sobre a velocidade da partícula quando $t \to +\infty$.

(b) Verifique sua conjectura obtendo $\lim_{t \to +\infty} v(t)$.

34. (a) Use a regra da cadeia para mostrar que, para uma partícula em movimento retilíneo, $a = v(dv/ds)$.

(b) Seja $s = \sqrt{3t+7}$, $t \geq 0$. Encontre uma fórmula para v em termos de s e use a equação de (a) para determinar a aceleração quando $s = 5$.

35. Suponha que as funções posição de duas partículas P_1 e P_2, movendo-se ao longo de uma mesma reta, sejam

$$s_1 = \tfrac{1}{2}t^2 - t + 3 \quad \text{e} \quad s_2 = -\tfrac{1}{4}t^2 + t + 1$$

respectivamente, para $t \geq 0$.

(a) Prove que P_1 e P_2 não colidem.

(b) Qual é a menor distância entre P_1 e P_2?

(c) Durante quais intervalos de tempo elas se movem em sentidos opostos?

36. Sejam $s_A = 15t^2 + 10t + 20$ e $s_B = 5t^2 + 40t$, $t \geq 0$, as funções posição dos carros A e B movendo-se ao longo de faixas paralelas retas de uma estrada.

(a) Quão adiantado está o carro A em relação ao carro B quando $t = 0$?

(b) Em que instantes os dois carros estão alinhados?

(c) Em que instantes os carros têm a mesma velocidade e qual é o carro que está na frente nesse momento?

37. Prove que uma partícula aumenta sua velocidade se a velocidade e a aceleração tiverem o mesmo sinal e diminui no caso de sinais contrários. [*Sugestão*: Seja $r(t) = |v(t)|$, e encontre $r'(t)$ usando a regra da cadeia.]

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 5.8

1. $v(t) = s'(t)$; $a(t) = v'(t)$ **2.** 3; −5; 5; −4 **3.** iguais; opostos **4.** $2 < t < 2\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

Recurso Gráfico   C CAS

1. (a) Se $x_1 < x_2$, que relação deve existir entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para f ser crescente em um intervalo contendo x_1 e x_2? E decrescente? E constante?

(b) Qual condição sobre f' garante que f seja crescente em um intervalo $[a, b]$? E decrescente? E constante?

2. (a) Qual condição sobre f' garante que, em um intervalo aberto, f seja: côncava para cima, côncava para baixo?

(b) Qual condição sobre f'' garante que, em um intervalo aberto, f seja: côncava para cima, côncava para baixo?

(c) Descreva o que é um ponto de inflexão de f.

3-10 Encontre: (a) os intervalos onde f é crescente, (b) os intervalos onde f é decrescente, (c) os intervalos abertos onde f é côncava para cima, (d) os intervalos abertos onde f é côncava para baixo e (e) as coordenadas x de todos os pontos de inflexão.

3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **4.** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

5. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2}$ **6.** $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

7. $f(x) = x^{1/3}(x+4)$ **8.** $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$

9. $f(x) = 1/e^{x^2}$ **10.** $f(x) = \text{arc tg } x^2$

11-14 Analise a função trigonométrica f no intervalo especificado, enunciando onde f é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo e dando as coordenadas x de todos os pontos de inflexão. Confirme se seus resultados são consistentes com o gráfico de f gerado por um recurso gráfico.

11. $f(x) = \cos x$; $[0, 2\pi]$

12. $f(x) = \text{tg } x$; $(-\pi/2, \pi/2)$

13. $f(x) = \text{sen } x \cos x$; $[0, \pi]$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \text{ sen } x$; $[0, 2\pi]$

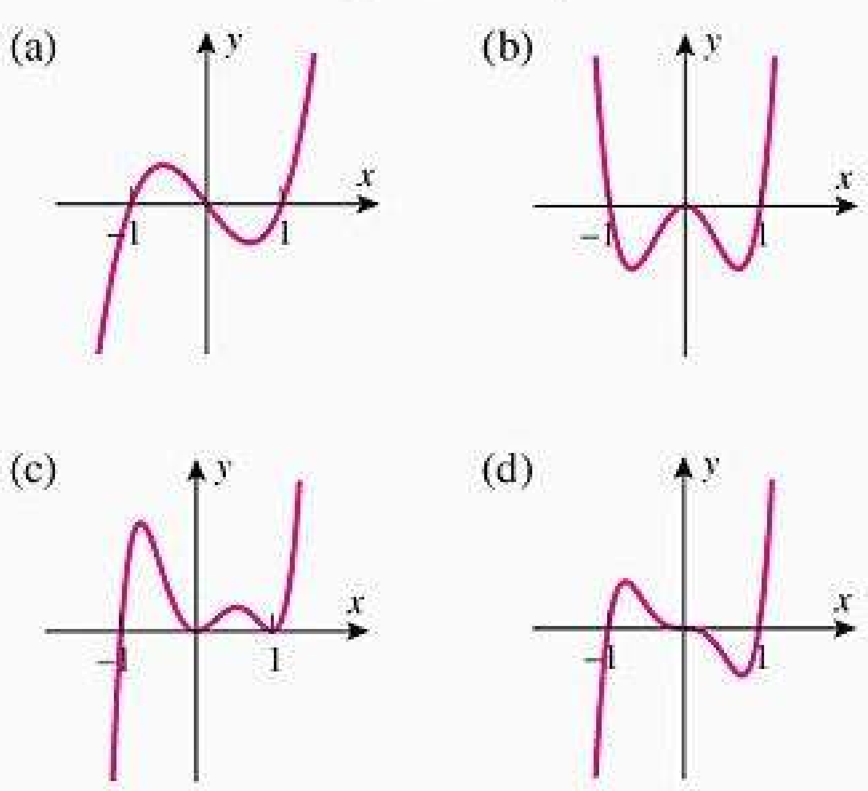
15. Em cada parte, esboce uma curva contínua $y = f(x)$ com as propriedades indicadas:

(a) $f(2) = 4$, $f'(2) = 1$, $f''(x) < 0$ para $x < 2$, $f''(x) > 0$ para $x > 2$

(b) $f(2) = 4$, $f''(x) > 0$ para $x < 2$, $f''(x) < 0$ para $x > 2$, $\lim_{x \to 2^-} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 2^+} f'(x) = +\infty$

(c) $f(2) = 4$, $f''(x) < 0$ para $x \neq 2$, $\lim_{x \to 2^-} f'(x) = 1$, $\lim_{x \to 2^+} f'(x) = -1$

16. Em (a) a (d), é dado o gráfico completo de um polinômio com grau no máximo 6. Encontre equações para polinômios que produzam gráficos com esses aspectos e verifique suas respostas com um recurso gráfico computacional.



17. Encontre condições em a, b e c que garantam que o polinômio quadrático geral

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

seja sempre crescente ou sempre decrescente em $[0, +\infty)$.

18. Encontre condições em a, b, c e d que garantam que o polinômio cúbico geral

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

seja sempre crescente ou sempre decrescente em $(-\infty, +\infty)$.

19. Use um recurso gráfico para estimar o valor de x no qual

$$f(x) = \frac{2^x}{1 + 2^{x+1}}$$

está crescendo mais rapidamente.

20. Prove que, para quaisquer constantes a e k, o gráfico de

$$y = \frac{a^x}{1 + a^{x+k}}$$

tem um ponto de inflexão em $x = -k$.

21. (a) Onde no gráfico de $y = f(x)$ devemos esperar que y esteja crescendo ou decrescendo mais rapidamente em relação a x?

(b) Em palavras, o que é um extremo relativo?

(c) Enuncie um procedimento para determinar onde podem ocorrer os extremos relativos de f.

22. Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for falsa, dê um exemplo para o qual ela falha.

(a) Se f tem um máximo relativo em x_0, então $f(x)$ é o maior valor que $f(x)$ pode ter.

(b) Se o maior valor para f no intervalo (a, b) ocorre em x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.

(c) Uma função tem um extremo relativo em cada um de seus pontos críticos.

23. (a) De acordo com o teste da derivada primeira, quais condições garantem que f tem um máximo relativo em x_0? E um mínimo relativo?

(b) De acordo com o teste da derivada segunda, quais condições garantem que f tem um máximo relativo em x_0? E um mínimo relativo?

24-26 Localize os pontos críticos e identifique quais deles correspondem a pontos estacionários.

24. (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

(b) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 3$

25. (a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$

26. (a) $f(x) = x^{1/3}(x-4)$ (b) $f(x) = x^{4/3} - 6x^{1/3}$

27. Em cada parte, encontre todos os pontos críticos e use o teste da derivada primeira para classificá-los em máximos ou mínimos relativos, ou nenhum dos dois.

(a) $f(x) = x^{1/3}(x-7)^2$

(b) $f(x) = 2 \text{ sen } x - \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

(c) $f(x) = 3x - (x-1)^{3/2}$

28. Em cada parte, encontre todos os pontos críticos e use o teste da derivada segunda (quando possível) para classificá-los em máximos ou mínimos relativos, ou em nenhum dos dois.

(a) $f(x) = x^{-1/2} + \frac{1}{9}x^{1/2}$

(b) $f(x) = x^2 + 8/x$

(c) $f(x) = \text{sen}^2\, x - \cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

29-36 Faça um gráfico completo de f, indique os limites quando $x \to \pm\infty$ e localize todos os extremos relativos, os pontos de inflexão e as assíntotas (quando apropriado).

29. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

30. $f(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3$

31. $f(x) = \text{tg}(x^2 + 1)$

32. $f(x) = x - \cos x$

33. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x + 5}$

34. $f(x) = \dfrac{25 - 9x^2}{x^3}$

35. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

36. $f(x) = (1 + x)^{2/3}(3 - x)^{1/3}$

37-44 Use qualquer método para encontrar os extremos relativos da função f dada.

37. $f(x) = x^3 + 5x - 2$

38. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$

39. $f(x) = x^{4/5}$

40. $f(x) = 2x + x^{2/3}$

41. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

42. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

43. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

44. $f(x) = x^2 e^x$

45-46 Usando um recurso gráfico computacional, aspectos importantes de um gráfico podem se perder se a janela escolhida não for apropriada. Isso está ilustrado nos Exercícios 45 e 46.

45. (a) Gere o gráfico de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{400}x$ no intervalo $[-5, 5]$ e faça uma conjectura sobre a natureza e a localização de todos os pontos críticos.

(b) Encontre a localização exata de todos os pontos críticos e classifique-os como máximos ou mínimos relativos, ou nenhum dos dois.

(c) Confirme os resultados de (b) fazendo o gráfico de f em um intervalo apropriado.

46. (a) Gere o gráfico de

$$f(x) = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{7}{8}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{7}{2}x^2 - 6x$$

no intervalo $[-5, 5]$ e faça uma conjectura sobre a localização e a natureza de todos os pontos críticos.

(b) Encontre a localização exata de todos os pontos críticos e classifique-os como máximos ou mínimos relativos, ou nenhum dos dois.

(c) Confirme os resultados de (b) fazendo gráficos de partes de f em intervalos apropriados. [*Nota*: Não é possível encontrar uma única janela na qual sejam diferenciados todos os pontos críticos.]

47. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de $y = x$ e $y = (x^3 - 8)/(x^2 + 1)$ juntos no intervalo $[-5, 5]$ e faça uma conjectura sobre a relação entre eles.

(b) Confirme sua conjectura em (a).

48. Use diferenciação implícita para mostrar que a função definida implicitamente por $\text{sen}\, x + \cos y = 2y$ tem pontos críticos, sempre que $\cos x = 0$. Use, então, o teste da derivada primeira ou segunda para classificá-los como máximos ou mínimos relativos.

49. Seja

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 15x + 7}{(2x - 1)(3x^2 + x - 1)}$$

Faça o gráfico de $y = f(x)$ e encontre as equações de todas as assíntotas horizontais e verticais. Explique por que não há assíntota vertical em $x = \frac{1}{2}$, mesmo que o denominador de f tenha um zero nesse ponto.

C 50. Seja

$$f(x) = \frac{x^5 - x^4 - 3x^3 + 2x + 4}{x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 6x^4 + 4x - 8}$$

(a) Use um CAS para fatorar o numerador e o denominador de f e use os resultados para determinar a localização de todas as assíntotas verticais.

(b) Confirme que sua resposta está de acordo com o gráfico de f.

51. (a) Que desigualdade $f(x)$ precisa satisfazer para que f tenha um máximo absoluto em um intervalo I em um ponto x_0?

(b) Que desigualdade $f(x)$ precisa satisfazer para que f tenha um mínimo absoluto em um intervalo I em um ponto x_0?

(c) Qual é a diferença entre um extremo absoluto e um relativo?

52. De acordo com o Teorema do Valor Extremo, quais condições sobre uma função f e um intervalo I garantem que f irá ter um máximo e um mínimo absolutos em I?

53. Em cada parte, determine se a afirmativa é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Se f for diferenciável no intervalo aberto (a, b) e tiver aí um extremo absoluto, então este deve ocorrer em um ponto estacionário de f.

(b) Se f for contínua no intervalo aberto (a, b) e tiver aí um extremo absoluto, então este deve ocorrer em um ponto estacionário de f.

54-56 Em cada parte, encontre o mínimo absoluto m e o máximo absoluto M de f no intervalo dado (se existirem) e indique onde ocorrem os extremos absolutos.

54. (a) $f(x) = 1/x;\ [-2, -1]$

(b) $f(x) = x^3 - x^4;\ \left[-1, \frac{3}{2}\right]$

(c) $f(x) = x - \text{tg}\, x;\ [-\pi/4, \pi/4]$

(d) $f(x) = -|x^2 - 2x|;\ [1, 3]$

55. (a) $f(x) = x^2 - 3x - 1;\ (-\infty, +\infty)$

(b) $f(x) = x^3 - 3x - 2;\ (-\infty, +\infty)$

(c) $f(x) = e^x/x^2;\ (0, +\infty)$

(d) $f(x) = x^x;\ (0, +\infty)$

56. (a) $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7$; $(-1, 3)$

(b) $f(x) = (3 - x)/(2 - x)$; $(0, 2)$

(c) $f(x) = 2x/(x^2 + 3)$; $(0, 2]$

(d) $f(x) = x^2 (x - 2)^{1/3}$; $(0,3]$

57. Em cada parte, use um recurso gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos de f, se houver, no intervalo dado, e então use os métodos do Cálculo para encontrar os valores exatos.

(a) $f(x) = (x^2 - 1)^2$; $(-\infty, +\infty)$

(b) $f(x) = x/(x^2 + 1)$; $[0, +\infty)$

(c) $f(x) = 2 \sec x - \operatorname{tg} x$; $[0, \pi/4]$

(d) $f(x) = x/2 + \ln(x^2 + 1)$; $[-4, 0]$

58. Prove que $x \leq$ arc sen para cada x em $[0, 1]$.

59. Seja

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^4 + 1}$$

(a) Gere o gráfico de $y = f(x)$ e use-o para fazer estimativas das coordenadas dos extremos absolutos.

(b) Use um CAS para resolver a equação $f'(x) = 0$ e, então, para fazer aproximações mais precisas das coordenadas de (a).

60. A janela de uma igreja consiste em uma secção semicircular no topo de um retângulo, conforme mostra a Figura Ex-60. O vidro azul deixa passar metade da luz por unidade de área. Encontre o raio r da janela que admite maior luz se o perímetro de toda a janela for de P metros.

61. Encontre as dimensões do retângulo com área máxima que pode ser inscrito na elipse $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$ (Figura Ex-61).



Figura Ex-60

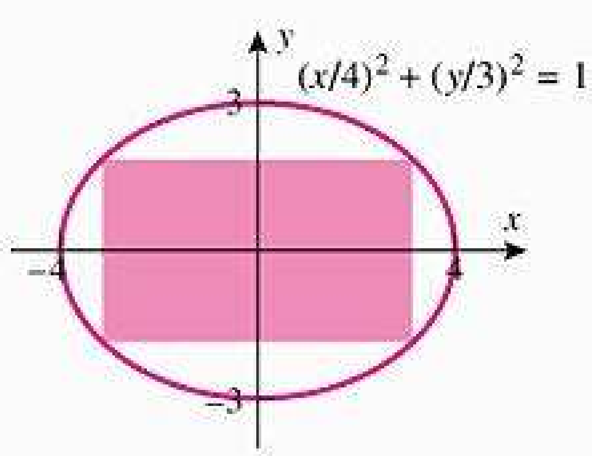


Figura Ex-61

62. Conforme mostra a figura a seguir, suponha que um barco entre em um rio no ponto $(1, 0)$ e mantenha sua direção voltada para a origem. Como resultado da forte corrente, ele segue a trajetória

$$y = \frac{x^{10/3} - 1}{2x^{2/3}}$$

onde x e y estão em quilômetros.

(a) Faça o gráfico da trajetória seguida pelo barco.

(b) O barco pode atingir a origem? Se não, discuta seu destino e descubra quão próximo estará dela.

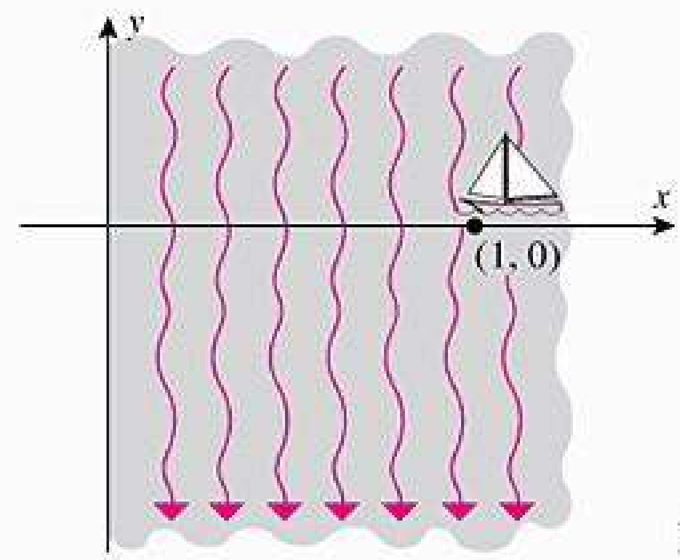


Figura Ex-62

63. Uma folha de papelão quadrada com 120 cm de lado é usada para fazer uma caixa sem tampa cortando quadrados de tamanho igual dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Qual o tamanho dos quadrados que devem ser cortados fora para se obter uma caixa de maior volume possível?

64. Faça uma figura apropriada e descreva a idéia básica do Método de Newton, sem usar fórmulas.

65. Use o Método de Newton para aproximar todas as três soluções de $x^3 - 4x + 1 = 0$.

66. Use o Método de Newton para aproximar a menor solução positiva de $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$.

67. Use um recurso gráfico para determinar o número de vezes que a curva $y = x^3$ intersecta a curva $y = (x/2) - 1$. Então aplique o Método de Newton para aproximar as coordenadas x de todas as intersecções.

68. De acordo com a ***Lei de Kepler***, os planetas no nosso sistema solar movem-se em órbitas elípticas em torno do Sol. Se a posição do planeta mais próximo do Sol ocorrer no instante $t = 0$, então a distância r do centro do planeta até o centro do sol em um instante t posterior pode ser determinada pela equação

$$r = a(1 - e \cos \phi)$$

onde a é a distância média entre os centros, e é uma constante positiva que mede o achatamento da órbita elíptica e ϕ é a solução da *equação de Kepler*

$$\frac{2\pi t}{T} = \phi - e \operatorname{sen} \phi$$

na qual T é o tempo levado para uma órbita completa do planeta. Estime a distância da Terra ao Sol quando $t = 90$ dias. [Primeiro, ache ϕ da equação de Kepler e, então, use esse valor para encontrar a distância. Use $a = 150 \times 10^6$ km, $e = 0{,}0167$ e $T = 365$ dias.]

69. Usando as fórmulas do Exercício 68, encontre a distância de Marte ao Sol quando $t = 1$ ano. Para Marte, use $a = 228 \times 10^6$ km, $e = 0{,}0934$ e $T = 1{,}88$ ano.

70. Suponha que f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b); além disso, suponha que $f(a) = f(b)$. É falso ou verdadeiro que f deve ter pelo menos um ponto estacionário em (a, b)? Justifique sua resposta.

71. Em cada parte, determine se todas as hipóteses do Teorema de Rolle estão verificadas no intervalo indicado. Caso não estiverem, indique qual é a hipótese que está falhando; se estiverem, encontre todos os valores de c garantidos na conclusão do teorema.

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2, 2]$

(b) $f(x) = x^{2/3} - 1$ em $[-1, 1]$

(c) $f(x) = \text{sen}(x^2)$ em $[0, \sqrt{\pi}]$

72. Em cada parte, determine se todas as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas no intervalo dado. Se não, indique quais hipóteses estão falhando; se sim, encontre todos os valores de c garantidos na conclusão do teorema.

(a) $f(x) = |x - 1|$ em $[-2, 2]$

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ em $[2, 3]$

(c) $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2/x & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $[0, 2]$

73. Use o fato de que

$$\frac{d}{dx}(x^6 - 2x^2 + x) = 6x^5 - 4x + 1$$

para mostrar que a equação $6x^5 - 4x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 1)$.

74. Seja $g(x) = x^3 - 4x + 6$. Encontre $f(x)$, tal que $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

75. (a) Um objeto em movimento retilíneo pode reverter sua situação se a aceleração for constante? Justifique sua resposta usando uma curva velocidade *versus* tempo.

(b) Um objeto em movimento retilíneo pode ter velocidade escalar crescente e aceleração decrescente? Justifique sua resposta usando uma curva velocidade *versus* tempo.

76. Suponha que a função de posição de uma partícula em movimento retilíneo seja dada pela fórmula $s(t) = t/(2t^2 + 8)$ para $t \geq 0$.

(a) Use um recurso gráfico computacional para gerar as curvas posição, velocidade e aceleração *versus* tempo.

(b) Use um gráfico apropriado para fazer uma estimativa do instante em que a partícula reverte sua direção e então encontre esse tempo.

(c) Encontre a posição, a velocidade e a aceleração no instante em que a partícula reverte sua direção.

(d) Use um gráfico apropriado para fazer uma estimativa dos intervalos de tempo nos quais a partícula está aumentando e dos intervalos de tempo nos quais está diminuindo sua velocidade e os encontre com exatidão.

(e) Quando a partícula tem suas velocidades máxima e mínima?

77. Suponha que a função posição de uma partícula em movimento retilíneo seja dada pela fórmula

$$s(t) = \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}, \quad t \geq 0$$

(a) Use um CAS para encontrar fórmulas simplificadas para a velocidade $v(t)$ e para a aceleração $a(t)$.

(b) Faça os gráficos das curvas posição, velocidade e aceleração *versus* tempo.

(c) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa do instante em que a partícula está mais longe da origem e sua distância até a origem nesse instante.

(d) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa do intervalo de tempo durante o qual a partícula se move na direção positiva.

(e) Use o gráfico apropriado para fazer estimativas dos intervalos de tempo durante os quais a partícula está aumentando sua velocidade e dos intervalos de tempo durante os quais está diminuindo.

(f) Use o gráfico apropriado para fazer uma estimativa da velocidade máxima da partícula e do instante em que ela ocorre.

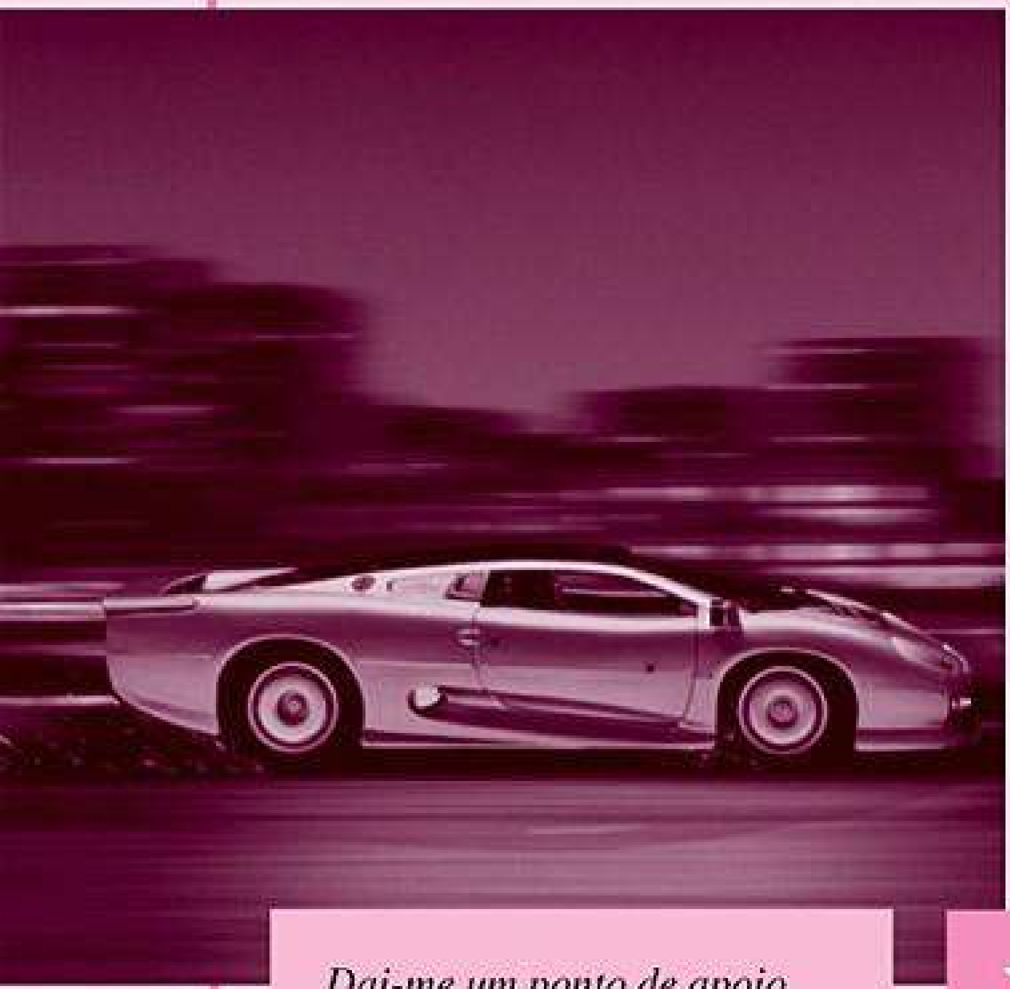
78. É falso ou verdadeiro que uma partícula em movimento retilíneo está aumentando sua velocidade quando sua velocidade estiver aumentando, e diminuindo a velocidade quando a velocidade estiver diminuindo? Justifique sua resposta.

EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Kabum, o Homem-Bala, será disparado de um canhão e espera cair em uma pequena rede no extremo oposto da arena do circo. Seu trabalho como empresário de Kabum é fazer os cálculos matemáticos que lhe permitirão desempenhar seu desafio mortal com segurança. Os métodos que você irá usar pertencem ao campo da balística. Para aprender mais sobre balística, e aplicar o que foi aprendido neste capítulo, visite

www.bookman.com.br

c a p í t u l o s e i s



INTEGRAÇÃO

Dai-me um ponto de apoio que eu moverei o mundo.

—Arquimedes
Cientista grego da Antigüidade e Matemático

Neste capítulo começaremos com uma visão geral do problema de encontrar áreas: discutiremos o significado do termo "área" e delinearemos duas abordagens para definir e calcular áreas. Em seguida, analisaremos o Teorema Fundamental do Cálculo, que é o teorema que relaciona os problemas de encontrar retas tangentes e áreas, e discutiremos técnicas de calcular áreas. Por fim, utilizaremos as idéias desenvolvidas neste capítulo para continuar nosso estudo de movimento retilíneo, examinar algumas conseqüências da regra da cadeia no Cálculo Integral e reanalisar o conceito da função logaritmo natural.

Foto: ***Se for conhecida a velocidade de um carro de corrida durante um certo intervalo de tempo, então é possível encontrar a distância percorrida nesse intervalo de tempo usando as técnicas que serão estudadas neste capítulo.***

6.1 UMA VISÃO GERAL DO PROBLEMA DE ÁREA

Nesta seção introdutória consideraremos o problema de calcular áreas de regiões planas com contornos curvilíneos. Todos os resultados desta seção serão reexaminados com mais detalhes em seções posteriores deste capítulo; portanto, nosso objetivo aqui é tão-somente introduzir os conceitos fundamentais.

O PROBLEMA DA ÁREA

Muitas civilizações primitivas conheciam as fórmulas para a área de polígonos como quadrados, retângulos, triângulos e trapézios. Contudo, os matemáticos primitivos se deparavam com muitas dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos, das quais o círculo é o exemplo mais simples.

O primeiro progresso real no trato com o problema geral da área foi obtido pelo matemático grego Arquimedes, que obteve áreas de regiões delimitadas por arcos de círculos, parábolas, espirais e vários outros tipos de curvas, usando um procedimento genial mais tarde denominado *método de exaustão*. Esse método, quando aplicado ao círculo, consiste na inscrição de uma sucessão de polígonos regulares no círculo, permitindo que o número de lados dos polígonos cresça indefinidamente (Figura 6.1.1). À medida que cresce o número de lados, os polígonos tendem a "exaurir" a região do círculo e suas áreas se aproximam cada vez mais da área exata do círculo.

Para ver como isso funciona numericamente, denote por $A(n)$ a área de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio 1. A Tabela 6.1.1 mostra os valores de $A(n)$ para várias escolhas de n. Observe que, para valores grandes de n, como é de esperar, a área

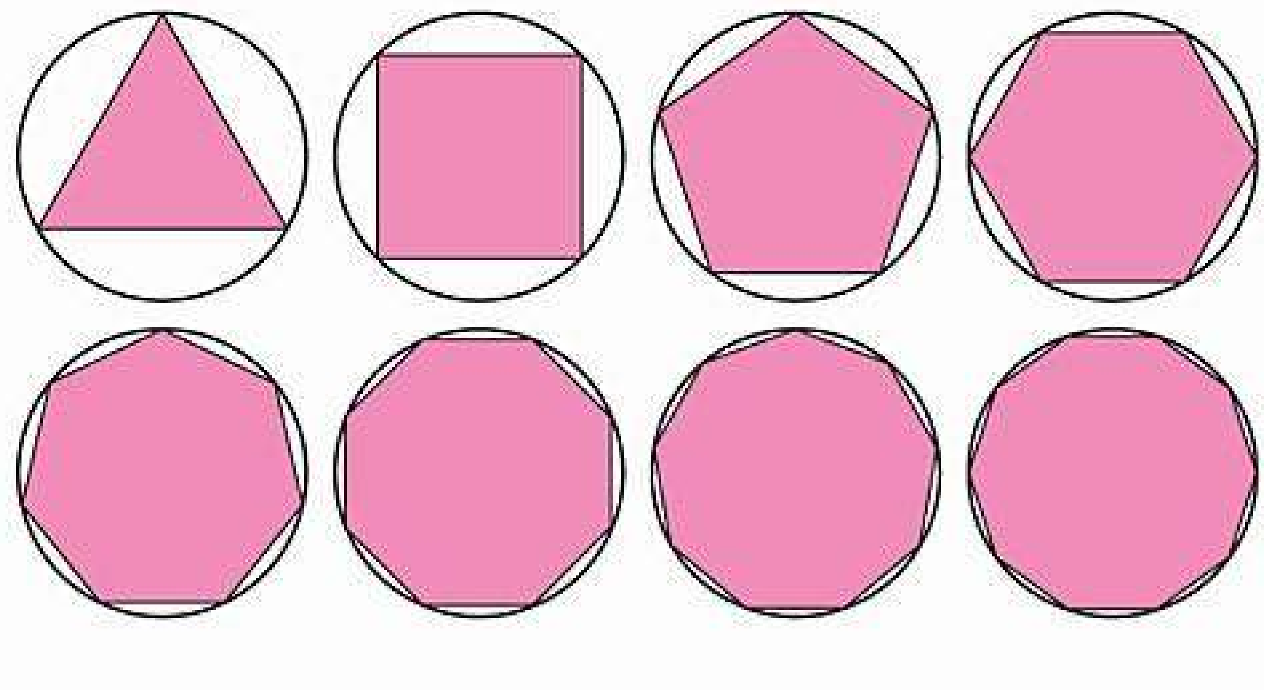


Figura 6.1.1



ARQUIMEDES (287 a.C.-212 a.C.) Matemático e cientista grego. Nascido em Siracusa, na Sicília, era filho do astrônomo Fídeas e possivelmente aparentado de Heiron II, rei de Siracusa. A maioria dos fatos sobre sua vida vem do biógrafo romano Plutarco, que inseriu algumas páginas provocadoras sobre ele na vasta biografia do soldado romano Marcelo. Nas palavras de um escritor, "o relato sobre Arquimedes é marcante como uma finíssima fatia de presunto em um enorme sanduíche".

Arquimedes é considerado, juntamente com Newton e Gauss, como um dos três grandes matemáticos da História e, certamente, o maior da antigüidade. Seu trabalho é tão moderno em espírito e técnica que é difícil distingui-lo dos trabalhos dos matemáticos do século XVII, mesmo que feito sem os benefícios da Álgebra ou de um sistema numérico conveniente. Entre suas realizações matemáticas, desenvolveu um método geral (exaustão) para calcular áreas e volumes, tendo utilizado-o para encontrar áreas limitadas por parábolas e espirais e volumes de cilindros, parabolóides e segmentos de esferas. Elaborou um procedimento para aproximar π limitando seu valor entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$. Apesar das limitações do sistema numérico grego, criou métodos para encontrar raízes quadradas e um método baseado no miríade grego (10.000) para representar números tão grandes como 1 seguido por 80 bilhões de milhões de zeros.

Dentre todos os seus trabalhos, o que mais orgulhava Arquimedes era o método para encontrar o volume de uma esfera – ele mostrou que o volume de uma esfera é 2/3 do volume do menor cilindro que a contém. Satisfazendo a um pedido seu, a figura de uma esfera e de um cilindro foi gravada na lápide de seu túmulo.

Além de Matemática, Arquimedes trabalhou extensivamente em Mecânica e Hidrostática. Quase todo estudante colegial conhece Arquimedes como um cientista distraído que, descobrindo que um objeto, ao boiar, desloca seu peso do líquido, pulou da banheira e saiu correndo nu pelas ruas de Siracusa gritando: "Eureka, eureka!" ("eu descobri!"). Arquimedes, na realidade, criou a disciplina de Hidrostática e usou-a para encontrar posições de equilíbrio para vários corpos flutuantes. Ele lançou os postulados fundamentais da Mecânica, descobriu as leis das alavancas e calculou centros de gravidade de várias superfícies planas e sólidos. Na agitação da descoberta das leis matemáticas da alavanca, atribuiu-se a ele a frase: "Dai-me um ponto de apoio que eu moverei o mundo".

Embora Arquimedes estivesse mais interessado na Matemática pura do que em suas aplicações, ele era um gênio em Engenharia. Durante a segunda guerra Púnica, quando Siracusa foi atacada pela frota romana sob o comando de Marcelo, foi registrado por Plutarco que as invenções militares de Arquimedes mantiveram a frota afastada por três anos. Ele inventou supercatapultas que faziam chover pedras pesando um quarto de tonelada ou mais sobre os romanos e aterrorizantes engenhos mecânicos de ferro com "bicos e garras", os quais, por cima das paredes da cidade, agarravam os navios e os jogavam contra as pedras. Após o primeiro revés, Marcelo chamou Arquimedes de um "Briareus geométrico (monstro mitológico com cem braços) que usava nossos navios como xícaras para tirar água do oceano".

Finalmente, o exército romano foi vitorioso e, contrariando ordens específicas de Marcelo, Arquimedes, então com 75 anos, foi morto por um soldado romano. De acordo com um registro do incidente, o soldado fez sombra sobre a areia onde Arquimedes trabalhava em um problema matemático. Irritado, Arquimedes gritou: "não perturbe os meus círculos". O soldado, em um acesso de raiva, matou o velho.

Embora não exista representação ou estátua desse grande homem, nove trabalhos de Arquimedes sobreviveram até os dias de hoje. De especial importância é o tratado *O Método dos Teoremas Mecânicos*, que era parte de um palimpsesto que foi encontrado em 1906 em Constantinopla. Nesse tratado, Arquimedes explica como fez algumas de suas descobertas, utilizando um raciocínio que antecipa as idéias do Cálculo Integral. Esse documento permaneceu perdido até 1998, quando foi adquirido por um colecionar particular anônimo por 2 milhões de dólares.

Tabela 6.1.1

n	$A(n)$
100	3,13952597647
200	3,14107590781
300	3,14136298250
400	3,14146346236
500	3,14150997084
1000	3,14157198278
2000	3,14158748588
3000	3,14159035683
4000	3,14159136166
5000	3,14159182676
10000	3,14159244688

$A(n)$ parece estar próxima de π (unidades de área). Isso sugere que, para um círculo de raio 1, o método da exaustão é equivalente a uma equação da forma

$$\lim_{n \to \infty} A(n) = \pi$$

Como os matemáticos gregos suspeitavam muito do conceito de "infinito", eles evitavam seu uso em argumentos matemáticos. Desse modo, o cálculo de áreas pelo método de exaustão era um procedimento muito complicado. Acabou ficando para Newton e Leibniz a descoberta de um método geral de obtenção de áreas que utilizasse explicitamente a noção de limite. Discutiremos o método desses matemáticos no contexto do problema seguinte.

6.1.1 O PROBLEMA DA ÁREA Dada uma função f contínua e não-negativa em um intervalo $[a, b]$, encontre a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ no eixo x (Figura 6.1.2).

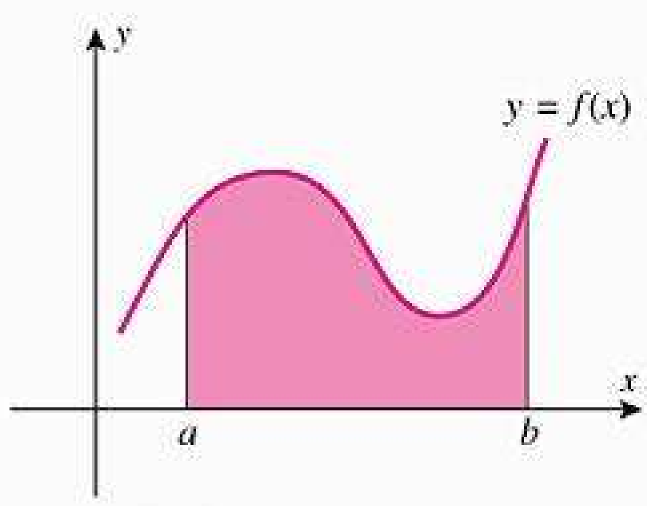


Figura 6.1.2

De um ponto de vista lógico, não podemos falar sobre o cálculo de áreas sem termos antes uma definição matemática precisa do termo "área". Adiante, neste capítulo, daremos uma tal definição, mas por enquanto trataremos intuitivamente do conceito.

O MÉTODO DOS RETÂNGULOS PARA ENCONTAR ÁREAS

Uma abordagem ao problema da área é a utilização do método de exaustão de Arquimedes da seguinte maneira:

- Dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais e em cada um deles construir um retângulo que se estende desde o eixo x até algum ponto na curva $y = f(x)$ acima do subintervalo; o ponto particular não interessa, podendo ser o que estiver acima do centro, acima dos extremos ou acima de qualquer outro ponto no subintervalo. Na Figura 6.1.3, ele está acima do centro.
- Para cada n, a área total dos retângulos pode ser vista como uma *aproximação* à área exata sob a curva acima do intervalo $[a, b]$. Além disso, fica intuitivamente evidente que, quando n cresce, essas aproximações irão se tornar cada vez melhores e tender à área exata como um limite (Figura 6.1.4). Assim, se A denota a área exata sob a curva e A_n denota a aproximação de A usando n retângulos, então

$$A = \lim_{n \to +\infty} A_n$$

Diremos que esse é o ***método dos retângulos*** para o cálculo de A.

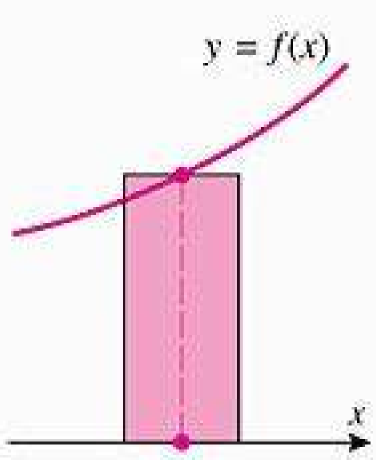


Figura 6.1.3

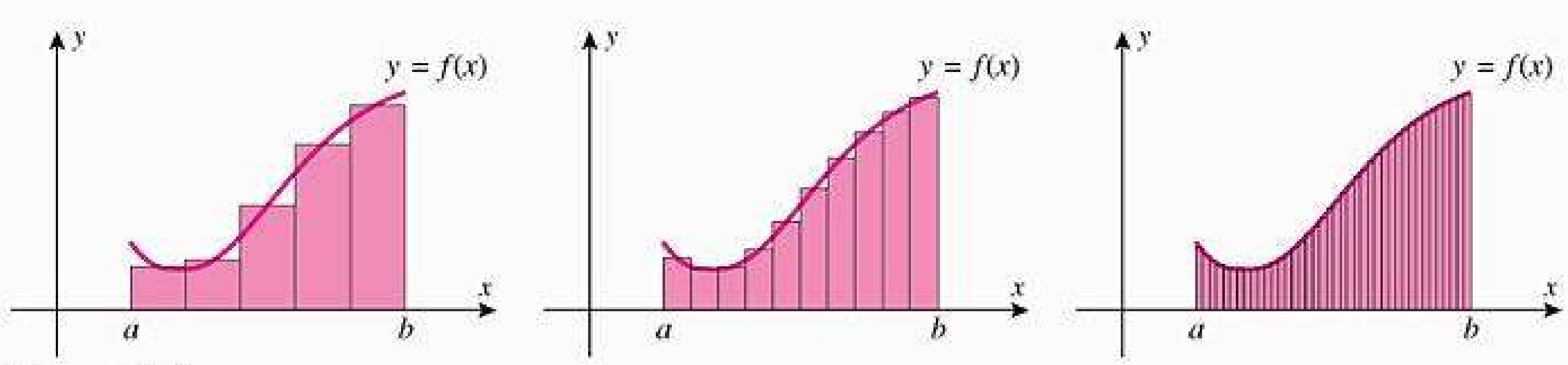


Figura 6.1.4

Para ilustrar essa idéia, vamos usar o método dos retângulos para aproximar a área sob a curva $y = x^2$ acima do intervalo [0, 1] (Figura 6.1.5). Para começar, vamos subdividir o intervalo [0, 1] em n subintervalos iguais, cada um, portanto, com comprimento de $1/n$; os extremos dos subintervalos ocorrem em

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n}, \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ 1$$

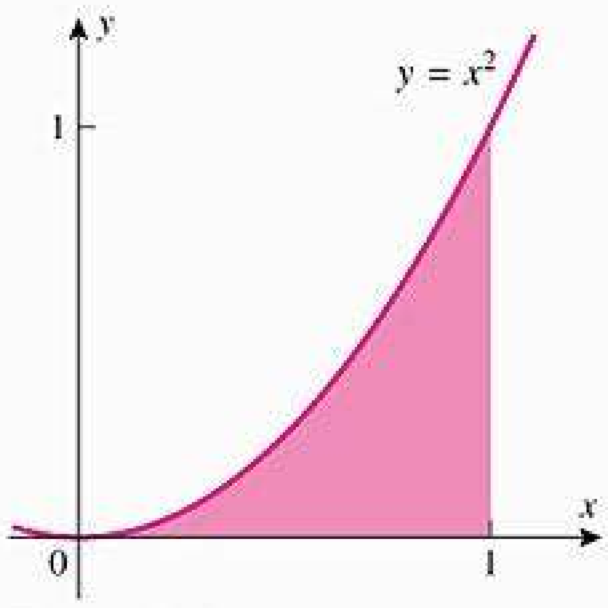


Figura 6.1.5

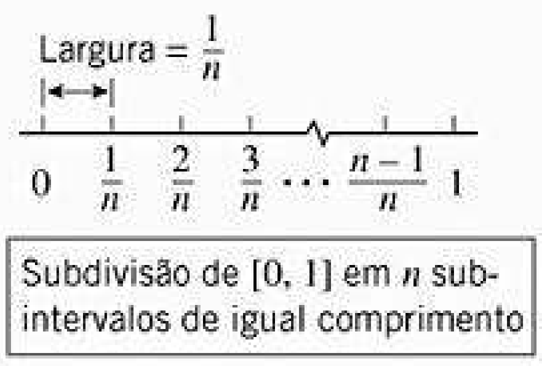


Figura 6.1.6

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Use um recurso computacional para calcular o valor de A_{10} na Tabela 6.1.2. Alguns recursos computacionais têm comandos especiais para calcular somas como a de (1) para qualquer valor específico de n. Se o leitor dispuser de um recurso assim, utilize-o também para calcular A_{100}.

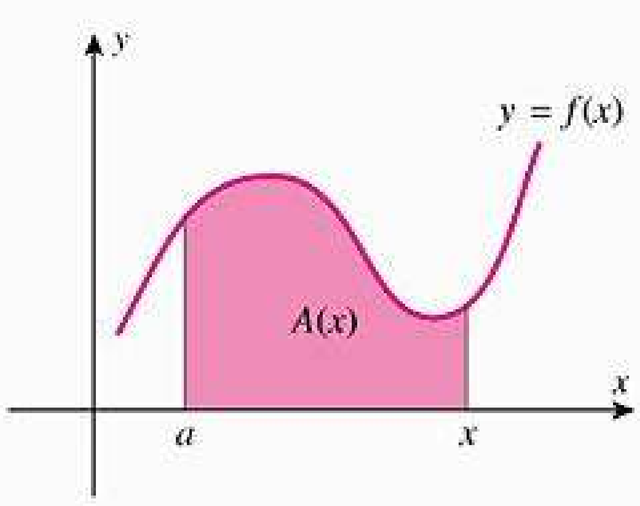


Figura 6.1.7

(Figura 6.1.6). Queremos construir um retângulo acima de cada um desses intervalos, cuja altura seja o valor da função $f(x) = x^2$ em algum ponto no intervalo. Para sermos mais específicos, vamos usar os extremos direitos; assim, as alturas dos retângulos serão

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \ldots, 1^2$$

e como cada retângulo tem uma base de comprimento $1/n$, a área total A_n de cada um dos n retângulos será

$$A_n = \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + 1^2\right]\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

Por exemplo, se $n = 4$, então a área total dos quatro retângulos será

$$A_4 = \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right]\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{15}{32} = 0{,}46875$$

A Tabela 6.1.2 mostra o resultado de calcular (1) em um computador para alguns valores crescentes de n. Esses cálculos sugerem que a área exata está próxima de $\frac{1}{3}$. Adiante neste capítulo provaremos que essa área é exatamente $\frac{1}{3}$, mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \tfrac{1}{3}$$

Tabela 6.1.2

n	4	10	100	1000	10.000	100.000
A_n	0,468750	0,385000	0,338350	0,333834	0,333383	0,333338

■ O MÉTODO DA ANTIDERIVADA PARA ENCONTRAR ÁREAS

Embora o método dos retângulos seja intuitivamente atraente, os limites que dele resultam somente podem ser calculados em certos casos. Por esse motivo, o progresso no problema da área ficou em um nível rudimentar até a segunda metade do século XVII, quando Isaac Newton e Gottfried Leibniz independentemente descobriram uma relação fundamental entre áreas e derivadas. Em resumo, eles mostraram que, se f é uma função contínua não-negativa no intervalo $[a, b]$ e se $A(x)$ denota a área sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, x]$, onde x é um ponto qualquer do intervalo $[a, b]$ (Figura 6.1.7), então

$$A'(x) = f(x) \tag{2}$$

O exemplo a seguir confirma a Fórmula (2) em alguns casos em que a fórmula para $A(x)$ pode ser encontrada usando Geometria elementar.

► Exemplo 1 Para cada uma das funções f, encontre a área $A(x)$ entre o gráfico de f e o intervalo $[a, x] = [-1, x]$, e encontre a derivada $A'(x)$ dessa função área.

(a) $f(x) = 2$ (b) $f(x) = x + 1$ (c) $f(x) = 2x + 3$

Solução (a) Pela Figura 6.1.8*a*, vemos que

$$A(x) = 2(x - (-1)) = 2(x + 1) = 2x + 2$$

é a área de um retângulo de altura 2 e base $x + 1$. Para essa função área,

$$A'(x) = 2 = f(x)$$

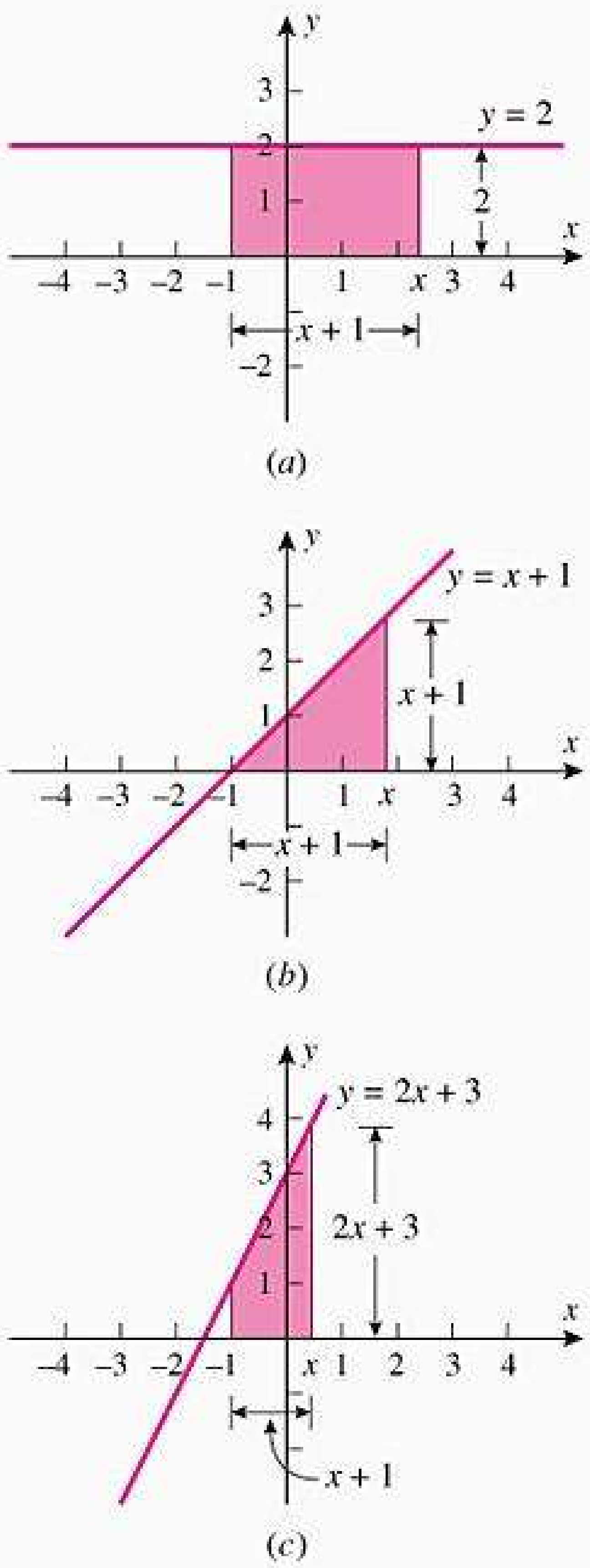


Figura 6.1.8

Solução (b) Pela Figura 6.1.8*b*, vemos que

$$A(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x+1) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

é a área de um triângulo retângulo isósceles de altura e base iguais a $x + 1$. Para essa função área,

$$A'(x) = x + 1 = f(x)$$

Solução (c) Lembre que a fórmula para a área de um trapézio é $A = \frac{1}{2}(b + b')h$, onde b e b' denotam os comprimentos dos lados paralelos do trapézio, e a altura h denota a distância entre os lados paralelos. Pela Figura 6.1.8*c*, vemos que

$$A(x) = \tfrac{1}{2}((2x+3)+1)(x-(-1)) = x^2 + 3x + 2$$

é a área de um trapézio de lados paralelos de comprimentos 1 e $2x + 3$ e altura $x - (-1) = x + 1$. Para essa função área,

$$A'(x) = 2x + 3 = f(x) \blacktriangleleft$$

A Fórmula (2) é importante porque relaciona a função área A com a função f que delimita a região. Embora a fórmula para $A(x)$ possa ser difícil de ser obtida diretamente, sua derivada $f(x)$ é dada. Se soubermos recuperar uma fórmula para $A(x)$ a partir da fórmula dada de $A'(x)$, então poderemos obter a área sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, b]$ calculando $A(b)$.

O processo de encontrar uma função a partir de sua derivada é denominado ***antiderivação***, e um procedimento para encontrar áreas através da antiderivação é denominado ***método de antiderivação***. Para ilustrar esse método, vamos rever o problema de encontrar a área na Figura 6.1.5.

► Exemplo 2 Use o método da antiderivada para encontrar a área sob o gráfico de $y = x^2$ acima do intervalo [0, 1].

Solução Sejam x um ponto qualquer do intervalo [0, 1] e $A(x)$ a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ acima do intervalo $[0, x]$. Segue de (2) que

$$A'(x) = x^2 \tag{3}$$

Para encontrar $A(x)$ precisamos procurar uma função cuja derivada seja x^2. Por adivinhação, vemos que uma tal função é $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, de modo que, pelo Teorema 5.7.3,

$$A(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + C \tag{4}$$

para alguma constante real C. Podemos determinar o valor específico de C considerando o caso em que $x = 0$. Nesse caso, (4) implica

$$A(0) = C \tag{5}$$

Mas, se $x = 0$, então o intervalo $[0, x]$ se reduz a um único ponto. Se concordarmos em convencionar que a área acima de um só ponto deveria ser considerada nula, então $A(0) = 0$ e (5) implica que $C = 0$. Assim, segue de (4) que

$$A(x) = \tfrac{1}{3}x^3$$

é a função área procurada. Isso implica que a área sob o gráfico de $y = x^2$ acima do intervalo [0, 1] é

$$A(1) = \tfrac{1}{3}(1^3) = \tfrac{1}{3}$$

Isso é consistente com o resultado obtido numericamente acima. ◄

Como ilustra o Exemplo 2, a antiderivação é, essencialmente, um processo de adivinhação em que tentamos "desfazer" uma diferenciação. Um dos objetivos deste capítulo é desenvolver procedimentos eficientes de antiderivação.

COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DO RETÂNGULO E DA ANTIDERIVADA

O método do retângulo e o da antiderivada fornecem duas abordagens bem diferentes ao problema da área, cada uma das quais é importante. Em geral, o método da antiderivada é o mais eficiente para *calcular* áreas, mas é o método do retângulo que é utilizado para formalmente *definir* a noção de área, com isso permitindo a demonstração de resultados matemáticos sobre áreas. A idéia subjacente à abordagem por retângulos também é importante, por poder ser facilmente adaptada a problemas tão diversos como encontrar o volume de um sólido, o comprimento de uma curva, a massa de um objeto e o trabalho para bombear água para fora de um tanque, para citar apenas alguns exemplos.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.1 (*Ver página 355 para respostas.*)

1. Seja R a região abaixo do gráfico de $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ e acima do intervalo $[-1, 1]$.
   (a) Use um argumento geométrico para encontrar a área de R.
   (b) Quais são as estimativas que se obtêm se a área de R for aproximada pela área total dentro dos retângulos da figura abaixo?

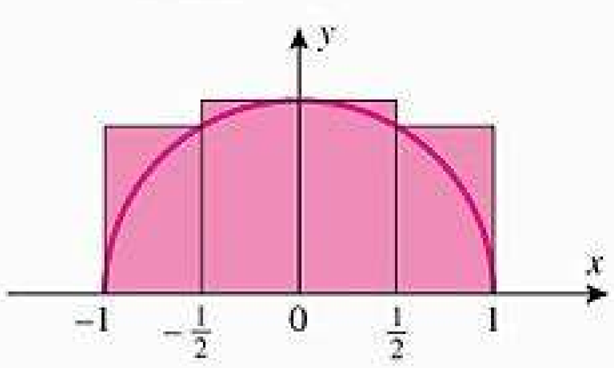


Figura Ex-1

2. Suponha que apliquemos o método do retângulo com n retângulos ao gráfico de uma função f acima do intervalo $[a, b]$. Se, para cada inteiro positivo n, resultar a aproximação $A(n) = 2 + (2/n)$, então a área entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ é __________.
3. A área sob o gráfico de $y = x^2$ acima do intervalo $[0, 3]$ é __________.
4. Encontre a área $A(x)$ entre o gráfico da função $f(x) = x$ e o intervalo $[0, x]$ e verifique se $A'(x) = f(x)$.
5. A área sob o gráfico de $y = f(x)$ acima do intervalo $[0, x]$ é $A(x) = x + e^x - 1$. Decorre disso que $f(x) =$ __________.

EXERCÍCIOS 6.1

1-12 Dê uma estimativa para a área entre o gráfico da função f e o intervalo $[a, b]$. Use um esquema de aproximação com n retângulos, análogo ao desenvolvido nesta seção para a função $f(x) = x^2$. Se seu recurso computacional efetuar somatórios automaticamente, estime a área especificada usando $n = 10$, 50 e 100 retângulos. Caso contrário, estime a área usando $n = 2$, 5 e 10 retângulos.

1. $f(x)=\sqrt{x};\ [a,b]=[0,1]$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x+1};\ [a,b]=[0,1]$
3. $f(x)=\operatorname{sen} x;\ [a,b]=[0,\pi]$
4. $f(x)=\cos x;\ [a,b]=[0,\pi/2]$
5. $f(x)=\dfrac{1}{x};\ [a,b]=[1,2]$
6. $f(x)=\cos x;\ [a,b]=[-\pi/2,\pi/2]$
7. $f(x)=\sqrt{1-x^2};\ [a,b]=[0,1]$
8. $f(x)=\sqrt{1-x^2};\ [a,b]=[-1,1]$
9. $f(x)=e^x;\ [a,b]=[-1,1]$
10. $f(x)=\ln x;\ [a,b]=[1,2]$
11. $f(x)=\operatorname{arc\,sen} x;\ [a,b]=[0,1]$
12. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x;\ [a,b]=[0,1]$

13-18 Use fórmulas de área simples da Geometria para encontrar a função área $A(x)$ que dá a área entre o gráfico da função f especificada e o intervalo $[a, x]$. Confirme que $A'(x) = f(x)$ em cada caso.

13. $f(x)=3;\ [a,x]=[1,x]$
14. $f(x)=5;\ [a,x]=[2,x]$
15. $f(x)=2x+2;\ [a,x]=[0,x]$
16. $f(x)=3x-3;\ [a,x]=[1,x]$
17. $f(x)=2x+2;\ [a,x]=[1,x]$
18. $f(x)=3x-3;\ [a,x]=[2,x]$
19. Qual é a relação entre as funções área dos Exercícios 15 e 17? Explique seu raciocínio.
20. Seja $f(x)$ uma função *linear* que é não-negativa no intervalo $[a, b]$. Para cada valor de x em $[a, b]$, defina $A(x)$ como a área entre o gráfico de f e o intervalo $[a, x]$.
    (a) Prove que $A(x)=\frac{1}{2}[f(a)+f(x)](x-a)$.
    (b) Use (a) para conferir que $A'(x) = f(x)$.

ENFOCANDO CONCEITOS

21. Explique como usar a fórmula encontrada para $A(x)$ na solução do Exercício 2 para determinar a área entre o gráfico de $y = x^2$ e o intervalo [3, 6].

22. Modifique a solução do Exemplo 2 para encontrar a área entre o gráfico de $y = x^2$ e o intervalo [−3, 9].

23-24 É dada a área $A(x)$ sob o gráfico de f e acima do intervalo $[a, x]$. Encontre a função f e o valor de a.

23. $A(x) = x^2 - 4$

24. $A(x) = x^2 - x$

25. Sejam A a área entre o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e o intervalo [0, 1] e B a área entre o gráfico de $f(x) = x^2$ e o intervalo [0, 1]. Explique geometricamente por que $A + B = 1$.

26. Sejam A a área entre o gráfico de $f(x) = 1/x$ e o intervalo [1, 2] e B a área entre o gráfico de f e o intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Explique geometricamente por que $A = B$.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.1

1. (a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) $1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** 2 **3.** 9 **4.** $A(x) = \dfrac{x^2}{2}$; $A'(x) = \dfrac{2x}{2} = x = f(x)$ **5.** $e^x + 1$

6.2 A INTEGRAL INDEFINIDA

Na seção anterior vimos como a antiderivação pode ser usada para encontrar áreas com exatidão. Nesta seção desenvolveremos alguns resultados fundamentais sobre antiderivação.

■ ANTIDERIVADAS

6.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função F é uma ***antiderivada*** de uma função f em um dado intervalo se $F'(x) = f(x)$ para cada x do intervalo.

Por exemplo, a função $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma antiderivada de $f(x) = x^2$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$ porque, para cada x nesse intervalo, temos

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right] = x^2 = f(x)$$

Contudo, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ não é a única antiderivada de f nesse intervalo. Se somarmos qualquer constante C a $\frac{1}{3}x^3$, então a função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ também é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$, pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{3}x^3 + C\right] = x^2 + 0 = f(x)$$

Em geral, uma vez conhecida uma antiderivada, podemos obter outras antiderivadas somando constantes a essa antiderivada conhecida. Assim,

$$\tfrac{1}{3}x^3, \quad \tfrac{1}{3}x^3 + 2, \quad \tfrac{1}{3}x^3 - 5, \quad \tfrac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}$$

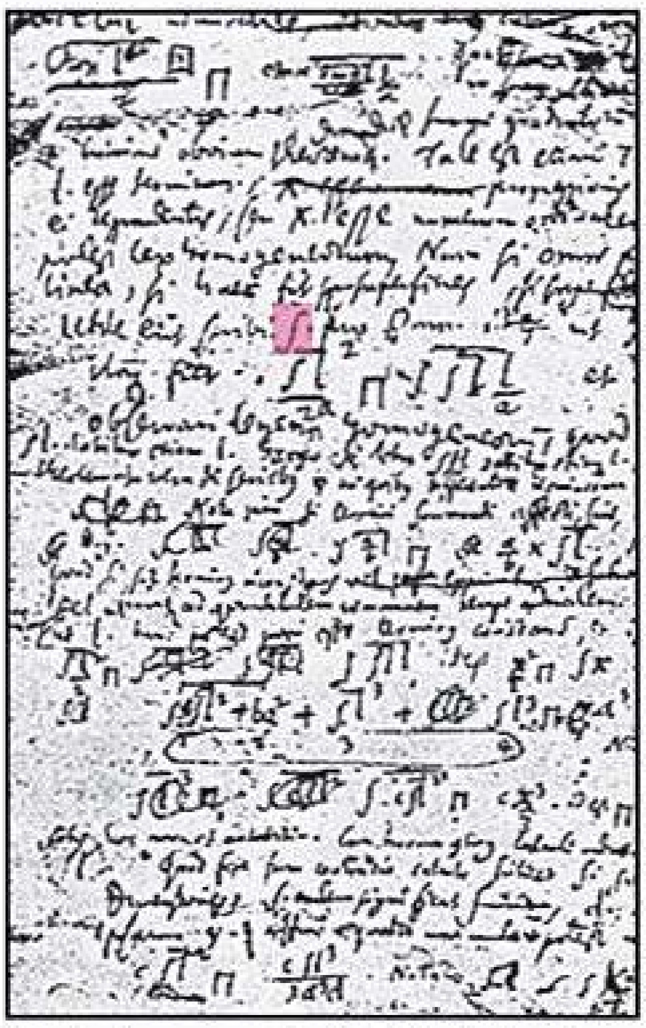
são todas antiderivadas da função $f(x) = x^2$.

É razoável perguntar se existem antiderivadas de uma função f que não podem ser obtidas adicionando-se constantes a uma antiderivada F conhecida. A resposta é *não* – uma vez conhecida uma única antiderivada de f em um intervalo I, todas as outras antiderivadas naquele intervalo podem ser obtidas adicionando-se constantes àquela antiderivada. Isso acontece devido ao Teorema 5.7.3, o qual nos diz que, se duas funções diferenciáveis em um

intervalo aberto I têm a mesma derivada em I, então elas diferem por uma constante em I. O teorema a seguir resume essas observações.

6.2.2 TEOREMA *Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo I, então para qualquer constante C a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ naquele intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo I pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C.*

A INTEGRAL INDEFINIDA



Trecho do manuscrito de Leibniz, datado de 29 de outubro de 1675, no qual apareceu pela primeira vez o sinal de integral.

O processo de encontrar antiderivadas é denominado ***antiderivação***, ***antidiferenciação*** ou, ainda, ***integração***. Assim, se

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \tag{1}$$

então, ***integrando*** ou ***antiderivando*** a função $f(x)$, obtemos uma antiderivada da forma $F(x) + C$. Para enfatizar esse processo, reescrevemos a equação (1) usando a ***notação integral***

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{2}$$

onde C deve ser interpretado como uma constante arbitrária. É importante observar que (1) e (2) são tão-somente notações diferentes que expressam o mesmo fato. Por exemplo,

$$\int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C \quad \text{é equivalente a} \quad \frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right] = x^2$$

Observe que, se derivarmos uma antiderivada de $f(x)$, voltamos a obter $f(x)$. Assim,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x) \tag{3}$$

A expressão $\int f(x)\,dx$ é denominada ***integral indefinida***. O adjetivo *indefinida* enfatiza que o resultado da antiderivação é uma função "genérica", descrita só a menos de um termo constante. O sinal de "s espichado" que aparece no lado esquerdo de (2) é denominado ***sinal de integral***,* a função $f(x)$ é denominada ***integrando*** e a constante C é denominada ***constante de integração***. A Equação (2) deve ser lida como segue.

A integral de $f(x)$ em relação a x é igual a $F(x)$ mais uma constante.

O sinal de integral e a diferencial servem como delimitadores, cercando o integrando. Em particular, **não** devemos escrever $\int dx\, f(x)$ quando queremos dizer $\int f(x)\,dx$.

O símbolo diferencial dx das operações de derivação e antiderivação,

$$\frac{d}{dx}[\ ] \quad \text{e} \quad \int [\ ]\,dx$$

serve para identificar a variável independente. Se for utilizada uma outra variável independente em vez de x, digamos t, então a notação deve ser ajustada de acordo. Assim,

$$\frac{d}{dt}[F(t)] = f(t) \quad \text{e} \quad \int f(t)\,dt = F(t) + C$$

* Essa notação foi inventada por Leibniz. Nos artigos iniciais, Leibniz usou a notação "omn" (uma abreviatura da palavra latina "omnes") para denotar integração. Então, em 29 de outubro de 1675, ele escreveu "será útil escrever $\int$ para significar omn., assim $\int l$ por omn. l...". Duas ou três semanas depois, ele aperfeiçoou ainda mais a notação e escreveu $\int [\ ]\,dx$ em vez de só $\int$. Essa notação é tão útil e poderosa que seu desenvolvimento por Leibniz deve ser visto como um grande marco na história da Matemática e da Ciência.

são afirmações equivalentes. A seguir, apresentamos alguns exemplos de fórmulas de derivação e as equivalentes de integração.

FÓRMULA DE DERIVADA	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO EQUIVALENTE
$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$	$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$
$\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$
$\frac{d}{dt}[\text{tg}\, t] = \sec^2 t$	$\int \sec^2 t\,dt = \text{tg}\, t + C$
$\frac{d}{du}[u^{3/2}] = \frac{3}{2}u^{1/2}$	$\int \frac{3}{2}u^{1/2}\,du = u^{3/2} + C$

Para simplificar, dx pode, às vezes, ser absorvido no integrando. Por exemplo,

$$\int 1\,dx \quad \text{pode ser escrita como} \quad \int dx$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{pode ser escrita como} \quad \int \frac{dx}{x^2}$$

FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

Integração é essencialmente um trabalho de dar palpites – dada a derivada f de uma função F, tenta-se adivinhar qual é a função F. Porém, muitas fórmulas básicas de integração podem ser obtidas diretamente de suas fórmulas de diferenciação correspondentes. Algumas das mais importantes estão na Tabela 6.2.1.

Tabela 6.2.1

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO	FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
1. $\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int dx = x + C$	8. $\frac{d}{dx}[-\text{cossec}\, x] = \text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x$	$\int \text{cossec}\, x\,\text{cotg}\, x\,dx = -\text{cossec}\, x + C$
2. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r \quad (r \neq -1)$	$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$	9. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
3. $\frac{d}{dx}[\text{sen}\, x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \text{sen}\, x + C$	10. $\frac{d}{dx}\left[\frac{b^x}{\ln b}\right] = b^x \quad (0 < b,\, b \neq 1)$	$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (0 < b,\, b \neq 1)$
4. $\frac{d}{dx}[-\cos x] = \text{sen}\, x$	$\int \text{sen}\, x\,dx = -\cos x + C$	11. $\frac{d}{dx}[\ln\lvert x\rvert] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
5. $\frac{d}{dx}[\text{tg}\, x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}\, x + C$	12. $\frac{d}{dx}[\text{arc tg}\, x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arc tg}\, x + C$
6. $\frac{d}{dx}[-\text{cotg}\, x] = \text{cossec}^2 x$	$\int \text{cossec}^2 x\,dx = -\text{cotg}\, x + C$	13. $\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arc sen}\, x + C$
7. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x\,\text{tg}\, x$	$\int \sec x\,\text{tg}\, x\,dx = \sec x + C$	14. $\frac{d}{dx}[\text{arc sec}\,\lvert x\rvert] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{arc sec}\,\lvert x\rvert + C$

Ver Exercício 64 para uma discussão da Fórmula 14 da Tabela 6.2.1.

► Exemplo 1 A segunda fórmula de integração na Tabela 6.2.1 será fácil de lembrar se for expressa em palavras:

Para integrar uma potência em x (diferente de −1), some 1 ao expoente e divida pela nova potência.

Embora a Fórmula 2 na Tabela 6.2.1 não seja aplicável à integração de x^{-1}, essa função pode ser integrada reescrevendo a integral na Fórmula 11 como

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$$

Aqui estão alguns exemplos.

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \boxed{r = 2}$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C \qquad \boxed{r = 3}$$

$$\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{1}{4x^4} + C \qquad \boxed{r = -5}$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C \qquad \boxed{r = \tfrac{1}{2}}$$

PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

Nossas primeiras propriedades de antiderivadas seguem diretamente das regras do fator constante, da soma e da diferença de derivadas.

6.2.3 TEOREMA *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, e c uma constante. Então:*

(a) Uma constante pode ser movida através do sinal de integração; isto é,

$$\int cf(x)\,dx = cF(x) + C$$

(b) Uma antiderivada de uma soma é a soma das antiderivadas; isto é,

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C$$

(c) Uma antiderivada de uma diferença é a diferença das antiderivadas; isto é,

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = F(x) - G(x) + C$$

DEMONSTRAÇÃO Em geral, para estabelecer a validade de uma equação da forma

$$\int h(x)\,dx = H(x) + C$$

precisamos mostrar que

$$\frac{d}{dx}[H(x)] = h(x)$$

Aqui, $F(x)$ e $G(x)$ são antiderivadas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente; portanto, sabemos que

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[G(x)] = g(x)$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}[cF(x)] = c\frac{d}{dx}[F(x)] = cf(x)$$

$$\frac{d}{dx}[F(x) + G(x)] = \frac{d}{dx}[F(x)] + \frac{d}{dx}[G(x)] = f(x) + g(x)$$

$$\frac{d}{dx}[F(x) - G(x)] = \frac{d}{dx}[F(x)] - \frac{d}{dx}[G(x)] = f(x) - g(x)$$

o que prova as três afirmações do teorema. ■

As afirmações do Teorema 6.2.3 podem ser resumidas nas fórmulas seguintes:

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \tag{4}$$

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{5}$$

$$\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx \tag{6}$$

Contudo, essas equações devem ser aplicadas cuidadosamente para evitar erros e complicações desnecessárias provocadas pelas constantes de integração. Por exemplo, se utilizarmos (4) para integrar $0x$ igualando, erradamente, $\int 0x\,dx$ com $0\int x\,dx = 0$, então erradamente perderemos uma constante de integração (onde?). Se utilizarmos (4) para integrar $2x$ escrevendo

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}+C\right) = x^2+2C$$

então obteremos uma forma desnecessariamente complicada de constante arbitrária. Analogamente, utilizando (5) para integrar $1+x$ escrevendo

$$\int (1+x)\,dx = \int 1\,dx + \int x\,dx = (x+C_1)+\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right) = x+\frac{x^2}{2}+C_1+C_2$$

obteremos duas constantes de integração onde bastava uma. Esses três tipos de problemas são causados pela introdução demasiado cedo das constantes de integração e podem ser evitados colocando uma constante de integração somente no resultado e não em contas intermediárias.

► Exemplo 2 Calcule

$$\text{(a)}\ \int 4\cos x\,dx \qquad \text{(b)}\ \int (x+x^2)\,dx$$

Solução (a) Como $F(x) = \operatorname{sen} x$ é uma antiderivada de $f(x) = \cos x$ (Tabela 6.2.1), obtemos

$$\int 4\cos x\,dx \underset{(4)}{=} 4\int \cos x\,dx = 4\operatorname{sen} x + C$$

Solução (b) Pela Tabela 6.2.1, obtemos

$$\int (x+x^2)\,dx \underset{(5)}{=} \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C \ ◄$$

As partes (b) e (c) do Teorema 6.2.3 podem ser estendidas para mais de duas funções, o que, combinando com (a), resulta na seguinte fórmula geral:

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)]\,dx = c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + \cdots + c_n\int f_n(x)\,dx \tag{7}$$

► **Exemplo 3**

$$\int (3x^6 - 2x^2 + 7x + 1)\,dx = 3\int x^6\,dx - 2\int x^2\,dx + 7\int x\,dx + \int 1\,dx$$
$$= \frac{3x^7}{7} - \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + x + C \blacktriangleleft$$

Às vezes, é muito útil reescrever o integrando de forma diferente antes de efetuar a integração.

► **Exemplo 4** Calcule

$$\text{(a)} \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx \quad \text{(b)} \int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4}\,dt \quad \text{(c)} \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

Solução (a)

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

Fórmula 8 da Tabela 6.2.1

Solução (b)

$$\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4}\,dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - 2\right)dt = \int (t^{-2} - 2)\,dt$$
$$= \frac{t^{-1}}{-1} - 2t + C = -\frac{1}{t} - 2t + C$$

Solução (c) Usando a Fórmula 12 da Tabela 6.2.1,

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \operatorname{arc\,tg} x + C \blacktriangleleft$$

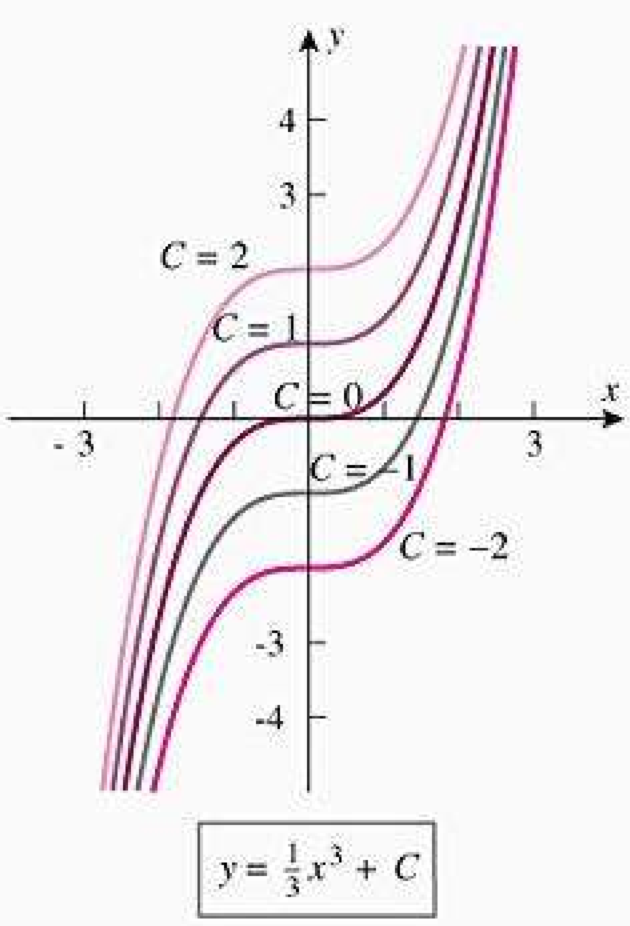


Figura 6.2.1

■ CURVAS INTEGRAIS

Os gráficos das antiderivadas de uma função f são denominados ***curvas integrais*** de f. Sabemos a partir do Teorema 6.2.2 que, se $y = F(x)$ for uma curva integral de $f(x)$, as demais curvas integrais são translações dessa curva, uma vez que têm equações da forma $y = F(x) + C$. Por exemplo, $y = \frac{1}{3}x^3$ é uma curva integral de $f(x) = x^2$, portanto, as demais têm equações da forma $y = \frac{1}{3}x^3 + C$; reciprocamente, o gráfico de qualquer equação dessa forma é uma curva integral (Figura 6.2.1).

Em muitos problemas, estamos interessados em encontrar uma função cuja derivada satisfaça condições específicas. O exemplo a seguir ilustra um problema geométrico desse tipo.

No Exemplo 5, a exigência de que o gráfico de f passe pelo ponto (2, 1) seleciona a única curva integral $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}$ da família de curvas $y = \frac{1}{3}x^3 + C$ (Figura 6.2.2).

► **Exemplo 5** Suponha que um ponto movimente-se ao longo de uma curva desconhecida $y = f(x)$ no plano xy, de tal forma que, em cada ponto (x, y) da curva, a reta tangente tem inclinação x^2. Encontre uma equação dessa curva sabendo-se que ela passa pelo ponto (2, 1).

Solução Sabemos que $dy/dx = x^2$, logo

$$y = \int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

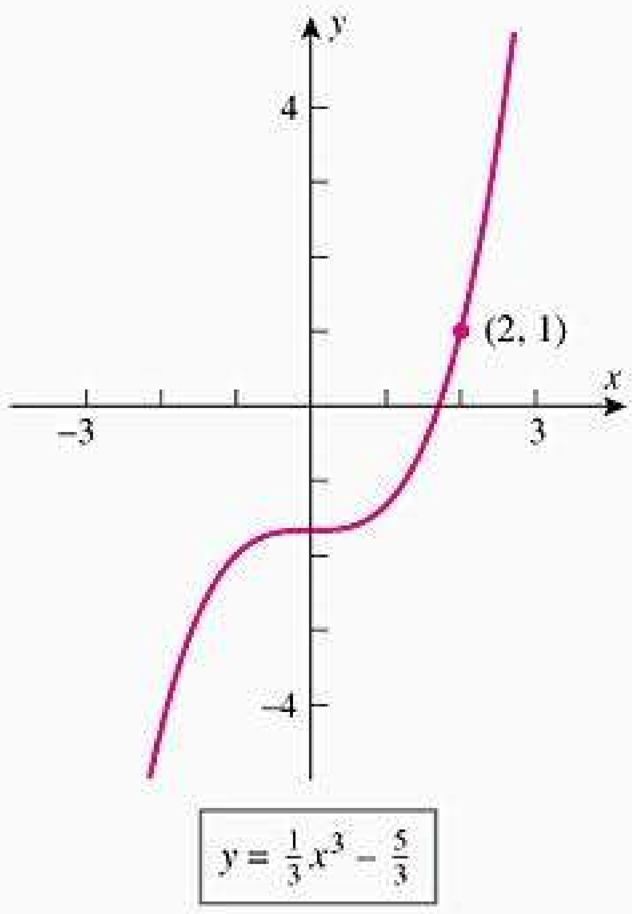


Figura 6.2.2

Como a curva passa por (2, 1), pode-se encontrar um valor específico para C usando o fato de que $y = 1$ se $x = 2$. Substituindo esses valores na equação anterior, obtemos

$$1 = \tfrac{1}{3}(2^3) + C \quad \text{ou} \quad C = -\tfrac{5}{3}$$

e, portanto, uma equação da curva é

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{3}$$

(Figura 6.2.2). ◄

■ INTEGRAÇÃO DO PONTO DE VISTA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Vamos considerar agora uma outra forma de encarar a integração que será útil posteriormente em nosso trabalho. Suponha que $f(x)$ seja uma função conhecida e que queiramos encontrar uma função $F(x)$, tal que $y = F(x)$ satisfaça a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{8}$$

As soluções dessa equação são as antiderivadas de $f(x)$, e sabemos que elas podem ser obtidas integrando-se $f(x)$. Por exemplo, as soluções da equação

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \tag{9}$$

são

$$y = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

A equação (8) é chamada de ***equação diferencial***, pois envolve a derivada de uma função desconhecida. As equações diferenciais diferem dos tipos de equação encontrados até agora, pois a incógnita é uma *função* e não um *número*, como em uma equação do tipo $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Às vezes, não estamos interessados em encontrar todas as soluções de (8), mas somente em uma cuja curva integral passe por um ponto especificado (x_0, y_0). Por exemplo, no Exemplo 5, resolvemos (9) para a curva integral que passa pelo ponto (2, 1).

Para simplificar, é comum no estudo das equações diferenciais denotar uma solução de $dy/dx = f(x)$ como $y(x)$ em vez de $F(x)$, como anteriormente. Com essa notação, o problema de encontrar uma função $y(x)$, cuja derivada é $f(x)$ e cuja curva integral passa pelo ponto (x_0, y_0), é expresso como

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{10}$$

Esse problema é denominado ***problema de valor inicial*** e a exigência $y(x_0) = y_0$ é uma ***condição inicial*** para ele.

► Exemplo 6 Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad y(0) = 1$$

Solução A solução da equação diferencial é

$$y = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C \tag{11}$$

A condição inicial $y(0) = 1$ implica que $y = 1$ se $x = 0$; substituindo esses valores em (11), obtemos

$$1 = \operatorname{sen}(0) + C \quad \text{ou} \quad C = 1$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é $y = \operatorname{sen} x + 1$. ◄

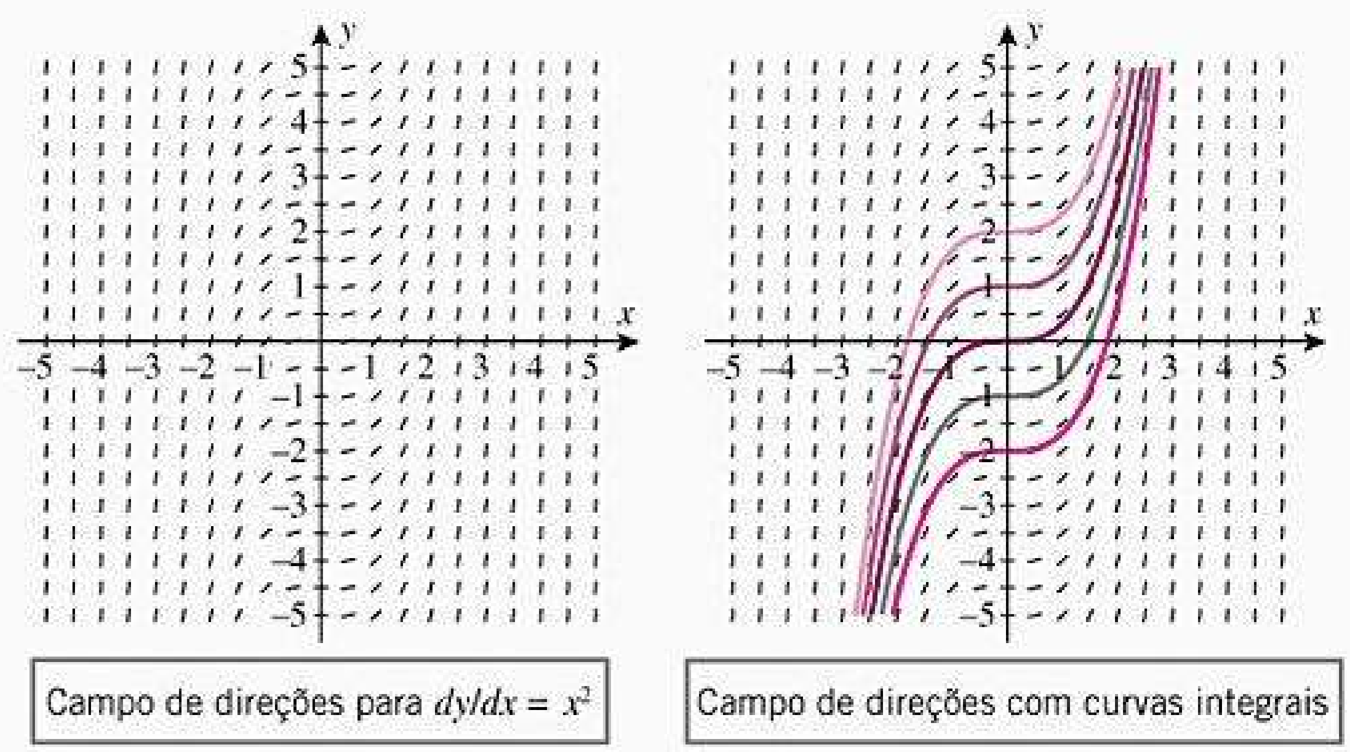
CAMPOS DE DIREÇÕES

Se inter retarm dy/dx c m a inc inaçã a reta tangente, entã em um nt x, y e uma cur a integra a e uaçã $dy/dx = f\ x$ a inc inaçã a reta tangente é igua a $f\ x$ intere ante bre i é ue a inc inaçõe a reta tangente a cur a integrai em er bti a em rea mente re er a e uaçã i erencia P r e em , e

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1}$$

entã , em re er a e uaçã , abem ue n nt $x = 1$ a inc inaçã a reta tangente a uma cur a integra é $\sqrt{1^2+1} = \sqrt{2}$; mai gera mente, em $x = a$, a reta tangente a uma cur a integra tem inc inaçã $\sqrt{a^2+1}$

ma e criçã ge métrica a cur a integrai e uma e uaçã i erencia $dy/dx = f\ x$ e er bti a e c hen e uma gra e retangu ar e nt n an xy, ca cu an e a inc inaçõe a reta tangente à cur a integrai n nt a gra e e e enhan e e uena rçõe a reta tangente na ue e nt figura re u tante, en mina a ***campo de direções*** u ***campo de inclinações***, m tra a " ireçã " a cur a integra n nt a gra e m um númer raz a e mente gran e e nt na gra e, muita eze é í e i ua izar a ró ria cur a integrai r e em , a Figura 2 3*a* m tra um cam e ireçõe ara a e uaçã i erencia $dy/dx = x^2$, e a Figura 2 3*b* m tra me m cam c m a cur a integrai bre ta – uant mai nt na gra e rem u a , mai c m etamente cam e ireçõe re e a a rma a cur a integrai P rém, a uanti a e e cá cu e er c n i erá e uan rem nece ári muit nt na gra e, e r i gera mente ã uti iza c m uta re



Campo de direções para $dy/dx = x^2$ — Campo de direções com curvas integrais

Figura 6.2.3 *a* *b*

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.2 (*Ver página 365 para respostas.*)

1. ma unçã F é uma anti eri a a e uma unçã f em um in ter a I e __________ ara t x em I

2. E cre a uma órmu a e integraçã e ui a ente ara ca a ór mu a e eri açã

   a $\dfrac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ b $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$

   c $\dfrac{d}{dx}[e^{4x}] = 4e^{4x}$

3. a cu e a integrai

   a $\displaystyle\int [x^3 + x + 5]\,dx$ b $\displaystyle\int [\sec^2 x - \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x]\,dx$

   c $\displaystyle\int \left[3e^x + \frac{4}{x}\right] dx$ $\displaystyle\int \left[\sqrt{x} - \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right] dx$

4. gráfic e $y = x^2 + x$ é uma cur a integra a unçã $f\ x$ = __________ Se G é uma unçã cu gráfic também é uma cur a integra e f, e e $G\ 1 = 5$, entã $G\ x$ = __________

5. m cam e ireçõe ara a e uaçã i erencia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-4}$$

tem um egment e reta e inc inaçã __________ e nt 0, 5 e um egment e reta e inc inaçã __________ e nt −4, 1

EXERCÍCIOS 6.2 ~ Recurso Gráfico C CAS

1. Em cada parte, confirme que a fórmula está correta e enuncie uma fórmula de integração correspondente.
   (a) $\dfrac{d}{dx}[\sqrt{1+x^2}] = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
   (b) $\dfrac{d}{dx}[xe^x] = (x+1)e^x$

2. Em cada parte, confirme que a fórmula está correta por diferenciação.
   (a) $\int x \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x - x\cos x + C$
   (b) $\int \dfrac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

ENFOCANDO CONCEITOS

3. O que é uma *constante de integração*? Por que a resposta de um problema de integração envolve uma constante de integração?

4. O que é uma *curva integral* de uma função f? Qual é a relação entre duas curvas integrais quaisquer de uma função f?

5-8 Encontre a derivada e enuncie a fórmula de integração correspondente.

5. $\dfrac{d}{dx}[\sqrt{x^3+5}]$
6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x}{x^2+3}\right]$
7. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}(2\sqrt{x})]$
8. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen} x - x\cos x]$

9-10 Calcule a integral reescrevendo apropriadamente o integrando, se necessário, e então aplique a regra da potência (Fórmula 2 na Tabela 6.2.1).

9. (a) $\int x^8\, dx$ (b) $\int x^{5/7}\, dx$ (c) $\int x^3\sqrt{x}\, dx$

10. (a) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$ (b) $\int \dfrac{1}{x^6}\, dx$ (c) $\int x^{-7/8}\, dx$

11-14 Calcule cada integral aplicando adequadamente o Teorema 6.2.3 e a Fórmula (2) na Tabela 6.2.1.

11. $\int \left[5x + \dfrac{2}{3x^5}\right] dx$
12. $\int \left[x^{-1/2} - 3x^{7/5} + \frac{1}{9}\right] dx$
13. $\int [x^{-3} - 3x^{1/4} + 8x^2]\, dx$
14. $\int \left[\dfrac{10}{y^{3/4}} - \sqrt[3]{y} + \dfrac{4}{\sqrt{y}}\right] dy$

15-34 Calcule a integral e verifique sua resposta por diferenciação.

15. $\int x(1+x^3)\, dx$
16. $\int (2+y^2)^2\, dy$
17. $\int x^{1/3}(2-x)^2\, dx$
18. $\int (1+x^2)(2-x)\, dx$
19. $\int \dfrac{x^5+2x^2-1}{x^4}\, dx$
20. $\int \dfrac{1-2t^3}{t^3}\, dt$
21. $\int \left[\dfrac{2}{x} + 3e^x\right] dx$
22. $\int \left[\dfrac{1}{2t} - \sqrt{2}e^t\right] dt$
23. $\int [3\operatorname{sen} x - 2\sec^2 x]\, dx$
24. $\int [\operatorname{cossec}^2 t - \sec t \operatorname{tg} t]\, dt$
25. $\int \sec x(\sec x + \operatorname{tg} x)\, dx$
26. $\int \operatorname{cossec} x(\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x)\, dx$
27. $\int \dfrac{\sec\theta}{\cos\theta}\, d\theta$
28. $\int \dfrac{dy}{\operatorname{cossec} y}$
29. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$
30. $\int \left[\phi + \dfrac{2}{\operatorname{sen}^2\phi}\right] d\phi$
31. $\int [1 + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{cossec}\theta]\, d\theta$
32. $\int \dfrac{\sec x + \cos x}{2\cos x}\, dx$
33. $\int \left[\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{3}{1+x^2}\right] dx$
34. $\int \left[\dfrac{4}{x\sqrt{x^2-1}} + \dfrac{1+x+x^3}{1+x^2}\right] dx$

35. Calcule a integral
$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\, dx$$
multiplicando o numerador e o denominador por uma expressão apropriada.

36. Use a fórmula do ângulo duplo $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ para calcular a integral
$$\int \frac{1}{1+\cos 2x}\, dx$$

~ 37. Use um recurso gráfico computacional para gerar algumas curvas integrais representativas de $f(x) = 5x^4 - \sec^2 x$ ao longo do intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

~ 38. Use um recurso gráfico computacional para gerar algumas curvas integrais representativas da função $f(x) = (x-1)/x$ ao longo do intervalo $(0, 5)$.

39. Suponha que um ponto move-se ao longo de uma curva $y = f(x)$ no plano xy, de tal forma que em cada ponto (x, y) da curva a reta tangente tem inclinação $-\operatorname{sen} x$. Encontre uma equação da curva, sabendo que ela passa pelo ponto $(0, 2)$.

40. Suponha que um ponto move-se ao longo de uma curva $y = f(x)$ no plano xy, de tal forma que em cada ponto (x, y) da curva a reta tangente tem inclinação $(x+1)^2$. Encontre uma equação da curva, sabendo que ela passa pelo ponto $(-2, 8)$.

41-44 Resolva os problemas de valor inicial.

41. (a) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x}, \; y(1) = 2$

(b) $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} t + 1, \; y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}, \; y(1) = 0$

42. (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(2x)^3}, \; y(1) = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dt} = \sec^2 t - \operatorname{sen} t, \; y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{x^3}, \; y(0) = 0$

43. (a) $\dfrac{dy}{dx} = 4e^x, \; y(0) = 1$ (b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}, \; y(-1) = 5$

44. (a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{\sqrt{1-t^2}}, \; y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}, \; y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

45. Encontre a forma geral de uma função cuja derivada segunda é $\sqrt{x}$. [*Sugestão*: Resolva a equação $f''(x) = \sqrt{x}$ para $f(x)$, integrando ambos os lados duas vezes.]

46. Encontre uma função f tal que $f''(x) = x + \cos x$ e, além disso, $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$. [*Sugestão*: Integre ambos os lados da equação duas vezes.]

47-49 Encontre uma equação da curva que satisfaz as condições dadas.

47. Em cada ponto (x, y) da curva, a inclinação é $2x + 1$; a curva passa pelo ponto $(-3, 0)$.

48. Em cada ponto (x, y) da curva, a inclinação é igual ao quadrado da distância entre o ponto e o eixo y; o ponto $(-1, 2)$ está na curva.

49. Em cada ponto (x, y) da curva, y satisfaz a condição $d^2y/dx^2 = 6x$; a reta $y = 5 - 3x$ é tangente à curva no ponto onde $x = 1$.

C **50.** Em cada parte, use um CAS para resolver o problema de valor inicial.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2\cos 3x, \; y(\pi/2) = -1$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{(4+x^2)^{3/2}}, \; y(0) = -2$

51. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar um campo de direções para a equação diferencial $dy/dx = x$ na região $-5 \le x \le 5$ e $-5 \le y \le 5$.

(b) Esboce algumas curvas integrais representativas da função $f(x) = x$.

(c) Encontre uma equação para a curva integral que passa pelo ponto $(4, 7)$.

52. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar um campo de direções para a equação diferencial $dy/dx = e^x/2$ na região $-1 \le x \le 4$ e $-1 \le y \le 4$.

(b) Esboce algumas curvas integrais representativas da função $f(x) = e^x/2$ para $x > 0$.

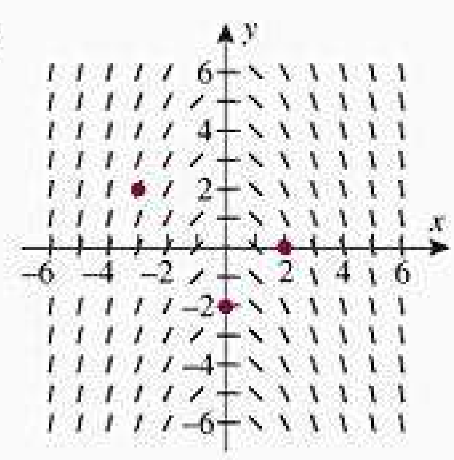
(c) Encontre uma equação para a curva integral que passa pelo ponto $(0, 1)$.

53-56 Os campos de direções dados correspondem a uma das equações diferenciais abaixo. Identifique a equação diferencial que combina com a figura e esboce curvas soluções pelos pontos destacados.

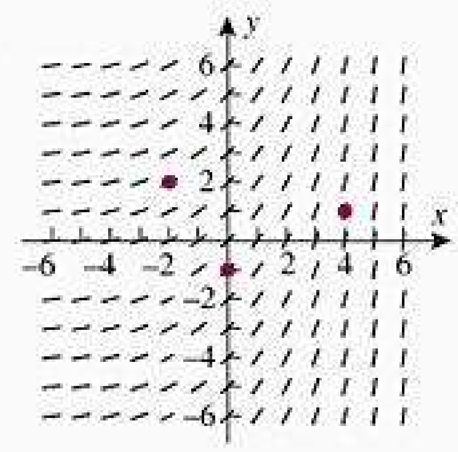
(a) $\dfrac{dy}{dx} = 2$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = -x$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 4$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x/3}$

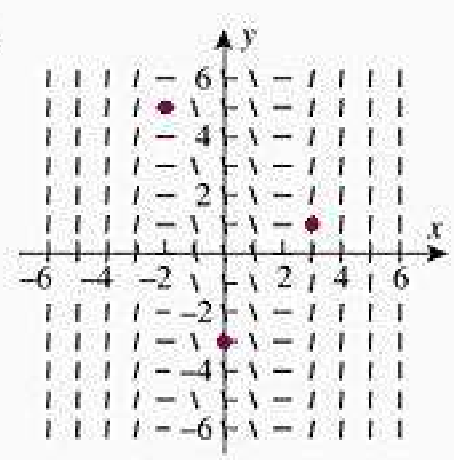
53.



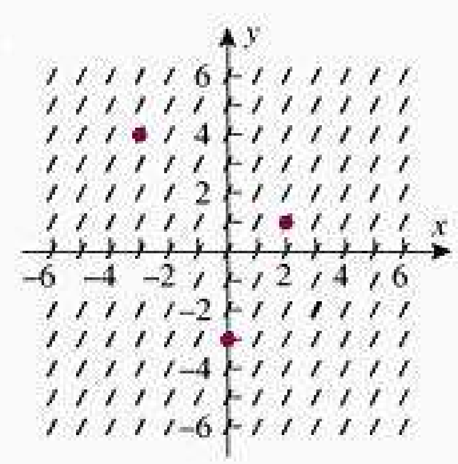
54.



55.



56.



ENFOCANDO CONCEITOS

57. (a) Mostre que

$$F(x) = \tfrac{1}{6}(3x+4)^2 \quad \text{e} \quad G(x) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x$$

diferem por uma constante, verificando que são antiderivadas de uma mesma função.

(b) Encontre a constante C tal que $F(x) - G(x) = C$, calculando $F(x)$ e $G(x)$ em um mesmo ponto x.

(c) Verifique sua resposta em (b) simplificando algebricamente a expressão $F(x) - G(x)$.

58. Siga as mesmas orientações do Exercício 57 com

$$F(x) = \frac{x^2}{x^2+5} \quad \text{e} \quad G(x) = -\frac{5}{x^2+5}$$

59. Sejam F e G as funções definidas por

$$F(x) = \frac{x^2+3x}{x} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} x+3, & x > 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que F e G têm a mesma derivada.

(b) Mostre que $G(x) \neq F(x) + C$ para toda constante C.

(c) As partes (a) e (b) violam o Teorema 6.2.2? Explique.

60. Repita o Exercício 59 usando

$$F(x) = \ln|x| \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} 2 + \ln x, & x > 0 \\ 1 + \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

61-62 Use uma identidade trigonométrica para calcular a integral.

61. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$ **62.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$

63. Use as identidades $\cos 2\theta = 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ para ajudar a calcular as integrais

(a) $\int \operatorname{sen}^2(x/2)\, dx$ (b) $\int \cos^2(x/2)\, dx$

64. Lembre que

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec } x] = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Use isso para conferir a Fórmula 14 na Tabela 6.2.1.

65. A velocidade do som no ar a 0°C (273 K, na escala Kelvin) é 1.087 pés por segundo, mas a velocidade v aumenta à medida que a temperatura T sobe. Experimentos mostraram que a taxa de variação de v em relação a T é

$$\frac{dv}{dT} = \frac{1087}{2\sqrt{273}}T^{-1/2}$$

onde v está em pés/s e T, em kelvins (K). Encontre uma fórmula que expresse v como uma função de T.

66. Suponha que uma barra de metal uniforme tenha 50 cm de comprimento e esteja isolada lateralmente, enquanto as temperaturas nos extremos sejam mantidas a 25 e 85°C, respectivamente. Suponha que o eixo x seja escolhido conforme a figura abaixo e que a temperatura $T(x)$ em cada ponto x satisfaça a equação

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Encontre $T(x)$ para $0 \le x \le 50$.

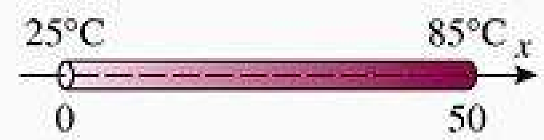


Figura Ex-66

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.2

1. $F'(x) = f(x)$ **2.** (a) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C$ (b) $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$ (c) $\int 4e^{4x}\, dx = e^{4x} + C$

3. (a) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$ (b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cossec} x + C$ (c) $3e^x + 4\ln|x| + C$ (d) $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1} x + C$ **4.** $2x + 1;\ x^2 + x + 3$

5. $0;\ -\frac{2}{3}$

6.3 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Nesta seção estudaremos uma técnica denominada ***substituição****, que muitas vezes pode ser usada para transformar problemas de integração complicados em problemas mais simples.*

■ SUBSTITUIÇÃO *u*

O método da substituição pode ser motivado examinando-se a regra da cadeia do ponto de vista da antidiferenciação. Com esse propósito, suponhamos que F seja uma antiderivada de f e que g seja uma função diferenciável. A derivada de $F(g(x))$ pode, pela regra da cadeia, ser expressa como

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

e, em forma integral, ser escrita como

$$\int F'(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C \tag{1}$$

ou, ainda, uma vez que F é uma antiderivada de f,

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C \tag{2}$$

Para nossos propósitos, será útil tomar $u = g(x)$ e escrever $du/dx = g'(x)$ na forma diferencial $du = g'(x)\, dx$. Com essa notação, (2) pode ser expressa como

$$\int f(u)\, du = F(u) + C \tag{3}$$

O processo de calcular uma integral da forma (2) convertida na forma (3) com a substituição

$$u = g(x) \quad \text{e} \quad du = g'(x)\,dx$$

é denominado ***método da substituição u***. Aqui, nossa ênfase *não* é a interpretação da expressão $du = g'(x)\,dx$. Em vez disso, a notação de diferencial tem a função básica de servir como uma maneira conveniente de executar o método da substituição u. O exemplo a seguir ilustra como funciona o método.

▶ Exemplo 1 Calcule $\int (x^2+1)^{50} \cdot 2x\,dx$.

Solução Se tomarmos $u = x^2 + 1$, então $du/dx = 2x$, o que implica $du = 2x\,dx$. Assim, a integral dada pode ser escrita como

$$\int (x^2+1)^{50} \cdot 2x\,dx = \int u^{50}\,du = \frac{u^{51}}{51} + C = \frac{(x^2+1)^{51}}{51} + C \;◀$$

É importante saber que, no método da substituição u, controlamos a escolha de u, mas, uma vez feita a escolha, perdemos o controle sobre a expressão resultante para du. Assim, no último exemplo, *escolhemos* $u = x^2 + 1$, mas $du = 2x\,dx$ foi *calculado*. Afortunadamente, nossa escolha de u, combinada com o valor calculado de du, funcionou perfeitamente para produzir uma integral envolvendo u que foi fácil de calcular. Porém, em geral, o método da substituição u falhará se o u escolhido e o du calculado produzirem um integrando em que persistem expressões envolvendo x, ou se não soubermos calcular a integral resultante. Assim, por exemplo, a substituição $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ não irá funcionar para a integral

$$\int 2x \operatorname{sen} x^4\,dx$$

pois a substituição dá lugar à integral

$$\int \operatorname{sen} u^2\,du$$

que continua não podendo ser calculada em termos de funções conhecidas.

Em geral, não há um método seguro e rápido para escolher u, e, em alguns casos, nenhuma escolha de u funcionará. Em tais casos, outros métodos serão necessários, alguns dos quais serão discutidos mais adiante. Fazer a escolha apropriada de u virá com a experiência, mas pode ser útil seguir o roteiro abaixo combinado com um domínio das integrais básicas da Tabela 6.2.1.

Roteiro para a Substituição u

Passo 1 Procure alguma composição $f(g(x))$ dentro do integrando para o qual a substituição

$$u = g(x), \quad du = g'(x)\,dx$$

produza uma integral expressa inteiramente em termos de u e de du. Isso pode ou não ser possível.

Passo 2 Se o Passo 1 tiver sido completado com sucesso, tente calcular a integral resultante em termos de u. Novamente, isso pode ou não ser possível.

Passo 3 Se o Passo 2 tiver sido completado com sucesso, substitua u por $g(x)$ para expressar a resposta final em termos de x.

SUBSTITUIÇÕES FACILMENTE IDENTIFICÁVEIS

As substituições mais fáceis ocorrem quando o integrando for a derivada de uma função conhecida, exceto por alguma constante somada ou subtraída da variável independente.

Exemplo 2

$$\int \operatorname{sen}(x+9)\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C = -\cos(x+9) + C$$

$u = x + 9$
$du = 1 \cdot dx = dx$

$$\int (x-8)^{23}\,dx = \int u^{23}\,du = \frac{u^{24}}{24} + C = \frac{(x-8)^{24}}{24} + C$$

$u = x - 8$
$du = 1 \cdot dx = dx$

Uma outra substituição u simples ocorre quando o integrando é a derivada de uma função conhecida, exceto por uma constante que multiplica ou divide a variável independente. O exemplo a seguir ilustra duas maneiras de calcular tais integrais.

Exemplo 3 Calcule $\int \cos 5x\,dx$.

Solução

$$\int \cos 5x\,dx = \int (\cos u)\cdot\frac{1}{5}\,du = \frac{1}{5}\int \cos u\,du = \frac{1}{5}\operatorname{sen} u + C = \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + C$$

$u = 5x$
$du = 5\,dx$ ou $dx = \frac{1}{5}\,du$

Solução alternativa Há uma variação do procedimento anterior que é preferida por alguns. A substituição $u = 5x$ requer $du = 5\,dx$. Se houvesse um fator 5 no integrando, então poderíamos agrupar 5 e o dx para formar o du requerido pela substituição. Como não há tal fator, vamos inserir um fator 5 e compensar pondo na frente da integral um fator de $\frac{1}{5}$. Os cálculos são os seguintes:

$$\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \cos 5x \cdot 5\,dx = \frac{1}{5}\int \cos u\,du = \frac{1}{5}\operatorname{sen} u + C = \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + C$$

$u = 5x$
$du = 5\,dx$

Mais geralmente, a substituição $u = ax + b$, $du = a\,dx$ funciona quando o integrando for uma composição da forma $f(ax + b)$, onde $f(x)$ é uma função fácil de integrar.

Exemplo 4

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{3}x - 8\right)^5} = \int \frac{3\,du}{u^5} = 3\int u^{-5}\,du = -\frac{3}{4}u^{-4} + C = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x - 8\right)^{-4} + C$$

$u = \frac{1}{3}x - 8$
$du = \frac{1}{3}\,dx$ ou $dx = 3\,du$

▶ Exemplo 5 Calcule $\int \frac{dx}{1+3x^2}$.

Solução Substituindo

$$u = \sqrt{3}x, \quad du = \sqrt{3}\,dx$$

obtemos

$$\int \frac{dx}{1+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg } u + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg } (\sqrt{3}x) + C \quad ◀$$

Às vezes, com a ajuda do Teorema 6.2.3, podemos calcular uma integral complicada expressando-a como uma soma de integrais mais simples.

▶ Exemplo 6

$$\int \left(\frac{1}{x} + \sec^2 \pi x\right) dx = \int \frac{dx}{x} + \int \sec^2 \pi x\, dx$$

$$= \ln|x| + \int \sec^2 \pi x\, dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{\pi} \int \sec^2 u\, du$$

$$u = \pi x \qquad du = \pi\, dx \text{ ou } dx = \frac{1}{\pi}\, du$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{\pi} \text{tg } u + C = \ln|x| + \frac{1}{\pi} \text{tg } \pi x + C \quad ◀$$

Os próximos quatro exemplos ilustram a substituição $u = g(x)$ em que $g(x)$ é uma função não-linear.

▶ Exemplo 7 Calcule $\int \text{sen}^2 x \cos x\, dx$.

Solução Fazendo $u = \text{sen } x$, então

$$\frac{du}{dx} = \cos x, \quad \text{logo} \quad du = \cos x\, dx$$

Assim,

$$\int \text{sen}^2 x \cos x\, dx = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C \quad ◀$$

▶ Exemplo 8 Calcule $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solução Fazendo $u = \sqrt{x}$, então

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{logo} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \quad \text{ou} \quad 2\, du = \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Assim,

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int 2e^u\, du = 2\int e^u\, du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C \quad ◀$$

▶ Exemplo 9 Calcule $\int t^4 \sqrt[3]{3-5t^5}\,dt$.

Solução

$$\int t^4 \sqrt[3]{3-5t^5}\,dt = -\frac{1}{25}\int \sqrt[3]{u}\,du = -\frac{1}{25}\int u^{1/3}\,du$$

$u = 3 - 5t^5$
$du = -25t^4\,dt$ ou $-\frac{1}{25}\,du = t^4\,dt$

$$= -\frac{1}{25}\frac{u^{4/3}}{4/3} + C = -\frac{3}{100}\left(3-5t^5\right)^{4/3} + C \quad ◄$$

▶ Exemplo 10 Calcule $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$.

Solução Substituindo

$$u = e^x, \quad du = e^x\,dx$$

obtemos

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc sen}\,u + C = \text{arc sen}\,(e^x) + C \quad ◄$$

■ SUBSTITUIÇÕES MENOS EVIDENTES

O método da substituição é relativamente direto, desde que o integrando contenha uma composição $f(g(x))$ facilmente reconhecível e seu resto seja um múltiplo constante de $g'(x)$. Se isso não ocorrer, o método ainda pode ser aplicável, mas pode exigir mais contas.

▶ Exemplo 11 Calcule $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$.

Solução A composição $\sqrt{x-1}$ sugere a substituição

$$u = x - 1, \quad \text{logo} \quad du = dx \tag{4}$$

Da primeira igualdade em (4),

$$x^2 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$$

logo,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-1}\,dx &= \int (u^2+2u+1)\sqrt{u}\,du = \int (u^{5/2}+2u^{3/2}+u^{1/2})\,du \\ &= \tfrac{2}{7}u^{7/2} + \tfrac{4}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \tfrac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C \quad ◄\end{aligned}$$

▶ Exemplo 12 Calcule $\int \cos^3 x\,dx$.

Solução As únicas composições visíveis no integrando são

$$\cos^3 x = (\cos x)^3 \quad \text{e} \quad \cos^2 x = (\cos x)^2$$

Contudo, nem a substituição $u = \cos x$ nem a substituição $u = \cos^2 x$ funcionam (verifique). Nesse caso, não há substituição apropriada que seja sugerida pela composição contida no

integrando. Por outro lado, note que, na Equação (2), a derivada $g'(x)$ aparece como um fator do integrando. Isso sugere que escrevamos

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx$$

e resolvamos a equação $du = \cos x\, dx$ para $u = \operatorname{sen} x$. Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx = \int (1 - u^2)\, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C \blacktriangleleft$$

▶ **Exemplo 13** Calcule $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} dx$, onde $a \neq 0$ é uma constante.

Solução Uma manipulação algébrica simples e uma substituição u apropriada nos permitem usar a Fórmula 12 na Tabela 6.2.1.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dx/a}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C \blacktriangleleft$$

$u = x/a$
$du = dx/a$

O método do Exemplo 13 leva às seguintes generalizações das Fórmulas 12, 13 e 14 na Tabela 6.2.1, para $a > 0$:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C \tag{5}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C \tag{6}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \left|\frac{u}{a}\right| + C \tag{7}$$

▶ **Exemplo 14** Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$.

Solução Aplicando (6) com $u = x$ e $a = \sqrt{2}$, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{2}} + C \blacktriangleleft$$

■ INTEGRAÇÃO USANDO SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

O advento dos sistemas algébricos computacionais tornou possível calcular vários tipos de integrais que dariam muito trabalho se feitos à mão. Por exemplo, em uma calculadora manual, o *Derive* calculou em questão de segundos

$$\int \frac{5x^2}{(1 + x)^{1/3}} dx = \frac{3(x + 1)^{2/3}(5x^2 - 6x + 9)}{8} + C$$

Já o *Mathematica*, em um computador, leva menos tempo ainda. Porém, da mesma forma que não se quer depender de uma calculadora para calcular 2 + 2, também não se quer de-

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Utilize um CAS para calcular as integrais dos exemplos desta seção. Se a resposta do CAS diferir da do livro, confirme algebricamente se as duas coincidem. Explore o efeito de usar o CAS para simplificar as expressões produzidas para as integrais.

pender de um CAS para integrar uma função simples como $f(x) = x^2$. Assim, mesmo que tenhamos um CAS, é desejável que desenvolvamos um nível razoável de competência no cálculo de integrais básicas. Além disso, as técnicas matemáticas introduzidas no cálculo de integrais básicas são precisamente as mesmas que os CAS utilizam para computar as integrais mais complicadas.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.3 (*Ver página 373 para respostas.*)

1. Indique a substituição u.

(a) $\int 3x^2(1+x^3)^{25}\,dx = \int u^{25}\,du$ se $u =$ ________
e $du =$ ________.

(b) $\int 2x \operatorname{sen} x^2\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du$ se $u =$ ________
e $du =$ ________.

(c) $\int \frac{18x}{1+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$ se $u =$ ________
e $du =$ ________.

(d) $\int \frac{3}{1+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du$ se $u =$ ________
e $du =$ ________.

2. Calcule as integrais do Exercício 1.

3. Obtenha o integrando que falta na integral da direita e que corresponda à substituição u indicada.

(a) $\int 5(5x-3)^{-1/3}\,dx = \int$ ________ du; $u = 5x - 3$

(b) $\int (3 - \operatorname{tg} x)\sec^2 x\,dx = \int$ ________ du; $u = 3 - \operatorname{tg} x$

(c) $\int \frac{\sqrt[3]{8+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int$ ________ du; $u = 8 + \sqrt{x}$

(d) $\int e^{3x}\,dx = \int$ ________ du; $u = 3x$

4. Calcule as integrais do Exercício 3.

EXERCÍCIOS 6.3 Recurso Gráfico C CAS

1-6 Calcule as integrais usando a substituição indicada.

1. (a) $\int 2x(x^2+1)^{23}\,dx$; $u = x^2 + 1$

(b) $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\,dx$; $u = \cos x$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \sqrt{x}\,dx$; $u = \sqrt{x}$

(d) $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{4x^2+5}}$; $u = 4x^2 + 5$

2. (a) $\int \sec^2(4x+1)\,dx$; $u = 4x + 1$

(b) $\int y\sqrt{1+2y^2}\,dy$; $u = 1 + 2y^2$

(c) $\int \sqrt{\operatorname{sen} \pi\theta} \cos \pi\theta\,d\theta$; $u = \operatorname{sen} \pi\theta$

(d) $\int (2x+7)(x^2+7x+3)^{4/5}\,dx$; $u = x^2 + 7x + 3$

3. (a) $\int \operatorname{cotg} x \operatorname{cossec}^2 x\,dx$; $u = \operatorname{cotg} x$

(b) $\int (1 + \operatorname{sen} t)^9 \cos t\,dt$; $u = 1 + \operatorname{sen} t$

(c) $\int \cos 2x\,dx$; $u = 2x$ (d) $\int x \sec^2 x^2\,dx$; $u = x^2$

4. (a) $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$; $u = 1 + x$

(b) $\int [\operatorname{cossec}(\operatorname{sen} x)]^2 \cos x\,dx$; $u = \operatorname{sen} x$

(c) $\int \operatorname{sen}(x - \pi)\,dx$; $u = x - \pi$

(d) $\int \frac{5x^4}{(x^5+1)^2}\,dx$; $u = x^5 + 1$

5. (a) $\int \frac{dx}{x \ln x}$; $u = \ln x$

(b) $\int e^{-5x}\,dx$; $u = -5x$

(c) $\int \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{1 + \cos 3\theta}\,d\theta$; $u = 1 + \cos 3\theta$

(d) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$; $u = 1 + e^x$

6. (a) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$; $u = x^3$

(b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$; $u = \ln x$

(c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$; $u = 3x$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; $u = \sqrt{x}$

ENFOCANDO CONCEITOS

7. Explique a relação entre a regra da cadeia para a derivação e o método da substituição u para a integração.

8. Explique como a substituição $u = ax + b$ ajuda a efetuar uma integração em que o integrando é $f(ax + b)$ e $f(x)$ é uma função fácil de integrar.

9-50 Calcule as integrais usando uma substituição apropriada.

9. $\int (4x - 3)^9\, dx$ **10.** $\int x^3\sqrt{5 + x^4}\, dx$

11. $\int \operatorname{sen} 7x\, dx$ **12.** $\int \cos\frac{x}{3}\, dx$

13. $\int \sec 4x \operatorname{tg} 4x\, dx$ **14.** $\int \sec^2 5x\, dx$

15. $\int e^{2x}\, dx$ **16.** $\int \frac{dx}{2x}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ **18.** $\int \frac{dx}{1 + 16x^2}$

19. $\int t\sqrt{7t^2 + 12}\, dt$ **20.** $\int \frac{x}{\sqrt{4 - 5x^2}}\, dx$

21. $\int \frac{6}{(1 - 2x)^3}\, dx$ **22.** $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}}\, dx$

23. $\int \frac{x^3}{(5x^4 + 2)^3}\, dx$ **24.** $\int \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{3x^2}\, dx$

25. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$ **26.** $\int x^3 e^{x^4}\, dx$

27. $\int x^2 e^{-2x^3}\, dx$ **28.** $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx$

29. $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$ **30.** $\int \frac{t}{t^4 + 1}\, dt$

31. $\int \frac{\operatorname{sen}(5/x)}{x^2}\, dx$ **32.** $\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$

33. $\int \cos^4 3t \operatorname{sen} 3t\, dt$ **34.** $\int \cos 2t \operatorname{sen}^5 2t\, dt$

35. $\int x \sec^2(x^2)\, dx$ **36.** $\int \frac{\cos 4\theta}{(1 + 2\operatorname{sen} 4\theta)^4}\, d\theta$

37. $\int \cos 4\theta\sqrt{2 - \operatorname{sen} 4\theta}\, d\theta$ **38.** $\int \operatorname{tg}^3 5x \sec^2 5x\, dx$

39. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$ **40.** $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta + 1}\, d\theta$

41. $\int \sec^3 2x \operatorname{tg} 2x\, dx$ **42.** $\int [\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta)]\cos\theta\, d\theta$

43. $\int \frac{dx}{e^x}$ **44.** $\int \sqrt{e^x}\, dx$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\, e^{(2\sqrt{x})}}$ **46.** $\int \frac{e^{\sqrt{2y+1}}}{\sqrt{2y + 1}}\, dy$

47. $\int \frac{y}{\sqrt{2y + 1}}\, dx$ **48.** $\int x\sqrt{4 - x}\, dx$

49. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta\, d\theta$

50. $\int \sec^4 3\theta\, d\theta$ [*Sugestão*: Use uma identidade trigonométrica.]

51-54 Calcule cada integral modificando, inicialmente, o formato do integrando e então fazendo uma substituição apropriada.

51. $\int \frac{t + 1}{t}\, dt$ **52.** $\int e^{2\ln x}\, dx$

53. $\int [\ln(e^x) + \ln(e^{-x})]\, dx$ **54.** $\int \operatorname{cotg} x\, dx$

55-56 Calcule as integrais com a ajuda das Fórmulas (5), (6) e (7).

55. (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ (b) $\int \frac{dx}{5 + x^2}$ (c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - \pi}}$

56. (a) $\int \frac{e^x}{4 + e^{2x}}\, dx$ (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$ (c) $\int \frac{dy}{y\sqrt{5y^2 - 3}}$

57-59 Calcule as integrais supondo que n é um inteiro positivo e que $b \neq 0$.

57. $\int (a + bx)^n\, dx$ **58.** $\int \sqrt[n]{a + bx}\, dx$

59. $\int \operatorname{sen}^n(a + bx)\cos(a + bx)\, dx$

C **60.** Use um CAS para verificar as respostas obtidas nos Exercícios 57 a 59. Se a resposta produzida pelo CAS não estiver de acordo com a sua, mostre que elas são equivalentes. [*Sugestão*: Usuários do *Mathematica* podem achar muito útil aplicar o comando “Simplify” à resposta.]

ENFOCANDO CONCEITOS

61. (a) Calcular a integral $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por dois métodos: primeiro fazendo $u = \operatorname{sen} x$ e, depois, $u = \cos x$.

(b) Explique por que as duas respostas aparentemente diferentes de (a) são realmente equivalentes.

62. (a) Calcule a integral $\int (5x - 1)^2\, dx$ por dois métodos: primeiro elevando ao quadrado e integrando e, depois, fazendo $u = 5x - 1$.

(b) Explique por que as duas respostas aparentemente diferentes em (a) são realmente equivalentes.

63-66 Resolva os problemas de valor inicial.

63. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{5x+1},\ y(3) = -2$

64. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \operatorname{sen} 3x,\ y(\pi/3) = 0$

65. $\dfrac{dy}{dt} = -e^{2t},\ y(0) = 6$

66. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{25+9t^2},\ y\left(-\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{\pi}{30}$

67. (a) Calcule $\int [x/\sqrt{x^2+1}]\,dx$.

(b) Use um recurso gráfico para gerar algumas curvas integrais típicas de $f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$ sobre o intervalo $(-5, 5)$.

68. (a) Calcule $\int [x/(x^2+1)]\,dx$.

(b) Use um recurso gráfico para gerar algumas curvas integrais típicas de $f(x) = x/(x^2+1)$ sobre o intervalo $(-5, 5)$.

69. Encontre uma função f tal que a inclinação da reta tangente em um ponto (x, y) da curva $y = f(x)$ é $\sqrt{3x+1}$, e a curva passa pelo ponto $(0, 1)$.

70. Suponha que uma população p de rãs em um lago está estimada no começo de 2005 em 100.000 e que o modelo de crescimento para a população $p(t)$ supõe que a taxa de crescimento (em milhares) após t anos será de $p'(t) = (3 + 0{,}12t)^{3/2}$. Estime a população projetada para o começo do ano 2010.

71. Deduza a Fórmula (6) de integração.

72. Deduza a Fórmula (7) de integração.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.3

1. (a) $1 + x^3$; $3x^2\,dx$ (b) x^2; $2x\,dx$ (c) $1 + 9x^2$; $18x\,dx$ (d) $3x$; $3\,dx$ **2.** (a) $\frac{1}{26}(1+x^3)^{26} + C$ (b) $-\cos x^2 + C$ (c) $\ln(1+9x^2) + C$ (d) $\operatorname{arc\,tg} 3x + C$ **3.** (a) $u^{-1/3}$ (b) $-u$ (c) $2\sqrt[3]{u}$ (d) $\frac{1}{3}e^u$ **4.** (a) $\frac{3}{2}(5x-3)^{2/3} + C$ (b) $-\frac{1}{2}(3 - \operatorname{tg} x)^2 + C$ (c) $\frac{3}{2}(8+\sqrt{x})^{4/3} + C$ (d) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$

6.4 A DEFINIÇÃO DE ÁREA COMO UM LIMITE; NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO

Nosso objetivo principal nesta seção é usar o método do retângulo para obtermos uma definição matematicamente precisa da "área sob uma curva". Para simplificar nossos cálculos, começaremos discutindo uma notação útil para expressar somas extensas em um formato compacto.

■ A NOTAÇÃO SIGMA

A notação a ser discutida nesta seção é denominada ***notação sigma*** ou ***notação de somatório***, pois utiliza-se da letra grega maiúscula Σ (sigma). Para ilustrar como essa notação funciona, considere a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

na qual cada termo é da forma k^2, onde k é um dos inteiros de 1 a 5. Com a notação sigma, essa soma pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

a qual se lê "somatório de k^2, para k variando de 1 a 5". A notação nos diz para formar as somas dos termos que resultam quando substituímos k por inteiros sucessivos na expressão k^2, começando com $k = 1$ e acabando com $k = 5$.

Em geral, se $f(k)$ for uma função de k e se m e n forem tais que $m \le n$, então

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \tag{1}$$

denota a soma dos termos que resulta quando substituímos k por inteiros sucessivos, começando com $k = m$ e acabando com $k = n$ (Figura 6.4.1).

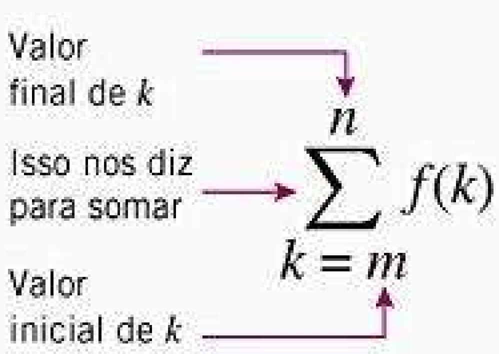


Figura 6.4.1

▶ **Exemplo 1**

$$\sum_{k=4}^{8} k^3 = 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3$$

$$\sum_{k=1}^{5} 2k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$\sum_{k=0}^{5} (2k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k (2k+1) = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11$$

$$\sum_{k=-3}^{1} k^3 = (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 = -27 - 8 - 1 + 0 + 1$$

$$\sum_{k=1}^{3} k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} + 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} + 3\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}$$ ◀

Os números m e n em (1) são chamados, respectivamente, de ***limites inferior*** e ***superior do somatório***; a letra k é chamada de ***índice do somatório***. Não é essencial o uso de k como índice de somatório; qualquer outra letra pode ser usada. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}, \quad \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{j} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n}$$

todos denotam a soma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

Se os limites inferior e superior do somatório forem iguais, então a "soma" em (1) se reduz a um único termo. Por exemplo,

$$\sum_{k=2}^{2} k^3 = 2^3 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Nas somas

$$\sum_{i=1}^{5} 2 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{2} x^3$$

a expressão à direita de $\sum$ não envolve o índice do somatório. Em tal caso, tomamos todos os termos da soma como sendo iguais, um para cada valor admissível do índice do somatório. Assim,

$$\sum_{i=1}^{5} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{2} x^3 = x^3 + x^3 + x^3$$

■ MUDANDO OS LIMITES DE SOMATÓRIOS

Uma soma pode ser escrita de mais de uma maneira usando a notação sigma com limites de somatórios diferentes e somandos correspondentemente diferentes. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{j=0}^{4} (2j+2) = \sum_{k=3}^{7} (2k-4)$$

Às vezes queremos mudar a notação sigma de uma dada soma para outra, com diferentes limites no somatório.

▶ Exemplo 2 Expresse

$$\sum_{k=3}^{7} 5^{k-2}$$

com a notação de somatório de forma que o limite inferior seja 0 em vez de 3.

Solução

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{7} 5^{k-2} &= 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 \\ &= 5^{0+1} + 5^{1+1} + 5^{2+1} + 5^{3+1} + 5^{4+1} \\ &= \sum_{j=0}^{4} 5^{j+1} = \sum_{k=0}^{4} 5^{k+1} \quad ◀\end{aligned}$$

■ PROPRIEDADES DE SOMAS

Muitas vezes é conveniente, ao enunciar propriedades gerais de somas, utilizar uma letra subscrita como a_k em vez da notação funcional $f(k)$. Por exemplo,

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{j=1}^{5} a_j = \sum_{k=-1}^{3} a_{k+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=-1}^{n-2} a_{k+2}$$

Nossas primeiras propriedades dão regras básicas para a manipulação de somas.

6.4.1 TEOREMA

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ *(se c não depender de k)*

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

Vamos provar (a) e (b) e deixar (c) como exercício.

DEMONSTRAÇÃO (*a*)

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

DEMONSTRAÇÃO (*b*)

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad ■$$

Em palavras, podemos enunciar o Teorema 6.4.1 como segue.

(*a*) *Um fator constante pode ser movido para fora do somatório.*
(*b*) *O somatório se distribui sobre somas.*
(*c*) *O somatório se distribui sobre diferenças.*

FÓRMULAS DE SOMATÓRIOS

O teorema a seguir enumera algumas fórmulas úteis de somas de potências de inteiros. As deduções dessas fórmulas podem ser encontradas no Apêndice C, no Volume 2.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os CAS fornecem meios para encontrar fórmulas fechadas como as do Teorema 6.4.2. Use um CAS para confirmar as fórmulas daquele teorema e, então, encontre fórmulas fechadas para

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} k^5$$

6.4.2 TEOREMA

(a) $$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

► Exemplo 3 Calcule $\sum_{k=1}^{30} k(k+1)$.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Muitos recursos computacionais fornecem alguma maneira de calcular somas expressas na notação sigma. Se o leitor dispuser de um desses recursos, use-o para conferir a veracidade dos resultados do Exemplo.

Solução

$$\sum_{k=1}^{30} k(k+1) = \sum_{k=1}^{30}(k^2 + k) = \sum_{k=1}^{30} k^2 + \sum_{k=1}^{30} k$$

$$= \frac{30(31)(61)}{6} + \frac{30(31)}{2} = 9920$$

Teorema 6.4.2(*a*), (*b*) ◄

Em fórmulas tais como

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ou} \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

o lado esquerdo da igualdade é chamado de uma soma em ***forma aberta***, enquanto o lado direito é chamado de ***forma fechada***; a forma aberta indica os termos a serem somados, enquanto a fechada é uma fórmula explícita para a soma.

▶ Exemplo 4 Expresse $\sum_{k=1}^{n}(3+k)^2$ em forma fechada.

Solução

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3+k)^2 &= 4^2+5^2+\cdots+(3+n)^2\\ &= [1^2+2^2+3^3+4^2+5^2+\cdots+(3+n)^2]-[1^2+2^2+3^2]\\ &= \left(\sum_{k=1}^{3+n}k^2\right)-14\\ &= \frac{(3+n)(4+n)(7+2n)}{6}-14=\frac{1}{6}(73n+21n^2+2n^3)\end{aligned}$$ ◀

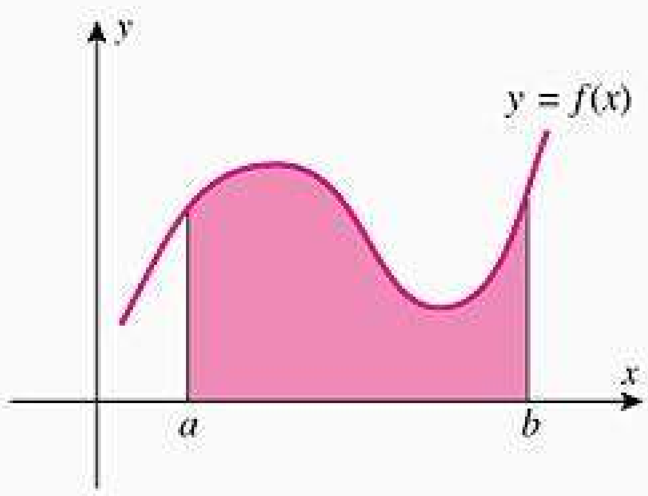


Figura 6.4.2

■ A DEFINIÇÃO DE ÁREA

Passamos, agora, ao problema de dar uma definição precisa do que significa a "área sob uma curva". Especificamente, suponha que a função f seja contínua e não-negativa no intervalo $[a, b]$ e que R denote a região delimitada inferiormente pelo eixo x, lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva $y = f(x)$ (Figura 6.4.2). Usando o método dos retângulos da Seção 6.1, podemos motivar a definição da área de R como segue.

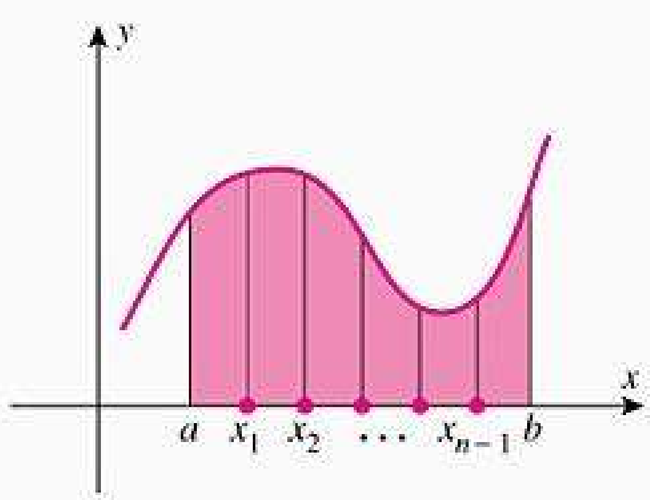


Figura 6.4.3

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais inserindo $n - 1$ pontos igualmente espaçados entre a e b e denotamos esses pontos por

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

(Figura 6.4.3). Cada um desses subintervalos tem comprimento $(b - a)/n$, que costuma ser denotado por

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

- Acima de cada subintervalo construímos um retângulo cuja altura é o valor de f em um ponto arbitrariamente selecionado no subintervalo. Assim, se

$$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$$

denotam os pontos selecionados nos subintervalos, então os retângulos têm alturas $f(x_1^*), f(x_2^*), \ldots, f(x_n^*)$ e áreas

$$f(x_1^*)\Delta x, \quad f(x_2^*)\Delta x, \ldots, \quad f(x_n^*)\Delta x$$

(Figura 6.4.4).

- A união dos retângulos forma uma região R_n, cuja área pode ser considerada como uma aproximação da área A da região R; ou seja,

$$A = \text{área}\,(R) \approx \text{área}\,(R_n) = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

(Figura 6.4.5). Isso pode ser expresso mais compactamente na notação sigma como

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

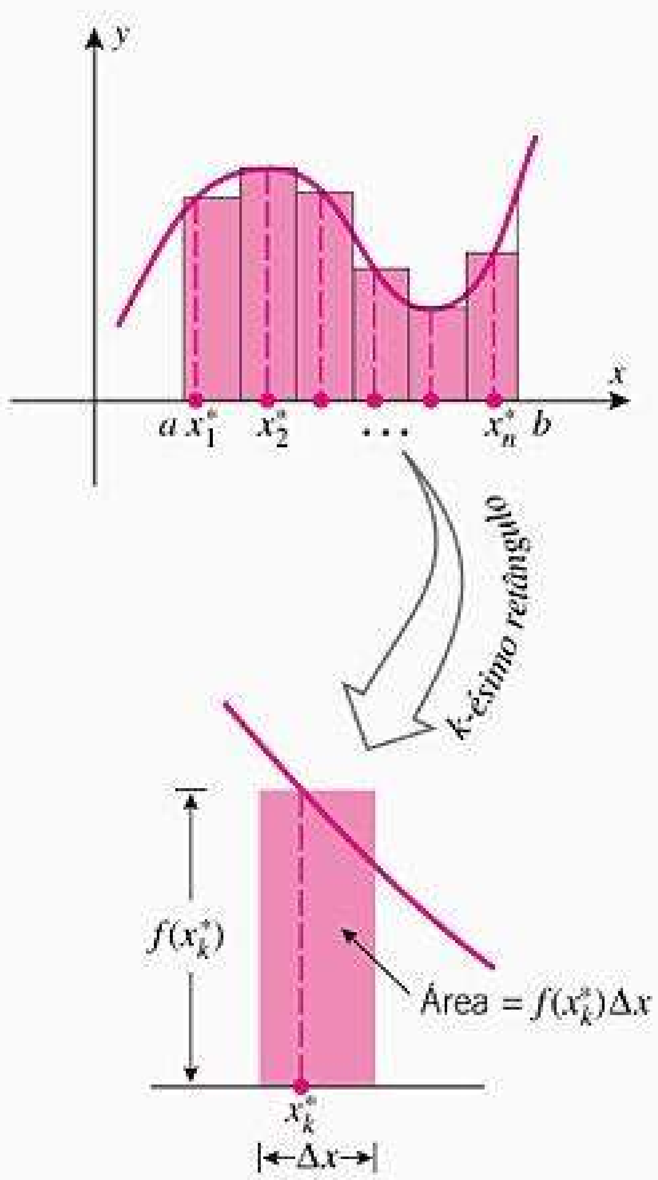


Figura 6.4.4

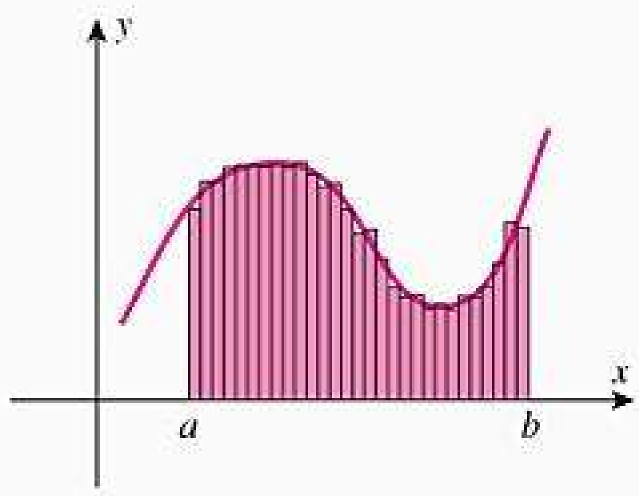


Figura 6.4.5 área $(R_n) \approx$ área (R)

O limite em (2) deve ser interpretado assim: dado um número $\epsilon > 0$ qualquer, a desigualdade

$$\left| A - \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \right| < \epsilon$$

vale para n suficientemente grande, independentemente da escolha dos pontos x_k^*.

- Repetimos o processo usando cada vez mais subintervalos e definimos a área R como o "limite" das aproximações dadas pelas áreas das regiões R_n quando n cresce sem parar. Assim, definimos a área A por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Resumindo, temos a definição seguinte.

6.4.3 DEFINIÇÃO (***Área Sob uma Curva***) Se a função f for contínua em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ para cada x em $[a, b]$, então a ***área*** sob a curva $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \qquad (2)$$

Há uma diferença de interpretação entre $\lim_{n \to +\infty}$ e $\lim_{x \to +\infty}$, onde n representa um inteiro positivo e x representa um número real. Adiante estudaremos detalhadamente os limites do tipo $\lim_{n \to +\infty}$, mas por enquanto basta dizer que as técnicas computacionais que estivemos utilizando para os limites do tipo $\lim_{x \to +\infty}$ também valem para $\lim_{n \to +\infty}$.

Os valores de $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ em (2) podem ser escolhidos arbitrariamente, portanto é concebível que escolhas distintas desses valores possam produzir valores distintos de A. Se isso fosse possível, então a Definição 6.4.3 não seria uma definição aceitável de área. Felizmente, isso não ocorre; prova-se em disciplinas avançadas que, se f for contínua (como estamos supondo), então resulta o mesmo valor de A, independentemente da escolha dos pontos x_k^*. Na prática, esses pontos são escolhidos de alguma forma sistemática; algumas escolhas comuns consistem em tomar sempre

- o extremo esquerdo de cada subintervalo, ou
- o extremo direito de cada subintervalo, ou
- o ponto médio de cada subintervalo.

Para sermos mais específicos, suponha que o intervalo $[a, b]$ tenha sido dividido em n partes iguais de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ pelos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ e sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ (Figura 6.4.6). Então,

$$x_k = a + k\Delta x \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Assim, as escolhas do extremo esquerdo, do extremo direito e do ponto médio para $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ são dadas por

$$x_k^* = x_{k-1} = a + (k-1)\Delta x \quad \boxed{\text{Extremo esquerdo}} \qquad (3)$$

$$x_k^* = x_k = a + k\Delta x \quad \boxed{\text{Extremo direito}} \qquad (4)$$

$$x_k^* = \tfrac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) = a + \left(k - \tfrac{1}{2}\right)\Delta x \quad \boxed{\text{Ponto médio}} \qquad (5)$$

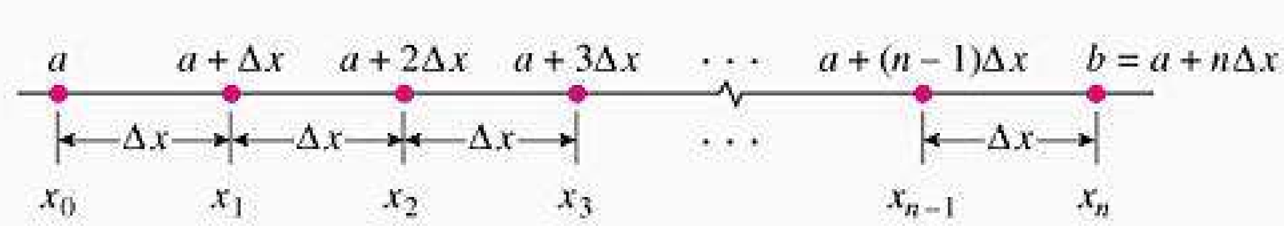


Figura 6.4.6

Sempre que for aplicável, escolheremos o método da antiderivada para encontrar áreas. Contudo, os exemplos a seguir ajudam a reforçar as idéias que acabamos de discutir.

▶ Exemplo 5 Use a Definição 6.4.3, com x_k^* dado pelo extremo direito de cada subintervalo, para encontrar a área entre o gráfico de $f(x) = x^2$ e o intervalo [0, 1].

Solução O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

de modo que segue por (4) que

$$x_k^* = a + k\Delta x = \frac{k}{n}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}(x_k^*)^2\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \qquad \text{Parte } (b) \text{ do Teorema 6.4.2}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

do que segue que

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

Observe que isso é consistente com os resultados na Tabela 6.1.2 e a discussão a respeito na Seção 6.1. ◀

Na resolução do Exemplo 5, utilizamos uma das fórmulas de "formas fechadas" de somatórios do Teorema 6.4.2. Os resultados a seguir resumem algumas conseqüências do Teorema 6.4.2 que podem ajudar no cálculo de áreas pela Definição 6.4.3.

6.4.4 TEOREMA

(*a*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = 1$ (*b*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}$

(*c*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{3}$ (*d*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{1}{4}$

Deixamos a cargo do leitor demonstrar o Teorema 6.4.4.

▶ Exemplo 6 Use a Definição 6.4.3, com x_k^* dado pelo ponto médio de cada subintervalo, para encontrar a área abaixo da parábola $y = f(x) = 9 - x^2$ e acima do intervalo [0, 3].

Solução O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

de modo que segue por (5) que

$$x_k^* = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x = \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x_k^*)\Delta x = [9 - (x_k^*)^2]\Delta x &= \left[9 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) \\ &= \left[9 - \left(k^2 - k + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{n^2}\right)\right]\left(\frac{3}{n}\right) \\ &= \frac{27}{n} - \frac{27}{n^3}k^2 + \frac{27}{n^3}k - \frac{27}{4n^3} \end{aligned}$$

do que segue que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3}k^2 + \frac{27}{n^3}k - \frac{27}{4n^3}\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} 27\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{1}{4n^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1\right)\right] \\ &= 27\left[1 - \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot 1\right] = 18 \end{aligned}$$

Teorema 6.4.4

■ ÁREA LÍQUIDA COM SINAL

Na Definição 6.4.3, supomos que f seja contínua e não-negativa no intervalo $[a, b]$. Se f for contínua e tomar tanto valores positivos quanto negativos em $[a, b]$, então o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \qquad (6)$$

não mais representa a área entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ no eixo x; o limite representa agora uma diferença de áreas – a área acima de $[a, b]$ e abaixo da curva $y = f(x)$ menos a área abaixo de $[a, b]$ e acima da curva $y = f(x)$. Chamamos isso de ***área líquida com sinal*** entre o gráfico de $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$. Por exemplo, na Figura 6.4.7a, a área líquida com sinal entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é

$$(A_I + A_{III}) - A_{II} = [\text{área acima de } [a, b]] - [\text{área abaixo de } [a, b]]$$

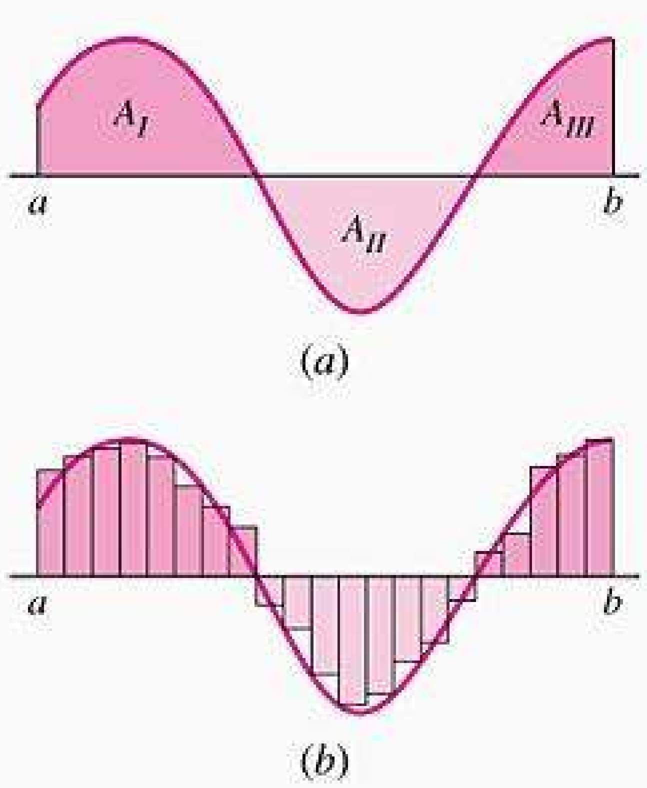


Figura 6.4.7

Para explicar por que o limite em (6) representa essa área líquida com sinal, vamos subdividir o intervalo $[a, b]$ da Figura 6.4.7a em n subintervalos iguais e examinar os termos da soma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \qquad (7)$$

Se $f(x_k^*)$ for positivo, então o produto $f(x_k^*)\Delta x$ representa a área do retângulo com altura $f(x_k^*)$ e base Δx (os retângulos azul escuro na Figura 6.4.7b). Porém, se $f(x_k^*)$ for negativo, então o produto $f(x_k^*)\Delta x$ é o *negativo* da área do retângulo com altura $|f(x_k^*)|$ e base Δx (os retângulos azul claro na Figura 6.4.7b). Assim, (7) representa a área total retângulos azul escuro menos a área total dos retângulos azul claro. À medida que n cresce, os retângulos azul escuro pre-

enchem as regiões com áreas A_I e A_{III} e os azul claro, com A_{II}, o que explica por que o limite em (6) representa a área total com sinal entre $y = f(x)$ e $[a, b]$. Formalizamos isso na definição seguinte.

Assim como na Definição 6.4.3, pode ser provado que sempre existe o limite em (8) e que o mesmo valor de A resulta, independentemente da escolha dos pontos nos subintervalos.

6.4.5 DEFINIÇÃO (***Área Líquida com Sinal***) Se a função f for contínua em $[a, b]$, então a ***área líquida com sinal*** A entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \tag{8}$$

▶ Exemplo 7 Use a Definição 6.4.5, com x_k^* dado pelo extremo esquerdo de cada subintervalo, para encontrar a área líquida com sinal entre o gráfico de $y = f(x) = x - 1$ e o intervalo $[0, 2]$.

Solução O comprimento de cada subintervalo é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

de modo que segue por (3) que

$$x_k^* = a + (k-1)\Delta x = (k-1)\left(\frac{2}{n}\right)$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}(x_k^* - 1)\Delta x = \sum_{k-1}^{n}\left[(k-1)\left(\frac{2}{n}\right) - 1\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{4}{n^2}\right)k - \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n}\right]$$

do que segue que

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \lim_{n \to +\infty}\left[4\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{4}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1\right) - 2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1\right)\right]$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right) - 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \qquad \boxed{\text{Teorema 6.4.4}}$$

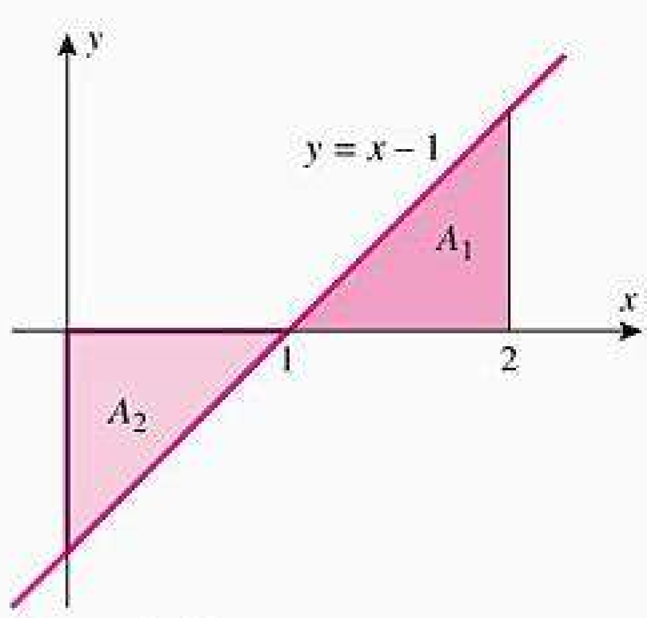


Figura 6.4.8

Como a área líquida com sinal é nula, a área A_1 abaixo do gráfico de f e acima do intervalo $[0, 2]$ deve ser igual à área A_2 acima do gráfico de f e abaixo do intervalo $[0,2]$. Essa conclusão está de acordo com o gráfico de f mostrado na Figura 6.4.8. ◀

■ APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS DA ÁREA

Embora o método da antiderivada, discutido na Seção 6.1 (e a ser estudado com mais detalhes adiante), seja geralmente mais eficiente do que a Definição 6.4.3 para calcular áreas exatas, essa definição é útil para *aproximar* áreas. Segue dessa definição que, se n é grande, então

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \Delta x \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \Delta x[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)] \tag{9}$$

é uma boa aproximação da área A. Se uma das Fórmulas (3), (4) ou (5) for usada para escolher os pontos x_k^* em (9), então dizemos que o resultado é a ***aproximação pelo extremo esquerdo***, a ***aproximação pelo extremo direito*** ou a ***aproximação pelo ponto médio*** da área A, respectivamente (Figura 6.4.9).

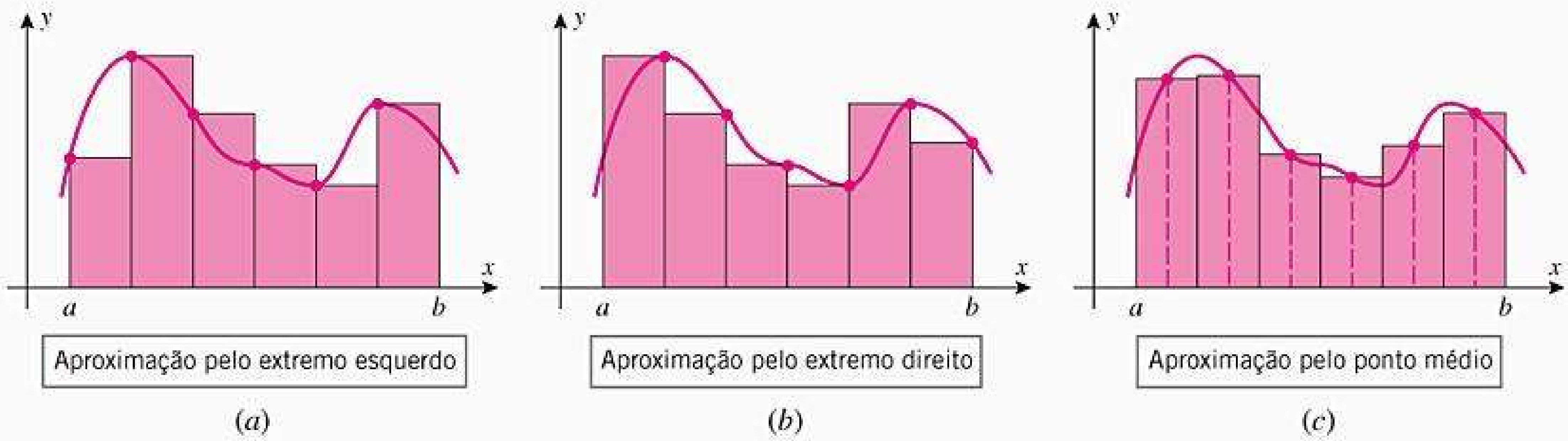


Figura 6.4.9

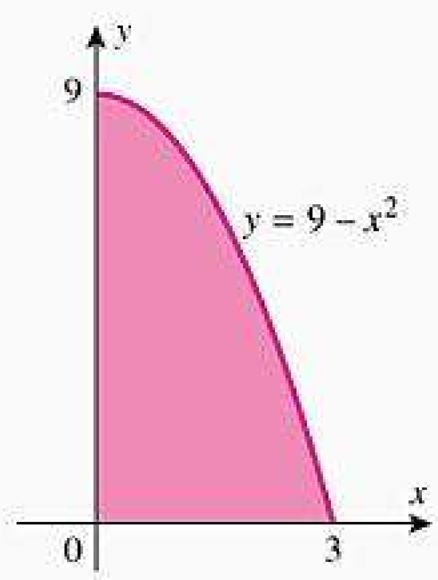


Figura 6.4.10

▶ Exemplo 8 Encontre as aproximações pelo extremo esquerdo, pelo extremo direito e pelo ponto médio da área abaixo da curva $y = 9 - x^2$ acima do intervalo $[0, 3]$, com $n = 10$, $n = 20$ e $n = 50$ (Figura 6.4.10). Compare a precisão desses três métodos.

Solução Os detalhes dos cálculos para o caso $n = 10$ estão exibidos com seis casas decimais na Tabela 6.4.1, e os resultados de todos os cálculos estão dados na Tabela 6.4.2. No Exemplo 6, mostramos que a área exata é 18 (ou seja, 18 unidades de área), de modo que, nesse caso, a aproximação pelo ponto médio é mais precisa do que as aproximações pelos extremos. Isso também é evidente geometricamente a partir da Figura 6.4.11. Nessa figura, também podemos ver que a aproximação pelo extremo esquerdo superestima a área e a aproximação pelo extremo direito a subestima. Adiante neste texto, investigaremos o erro que resulta quando a área é aproximada pela regra do ponto médio. ◀

Tabela 6.4.1

$n = 10,\ \Delta x = (b - a)/n = (3 - 0)/10 = 0{,}3$

	APROXIMAÇÃO PELO EXTREMO ESQUERDO		APROXIMAÇÃO PELO EXTREMO DIREITO		APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO	
k	x_k^*	$9 - (x_k^*)^2$	x_k^*	$9 - (x_k^*)^2$	x_k^*	$9 - (x_k^*)^2$
1	0,0	9,000000	0,3	8,910000	0,15	8,977500
2	0,3	8,910000	0,6	8,640000	0,45	8,797500
3	0,6	8,640000	0,9	8,190000	0,75	8,437500
4	0,9	8,190000	1,2	7,560000	1,05	7,897500
5	1,2	7,560000	1,5	6,750000	1,35	7,177500
6	1,5	6,750000	1,8	5,760000	1,65	6,277500
7	1,8	5,760000	2,1	4,590000	1,95	5,197500
8	2,1	4,590000	2,4	3,240000	2,25	3,937500
9	2,4	3,240000	2,7	1,710000	2,55	2,497500
10	2,7	1,710000	3,0	0,000000	2,85	0,877500
		64,350000		55,350000		60,075000
$\Delta x \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)$		(0,3)(64,350000) = 19,305000		(0,3)(55,350000) = 16,605000		(0,3)(60,075000) = 18,022500

Tabela 6.4.2

n	APROXIMAÇÃO PELO EXTREMO ESQUERDO	APROXIMAÇÃO PELO EXTREMO DIREITO	APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO
10	19,305000	16,605000	18,022500
20	18,663750	17,313750	18,005625
50	18,268200	17,728200	18,000900

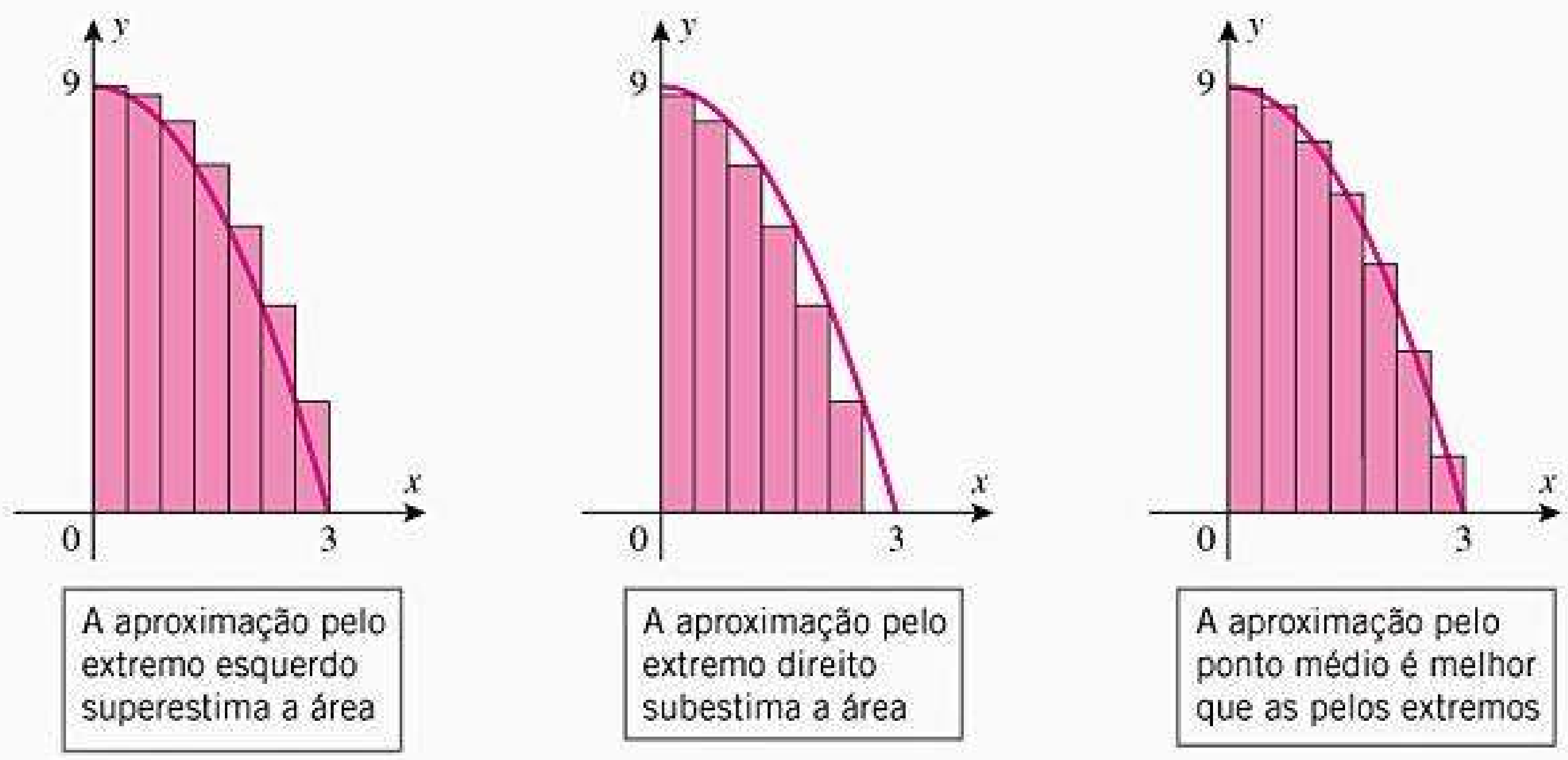


Figura 6.4.11

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.4 (*Ver página 386 para respostas.*)

1. (a) Escreva a soma de duas maneiras:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\sum_{k=1}^{4}______ = \sum_{j=0}^{3}______$$

(b) Expresse a soma $10+10^2+10^3+10^4+10^5$ usando notação de somatório.

2. Expresse a soma em forma fechada.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k+1)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

3. Divida o intervalo [1, 3] em $n = 4$ subintervalos de igual tamanho.

(a) Cada subintervalo tem comprimento __________.

(b) Os extremos esquerdos dos subintervalos são __________.

(c) Os pontos médios dos subintervalos são __________.

(d) Os extremos direitos dos subintervalos são __________.

4. Encontre a aproximação pelo extremo esquerdo da área entre a curva $y = x^2$ e o intervalo [1, 3] usando $n = 4$ subdivisões iguais do intervalo.

5. A aproximação pelo extremo direito da área líquida com sinal entre $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6k+1}{n^2}$$

Encontre o valor exato dessa área líquida com sinal.

EXERCÍCIOS 6.4 [C] CAS

1. Calcule

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^3$ (b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{6}(3j-1)$ (c) $\displaystyle\sum_{i=-4}^{1}(i^2-i)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{5} 1$ (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(-2)^k$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \operatorname{sen} n\pi$

2. Calcule

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{5}(-1)^j$ (c) $\displaystyle\sum_{i=7}^{20}\pi^2$

(d) $\displaystyle\sum_{m=3}^{5} 2^{m+1}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\sqrt{n}$ (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\cos k\pi$

3-8 Escreva cada expressão com a notação de somatório, mas não a calcule.

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + 10$

4. $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot 20$

5. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 20$ **6.** $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 15$

7. $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11$ **8.** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

9. (a) Expresse com a notação de somatório a soma dos inteiros pares de 2 a 100.
(b) Expresse com a notação de somatório a soma dos inteiros ímpares de 1 a 99.

10. Expresse com a notação de somatório
(a) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5$
(b) $-b_0 + b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5$
(c) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$
(d) $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$

11-16 Use o Teorema 6.4.2 para calcular as somas e verifique suas respostas usando um recurso computacional.

11. $\sum_{k=1}^{100} k$ **12.** $\sum_{k=1}^{100} (7k + 1)$ **13.** $\sum_{k=1}^{20} k^2$

14. $\sum_{k=4}^{20} k^2$ **15.** $\sum_{k=1}^{30} k(k-2)(k+2)$

16. $\sum_{k=1}^{6} (k - k^3)$

17-20 Expresse as somas em formas fechadas.

17. $\sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{n}$ **18.** $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n}$ **19.** $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^3}{n^2}$

20. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{n} - \frac{2k}{n}\right)$

C **21.** Para cada uma das somas obtidas nos Exercícios 17 a 20, use um CAS para verificar suas respostas. Se a resposta produzida pelo CAS não estiver de acordo com a sua, mostre que ambas são equivalentes.

22. Resolva a equação $\sum_{k=1}^{n} k = 465$.

23-26 Expresse a função de n em forma fechada e então encontre o limite.

23. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$

24. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

25. $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5k}{n^2}$ **26.** $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k^2}{n^3}$

27. Expresse $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ na notação de somatório com
(a) $j = 0$ como limite inferior do somatório
(b) $j = 1$ como limite inferior do somatório
(c) $j = 2$ como limite inferior do somatório

28. Expresse
$$\sum_{k=5}^{9} k2^{k+4}$$
na notação de somatório com
(a) $k = 1$ como limite inferior do somatório
(b) $k = 13$ como limite superior do somatório

ENFOCANDO CONCEITOS

29. (a) Escreva as três primeiras e as duas últimas parcelas da soma
$$\sum_{k=1}^{n} \left(2 + k \cdot \frac{3}{n}\right)^4 \frac{3}{n}$$
Explique por que essa soma dá a aproximação pelo extremo direito da área sob a curva $y = x^4$ acima do intervalo $[2, 5]$.
(b) Mostre que uma mudança adequada na variação do índice do somatório de (a) pode fornecer a aproximação pelo extremo esquerdo da área sob a curva $y = x^4$ acima do intervalo $[2, 5]$.

30. Para uma função f que é contínua em $[a, b]$, a Definição 6.4.5 diz que a área líquida com sinal A entre $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é
$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$
Dê interpretações geométricas para os símbolos n, x_k^* e Δx. Explique como interpretar o limite dessa definição.

31-34 Divida o intervalo especificado em $n = 4$ subintervalos de igual tamanho e então calcule
$$\sum_{k=1}^{4} f(x_k^*)\Delta x$$
tomando x_k^* como (a) o extremo esquerdo de cada subintervalo, (b) o ponto médio de cada subintervalo e (c) o extremo direito de cada subintervalo. Ilustre cada parte com um gráfico de f que inclui os retângulos cujas áreas estão representadas na soma.

31. $f(x) = 3x + 1$; $[2, 6]$ **32.** $f(x) = 1/x$; $[1, 9]$

33. $f(x) = \cos x$; $[0, \pi]$ **34.** $f(x) = 2x - x^2$; $[-1, 3]$

35-38 Use um recurso computacional com capacidade para tratar de somatórios ou um CAS para obter um valor aproximado da área entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo especificado com $n = 10$, 20 e 50 subintervalos usando a aproximação (a) pelo extremo esquerdo, (b) pelo ponto médio e (c) pelo extremo direito.

C **35.** $f(x) = 1/x$; $[1, 2]$ C **36.** $f(x) = 1/x^2$; $[1, 3]$

C **37.** $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 4]$

C **38.** $f(x) = \text{sen}\, x$; $[0, \pi/2]$

39-44 Use a Definição 6.4.3 tomando x_k^* como o extremo *direito* de cada subintervalo para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo especificado.

39. $f(x) = x/2$; $[1, 4]$

40. $f(x) = 5 - x$; $[0, 5]$

41. $f(x) = 9 - x^2$; $[0, 3]$

42. $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$; $[0, 3]$

43. $f(x) = x^3$; $[2, 6]$

44. $f(x) = 1 - x^3$; $[-3, -1]$

45-48 Use a Definição 6.4.3 tomando x_k^* como o extremo *esquerdo* de cada subintervalo para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo especificado.

45. $f(x) = x/2$; $[1, 4]$

46. $f(x) = 5 - x$; $[0, 5]$

47. $f(x) = 9 - x^2$; $[0, 3]$

48. $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$; $[0, 3]$

49-52 Use a Definição 6.4.3 tomando x_k^* como o *ponto médio* de cada subintervalo para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo especificado.

49. $f(x) = 2x$; $[0, 4]$

50. $f(x) = 6 - x$; $[1, 5]$

51. $f(x) = x^2$; $[0, 1]$

52. $f(x) = x^2$; $[-1, 1]$

53-56 Use a Definição 6.4.5 tomando x_k^* como o extremo *direito* de cada subintervalo para encontrar a área líquida com sinal entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo especificado.

53. $f(x) = x$; $[-1, 1]$. Confira sua resposta com um argumento geométrico simples.

54. $f(x) = x$; $[-1, 2]$. Confira sua resposta com um argumento geométrico simples.

55. $f(x) = x^2 - 1$; $[0, 2]$

56. $f(x) = x^3$; $[-1, 1]$

57. Use a Definição 6.4.3 tomando x_k^* como o extremo esquerdo de cada subintervalo para encontrar a área abaixo do gráfico de $y = mx$ e acima do intervalo $[a, b]$, onde $m > 0$ e $a \geq 0$.

58. Use a Definição 6.4.5 tomando x_k^* como o extremo direito de cada subintervalo para encontrar a área líquida com sinal entre o gráfico de $y = mx$ e o intervalo $[a, b]$.

59. (a) Mostre que a área abaixo do gráfico de $y = x^3$ e acima do intervalo $[0, b]$ é $b^4/4$.

(b) Encontre uma fórmula para a área abaixo de $y = x^3$ e acima do intervalo $[a, b]$, onde $a \geq 0$.

60. Encontre a área entre o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e o intervalo $[0, 1]$. [*Sugestão*: Use o resultado do Exercício 25 da Seção 6.1.]

61. Uma artista deseja criar uma forma rudimentar de triângulo, usando ladrilhos quadrados uniformes colados pelas arestas. Ela coloca n ladrilhos em fila para formar a base do triângulo e, então, faz cada linha sucessiva dois ladrilhos menores que a precedente. Ache uma fórmula para o número de ladrilhos usados na peça. [*Sugestão*: Sua resposta irá depender de n ser par ou ímpar.]

62. Uma artista deseja criar uma escultura colando esferas uniformes. Ela cria uma base com formato retangular que tem 50 esferas de um lado e 30 esferas do outro. Então, cria camadas sucessivas colando esferas no sulco da camada precedente. Quantas esferas irá ter a escultura?

63-66 Considere a soma

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}[(k+1)^3 - k^3] &= [5^3 - 4^3] + [4^3 - 3^3] \\ &\quad + [3^3 - 2^3] + [2^3 - 1^3] \\ &= 5^3 - 1^3 = 124\end{aligned}$$

Para simplificar, listamos as parcelas em ordem invertida. Observe como o cancelamento possibilitou que a soma se retraísse como um telescópio. Dizemos que uma soma é ***telescópica*** quando uma parte de cada parcela cancela outra de alguma parcela vizinha, deixando somente partes da primeira e da última parcelas sem cancelar. Calcule as somas telescópicas nos exercícios.

63. $\displaystyle\sum_{k=5}^{17}(3^k - 3^{k-1})$

64. $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

65. $\displaystyle\sum_{k=2}^{20}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)^2}\right)$

66. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(2^{k+1} - 2^k)$

67. (a) Mostre que

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\left[\textit{Sugestão}: \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).\right]$$

(b) Use o resultado de (a) para encontrar

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

68. (a) Mostre que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\left[\textit{Sugestão}: \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.\right]$$

(b) Use o resultado de (a) para encontrar

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

69. Seja $\bar{x}$ a média aritmética de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Use o Teorema 6.4.1 para provar que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

70. Seja

$$S = \sum_{k=0}^{n} ar^k$$

Mostre que $S - rS = a - ar^{n+1}$ e, portanto,

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

(Uma soma dessa forma é denominada ***soma geométrica***.)

71. Em cada parte, reescreva a soma, se necessário, de tal forma que o limite inferior seja zero, e então use a fórmula deduzida no Exercício 70 para calcular a soma. Verifique suas respostas usando um recurso computacional.

(a) $\sum_{k=1}^{20} 3^k$ (b) $\sum_{k=5}^{30} 2^k$ (c) $\sum_{k=0}^{100} (-1)^{k+1}\frac{1}{2^k}$

C **72.** Em cada parte, faça uma conjectura sobre o limite usando um CAS para calcular a soma para $n = 10$, 20 e 50; então, verifique sua conjectura usando a fórmula do Exercício 70 para expressar a soma em forma fechada e, assim, encontrar exatamente o limite.

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

73. Escrevendo por extenso as somas, determine se são válidas as seguintes identidades

(a) $\int \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] dx = \sum_{i=1}^{n}\left[\int f_i(x)\,dx\right]$

(b) $\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dx}[f_i(x)]\right]$

74. Quais das seguintes identidades são válidas?

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$ (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} b_i$

(c) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

75. Prove a parte (c) do Teorema 6.4.1.

76. Prove o Teorema 6.4.4.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.4

1. (a) $\frac{1}{2k}$; $\frac{1}{2(j+1)}$ (b) $\sum_{k=1}^{5} 10^k$ **2.** (a) $\frac{n(n+1)}{2}$ (b) $3n(n+1)+n$ (c) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **3.** (a) 0,5 (b) 1; 1,5; 2; 2,5 (c) 1,25; 1,75; 2,25; 2,75 (d) 1,5; 2; 2,5; 3 **4.** 6,75 **5.** $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4n}{n^2} = 3$

6.5 A INTEGRAL DEFINIDA

Nesta seção introduziremos a noção de "integral definida", que relaciona o conceito de área a outros conceitos importantes, tais como comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho.

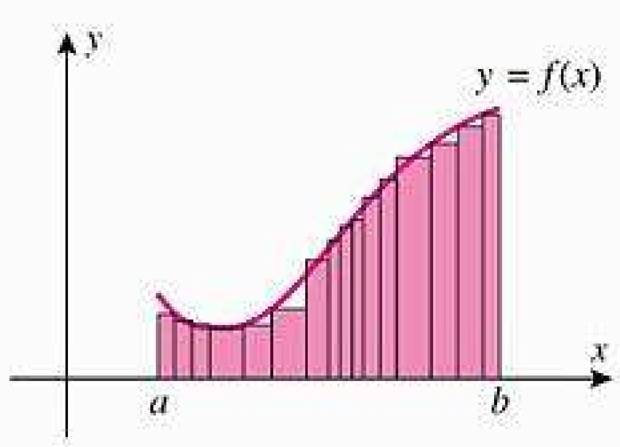


Figura 6.5.1

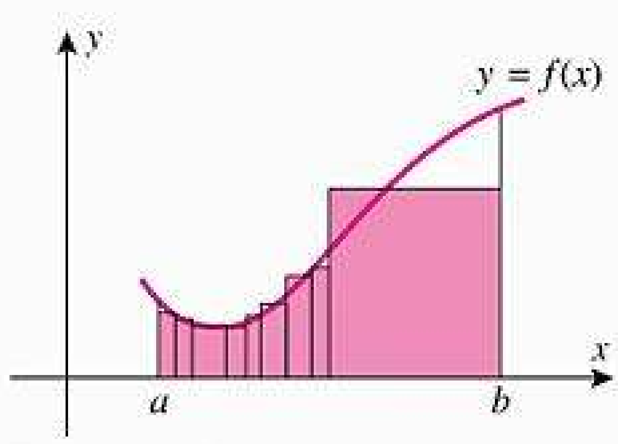


Figura 6.5.2

■ SOMAS DE RIEMANN E INTEGRAL DEFINIDA

Em nossa definição de área líquida com sinal (Definição 6.4.5), supusemos que, para cada número positivo n, o intervalo $[a, b]$ foi subdividido em n subintervalos de mesmo comprimento para criar as bases dos retângulos da aproximação. Para algumas funções, pode ser mais conveniente utilizar retângulos com bases de comprimentos diferentes (ver Exercício 39); contudo, se quisermos exaurir uma área com retângulos de larguras diferentes, é importante que as subdivisões sucessivas sejam construídas de tal modo que as larguras dos retângulos tendam a zero com n crescente (Figura 6.5.1). Assim, devemos evitar o tipo de situação que ocorre na Figura 6.5.2, em que nunca é subdividida a metade da direita do intervalo. Se permitíssemos esse tipo de subdivisão, então o erro na aproximação não tenderia a zero com n crescente.

Uma ***partição*** do intervalo $[a, b]$ é uma coleção de pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

que dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \Delta x_3 = x_3 - x_2, \ldots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

Dizemos que a partição é ***regular*** se os subintervalos têm, todos, o mesmo comprimento

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

No caso de uma partição regular, as larguras dos retângulos da aproximação tendem a zero quando n cresce. Como isso não precisa ser o caso para toda partição, precisamos medir o "tamanho" dessas larguras de alguma maneira. Uma abordagem é denotar o maior comprimento de um subintervalo por max Δx_k. A magnitude max Δx_k é denominada ***norma*** da partição. Por exemplo, a Figura 6.5.3 mostra uma partição do intervalo [0, 6] em quatro subintervalos de norma igual a 2.

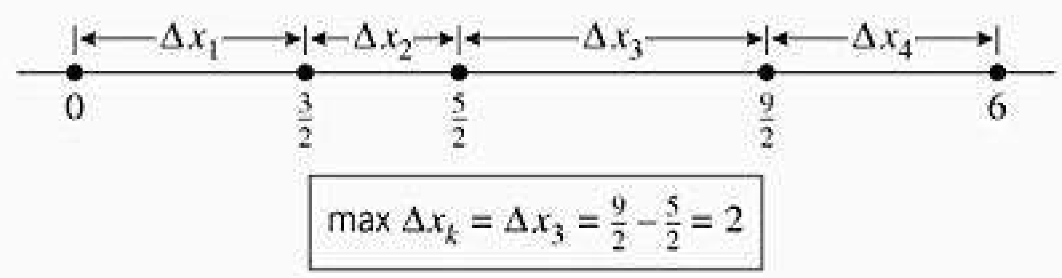


Figura 6.5.3

Se quisermos generalizar a Definição 6.4.5 para permitir subintervalos de comprimentos diferentes, deveremos substituir o comprimento constante Δx pelos comprimentos variáveis Δx_k. Uma vez feito isso, a soma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \quad \text{é substituída por} \quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

Alguns autores usam o símbolo $\|\Delta\|$ em vez de max Δx_k para a norma da partição, caso em que max $\Delta x_k \to 0$ deve ser trocado por $\|\Delta\| \to 0$.

Também devemos trocar a expressão $n \to +\infty$ por alguma que garanta que os comprimentos de todos os intervalos tendam a zero. Para isso, utilizaremos a expressão max $\Delta x_k \to 0$. Utilizando nosso conceito intuitivo de área, esperamos que a área líquida com sinal entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ deva satisfazer a equação

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

(Daqui a pouco veremos que isso ocorre.) O limite que aparece nessa expressão é um dos conceitos fundamentais do Cálculo Integral e constitui a base da definição seguinte.

6.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***integrável*** em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denotamos o limite pelo símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

que é denominado ***integral definida*** de f de a até b. Os números a e b são denominados ***limite de integração inferior*** e ***limite de integração superior***, respectivamente, e $f(x)$ é denominado ***integrando.***

A notação usada para a integral definida merece algum comentário. Historicamente, a expressão "$f(x)\,dx$" era interpretada como uma "área infinitesimal" de um retângulo de altura $f(x)$ e base "infinitesimal" dx. Então, a área total sob a curva era obtida "somando" essas áreas infinitesimais. O símbolo "$\int$" é um "S" espichado que era usado para indicar essa soma. Para nós, o símbolo "$\int$" de integral e o símbolo "dx" podem servir para lembrar que a integral defi-

nida é realmente o limite de um *somatório* quando $\Delta x_k \to 0$. A soma que aparece na Definição 6.5.1 é chamada de ***soma de Riemann*** e a integral definida é, às vezes, denominada ***integral de Riemann***, para homenagear o matemático alemão Bernhard Riemann, que formulou muitos dos conceitos básicos do Cálculo Integral. (A razão para a semelhança entre as notações de integral definida e integral indefinida será esclarecida na próxima seção, onde estabeleceremos uma relação entre os dois tipos de "integração".)

O limite que aparece na Definição 6.5.1 é um pouco diferente dos tipos de limite discutidos no Capítulo 2. Falando um tanto vagamente, a intenção da expressão

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = L$$

é transmitir a idéia de que podemos forçar as somas de Riemann a ficarem tão próximas quanto quisermos de L, independentemente da escolha dos valores de x_k^*, tomando a norma da partição suficientemente pequena. Embora seja possível dar uma definição formal desse limite, simplesmente vamos usar argumentos intuitivos sempre que aplicarmos a Definição 6.5.1.

Embora a função não precise ser contínua em um intervalo para poder ser integrável nesse intervalo (Exercício 35), estaremos interessados basicamente em integrais definidas de funções contínuas. O teorema a seguir, que enunciamos sem prova, diz que, se uma função é contínua em um intervalo fechado finito, então essa função é integrável nesse intervalo, e sua integral definida é a área líquida com sinal entre o gráfico da função e o intervalo.

6.5.2 TEOREMA *Se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ é*

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) Matemático alemão. Bernhard Riemann, como é comumente conhecido, era filho de um ministro protestante. Recebeu de seu pai a educação elementar e com pouca idade mostrou talento em Aritmética. Em 1846, entrou na Universidade de Göttingen para estudar Teologia e Filosofia, mas logo transferiu-se para a Matemática. Estudou física com W. E. Weber e Matemática com Carl Friedrich Gauss, considerado por alguns o maior matemático de todos os tempos. Em 1851, recebeu seu Ph.D sob a orientação de Gauss e permaneceu em Göttingen para lecionar. Em 1862, um mês após seu casamento, sofreu um ataque de pleurisia e permaneceu extremamente doente pelo restante da vida. Finalmente, sucumbiu à tuberculose em 1866, com 39 anos.

O trabalho de Riemann em Geometria está cercado de uma história interessante. Para sua aula introdutória, antes de tornar-se professor assistente, submeteu três tópicos possíveis a Gauss. Gauss surpreendeu Riemann, escolhendo o que ele menos gostava, os fundamentos da Geometria. A aula parecia uma cena de filme. O velho e enfraquecido Gauss, um gigante em seu tempo, observando intensamente seu jovem brilhante protegido juntar as partes de seu trabalho em um sistema belo e completo. Dizem que Gauss ficou ofegante de prazer quando a aula chegava ao fim e voltou para a casa maravilhado com o talento de seu estudante. Gauss morreu pouco depois. Os resultados apresentados por Riemann naquele dia acabaram sendo a ferramenta fundamental, usada por Einstein cerca de 50 anos depois, para desenvolver a teoria da Relatividade.

Além de seu trabalho em Geometria, Riemann fez grandes contribuições à teoria das funções complexas e à Física Matemática. A noção de integral definida, presente na maioria de cursos de Cálculo, é a ele devida. Sua morte prematura foi uma grande perda para a Matemática, uma vez que seu trabalho era brilhante e de importância fundamental.

A Fórmula (1) segue da integrabilidade de f, que nos permite utilizar qualquer partição para calcular a integral. Em particular, se utilizarmos partições regulares de $[a, b]$, então

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

para cada valor de k. Isso implica que $\max \Delta x_k = (b-a)/n$, do que segue que $\max \Delta x_k \to 0$ se, e somente se, $n \to +\infty$. Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = A$$

Nos casos mais simples, podemos calcular integrais definidas de funções contínuas usando fórmulas da Geometria plana para calcular áreas com sinal.

► Exemplo 1 Esboce a região cuja área está representada pela integral definida e calcule a integral usando uma fórmula apropriada de Geometria.

(a) $\int_1^4 2\,dx$ (b) $\int_{-1}^2 (x+2)\,dx$ (c) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Solução (a) O gráfico do integrando é a reta horizontal $y = 2$; portanto, a região é um retângulo de altura 2, estendendo-se sobre o intervalo de 1 até 4 (Figura 6.5.4a). Assim,

$$\int_1^4 2\,dx = (\text{área do retângulo}) = 2\,(3) = 6$$

Solução (b) O gráfico do integrando é a reta $y = x + 2$; portanto, a região é um trapézio, cuja base se estende de $x = -1$ a $x = 2$ (Figura 6.5.4*b*). Assim,

$$\int_{-1}^2 (x+2)\,dx = (\text{área do trapézio}) = \frac{1}{2}(1+4)(3) = \frac{15}{2}$$

Solução (c) O gráfico de $y = \sqrt{1-x^2}$ é o semicírculo superior de raio 1 e centro na origem; portanto, a região é o quarto de círculo superior direito estendendo-se de $x = 0$ a $x = 1$ (Figura 6.5.4*c*). Assim,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = (\text{área do quarto de círculo}) = \frac{1}{4}\pi(1^2) = \frac{\pi}{4} \blacktriangleleft$$

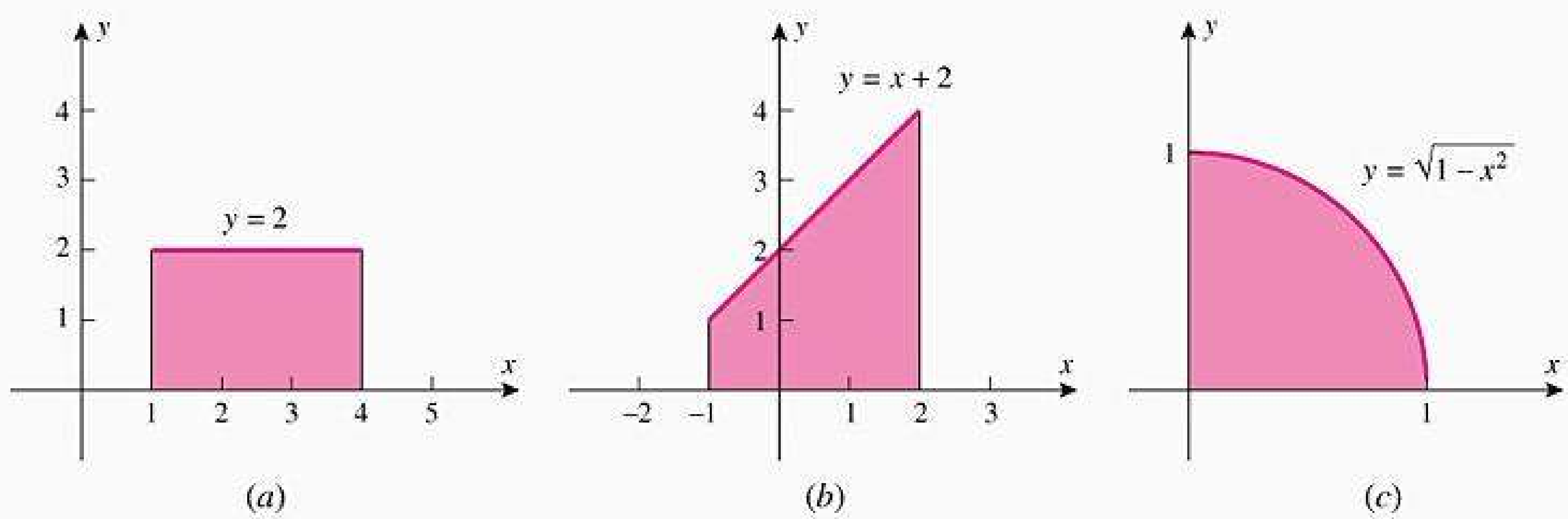


Figura 6.5.4

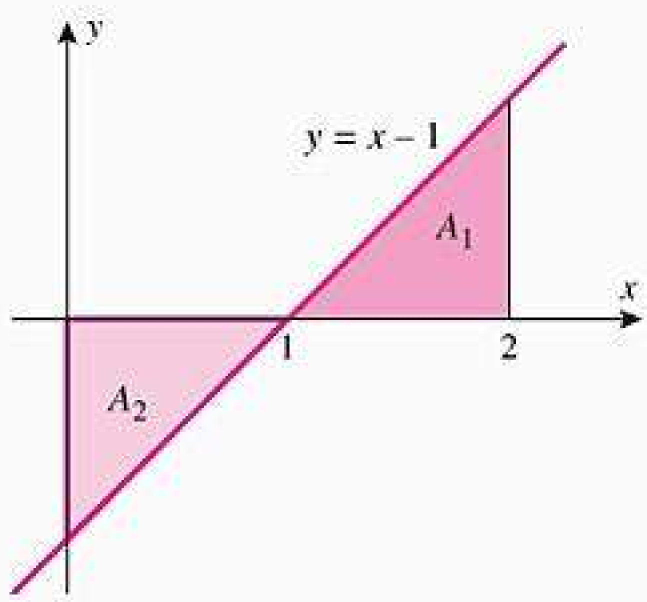


Figura 6.5.5

► Exemplo 2 Calcule

$$\text{(a)} \int_0^2 (x-1)\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^1 (x-1)\,dx$$

Solução O gráfico de $y = x - 1$ está na Figura 6.5.5, e deixamos a cargo do leitor verificar que ambas as regiões triangulares têm área $\frac{1}{2}$. No intervalo [0, 2], a área líquida com sinal é $A_1 - A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ e, no intervalo [0, 1], a área líquida com sinal é $-A_2 = -\frac{1}{2}$. Assim,

$$\int_0^2 (x-1)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 (x-1)\,dx = -\tfrac{1}{2}$$

(Lembre que no Exemplo 7 da Seção 6.4 utilizamos a Definição 6.4.5 para mostrar que é nula a área líquida com sinal entre o gráfico de $y = x - 1$ e o intervalo [0, 2].) ◄

PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Supõe-se na Definição 6.5.1 que $[a, b]$ é um intervalo finito fechado com $a < b$ e, portanto, o limite superior de integração de uma integral definida é maior do que o limite inferior. É conveniente, porém, estender essa definição para incluir os casos em que os limites de integração são iguais ou o limite inferior é maior do que o superior. Com essa finalidade, faremos as seguintes definições especiais.

6.5.3 DEFINIÇÃO

(a) Se a estiver no domínio de f, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(b) Se f for integrável em $[a, b]$, definimos

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

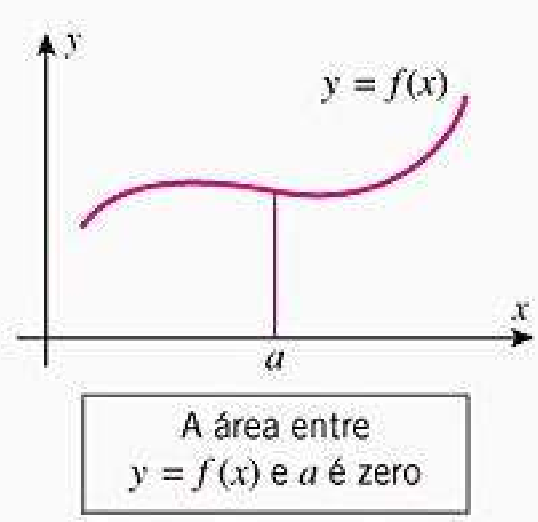


Figura 6.5.6

A parte (a) dessa definição é consistente com a idéia intuitiva de que a área entre um ponto no eixo x e a curva $y = f(x)$ deva ser zero (Figura 6.5.6). A parte (b) da definição é simplesmente uma convenção útil; ela estabelece que, intercambiando-se os limites de integração, inverte-se o sinal da integral.

► Exemplo 3

(a) $\displaystyle\int_1^1 x^2\,dx = 0$

(b) $\displaystyle\int_1^0 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$ ◄ (Exemplo 1 (c))

Uma vez que as integrais definidas são dadas por um limite, elas herdam muitas das propriedades dos limites. Por exemplo, sabemos que constantes podem ser movidas através do sinal de limite e que o limite de uma soma ou diferença é a soma ou diferença dos limites. Assim, o leitor não deve se supreender com o teorema a seguir, enunciado sem prova formal.

6.5.4 TEOREMA *Se f e g forem integráveis em $[a, b]$ e se c for uma constante, então cf, $f+g$ e $f-g$ são integráveis em $[a, b]$ e*

(*a*) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

(*b*) $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(*c*) $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

A parte (*b*) desse teorema pode ser estendida a mais do que duas funções. Mais precisamente,

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

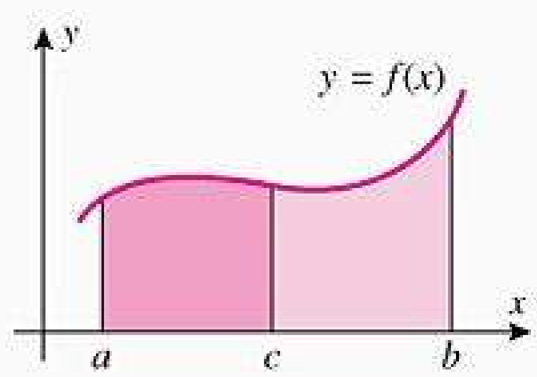


Figura 6.5.7

Algumas das propriedades das integrais definidas podem ser motivadas interpretando-se a integral como uma área. Por exemplo, se f for contínua e não-negativa no intervalo $[a, b]$ e se c for um ponto entre a e b, então a área sob $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ pode ser dividida em duas partes e expressa como a área sob o gráfico de a a c mais a área sob o gráfico de c a b (Figura 6.5.7), isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Esse é um caso especial do teorema a seguir sobre integrais definidas, o qual enunciaremos sem prova.

6.5.5 TEOREMA *Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a, b e c, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

não importando como os pontos estejam ordenados.

O teorema a seguir, que enunciaremos sem prova, também pode ser motivado interpretando as integrais definidas como áreas.

A parte (*b*) do Teorema 6.5.6 afirma que é possível integrar ambos os lados de uma desigualdade $f(x) \geq g(x)$, sem alterar o sentido da mesma. Caso $b > a$, ambas as partes do teorema continuam válidas se trocarmos $\geq$ por $\leq$, $>$ ou $<$ em toda parte.

6.5.6 TEOREMA

(*a*) *Se f for integrável em* $[a, b]$ *e* $f(x) \geq 0$ *para todo x em* $[a, b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

(*b*) *Se f e g forem integráveis em* $[a, b]$ *e* $f(x) \geq g(x)$ *para todo x em* $[a, b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

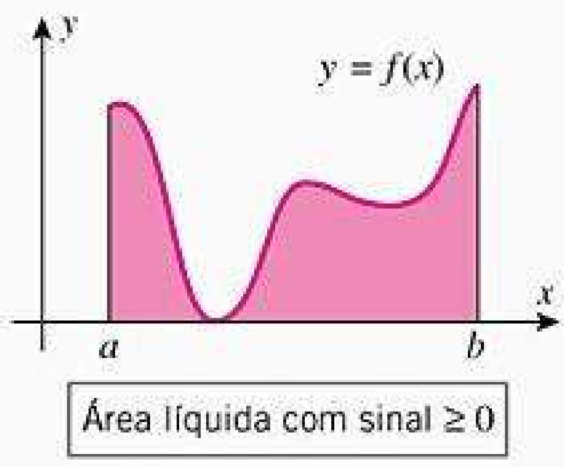


Figura 6.5.8

Geometricamente, a parte (*a*) desse teorema estabelece o fato óbvio de que, se f for não-negativa em $[a, b]$, então a área líquida com sinal entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ é também não-negativa (Figura 6.5.8). A parte (*b*) tem uma interpretação simples quando f e g forem não-negativas em $[a, b]$, afirmando que, se o gráfico de f não passa por baixo do de g, então a área sob o gráfico de f é pelo menos tão grande quanto aquela sob o gráfico de g (Figura 6.5.9).

▶ Exemplo 4 Calcule

$$\int_0^1 (5 - 3\sqrt{1 - x^2})\,dx$$

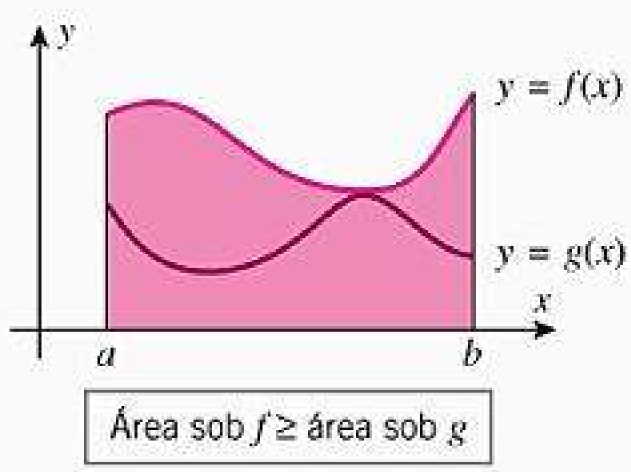


Figura 6.5.9

Solução A partir das partes (*a*) e (*c*) do Teorema 6.5.4, podemos escrever

$$\int_0^1 (5 - 3\sqrt{1 - x^2})\,dx = \int_0^1 5\,dx - \int_0^1 3\sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_0^1 5\,dx - 3\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

A primeira integral dessa diferença pode ser interpretada como a área de um retângulo de altura 5 e base 1; portanto, seu valor é 5 e, pelo Exemplo 1, o valor da segunda integral é $\pi/4$. Assim,

$$\int_0^1 (5 - 3\sqrt{1 - x^2})\,dx = 5 - 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 - \frac{3\pi}{4} \quad ◀$$

■ DESCONTINUIDADES E INTEGRABILIDADE

O problema de determinar precisamente quais funções são integráveis é bem complexo e foge do contexto deste livro. Porém, existem alguns resultados básicos sobre integrabilidade que é importante conhecer; começaremos com uma definição.

6.5.7 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f definida em um intervalo I é ***limitada*** em I se existir um número M positivo tal que

$$-M \leq f(x) \leq M$$

para todo x em I. Geometricamente, isso significa que o gráfico de f no intervalo I fica entre as retas $y = -M$ e $y = M$.

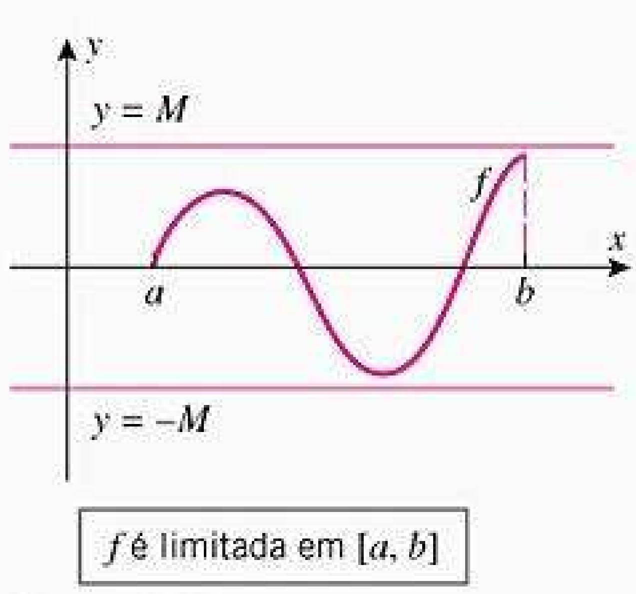


Figura 6.5.10

Por exemplo, uma função contínua f é limitada em *qualquer* intervalo finito fechado, pois o Teorema do Valor Extremo (5.4.2) impõe que f tenha um máximo e um mínimo absolutos no intervalo; logo, seu gráfico está entre as retas $y = -M$ e $y = M$, desde que M seja grande o suficiente (Figura 6.5.10). Ao contrário, uma função que tem uma assíntota vertical dentro de

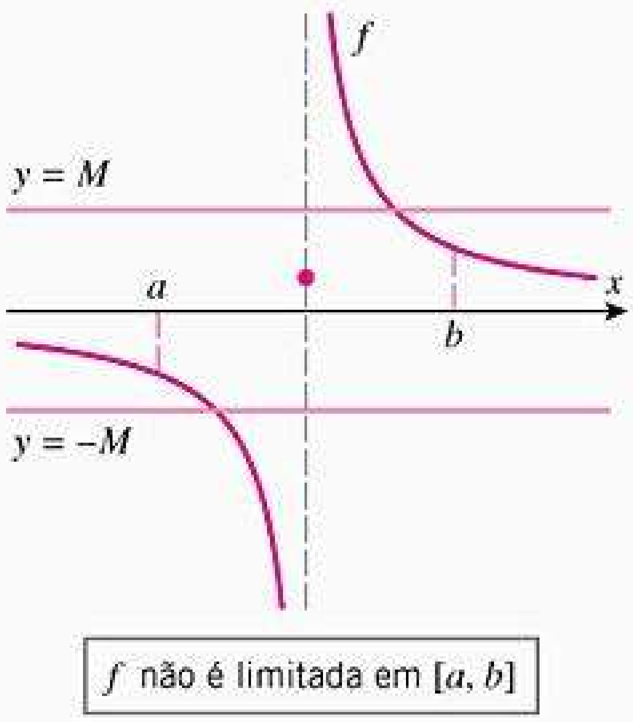


Figura 6.5.11

um intervalo não é limitada nesse intervalo, pois seu gráfico dentro dele não pode ser forçado a ficar entre as retas $y = -M$ e $y = M$, não importando quão grande fizermos o valor de M (Figura 6.5.11).

O teorema a seguir, enunciado sem prova, lista alguns fatos sobre a integrabilidade de funções com descontinuidades.

6.5.8 TEOREMA *Seja f uma função definida em um intervalo finito fechado* $[a, b]$.

(*a*) *Se f tiver um número finito de descontinuidades em* $[a, b]$, *mas for limitada em* $[a, b]$, *então é integrável em* $[a, b]$.

(*b*) *Se f não for limitada em* $[a, b]$, *então não é integrável em* $[a, b]$.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.5 (*Ver página 396 para respostas.*)

1. Em cada parte, use a partição de [2, 7] da linha abaixo.

2 — 3 — 4,5 — 6,5 — 7

(a) Qual é o número n de subintervalos nessa partição?

(b) x_0 = ________; x_1 = ________; x_2 = ________;
x_3 = ________; x_4 = ________

(c) Δx_1 = ________; Δx_2 = ________; Δx_3 = ________;
Δx_4 = ________

(d) A norma dessa partição é ________.

2. Seja $f(x) = 4x - 12$. Use a partição de [2, 7] do Exercício 1 acima e as escolhas $x_1^* = 2, x_2^* = 4, x_3^* = 5$ e $x_4^* = 7$ para calcular a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{4} f(x_k^*)\Delta x_k$$

3. (a) Esboce a região cuja área com sinal é representada por

$$\int_2^7 [4x - 12]\, dx$$

(b) Use fórmulas apropriadas de Geometria para calcular a integral.

4. Suponha que $g(x)$ seja uma função para a qual

$$\int_{-2}^{1} g(x)\, dx = 5 \quad \text{e} \quad \int_{1}^{2} g(x)\, dx = -2$$

Use essa informação e fórmulas apropriadas de Geometria para calcular as integrais definidas.

(a) $\int_1^2 5g(x)\, dx$ (b) $\int_{-2}^{2} g(x)\, dx$

(b) $\int_{-2}^{1} [4 - 3g(x)]\, dx$ (b) $\int_{-2}^{2} [g(x) + \sqrt{4 - x^2}]\, dx$

EXERCÍCIOS 6.5

1-4 Encontre o valor de

(a) $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\, \Delta x_k$ (b) max Δx_k.

1. $f(x) = x + 1;\ a = 0, b = 4;\ n = 3;$
$\Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 1, \Delta x_3 = 2;$
$x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{3}{2}, x_3^* = 3$

2. $f(x) = \cos x;\ a = 0, b = 2\pi;\ n = 4;$
$\Delta x_1 = \pi/2, \Delta x_2 = 3\pi/4, \Delta x_3 = \pi/2, \Delta x_4 = \pi/4;$
$x_1^* = \pi/4, x_2^* = \pi, x_3^* = 3\pi/2, x_4^* = 7\pi/4$

3. $f(x) = 4 - x^2;\ a = -3, b = 4;\ n = 4;$
$\Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 2, \Delta x_3 = 1, \Delta x_4 = 3;$
$x_1^* = -\frac{5}{2}, x_2^* = -1, x_3^* = \frac{1}{4}, x_4^* = 3$

4. $f(x) = x^3;\ a = -3, b = 3;\ n = 4;$
$\Delta x_1 = 2, \Delta x_2 = 1, \Delta x_3 = 1, \Delta x_4 = 2;$
$x_1^* = -2, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 2$

5-8 Use os valores dados de a e b para expressar os limites seguintes como integrais. (Não calcule as integrais.)

5. $\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k^*)^2 \Delta x_k;\ a = -1, b = 2$

6. $\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k^*)^3 \Delta x_k;\ a = 1, b = 2$

7. $\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} 4x_k^*(1 - 3x_k^*)\Delta x_k;\ a = -3, b = 3$

8. $\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\text{sen}^2\, x_k^*)\Delta x_k;\ a = 0, b = \pi/2$

9-10 Use a definição 6.5.1 para expressar as integrais como limites de somas de Riemann. (Não calcule as integrais.)

9. (a) $\int_1^2 2x\, dx$ (b) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx$

10. (a) $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx$ (b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos x)\, dx$

11-14 Esboce a região cuja área com sinal é representada pela integral definida e calcule a integral usando uma fórmula apropriada de Geometria onde for necessário.

11. (a) $\int_0^3 x\, dx$ (b) $\int_{-2}^{-1} x\, dx$

(c) $\int_{-1}^4 x\, dx$ (d) $\int_{-5}^5 x\, dx$

12. (a) $\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx$ (b) $\int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx$

(c) $\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx$ (d) $\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx$

13. (a) $\int_0^5 2\, dx$ (b) $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$

(c) $\int_{-1}^2 |2x - 3|\, dx$ (d) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

14. (a) $\int_{-10}^{-5} 6\, dx$ (b) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \text{sen}\, x\, dx$

(c) $\int_0^3 |x - 2|\, dx$ (d) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

15. Em cada parte, calcule a integral, sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} |x - 2|, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

(a) $\int_{-2}^0 f(x)\, dx$ (b) $\int_{-2}^2 f(x)\, dx$

(c) $\int_0^6 f(x)\, dx$ (d) $\int_{-4}^6 f(x)\, dx$

16. Em cada parte, calcule a integral, sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

(a) $\int_0^1 f(x)\, dx$ (b) $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$

(c) $\int_1^{10} f(x)\, dx$ (d) $\int_{1/2}^5 f(x)\, dx$

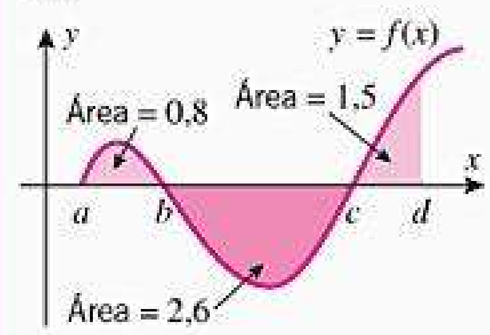
ENFOCANDO CONCEITOS

17-18. Use as áreas mostradas nas figuras para encontrar

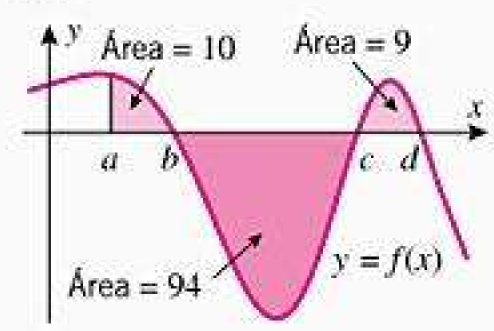
(a) $\int_a^b f(x)\, dx$ (b) $\int_b^c f(x)\, dx$

(c) $\int_a^c f(x)\, dx$ (d) $\int_a^d f(x)\, dx$

17.



18.



19. Obtenha $\int_{-1}^2 [f(x) + 2g(x)]\, dx$ se

$$\int_{-1}^2 f(x)\, dx = 5 \quad \text{e} \quad \int_{-1}^2 g(x)\, dx = -3$$

20. Obtenha $\int_1^4 [3f(x) - g(x)]\, dx$ se

$$\int_1^4 f(x)\, dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_1^4 g(x)\, dx = 10$$

21. Obtenha $\int_1^5 f(x)\, dx$ se

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -2 \quad \text{e} \quad \int_0^5 f(x)\, dx = 1$$

22. Obtenha $\int_3^{-2} f(x)\, dx$ se

$$\int_{-2}^1 f(x)\, dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(x)\, dx = -6$$

23-26 Use o Teorema 6.5.4 e fórmulas apropriadas de Geometria para calcular as integrais.

23. $\int_{-1}^3 (4 - 5x)\, dx$ **24.** $\int_{-2}^2 (1 - 3|x|)\, dx$

25. $\int_0^1 (x + 2\sqrt{1 - x^2})\, dx$ **26.** $\int_{-3}^0 (2 + \sqrt{9 - x^2})\, dx$

27-28 Use o Teorema 6.5.6 para determinar se o valor da integral é positivo ou negativo.

27. (a) $\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{1 - x}\, dx$ (b) $\int_0^4 \frac{x^2}{3 - \cos x}\, dx$

28. (a) $\int_{-3}^{-1} \frac{x^4}{\sqrt{3 - x}}\, dx$ (b) $\int_{-2}^2 \frac{x^3 - 9}{|x| + 1}\, dx$

29-30 Calcule as integrais completando o quadrado e aplicando fórmulas apropriadas de Geometria.

29. $\int_0^{10} \sqrt{10x - x^2}\, dx$ **30.** $\int_0^3 \sqrt{6x - x^2}\, dx$

31-32 Calcule o limite expressando-o como uma integral definida no intervalo $[a, b]$ e aplicando uma fórmula apropriada de Geometria.

31. $\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} (3x_k^* + 1)\Delta x_k;\ a = 0, b = 1$

32. $\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - (x_k^*)^2}\, \Delta x_k;\ a = -2, b = 2$

ENFOCANDO CONCEITOS

33. Seja $f(x) = C$ uma função constante.

(a) Use uma fórmula de Geometria para mostrar que

$$\int_a^b f(x)\, dx = C(b - a)$$

(b) Mostre que o valor de qualquer soma de Riemann para $f(x)$ sobre $[a, b]$ é $C(b - a)$. Use a Definição 6.5.1 para mostrar que

$$\int_a^b f(x)\, dx = C(b - a)$$

34. Em cada parte, use os Teoremas 6.5.2 e 6.5.8 para determinar se a função f é integrável no intervalo $[-1, 1]$.

(a) $f(x) = \cos x$

(b) $f(x) = \begin{cases} x/|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

35. Defina a função f em $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Use a Definição 6.5.1 para mostrar que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1$$

36. Pode-se mostrar que todo intervalo contém números racionais e irracionais. Aceitando isso, pode a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ for racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

ser integrável em um intervalo fechado $[a, b]$? Explique seu raciocínio.

37. Encontre o maior e o menor valor que pode ter a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{3} f(x_k^*)\Delta x_k$$

no intervalo $[0, \pi]$ para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com $\Delta x_1 = \pi/4$, $\Delta x_2 = 7\pi/12$ e $\Delta x_3 = \pi/6$.

38. Encontre o menor e o maior valor que a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{3} f(x_k^*)\Delta x_k$$

pode ter no intervalo $[0, 4]$ se $f(x) = x^2 - 3x + 4$ e $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 2$ e $\Delta x_3 = 1$.

39. A função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $[0, 4]$ e, portanto, integrável nesse intervalo. Calcule

$$\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$$

usando a Definição 6.5.1. Use subintervalos de tamanhos diferentes dados pela partição

$$0 < 4(1)^2/n^2 < 4(2)^2/n^2 < \cdots < 4(n-1)^2/n^2 < 4$$

e tome x_k^* como sendo o extremo direito do k-ésimo subintervalo.

ENFOCANDO CONCEITOS

40. Suponha que f esteja definida no intervalo $[a, b]$ e que $f(x) = 0$ para $a < x \leq b$. Use a Definição 6.5.1 para provar que

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0$$

41. Suponha que g seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e que f seja uma função definida em $[a, b]$, de modo que $f(x) = g(x)$ para $a < x \leq b$. Prove que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$$

[*Sugestão:* Escreva

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b [(f(x) - g(x)) + g(x)]\, dx$$

e use o resultado do Exercício 40 junto com o Teorema 6.5.4(*b*).]

42. Defina a função f por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Segue pelo Teorema 6.5.8(*b*) que f não é integrável no intervalo $[0, 1]$. Aplique a Definição 6.5.1 para provar que isso realmente ocorre. [*Sugestão*: Argumente que, independentemente de quão pequena seja a norma de uma partição de $[0, 1]$, sempre haverá alguma escolha de x_1^* que torne a soma de Riemann da Definição 6.5.1 tão grande quanto queiramos.]

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.5

1. (a) $n = 4$ (b) 2; 3; 4,5; 6,5; 7 (c) 1; 1,5; 2; 0,5 (d) 2 **2.** 26 **3.** (a) Ver Figura EC-3 (b) 30
4. (a) -10 (b) 3 (c) -3 (d) $3 + 2\pi$

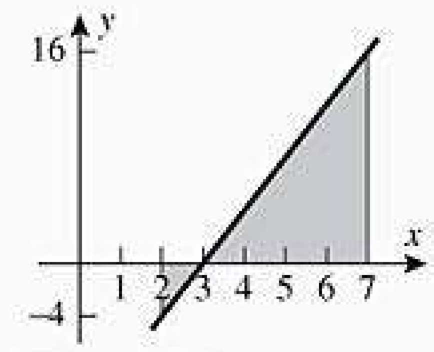


Figura EC-3

6.6 O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Nesta seção estabeleceremos duas relações básicas entre as integrais definida e indefinida que, juntas, formam um resultado conhecido como "Teorema Fundamental do Cálculo". Uma parte desse teorema relaciona os métodos do retângulo e da antiderivada com o cálculo de área, enquanto a outra parte fornece um poderoso método para o cálculo de integrais definidas usando antiderivadas.

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Como nas seções anteriores, começamos supondo f não-negativa e contínua em um intervalo $[a, b]$; nesse caso, a área A sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, b]$ é representada pela integral definida

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

(Figura 6.6.1).

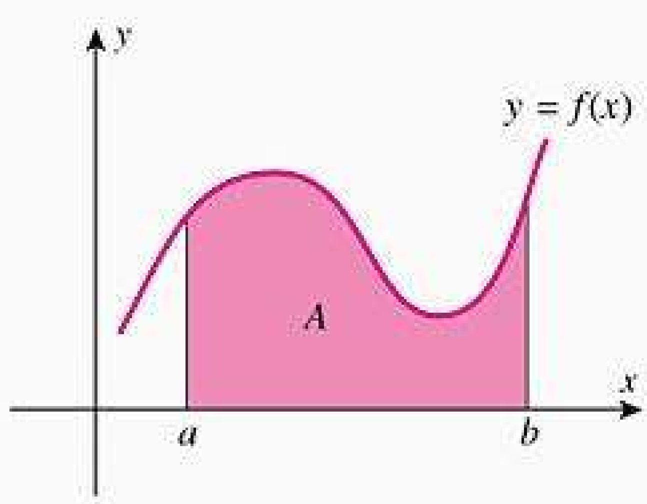


Figura 6.6.1

A discussão do método da antiderivada na Seção 6.1 sugere que, se $A(x)$ for a área sob o gráfico de f de a até x (Figura 6.6.2), então:

- $A'(x) = f(x)$
- $A(a) = 0$ A área sob a curva de a até a é a área acima de um único ponto e, portanto, é zero.
- $A(b) = A$ A área sob a curva de a até b é A.

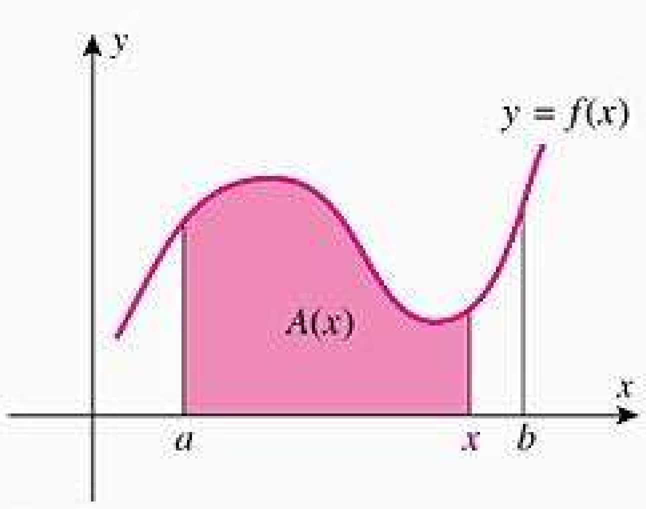


Figura 6.6.2

A fórmula $A'(x) = f(x)$ afirma que $A(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, o que implica que toda antiderivada de $f(x)$ em $[a, b]$ pode ser obtida acrescentando-se uma constante a $A(x)$. Conseqüentemente, seja

$$F(x) = A(x) + C$$

uma antiderivada qualquer de $f(x)$. Subtraindo $F(a)$ de $F(b)$, obtemos

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A(b) - A(a) = A - 0 = A$$

Logo, (1) pode ser expressa como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Em palavras, essa equação afirma:

> *A integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração.*

Embora esse resultado tenha sido obtido sujeito à hipótese de que f é não-negativa em $[a, b]$, essa hipótese não é essencial.

6.6.1 TEOREMA (***Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1***) *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

DEMONSTRAÇÃO Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pontos quaisquer em $[a, b]$, tais que

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

Esses pontos dividem $[a, b]$ em n subintervalos

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b] \tag{3}$$

cujo comprimento, como antes, denotaremos por

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$$

Por hipótese, $F'(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$; logo, F satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio (5.7.2) em cada subintervalo em (3). Portanto, podemos encontrar pontos $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ nos respectivos subintervalos em (3), tais que

$$\begin{aligned}
F(x_1) - F(a) &= F'(x_1^*)(x_1 - a) = f(x_1^*)\Delta x_1 \\
F(x_2) - F(x_1) &= F'(x_2^*)(x_2 - x_1) = f(x_2^*)\Delta x_2 \\
F(x_3) - F(x_2) &= F'(x_3^*)(x_3 - x_2) = f(x_3^*)\Delta x_3 \\
&\vdots \\
F(b) - F(x_{n-1}) &= F'(x_n^*)(b - x_{n-1}) = f(x_n^*)\Delta x_n
\end{aligned}$$

Somando as equações precedentes, obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \tag{4}$$

Vamos agora aumentar n de tal forma que max $\Delta x_k \to 0$. Como se supõe f contínua, o lado direito de (4) tende a $\int_a^b f(x)\,dx$, pelo Teorema 6.5.2 e pela Definição 6.5.1. Porém, o lado esquerdo de (4) é independente de n; ou seja, o lado esquerdo de (4) permanece constante quando n aumenta. Assim,

$$F(b) - F(a) = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

É usual denotar a diferença $F(b) - F(a)$ por

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{ou} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Por exemplo, usando a primeira dessas notações, podemos expressar (2) como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \tag{5}$$

Às vezes escrevemos

$$F(x)\Big]_{x=a}^b = F(b) - F(a)$$

quando for importante enfatizar que a e b são valores da variável x.

A integral no Exemplo 1 representa a área de um certo trapézio. Esboce esse trapézio e calcule sua área usando Geometria.

▶ Exemplo 1 Calcule $\int_1^2 x\,dx$.

Solução A função $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ é uma antiderivada de $f(x) = x$; assim, a partir de (2)

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad ◀$$

▶ Exemplo 2 No Exemplo 6 da Seção 6.4 usamos a definição de área para mostrar que a área sob o gráfico de $y = 9 - x^2$ e acima do intervalo [0, 3] é de 18 (unidades de área). Agora podemos resolver esse problema com muito mais facilidade usando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$A = \int_0^3 (9 - x^2)\,dx = 9x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = \left(27 - \frac{27}{3}\right) - 0 = 18 \quad ◀$$

▶ Exemplo 3

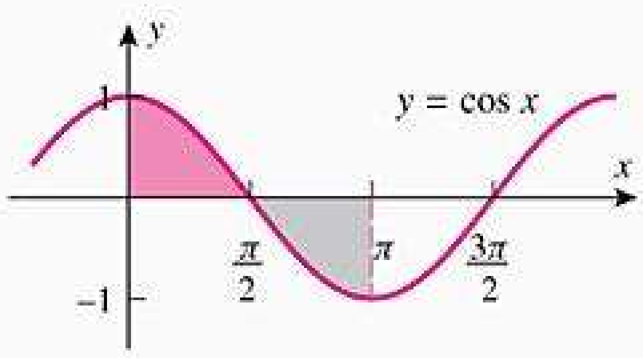


Figura 6.6.3

(a) Encontre a área sob a curva $y = \cos x$ no intervalo $[0, \pi/2]$ (Figura 6.6.3).

(b) Faça uma conjectura sobre o valor da integral

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx$$

e a confirme usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Solução (a) Como $\cos x \geq 0$ no intervalo $[0, \pi/2]$, a área A sob a curva é

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$$

Solução (b) A área dada pode ser interpretada como a área com sinal entre o gráfico de $y = \cos x$ e o intervalo $[0, \pi]$. O gráfico na Figura 6.6.3 sugere que a parte da área acima do eixo x é igual à parte abaixo dele; logo, a conjectura é de que a área com sinal é zero. Isso implica que o valor da integral é zero, o que é confirmado pelos cálculos

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0 \quad ◀$$

■ A RELAÇÃO ENTRE AS INTEGRAIS DEFINIDA E INDEFINIDA

Observe que nos exemplos precedentes nenhuma constante de integração foi incluída nas antiderivadas. Em geral, quando for aplicado o Teorema Fundamental do Cálculo, não há necessidade de incluir uma constante de integração, pois, de qualquer forma, ela irá sumir. Para entender isso, seja F uma antiderivada do integrando em $[a, b]$ e C uma constante qualquer; então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) + C\Big]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

Assim, quando estivermos calculando a integral definida, podemos omitir a constante de integração em

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) + C\Big]_a^b$$

e expressar (5) como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b \qquad (6)$$

que relaciona as integrais definida e indefinida.

▶ Exemplo 4

$$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx\Big]_1^9 = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_1^9 = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3} \blacktriangleleft$$

▶ Exemplo 5 A Tabela 6.2.1 nos será útil nos cálculos a seguir.

$$\int_4^9 x^2\sqrt{x}\,dx = \int_4^9 x^{5/2}\,dx = \frac{2}{7}x^{7/2}\Big]_4^9 = \frac{2}{7}(2187-128) = \frac{4118}{7} = 588\frac{2}{7}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{5}\,dx = -\frac{\cos x}{5}\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0\right] = -\frac{1}{5}[0-1] = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^{\pi/3} \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi/3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg} 0 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$$

$$\int_0^{\ln 3} 5e^x\,dx = 5e^x\Big]_0^{\ln 3} = 5[e^{\ln 3} - e^0] = 5[3-1] = 10$$

$$\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big]_{-e}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-e| = 0 - 1 = -1$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x\Big]_{-1/2}^{1/2} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \blacktriangleleft$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Consulte os manuais de seu CAS a respeito do cálculo de integrais definidas e confira os resultados obtidos no Exemplo 5.

ADVERTÊNCIA

As exigências do Teorema Fundamental do Cálculo de que f seja contínua em $[a, b]$ e que F seja uma antiderivada para f em todo intervalo $[a, b]$ não podem ser esquecidas. A desconsideração dessas hipóteses quase certamente levará a resultados incorretos. Por exemplo, a função $f(x) = 1/x^2$ deixa de ser contínua em $x = 0$ por dois motivos: $f(x)$ não está definida em $x = 0$ e não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Assim, o Teorema Fundamental do Cálculo não deveria ser usado para integrar f em qualquer intervalo que contenha $x = 0$. Contudo, se ignorarmos isso e cegamente aplicarmos a Fórmula (2) no intervalo $[-1, 1]$, então poderemos calcular incorretamente a integral $\int_{-1}^{1}(1/x^2)$ tomando os valores da antiderivada $-1/x$ nos extremos e obtendo a resposta

$$-\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -[1-(-1)] = -2$$

Como $f(x) = 1/x^2$ é uma função não-negativa, é impossível obter um valor negativo para essa integral definida.

O Teorema Fundamental do Cálculo pode ser aplicado, sem modificações, a integrais definidas em que o limite inferior da integração é maior do que ou igual ao limite superior da integração.

▶ Exemplo 6

$$\int_1^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\int_4^0 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_4^0 = \frac{0}{2} - \frac{16}{2} = -8$$

O último resultado está de acordo com o que teria sido obtido revertendo-se os limites de integração, conforme a Definição 6.5.3(b):

$$\int_4^0 x\,dx = -\int_0^4 x\,dx = -\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = -\left[\frac{16}{2} - \frac{0}{2}\right] = -8 \quad ◀$$

Para integrar uma função contínua que é definida por partes no intervalo $[a, b]$, divida o intervalo em subintervalos nos pontos em que a função é descontínua e integre separadamente em cada intervalo de acordo com o Teorema 6.5.5.

▶ Exemplo 7 Calcule $\int_0^6 f(x)\,dx$ se

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

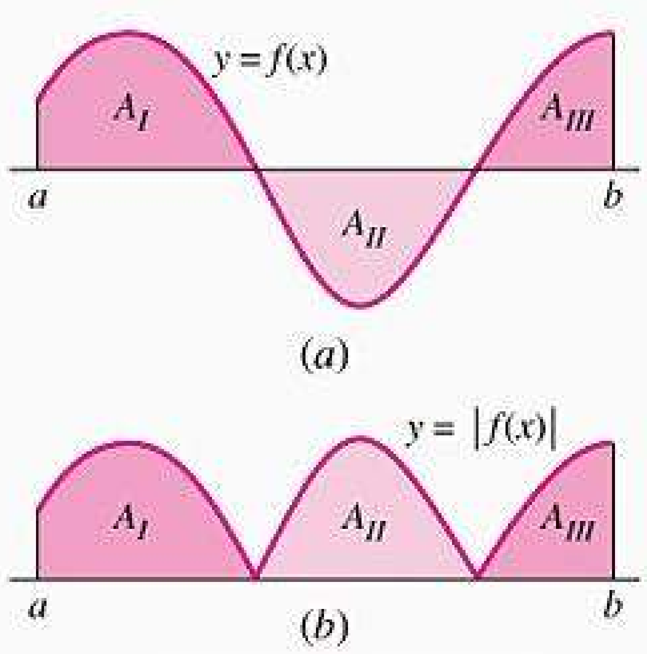
Solução A partir do Teorema 6.5.5

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x)\,dx &= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^6 f(x)\,dx \\ &= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^6 (3x-2)\,dx \\ &= \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 2x\right]_2^6 = \left(\frac{8}{3} - 0\right) + (42 - 2) = \frac{128}{3} \quad ◀ \end{aligned}$$

Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, definimos

$$\text{área total} = \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{7}$$

como a ***área total*** entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ (Figura 6.6.4). Para calcular a área total usando a Fórmula (7), começamos dividindo o intervalo de integração em subintervalos nos quais $f(x)$ não troca de sinal. Nos subintervalos em que $0 \leq f(x)$, trocamos $|f(x)|$ por $f(x)$; e nos subintervalos em que $f(x) \leq 0$, trocamos $|f(x)|$ por $-f(x)$. A soma das integrais assim obtidas é a área total.



Área total = $A_I + A_{II} + A_{III}$

Figura 6.6.4

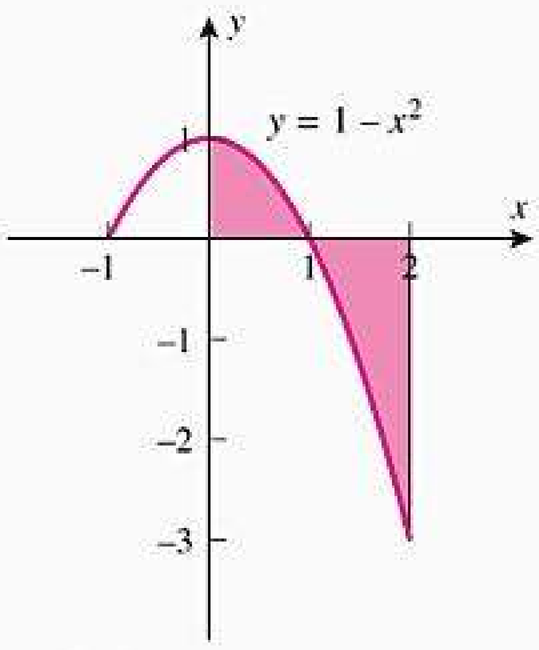


Figura 6.6.5

► **Exemplo 8** Encontre a área total entre a curva $y = 1 - x^2$ e o eixo x sobre o intervalo [0, 2] (Figura 6.6.5).

Solução A área A é dada por

$$A = \int_0^2 |1 - x^2|\,dx = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx + \int_1^2 -(1 - x^2)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = 2 \blacktriangleleft$$

■ VARIÁVEIS MUDAS

Para o cálculo de uma integral definida, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, é necessário encontrar uma antiderivada do integrando; assim, é importante saber que tipos de função têm antiderivadas. É nosso próximo objetivo mostrar que toda função contínua tem antiderivadas, mas para fazer isso precisamos antes de alguns resultados preliminares.

A Fórmula (6) mostra que há uma estreita relação entre as integrais

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int f(x)\,dx$$

Porém, as integrais definida e indefinida diferem em alguns aspectos importantes. Em primeiro lugar, ambas são *objetos* de classes diferentes – a integral definida é um *número* (a área líquida com sinal entre o gráfico de $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$), enquanto a integral indefinida é uma *função* ou, mais precisamente, um conjunto de funções [as antiderivadas de $f(x)$]. No entanto, os dois tipos de integral também diferem no papel desempenhado pela variável de integração. Em uma integral indefinida, a variável de integração é "transmitida" à antiderivada, pois integrando uma função de x produz uma função de x, integrando uma função de t produz uma função de t, e assim por diante. Por exemplo,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \quad \text{e} \quad \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C$$

Por outro lado, a variável de integração de uma integral definida não é transmitida ao resultado final, já que este é um número. Assim, integrando uma função de x sobre um intervalo e integrando a mesma função de t sobre o mesmo intervalo de integração produz o mesmo valor da integral. Por exemplo,

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_{x=1}^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \quad \text{e} \quad \int_1^3 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\bigg]_{t=1}^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Contudo, esse último resultado não deveria ser surpreendente, pois a área sob o gráfico da curva $y = f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$ do eixo x é igual à área sob o gráfico da curva $y = f(t)$ sobre um intervalo $[a, b]$ do eixo t (Figura 6.6.6).

Uma vez que a variável de integração em uma integral definida não desempenha nenhum papel, ela é usualmente chamada de ***variável muda***. Em suma:

Sempre que for conveniente mudar a letra usada para a variável de integração em uma integral definida, isso pode ser feito sem alterar o valor da integral.

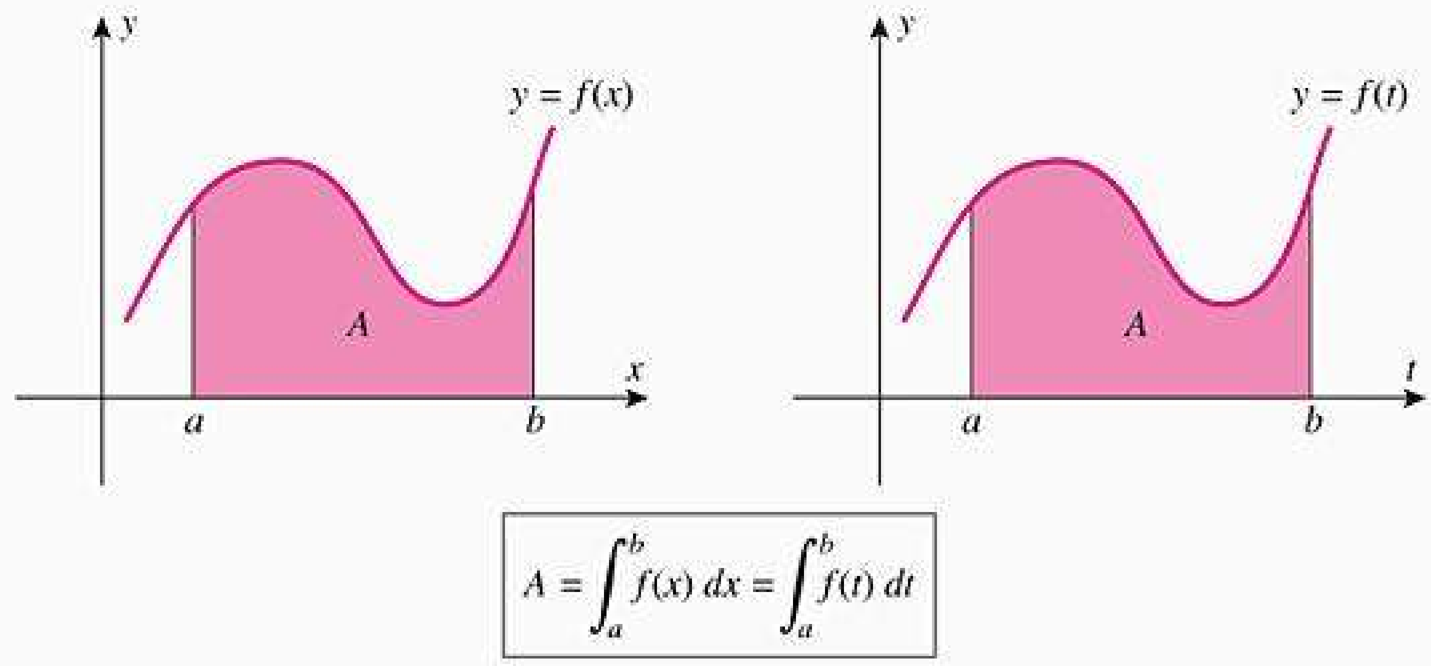


Figura 6.6.6

O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Para atingir o objetivo de mostrar que funções contínuas têm antiderivadas, vamos desenvolver uma propriedade básica das integrais definidas, conhecida como *Teorema do Valor Médio para Integrais*. No próximo capítulo, usaremos esse teorema para ampliar a idéia usual de "valor médio" para torná-la aplicável a funções contínuas, mas aqui o teorema será útil no desenvolvimento de outros resultados.

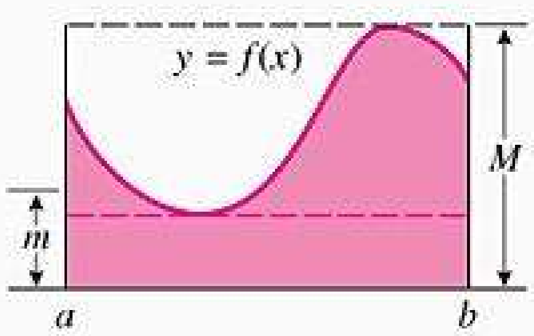


Figura 6.6.7

Seja f uma função contínua e não-negativa em $[a, b]$, e m e M os valores mínimo e máximo de $f(x)$ nesse intervalo. Considere os retângulos de alturas m e M sobre o intervalo $[a, b]$ (Figura 6.6.7). É claro, geometricamente a partir da figura, que a área

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

sob $y = f(x)$ é, pelo menos, tão grande quanto a área do retângulo de altura m e não maior do que a área do retângulo de altura M. É, portanto, razoável supor que exista um retângulo sobre o intervalo $[a, b]$ com alguma altura apropriada $f(x^*)$ entre m e M, cuja área é precisamente A; isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b - a)$$

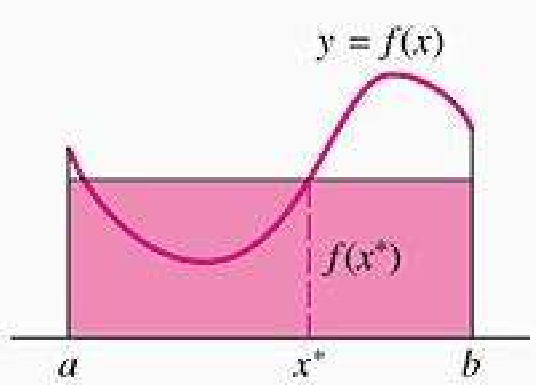


Figura 6.6.8

(Figura 6.6.8). Este é um caso especial do seguinte resultado.

> **6.6.2 TEOREMA** (***Teorema do Valor Médio para Integrais***) *Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto x^* em $[a, b]$ tal que*
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b - a) \tag{8}$$

DEMONSTRAÇÃO Pelo Teorema do Valor Extremo (5.4.2), f toma os valores mínimo m e máximo M em $[a, b]$. Assim, para todo x em $[a, b]$,

$$m \le f(x) \le M$$

e, pelo Teorema 6.5.6(b),

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

ou

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a) \tag{9}$$

ou

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Isso significa que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{10}$$

é um número entre m e M, e como $f(x)$ assume todos os valores entre m e M em $[a, b]$, tem-se a partir do Teorema do Valor Intermediário (2.5.7) que $f(x)$ deve tomar o valor (10) em algum ponto x^* de $[a, b]$; isto é,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b-a)$$ ■

▶ Exemplo 9 Já que $f(x) = x^2$ é contínua no intervalo $[1, 4]$, o Teorema do Valor Médio para Integrais garante existir um ponto x^* em $[1, 4]$, tal que

$$\int_1^4 x^2\,dx = f(x^*)(4-1) = (x^*)^2(4-1) = 3(x^*)^2$$

Mas

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_1^4 = 21$$

logo,

$$3(x^*)^2 = 21 \quad \text{ou} \quad (x^*)^2 = 7 \quad \text{ou} \quad x^* = \pm\sqrt{7}$$

Portanto, $x^* = \sqrt{7} \approx 2{,}65$ é o número em $[1, 4]$, cuja existência está garantida pelo Teorema do Valor Médio para Integrais. ◀

■ PARTE 2 DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Na Seção 6.1, foi dado um argumento informal para mostrar que, se f for contínua e não-negativa em $[a, b]$ e se $A(x)$ for a área sob o gráfico de $y = f(x)$ sobre o intervalo $[a, x]$ (Figura 6.6.2), então $A'(x) = f(x)$. Mas $A(x)$ pode ser expressa como a integral definida

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

(onde usamos t como variável de integração para evitar confusão com o x que aparece no extremo superior da integração). Dessa forma, a relação $A'(x) = f(x)$ pode ser expressa como

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

Este é um caso especial do resultado seguinte mais geral, o qual se aplica mesmo que f assuma valores negativos.

6.6.3 TEOREMA (***Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2***) *Se f for contínua em um intervalo I, então f tem uma antiderivada em I. Em particular, se a for um ponto qualquer em I, então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é uma antiderivada de f em I; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada x em I, ou em uma notação alternativa

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x) \tag{11}$$

DEMONSTRAÇÃO Vamos mostrar primeiro que $F(x)$ está definida em cada ponto x do intervalo I. Se $x > a$ e x estiver em I, então o Teorema 6.5.2 aplicado no intervalo $[a, x]$ e a continuidade de f em I asseguram que $F(x)$ está definida; e se x estiver no intervalo I e $x \leq a$, então a Definição 6.5.3, combinada com o Teorema 6.5.2, garante que $F(x)$ está definida. Assim, $F(x)$ está definida para todo x em I.

A seguir, mostraremos que $F'(x) = f(x)$ para cada x no intervalo I. Se x não for um extremo de I, então tem-se, a partir da definição de derivada, que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \qquad \boxed{\text{Teorema 6.5.5}} \end{aligned} \tag{12}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para Integrais (6.6.2) ao integrando em (12), obtemos

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}[f(t^*) \cdot h] = f(t^*) \tag{13}$$

onde t^* é algum número entre x e $x + h$. Como t^* está cercado entre x e $x + h$, segue que $t^* \to x$ quando $h \to 0$. Assim, a continuidade de f em x implica que $f(t^*) \to f(x)$ quando $h \to 0$. Portanto, segue de (12) e (13) que

$$F'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) = \lim_{h \to 0} f(t^*) = f(x)$$

Se x for um ponto extremo do intervalo I, então os limites laterais da demonstração devem ser trocados pelos limites laterais apropriados, mas, a não ser por isso, os argumentos são idênticos. ■

Em palavras, a Fórmula (11) afirma que:

> *Se uma integral definida tiver um limite superior de integração variável, um limite inferior de integração constante e um integrando contínuo, então a derivada da integral em relação ao seu limite superior é igual ao integrando calculado no limite superior.*

► Exemplo 10 Encontre

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right]$$

aplicando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo e, então, confirme o resultado fazendo a integração e depois diferenciando.

Solução O integrando é uma função contínua; assim, a partir de (11),

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = x^3$$

Alternativamente, calculando a integral e depois diferenciando, obtemos

$$\int_1^x t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\bigg]_{t=1}^x = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}, \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right] = x^3$$

de modo que coincidem os dois métodos para derivar a integral. ◄

▶ Exemplo 11 Como

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

é contínua em todo intervalo que não contém a origem, tem-se a partir de (11) que, no intervalo $(0, +\infty)$, temos

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right] = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Diferente do exemplo anterior, não há nenhuma forma de calcular a integral em termos de funções conhecidas, de modo que a Fórmula (11) fornece o único método simples de encontrar a derivada. ◀

■ A DIFERENCIAÇÃO E A INTEGRAÇÃO SÃO PROCESSOS INVERSOS

Juntas, as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo nos dizem que a diferenciação e a integração são processos inversos, no sentido de que cada uma desfaz o efeito da outra. Para confirmar isso, note que a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (6.6.1) afirma que

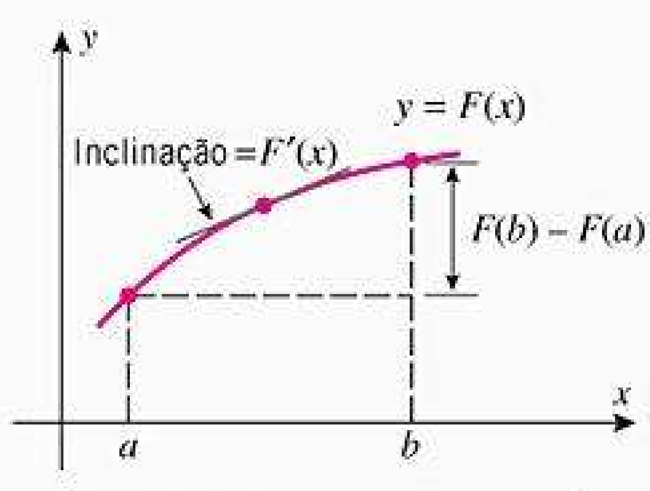
$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

o que significa que, se o valor de $f(a)$ for conhecido, então a função f pode ser obtida a partir de sua derivada f' por integração. Reciprocamente, a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo (6.6.3) afirma que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

o que significa que a função f pode ser obtida a partir de sua integral por diferenciação. Dessa forma, a diferenciação e a integração podem ser encaradas como processos inversos.

É comum tratar as Partes 1 e 2 do Teorema Fundamental do Cálculo como um único teorema, e nos referimos a esses resultados como o *Teorema Fundamental do Cálculo*. Esse teorema ocupa o posto de uma das maiores descobertas da história da Ciência, e sua formulação por Newton e Leibniz é vista, geralmente, como sendo "a descoberta do Cálculo".



Integrando a inclinação de $y = F(x)$ no intervalo $[a, b]$, obtemos a variação $F(b) - F(a)$ no valor de $F(x)$.

Figura 6.6.9

■ INTEGRANDO TAXAS DE VARIAÇÃO

O Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{14}$$

tem uma interpretação muito útil que pode ser vista reescrevendo-o em uma forma ligeiramente diferente. Como F é uma antiderivada de f no intervalo $[a, b]$, podemos usar a relação $F'(x) = f(x)$ para reescrever (14) como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{15}$$

Nessa fórmula, podemos interpretar $F'(x)$ como a taxa de variação de $F(x)$ em relação a x, e $F(b) - F(a)$ como a *variação* no valor de $F(x)$ quando x cresce de a até b (Figura 6.6.9). Assim, resulta o seguinte princípio bastante útil.

6.4.4 INTEGRANDO UMA TAXA DE VARIAÇÃO Integrando a taxa de variação de $F(x)$ em relação a x no intervalo $[a, b]$, obtemos a variação no valor de $F(x)$ que ocorre quando x cresce de a até b.

A seguir, alguns exemplos dessa idéia:

- Se $P(t)$ for uma população (plantas, animais ou pessoas) no instante t, então $P'(t)$ é a taxa segundo a qual a população está variando no instante t, e

$$\int_{t_1}^{t_2} P'(t)\,dt = P(t_2) - P(t_1)$$

é a variação na população entre os momentos t_1 e t_2.

- Se $A(t)$ for a área de um derramamento de óleo em um instante t, então $A'(t)$ é a taxa segundo a qual a área do derramamento varia no instante t, e

$$\int_{t_1}^{t_2} A'(t)\,dt = A(t_2) - A(t_1)$$

é a variação na área do derramamento entre os momentos t_1 e t_2.

- Se $P'(x)$ for o lucro marginal que resulta da produção e da venda de x unidades de um produto (ver p. 317), então

$$\int_{x_1}^{x_2} P'(x)\,dx = P(x_2) - P(x_1)$$

é a variação no lucro que resulta quando o nível de produção aumenta de x_1 para x_2 unidades.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.6 (*Ver página 410 para respostas.*)

1. (a) Se $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = ______$$

(b) $\int_a^b F'(x)\,dx = ______$

(c) $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = ______$

2. (a) $\int_1^4 (x^2 - 2x)\,dx = ______$

(b) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx = ______$

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 5} e^x\,dx = ______$

(d) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ______$

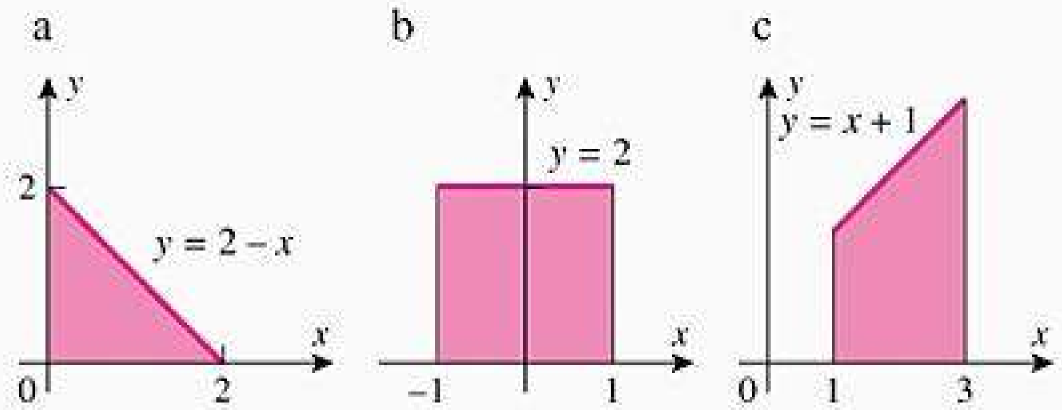
3. A área total entre o gráfico de $y = 2x + 2$ e o intervalo $[-4, 2]$ é ________.

4. O ponto x^* garantido pelo Teorema do Valor Médio para a função $f(x) = 1/x$ e o intervalo $[1, e]$ é ________.

5. A área de um vazamento de óleo, t segundos depois do início do vazamento, está crescendo a uma taxa de 25 m^2/s. Entre os tempos $t = 2$ e $t = 4$, a área do vazamento aumentou ________ m^2.

EXERCÍCIOS 6.6 Recurso Gráfico [C] CAS

1. Em cada parte, use uma integral definida para encontrar a área da região e verifique sua resposta usando uma fórmula apropriada de Geometria.



2. Em cada parte, use uma integral definida para encontrar a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo dado e verifique sua resposta usando uma fórmula apropriada de Geometria.

(a) $f(x) = x$; $[0, 5]$

(b) $f(x) = 5$; $[3, 9]$

(c) $f(x) = x + 3$; $[-1, 2]$

3-8 Encontre a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo dado.

3. $f(x) = x^3$; $[2, 3]$

4. $f(x) = x^4$; $[-1, 1]$

5. $f(x) = 3\sqrt{x}$; $[1, 4]$

6. $f(x) = x^{-2/3}$; $[1, 27]$

7. $f(x) = e^{2x}$; [0, ln 2]

8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; [1, 5]

9-27 Calcule a integral usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.

9. $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2 - 6x + 12)\,dx$

10. $\displaystyle\int_{-1}^{2} 4x(1 - x^2)\,dx$

11. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{4}{x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^6}\,dx$

13. $\displaystyle\int_{4}^{9} 2x\sqrt{x}\,dx$

14. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

16. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sec^2\theta\,d\theta$

17. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx$

18. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} (2x - \sec x \operatorname{tg} x)\,dx$

19. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{3} 5e^x\,dx$

20. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{2x}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

22. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$

23. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{-2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

25. $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 3\sqrt{t}\right) dt$

26. $\displaystyle\int_{4}^{9} (4y^{-1/2} + 2y^{1/2} + y^{-5/2})\,dy$

27. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(x + \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$

C **28.** Use um CAS para calcular a integral

$$\int_{a}^{4a} (a^{1/2} - x^{1/2})\,dx$$

e verifique a sua resposta à mão.

29-32 Use o Teorema 6.5.5 para calcular as integrais dadas.

29. (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |2x - 1|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/4} |\cos x|\,dx$

30. (a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \sqrt{2 + |x|}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \left|\tfrac{1}{2} - \cos x\right|\,dx$

31. (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{|2 - x|}{x}\,dx$

32. (a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \left|x^2 - 1 - \frac{15}{x^2 + 1}\right| dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \left|\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{2}\right| dx$

C **33.** (a) Os programas CAS fornecem métodos para dar entrada a funções definidas por partes. Confira o manual do seu CAS para ver como isso é feito e então calcule

$$\int_0^2 f(x)\,dx, \quad \text{onde} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Use o Teorema 6.5.5 para conferir a resposta à mão.

(b) Encontre uma fórmula para uma antiderivada F de f no intervalo [0, 2] e verifique que

$$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0)$$

C **34.** (a) Use um CAS para calcular

$$\int_0^4 f(x)\,dx, \quad \text{onde} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \le x < 1 \\ 1/x^2, & x \ge 1 \end{cases}$$

Use o Teorema 6.5.5 para conferir a resposta à mão.

(b) Encontre uma fórmula para uma antiderivada F de f no intervalo [0, 4] e verifique que

$$\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0)$$

35-38 Use um recurso computacional para encontrar a aproximação pelo ponto médio da integral usando $n = 20$ subintervalos, e então encontre o valor exato da integral usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.

35. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

37. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sec^2 x\,dx$

38. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

39. Encontre a área abaixo da curva $y = x^2 + 1$ e acima do intervalo [0, 3]. Faça um esboço da região.

40. Encontre a área acima do eixo x, mas abaixo da curva $y = x - x^2$. Faça um esboço da região.

41. Encontre a área abaixo da curva $y = 3 \operatorname{sen} x$ e acima do intervalo $[0, 2\pi/3]$. Faça um esboço da região.

42. Encontre a área abaixo do intervalo [−2, −1], mas acima da curva $y = x^3$. Faça um esboço da região.

43-48 Esboce a curva e encontre a área total entre a curva e o intervalo dado do eixo x.

43. $y = x^2 - x$; [0, 2]

44. $y = \operatorname{sen} x$; $[0, 3\pi/2]$

45. $y = 2\sqrt{x + 1} - 3$; [0, 3]

46. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$; $[\tfrac{1}{2}, 2]$

47. $y = e^x - 1$; [−1, 1]

48. $y = \dfrac{x - 2}{x}$; [1, 3]

49. Um aluno quer encontrar a área delimitada pelos gráficos de $y = 1/\sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 0{,}8$.

(a) Mostre que a área exata é arc sen 0,8.

(b) O aluno usa uma calculadora para aproximar o resultado da parte (a) até a segunda casa decimal e obtém a resposta incorreta de 53,13. Qual foi o erro dele? Encontre a aproximação correta.

ENFOCANDO CONCEITOS

50. (a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{100}(x+2)(x+1)(x-3)(x-5)$$

e use o gráfico para fazer uma conjectura sobre o sinal da integral

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

(b) Verifique sua conjectura calculando a integral.

51. (a) Seja f uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$. Invente um teorema que faça uma afirmativa sobre o valor de uma integral da forma

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

(b) Confirme que seu teorema funciona para as integrais

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$$

(c) Seja f uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$. Invente um teorema que faça uma afirmativa sobre a relação entre as integrais

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(d) Confirme que seu teorema funciona para as integrais

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$$

C 52. Use o teorema inventado no Exercício 51(a) para calcular a integral

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^7 - x^5 + x}{x^4 + x^2 + 7}\,dx$$

e verifique sua resposta com um CAS.

53. Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_{1}^{x} (3t^2 - 3)\,dt$$

(a) Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar $F'(x)$.

(b) Verifique o resultado de (a) integrando e depois diferenciando.

54. Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_{\pi/4}^{x} \cos 2t\,dt$$

(a) Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar $F'(x)$.

(b) Verifique o resultado de (a) integrando e depois diferenciando.

55-58 Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar as derivadas.

55. (a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{0}^{x} e^{\sqrt{t}}\,dt$

56. (a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1}^{x} \ln t\,dt$

57. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x}^{0} t \sec t\,dt$ [*Sugestão*: Use a Definição 6.5.3(b).]

58. $\dfrac{d}{du}\displaystyle\int_{0}^{u} |x|\,dx$

59. Seja $F(x) = \displaystyle\int_{4}^{x} \sqrt{t^2+9}\,dt$. Encontre

(a) $F(4)$ (b) $F'(4)$ (c) $F''(4)$

60. Seja $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{x} \operatorname{arc\,tg} t\,dt$. Encontre

(a) $F(\sqrt{3})$ (b) $F'(\sqrt{3})$ (c) $F''(\sqrt{3})$

ENFOCANDO CONCEITOS

61. Seja $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{t-3}{t^2+7}\,dt$ para $-\infty < x < +\infty$.

(a) Encontre o valor de x em que F atinge seu valor mínimo.

(b) Encontre os intervalos nos quais F é somente crescente ou somente decrescente.

(c) Encontre os intervalos abertos nos quais F é somente côncava para cima ou somente côncava para baixo.

C 62. Use a geração de gráficos e a integração numérica de um CAS para gerar o gráfico da função F do Exercício 61, no intervalo $-20 \le x \le 20$, e confirme que o gráfico está de acordo com os resultados obtidos naquele exercício.

63. (a) Em qual intervalo aberto a fórmula

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t}$$

representa uma antiderivada de $f(x) = 1/x$?

(b) Encontre um ponto em que o gráfico de F cruza o eixo x.

64. (a) Em qual intervalo aberto a fórmula

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2-9}\,dt$$

representa uma antiderivada de

$$f(x) = \frac{1}{x^2-9}?$$

(b) Encontre um ponto em que o gráfico de F cruza o eixo x.

65-66 Encontre todos os valores de x^* nos intervalos que satisfazem a Equação (8) do Teorema do Valor Médio para Integrais (6.6.2) e explique o que representam esses números.

65. (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 3]$

(b) $f(x) = x^2 + x$; $[-12, 0]$

66. (a) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $[-\pi, \pi]$ (b) $f(x) = 1/x^2$; $[1, 3]$

67-68 tr u e na r a e rema a r é i ara n tegrai 2 ue, e f r c ntínua em a, b e $m \leq f\ x \leq M$ em a, b , entã

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

er E a e igua a e t rnam í e bter imitaçõe bre tamanh e uma integra efini a, a artir e imitaçõe bre tamanh e eu integran e tá i u tra n e er cíci 7 e

67. Enc ntre a re má im e mínim e $\sqrt{x^3+2}$ ara $0 \leq x \leq 3$ e u e e e a re ara enc ntrar imitaçõe bre a r a integra

$$\int_0^3 \sqrt{x^3+2}\,dx$$

68. Enc ntre a re e m e M tai ue $m \leq x$ en $x \leq M$ ara $0 \leq x \leq \pi$, e u e ara enc ntrar imitaçõe bre a r a integra

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,dx$$

69. Pr e:

a $[cF(x)]_a^b = c[F(x)]_a^b$

b $[F(x)+G(x)]_a^b = F(x)]_a^b + G(x)]_a^b$

c $[F(x)-G(x)]_a^b = F(x)]_a^b - G(x)]_a^b$

ENFOCANDO CONCEITOS

70. E i ue r ue e rema Fun amenta á cu e er a ica em m ificaçõe a integrai efini a em ue imite e integraçã in eri r é mai r ue u igua a imite e integraçã u eri r

71. a Se $h'\ t$ r a ta a e ariaçã a a tura e uma crian ça em centímetr r an , ue re re enta a integra $\int_0^{10} h'(t)\,dt$, e uai ã ua uni a e

b Se $r'\ t$ r a ta a e ariaçã rai e um ba ã e éric me i a em centímetr r egun , ue re re enta a integra $\int_1^2 r'(t)\,dt$, e uai ã ua uni a e

c Se $H\ t$ r a ta a e ariaçã a e ci a e m em re açã à tem eratura me i a em m/ r °, ue re re enta a integra $\int_{32}^{100} H(t)\,dt$, e uai ã ua uni a e

Se $v\ t$ r a e ci a e e uma artícu a em m imen t reti íne me i a em cm/h, ue re re enta a integra $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$, e uai ã ua uni a e

72. a Su nha ue e te a azan ama ara entr e um ri a uma ta a e $V\ t$ ga õe r minut , c meçan em um in tante $t = 0$ E cre a uma integra ue re re ente ume t ta e ama ue aza ara entr ri , u rante a rimeira h ra

b Su nha ue a reta tangente à cur a $y = f\ x$ tenha in c inaçã $m\ x$ n nt x ue re re enta a integra $\int_{x_1}^{x_2} m(x)\,dx$

73. a Su nha ue um re er atóri rneça água ara um ar ue in u tria a uma ta a c n tante e $r = 4$ ga õe r minut entre h30min e h a manhã uanta água re er atóri rnecerá urante e e erí e tem

b Su nha ue uma a in ú tria aumente eu c n um entre h e 10h a manhã e ue a ta a egun a ua re er atóri rnece água cre ça inearmente, c n rme a figura abai uanta água re er atóri rnecerá urante a ue a 1 h ra

c Su nha ue a 10h até a 12h a manhã a ta a e gun a ua re er atóri rnece água e a a a e a órmu a $r\ t = 10 + \sqrt{t}$ ga õe r minut , n e $t = 0$ c rre n e à 10h a manhã uanta água re er a tóri rnecerá urante a ue e erí e 2 h ra



Figura Ex-73

74. ma engenheira e trá eg m nit ra trân it urante uma h ra h rári e ic a tar e artir e eu a , e a e tima ue, entre a 4h30min e a 5h30min a tar e, a ta a $R\ t$ egun a ua carr entram em uma certa ia e re a é a a e a órmu a $R\ t = 100\ 1 - 0{,}0001t^2$ carr r minut , n e t é tem em minut e e a 4h30min a tar e

a uan c rre ic e flu e trân it ara entr a ia e re a

b E time númer e carr ue entram na ia e re a urante a h ra m nit ra a

75-76 a cu e ca a imite inter retan c m uma ma e iemann em ue inter a ã i i i em n ubinter a e igua c m riment

75. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \sec^2\left(\frac{\pi k}{4n}\right)$; $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

76. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$; $[0, 1]$

77. Pr e e rema a r é i ara ntegrai e rema 2 a ican e rema a r é i 5 7 2 a uma anti eri a a F e f

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.6

1. (a) $F(b) - F(a)$ (b) $F(b) - F(a)$ (c) $f(x)$ **2.** (a) 6 (b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ (c) $\sqrt{5}-1$ (d) $\dfrac{\pi}{3}$ **3.** 18 **4.** $e-1$ **5.** 150

6.7 MOVIMENTO RETILÍNEO REVISTO USANDO INTEGRAÇÃO

Na Seção 5.8 usamos a derivada para definir as noções de velocidade e aceleração instantâneas para uma partícula em movimento retilíneo. Nesta seção retomaremos o estudo de tal movimento utilizando as ferramentas da integração.

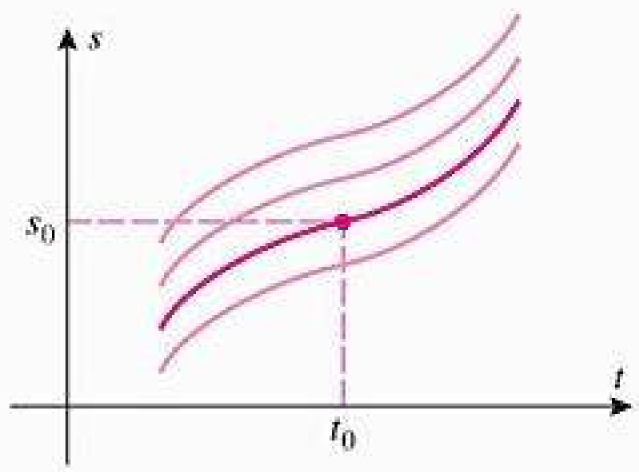
■ ENCONTRANDO POSIÇÃO E VELOCIDADE POR INTEGRAÇÃO

Lembre que na Seção 5.8 (ver Fórmulas (1) e (3)) vimos que, se uma partícula em movimento retilíneo tem uma função posição $s(t)$, então sua velocidade e aceleração instantâneas são dadas pelas fórmulas

$$v(t) = s'(t) \quad \text{e} \quad a(t) = v'(t)$$

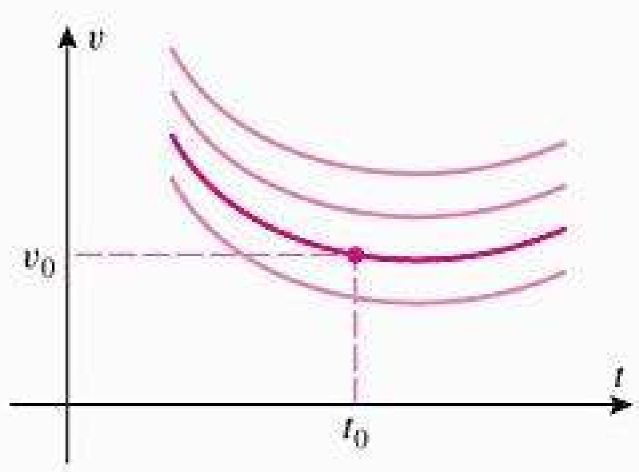
Segue dessas fórmulas que $s(t)$ é uma antiderivada de $v(t)$ e que $v(t)$ é uma antiderivada de $a(t)$, ou seja,

$$s(t) = \int v(t)\,dt \qquad \text{e} \qquad v(t) = \int a(t)\,dt \tag{1-2}$$



Há uma única função posição tal que $s(t_0) = s_0$

Figura 6.7.1



Há uma única função velocidade tal que $v(t_0) = v_0$

Figura 6.7.2

Pela Fórmula (1), se conhecermos a função velocidade $v(t)$ de uma partícula em movimento retilíneo, então a integração de $v(t)$ produz uma família de funções posição com aquela função velocidade. Se, além disso, soubermos a posição s_0 da partícula em algum instante t_0, então teremos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função posição (Figura 6.7.1). Analogamente, se conhecermos a função aceleração $a(t)$ da partícula, então a integração de $a(t)$ produz uma família de funções velocidade com aquela função aceleração. Se, além disso, soubermos a velocidade v_0 da partícula em algum instante t_0, então teremos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função velocidade (Figura 6.7.2).

▶ Exemplo 1 Uma partícula move-se com velocidade $v(t) = \cos \pi t$ ao longo de um eixo coordenado. Sabendo que a partícula tem a coordenada $s = 4$ no instante $t = 0$, encontre sua função posição.

Solução A função posição é

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int \cos \pi t\,dt = \frac{1}{\pi}\,\text{sen}\,\pi t + C$$

Como $s = 4$ quando $t = 0$, tem-se que

$$4 = s(0) = \frac{1}{\pi}\,\text{sen}\,0 + C = C$$

Assim,

$$s(t) = \frac{1}{\pi}\,\text{sen}\,\pi t + 4 \quad ◀$$

■ CALCULANDO DESLOCAMENTO E DISTÂNCIA PERCORRIDA POR INTEGRAÇÃO

Lembre que o deslocamento de uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um intervalo de tempo é sua coordenada final menos sua coordenada inicial. Assim, se a função

posição da partícula for $s(t)$, então seu deslocamento ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é $s(t_1) - s(t_0)$. Isso pode ser escrito em forma integral como

Interprete a Fórmula (3) como um caso especial da Fórmula (15) da Seção 6.6.

$$\begin{bmatrix}\text{deslocamento}\\ \text{ao longo do}\\ \text{intervalo } [t_0, t_1]\end{bmatrix} = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} s'(t)\,dt = s(t_1) - s(t_0) \tag{3}$$

No entanto, para encontrar a distância percorrida pela partícula ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ (ou seja, o total da distância percorrida no sentido positivo mais a distância percorrida no sentido negativo), precisamos integrar o valor absoluto da função velocidade, ou seja,

$$\begin{bmatrix}\text{distância total per-}\\ \text{corrida em um inter-}\\ \text{valo de tempo } [t_0, t_1]\end{bmatrix} = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|\,dt \tag{4}$$

Como o valor absoluto da velocidade é a velocidade escalar, podemos, informalmente, resumir as Fórmulas (3) e (4) como segue.

Integrando a velocidade ao longo de um intervalo de tempo, obtemos o deslocamento; integrando a velocidade escalar ao longo de um intervalo de tempo, obtemos a distância percorrida.

▶ Exemplo 2 Uma partícula move-se ao longo de um eixo coordenado de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - 2t$ m/s.

(a) Encontre o deslocamento da partícula no intervalo de tempo $0 \le t \le 3$.

(b) Encontre a distância total percorrida pela partícula no intervalo $0 \le t \le 3$.

Em problemas físicos, é importante associar as unidades corretas às integrais definidas. Em geral, as unidades para a integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

serão unidades de $f(x)$ vezes unidades de x, já que a integral definida é o limite de somas de Riemann, nas quais cada termo tem essas unidades. Por exemplo, de $v(t)$ está em metros por segundo (m/s) e t é dado em segundos (s), então

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

é dada em metros, pois

$$(\text{m/s}) \times \text{s} = \text{m}$$

Solução (a) A partir de (3), o deslocamento é

$$\int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^3 (t^2 - 2t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^2\right]_0^3 = 0$$

Assim, em $t = 3$, a partícula está na mesma posição que em $t = 0$.

Solução (b) A velocidade pode ser escrita como $v(t) = t^2 - 2t = t(t - 2)$, logo $v(t) \le 0$ se $0 \le t \le 2$ e $v(t) \ge 0$ se $2 \le t \le 3$. Desse modo, segue de (4) que a distância total percorrida é

$$\begin{aligned}\int_0^3 |v(t)|\,dt &= \int_0^2 -v(t)\,dt + \int_2^3 v(t)\,dt\\ &= \int_0^2 -(t^2 - 2t)\,dt + \int_2^3 (t^2 - 2t)\,dt\\ &= -\left[\frac{t^3}{3} - t^2\right]_0^2 + \left[\frac{t^3}{3} - t^2\right]_2^3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\text{ m} \blacktriangleleft\end{aligned}$$

■ ANALISANDO A CURVA VELOCIDADE *VERSUS* TEMPO

Na Seção 5.8 mostramos como usar a curva posição *versus* tempo para obter informações sobre o comportamento de uma partícula em movimento retilíneo (Tabela 5.8.1). Da mesma forma, podem ser obtidas valiosas informações da curva velocidade *versus* tempo. Por exemplo, a integral em (3) pode ser interpretada, geometricamente, como a *área líquida com sinal* entre o gráfico de $v(t)$ e o intervalo $[t_0, t_1]$; e a integral em (4), como a *área total* entre o gráfico de $v(t)$ e o intervalo $[t_0, t_1]$. Assim, temos o seguinte resultado.

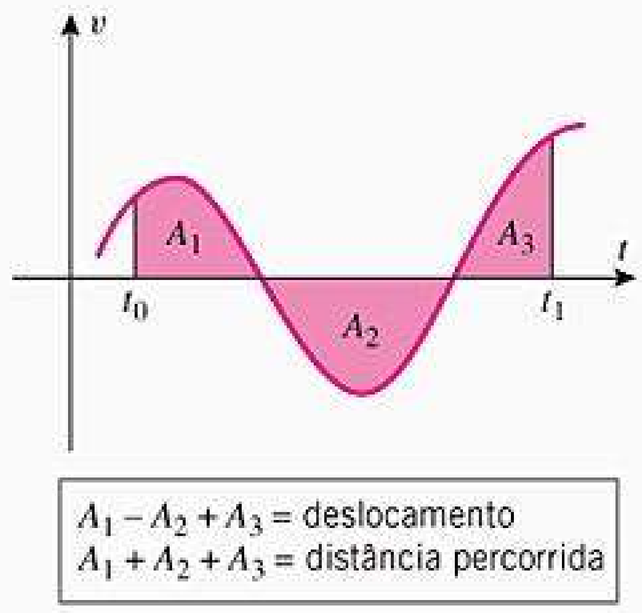


Figura 6.7.3

> **6.7.1 ENCONTRANDO O DESLOCAMENTO ATRAVÉS DA CURVA VELOCIDADE *VERSUS* TEMPO** Para uma partícula em movimento retilíneo, a área líquida com sinal entre a curva velocidade *versus* tempo e um intervalo $[t_0, t_1]$ no eixo t representa o deslocamento da partícula nesse intervalo de tempo, e a área total entre a curva velocidade *versus* tempo e o intervalo $[t_0, t_1]$ no eixo t representa a distância percorrida pela partícula nesse intervalo (Figura 6.7.3).

► Exemplo 3 A Figura 6.7.4 mostra três curvas velocidade *versus* tempo para uma partícula em movimento retilíneo, ao longo de um eixo horizontal com sentido positivo para a direita. Em cada caso, encontre o deslocamento e a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \le t \le 4$ e explique o que essas informações revelam sobre o movimento da partícula.

Solução (a) Na parte (*a*) da figura, a área e a área líquida com sinal acima do intervalo são ambas iguais a 2. Assim, no final do período de tempo, a partícula está 2 unidades à direita do ponto inicial e percorreu uma distância de 2 unidades.

Solução (b) Na parte (*b*) da figura, a área líquida com sinal é −2 e a área total é 2. Assim, no final do período de tempo, a partícula está 2 unidades à esquerda do ponto inicial e percorreu uma distância de 2 unidades.

Solução (c) Na parte (*c*) da figura, a área líquida com sinal é 0 e a área total é 2. Assim, no final do período de tempo, a partícula está de volta ao ponto inicial e percorreu uma distância de 2 unidades. Mais especificamente, percorreu 1 unidade para a direita ao longo do intervalo de tempo $0 \le t \le 1$ e, depois, 1 unidade para a esquerda ao longo do intervalo de tempo $1 \le t \le 2$ (por quê?). ◄

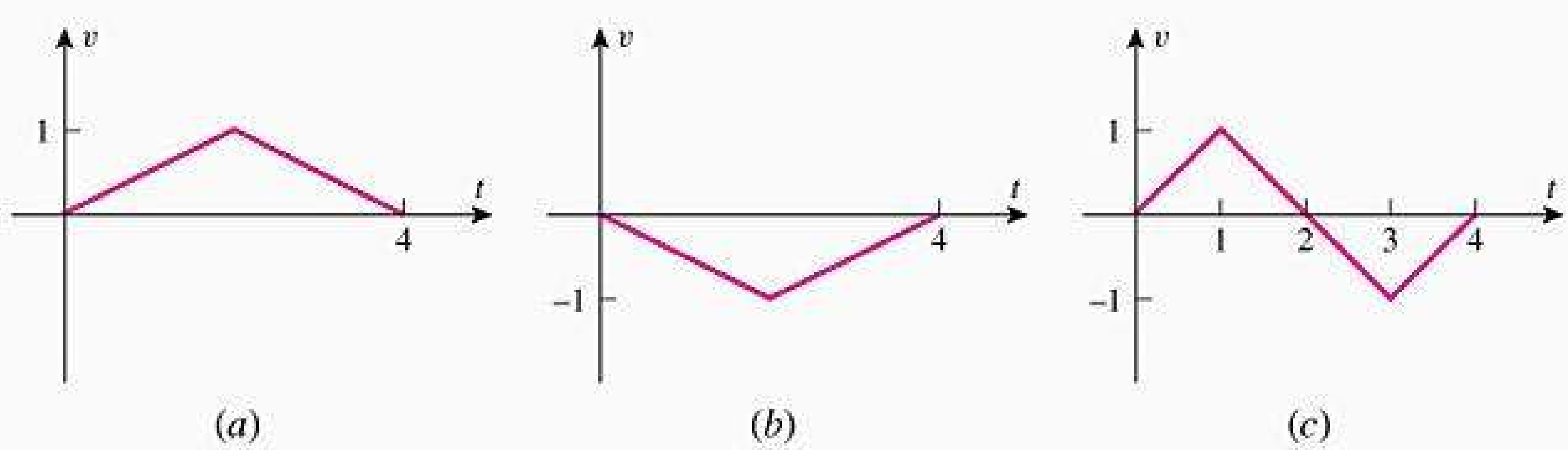


Figura 6.7.4

■ MOVIMENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Um dos casos mais importantes de movimento retilíneo ocorre quando a partícula tem aceleração constante. Tal caso é denominado ***movimento uniformemente acelerado***.

Vamos mostrar que, se uma partícula tiver aceleração constante em seu movimento ao longo de um eixo s, e se forem conhecidas sua posição e velocidade em um certo instante, digamos $t = 0$, então é possível deduzir fórmulas para a posição $s(t)$ e a velocidade $v(t)$ em qualquer instante t. Para ver como isso pode ser feito, vamos supor que a partícula tenha uma aceleração constante

$$a(t) = a \tag{5}$$

e que

$$s = s_0 \quad \text{quando} \quad t = 0 \tag{6}$$
$$v = v_0 \quad \text{quando} \quad t = 0 \tag{7}$$

onde s_0 e v_0 são conhecidos. Chamamos (6) e (7) de ***condições iniciais*** do movimento.

Tomando (5) como ponto de partida, podemos integrar $a(t)$ para obter $v(t)$ e, por sua vez, integrar $v(t)$ para obter $s(t)$, usando em cada caso as condições iniciais para determinar a constante de integração. Os cálculos são os seguintes:

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int a\,dt = at + C_1 \tag{8}$$

Para determinar a constante de integração C_1, aplicamos a condição inicial (7) a essa equação para obter

$$v_0 = v(0) = a \cdot 0 + C_1 = C_1$$

Substituindo isso em (8) e colocando em primeiro lugar o termo constante, obtemos

$$v(t) = v_0 + at$$

Como v_0 é constante, tem-se que

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (v_0 + at)\,dt = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 + C_2 \tag{9}$$

Para determinar a constante C_2, aplicamos a condição inicial (6) a essa equação para obter

$$s_0 = s(0) = v_0 \cdot 0 + \tfrac{1}{2}a \cdot 0 + C_2 = C_2$$

Substituindo isso em (9) e colocando o termo constante em primeiro lugar, obtemos

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Resumindo, temos o seguinte resultado.

Como podemos deduzir, a partir do gráfico da curva velocidade *versus* tempo, se uma partícula movendo-se ao longo de uma reta tem movimento uniformemente acelerado?

6.7.2 MOVIMENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO Se uma partícula se move com uma aceleração constante a ao longo de um eixo s, e se s_0 e v_0 forem, respectivamente, a posição e a velocidade no instante $t = 0$, então as funções posição e velocidade da partícula são

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{10}$$

$$v(t) = v_0 + at \tag{11}$$

► **Exemplo 4** Suponha que uma nave espacial intergaláctica use uma vela e o "vento solar" para produzir uma aceleração constante de 0,032 m/s^2. Supondo que a velocidade da nave seja de 10.000 m/s quando a vela é desfraldada pela primeira vez, quão longe a nave viajará em uma hora e qual será sua velocidade ao final dessa hora?

Solução Nesse problema, a escolha de um eixo de coordenadas está a nosso critério; logo, vamos escolhê-lo de forma a tornar os cálculos tão simples quanto possível. Conseqüentemente, vamos introduzir um eixo s cujo sentido positivo está na direção do movimento e escolher a origem coincidente com a posição da nave em $t = 0$ quando a vela é desfraldada. Assim, as Fórmulas (10) e (11) para o movimento uniformemente acelerado podem ser aplicadas com

$$s_0 = s(0) = 0, \quad v_0 = v(0) = 10.000 \quad \text{e} \quad a = 0{,}032$$

Como 1 hora corresponde a 3.600 segundos, tem-se a partir de (10) que em 1 hora a nave percorre a distância de

$$s(3.600) = 10.000(3600) + \tfrac{1}{2}(0{,}032)(3.600)^2 \approx 36.200.000 \text{ m}$$

e a partir de (11) tem-se que, após 1 hora, a velocidade é de

$$v(3.600) = 10.000 + (0{,}032)(3.600) \approx 10.100 \text{ m/s} \quad ◄$$

▶ Exemplo 5 Um ônibus pára para receber passageiros e uma mulher tenta alcançá-lo correndo a uma velocidade constante de 5 m/s. Quando ela está a 11 m da porta dianteira, o ônibus parte com uma aceleração constante de 1 m/s^2. A partir daí, quanto tempo ela levará para chegar até a porta, se continuar a correr com a velocidade de 5 m/s?

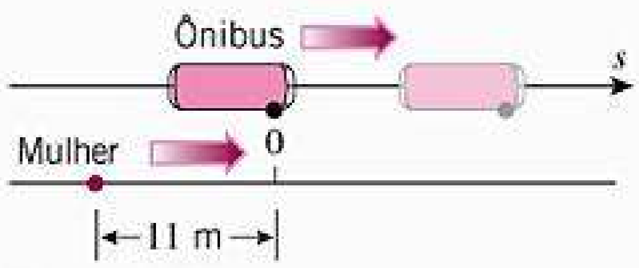


Figura 6.7.5

Solução Conforme mostra a Figura 6.7.5, escolha o eixo s de tal forma que o ônibus e a mulher se movimentem no sentido positivo e a porta dianteira esteja na origem em $t = 0$, quando ele começa a se movimentar. Para pegar o ônibus depois de algum tempo t, a mulher terá de percorrer uma distância $s_w(t)$ que é igual a 11 metros mais a distância $s_b(t)$ percorrida pelo ônibus; isto é, ela irá alcançar o ônibus quando

$$s_w(t) = s_b(t) + 11 \tag{12}$$

Como a mulher tem uma velocidade constante de 5 m/s, a distância percorrida por ela em t segundos é $s_w(t) = 5t$. Assim, podemos escrever (12) como

$$s_b(t) = 5t - 11 \tag{13}$$

Como o ônibus tem uma aceleração constante de $a = 1$ m/s^2 e como $s_0 = v_0 = 0$ em $t = 0$ (por quê?), tem-se a partir de (10) que

$$s_b(t) = \tfrac{1}{2}t^2$$

Substituindo essa equação em (13) e reorganizando os termos, obtemos a equação quadrática

$$\tfrac{1}{2}t^2 - 5t + 11 = 0 \quad \text{ou} \quad t^2 - 10t + 22 = 0$$

Resolvendo essa equação através da fórmula quadrática, obtemos duas soluções:

$$t = 5 - \sqrt{3} \approx 3{,}3 \quad \text{e} \quad t = 5 + \sqrt{3} \approx 6{,}7$$

(verifique). Assim, a mulher pode alcançar a porta do ônibus em dois instantes diferentes, $t = 3{,}3$ s e $t = 6{,}7$ s. A explicação para duas soluções é a seguinte: quando a mulher alcança a porta do ônibus pela primeira vez, ela está mais rápida do que o ônibus e pode passar pela porta sem que o motorista perceba. No entanto, à medida que o ônibus aumenta sua velocidade, ele acaba por alcançá-la e a mulher poderá emparelhar com a porta do ônibus novamente. ◀

■ O MODELO DE QUEDA LIVRE

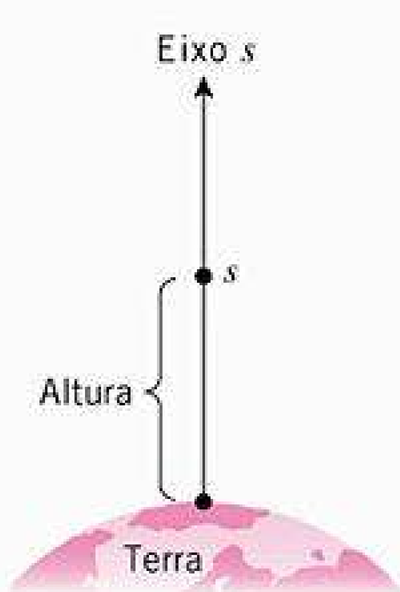


Figura 6.7.6

Quando a um objeto na proximidade da Terra é conferida uma velocidade inicial vertical (para cima ou para baixo) e, em seguida, ele é deixado livre em um movimento vertical, dizemos que seu movimento é um ***movimento de queda livre***. Na modelagem do movimento de queda livre, supomos que a única força atuando no objeto é a da gravidade terrestre, e que o objeto permanece suficientemente próximo da Terra para que essa força gravitacional seja constante. Em particular, desprezamos a resistência do ar e a atração gravitacional de outros corpos celestes.

Em nosso modelo, ignoramos o tamanho físico do objeto, tratando-o como se fosse uma partícula, e supomos que o objeto se move ao longo de um eixo s cuja origem está na superfície da Terra e cujo sentido positivo é para cima. Com essa convenção, a coordenada s da partícula é a altura desta acima da superfície da Terra (Figura 6.7.6).

É um fato da Física que uma partícula em movimento de queda livre tem aceleração constante. A magnitude dessa constante, denotada pela letra g, é chamada de ***constante de gravitação***, ou ***aceleração devida à gravidade***, e é aproximadamente igual a 9,8 m/s^2 ou 32 pés/s^2, dependendo da unidade de medição da distância.*

* De modo preciso, a constante g varia com a latitude e a distância ao centro da Terra. Porém, para movimentos em uma latitude fixa e próximos à superfície da Terra, a hipótese de uma g constante é satisfatória para muitas aplicações.

Lembre que uma partícula está aumentando a velocidade quando sua velocidade e aceleração têm o mesmo sinal, e diminuindo quando têm sinais opostos. Assim, por termos escolhido o sentido positivo para cima, segue que a aceleração $a(t)$ de uma partícula em queda livre é negativa para cada valor de t. De fato, observe que uma partícula em movimento para cima (velocidade positiva) está diminuindo sua velocidade, portanto, sua aceleração deve ser negativa; e uma partícula em movimento para baixo (velocidade negativa) está aumentando sua velocidade, portanto, sua aceleração também deve ser negativa. Assim, concluímos que

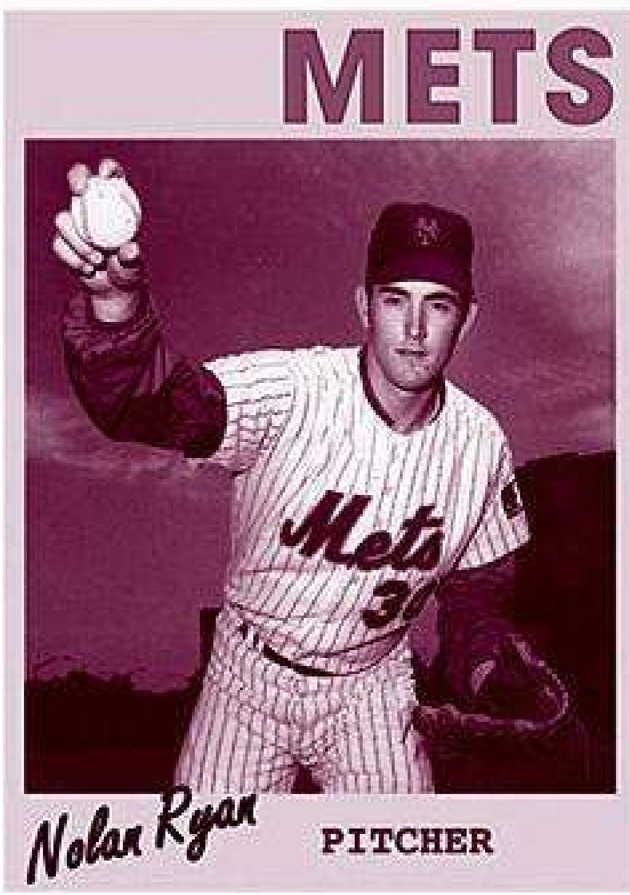
$$a(t) = -g \tag{14}$$

Segue disso e das Fórmulas (10) e (11) do movimento uniformemente acelerado que as funções posição e velocidade de uma partícula em movimento de queda livre são

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{15}$$

$$v(t) = v_0 - gt \tag{16}$$

Como seriam alteradas as Fórmulas (14), (15) e (16) se escolhêssemos o sentido positivo do eixo s como sendo para baixo?



Cartão de beisebol de Nolan Ryan

► Exemplo 6 Um dos lançadores de beisebol mais rápidos de todos os tempos foi Nolan Ryan, que era capaz de atirar uma bola a 150 pés/s (mais de 164 km/h). Durante sua carreira, ele teve a oportunidade de lançar no estádio Houston Astrodome (em Houston, no Texas, EUA), que foi a sede do Houston Astros de 1965 a 1999. O teto desse estádio coberto estava a 208 pés (cerca de 64 m) acima do campo. Teria sido possível para Nolan Ryan atingi-lo lançando uma bola de beisebol verticalmente com uma velocidade inicial de 100 pés/s a partir de uma altura de 7 pés?

Solução Como a distância está em pés, tomamos $g = 32$ pés/s^2. Inicialmente, temos $s_0 = 7$ pés e $v_0 = 100$ pés/s, de modo que por (15) e (16) temos

$$s(t) = 7 + 100t - 16t^2$$
$$v(t) = 100 - 32t$$

A bola subirá até $v(t) = 0$, ou seja, até $100 - 32t = 0$. Resolvendo essa equação, vemos que a bola atinge sua altura máxima no instante $t = \frac{25}{8}$. Para encontrar sua altura nesse instante, substituímos esse valor de t na função posição e obtemos

$$s\left(\tfrac{25}{8}\right) = 7 + 100\left(\tfrac{25}{8}\right) - 16\left(\tfrac{25}{8}\right)^2 = 163{,}25 \text{ pés}$$

o que significa que faltam aproximadamente 45 pés (cerca de 14 m) para atingir o teto. ◄

A bola no Exemplo 6 sobe quando a velocidade é positiva e desce quando é negativa, de modo que faz sentido físico que a velocidade seja zero quando a bola atinge sua altura máxima.

► Exemplo 7 Uma moeda é largada a partir do repouso de um ponto próximo ao topo do Empire State Building a uma altura de 1.250 pés do solo (Figura 6.7.7). Supondo que o modelo de queda livre seja aplicável, quanto tempo ela levará para atingir o solo e qual será sua velocidade no momento do impacto?

Solução Como a distância está em pés, tomamos $g = 32$ pés/s^2. Inicialmente, temos $s_0 = 1.250$ e $v_0 = 0$; assim, a partir de (15)

$$s(t) = -16t^2 + 1250 \tag{17}$$

O impacto ocorre quando $s(t) = 0$. Resolvendo a equação em t, obtemos

$$-16t^2 + 1250 = 0$$
$$t^2 = \frac{1250}{16} = \frac{625}{8}$$
$$t = \pm\frac{25}{\sqrt{8}} \approx \pm 8{,}8 \text{ s}$$

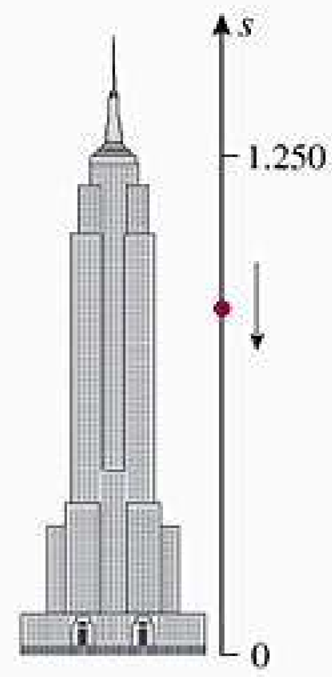


Figura 6.7.7

Como $t \geq 0$, podemos descartar a solução negativa e concluir que leva $25/\sqrt{8} \approx 8{,}8$ s para a moeda atingir o solo. Para encontar a velocidade no momento do impacto, substituímos $t = 25/\sqrt{8}$, $v_0 = 0$ e $g = 32$ em (16) para obter

$$v\left(\frac{25}{\sqrt{8}}\right) = 0 - 32\left(\frac{25}{\sqrt{8}}\right) = -200\sqrt{2} \approx -282{,}8 \text{ pés/s}$$

Assim, a velocidade no momento do impacto é

$$\left|v\left(\frac{25}{\sqrt{8}}\right)\right| = 200\sqrt{2} \approx 282{,}8 \text{ pés/s}$$

que é mais do que 192 mi/h (cerca de 310 km/h). ◀

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.7 (*Ver página 419 para respostas.*)

1. Suponha que uma partícula esteja em movimento ao longo de um eixo s com velocidade $v(t) = 2t + 1$. Se no instante $t = 0$ a partícula está na posição $s = 2$, então sua função posição é $s(t) =$ ________.

2. Seja $v(t)$ a função velocidade de uma partícula que está em movimento ao longo de um eixo s com aceleração constante $a = -2$. Se $v(1) = 4$, então $v(t) =$ ________.

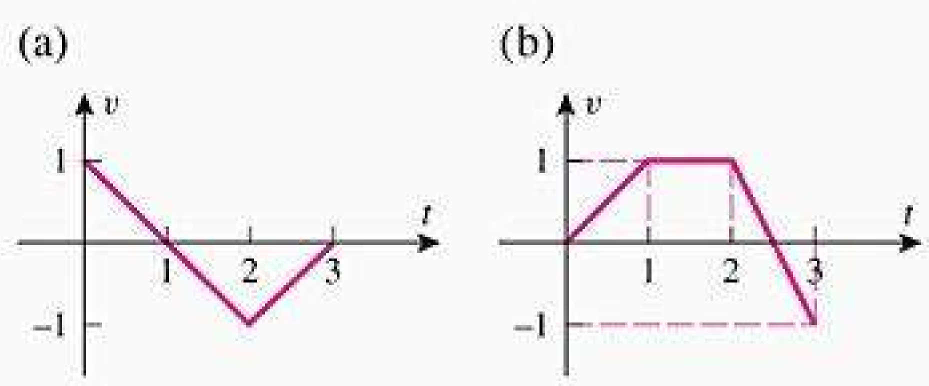
3. Seja $v(t)$ a função velocidade de uma partícula em movimento retilíneo. Suponha que $v(0) = -1$, $v(3) = 2$ e que a curva velocidade *versus* tempo é uma reta. O deslocamento da partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 3$ é ________, e a distância percorrida pela partícula ao longo desse intervalo de tempo é ________.

4. Segundo o modelo de queda-livre, de que altura deve ser largada uma moeda para atingir o solo com uma velocidade escalar de 48 pés/s?

EXERCÍCIOS 6.7 Recurso Gráfico CAS

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Em cada parte, é dada a curva velocidade *versus* tempo de uma partícula que se move ao longo de uma reta. Use a curva para encontrar o deslocamento e a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 3$.



2. Esboce a curva velocidade *versus* tempo de uma partícula que percorre uma distância de 5 unidades ao longo de um eixo, durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 10$, e tem um deslocamento de 0 unidade.

3. A figura a seguir mostra a curva aceleração *versus* tempo de uma partícula que se move ao longo de um eixo. Se a velocidade inicial da partícula for de 20 m/s, estime

(a) a velocidade no instante $t = 4$ s;

(b) a velocidade no instante $t = 6$ s.

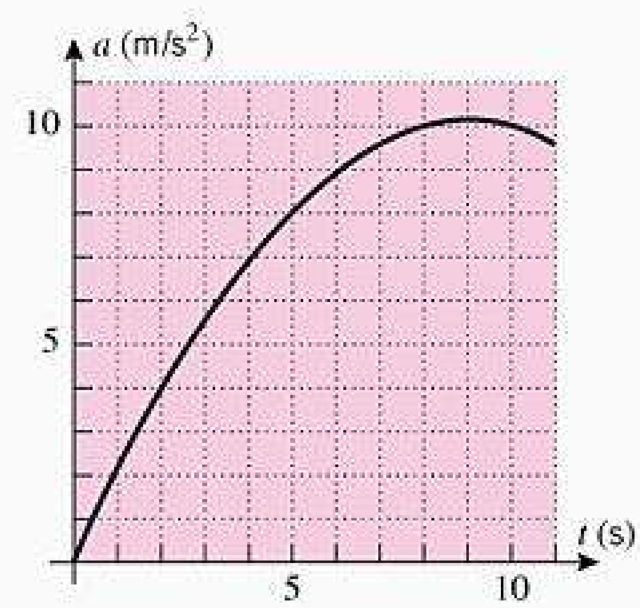


Figura Ex-3

4. A figura a seguir mostra a curva velocidade *versus* tempo no intervalo $1 \leq t \leq 5$ de uma partícula que se move ao longo de um eixo horizontal.

(a) O que pode ser dito sobre o sinal de aceleração naquele intervalo de tempo?

(b) Quando a partícula está aumentando sua velocidade? E quando está diminuindo?

(c) O que pode ser dito sobre a localização da partícula no instante $t = 5$, em relação à localização no instante $t = 1$? Explique seu raciocínio.

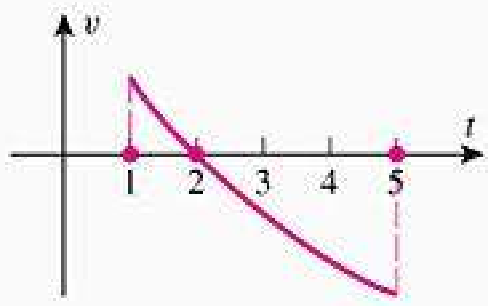


Figura Ex-4

5-8 Uma partícula move-se ao longo de um eixo s. Use a informação dada para encontrar sua função posição.

5. (a) $v(t) = 3t^2 - 2t;\ s(0) = 1$
(b) $a(t) = 3 \operatorname{sen} 3t;\ v(0) = 3;\ s(0) = 3$

6. (a) $v(t) = 1 + \operatorname{sen} t;\ s(0) = -3$
(b) $a(t) = t^2 - 3t + 1;\ v(0) = 0;\ s(0) = 0$

7. (a) $v(t) = 3t + 1;\ s(2) = 4$
(b) $a(t) = t^{-2};\ v(1) = 0;\ s(1) = 2$

8. (a) $v(t) = t^{2/3};\ s(8) = 0$
(b) $a(t) = \sqrt{t};\ v(4) = 1;\ s(4) = -5$

9-12 Uma partícula move-se com uma velocidade de $v(t)$ m/s ao longo de um eixo s. Encontre o deslocamento e a distância percorrida por ela durante os intervalos de tempo.

9. (a) $v(t) = \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le \pi/2$
(b) $v(t) = \cos t;\ \pi/2 \le t \le 2\pi$

10. (a) $v(t) = 3t - 2;\ 0 \le t \le 2$
(b) $v(t) = |1 - 2t|;\ 0 \le t \le 2$

11. (a) $v(t) = t^3 - 3t^2 + 2t;\ 0 \le t \le 3$
(b) $v(t) = \sqrt{t} - 2;\ 0 \le t \le 3$

12. (a) $v(t) = t - \sqrt{t};\ 0 \le t \le 4$
(b) $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}};\ 0 \le t \le 3$

13-16 Uma partícula move-se com aceleração $a(t)$ m/s^2 ao longo de um eixo s e tem velocidade v_0 m/s no instante $t = 0$. Encontre o deslocamento e a distância percorrida por ela durante os intervalos de tempo.

13. $a(t) = 3;\ v_0 = -1;\ 0 \le t \le 2$

14. $a(t) = t - 2;\ v_0 = 0;\ 1 \le t \le 5$

15. $a(t) = 1/\sqrt{3t+1};\ v_0 = \frac{4}{3};\ 1 \le t \le 5$

16. $a(t) = \operatorname{sen} t;\ v_0 = 1;\ \pi/4 \le t \le \pi/2$

17. Em cada parte, use a informação dada para encontrar a posição, a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração no instante $t = 1$.
(a) $v = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t;\ s = 0$ quando $t = 0$
(b) $a = -3t;\ s = 1$ e $v = 0$ quando $t = 0$

18. Em cada parte, use a informação dada para encontrar a posição, a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração no instante $t = 1$.
(a) $v = \cos \frac{1}{3}\pi t;\ s = 0$ quando $t = \frac{3}{2}$
(b) $a = 4e^{2t-2};\ s = 1/e^2$ e $v = (2/e^2) - 3$ quando $t = 0$

19. Suponha que uma partícula em movimento retilíneo tenha uma velocidade v no instante t dada por

$$v(t) = \begin{cases} 5t, & 0 \le t < 1 \\ 6\sqrt{t} - \dfrac{1}{t}, & 1 \le t \end{cases}$$

onde t está em segundos e v em centímetros por segundo (cm/s). Calcule o(s) instante(s) em que a partícula está a 4 cm de sua posição inicial.

20. Suponha que uma partícula em movimento retilíneo tenha uma velocidade v no instante t dada por

$$v(t) = \frac{3}{t^2 + 1} - 0{,}5t, \quad t \ge 0$$

onde t está em segundos e v em centímetros por segundo (cm/s). Calcule o(s) instante(s) em que a partícula está a 2 cm de sua posição inicial.

21. Suponha que a função velocidade uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um eixo s seja $v(t) = 20t^2 - 110t + 120$ m/s e que a partícula esteja na origem no instante $t = 0$. Use um recurso gráfico para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para os primeiros 6 segundos de movimento.

22. Suponha que a função aceleração de uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um eixo s seja $a(t) = 4t - 30$ m/s^2 e que a posição e a velocidade no instante $t = 0$ sejam $s_0 = -5$ m e $v_0 = 3$ m/s. Use um recurso gráfico para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ para os primeiros 25 segundos de movimento.

23-26 Para cada função velocidade $v(t)$ dada:
(a) Gere a curva velocidade *versus* tempo e use-a para fazer uma conjectura sobre o sinal do deslocamento sobre os intervalos de tempo dados.
(b) Use um CAS para encontrar o deslocamento.

C **23.** $v(t) = 0{,}5 - t \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le 5$

C **24.** $v(t) = 0{,}5 - t \cos \pi t;\ 0 \le t \le 1$

C **25.** $v(t) = 0{,}5 - te^{-t};\ 0 \le t \le 5$

C **26.** $v(t) = t \ln(t + 0{,}1);\ 0 \le t \le 1$

27. Suponha que em $t = 0$ uma partícula esteja na origem de um eixo x com uma velocidade $v_0 = 25$ cm/s. Nos primeiros 4 segundos não há aceleração e, então, age uma força retardadora que produz uma aceleração negativa constante de $a = -10$ cm/s^2.
(a) Esboce a curva aceleração *versus* tempo no intervalo $0 \le t \le 12$.
(b) Esboce a curva velocidade *versus* tempo no intervalo $0 \le t \le 12$.
(c) Encontre a coordenada x da partícula nos instantes $t = 8$ s e $t = 12$ s.
(d) Qual é a coordenada x máxima da partícula no intervalo $0 \le t \le 12$?

28. As Fórmulas (10) e (11) do movimento uniformemente acelerado podem ser rearranjadas de várias formas. Para simplificar,

sejam $s = s(t)$ e $v = v(t)$, e deduza as seguintes variações daquelas fórmulas.

(a) $a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2(s - s_0)}$ (b) $t = \dfrac{2(s - s_0)}{v_0 + v}$

(c) $s = s_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$ [Note como esta difere de (10).]

29-36 Nestes exercícios, suponha que o objeto move-se no sentido positivo de um eixo. Aplique as Fórmulas (10) e (11), ou aquelas do Exercício 28, conforme for apropriado. Em alguns dos problemas, você necessitará da relação 88 pés/s = 60 mi/h.

29. (a) Um automóvel viajando em uma estrada reta desacelera uniformemente de 55 para 40 mi/h em 10 s. Encontre sua aceleração em pés/s^2.

(b) Um ciclista percorrendo um caminho reto acelera uniformemente do repouso para 30 km/h em 1 minuto. Encontre sua aceleração em km/s^2.

30. Um carro percorrendo uma estrada reta a 60 mi/h desacelera a uma taxa constante de 11 pés/s^2.

(a) Quanto tempo irá levar para a velocidade ser de 45 mi/h?

(b) Qual é a distância que o carro irá percorrer antes de parar?

31. Avistando a polícia, um motorista freia seu carro novo para reduzir a velocidade de 90 para 60 mi/h, a uma taxa constante ao longo de uma distância de 200 pés.

(a) Encontre a aceleração em pés/s^2.

(b) Quanto tempo irá levar para reduzir a velocidade a 55 mi/h?

(c) Com a aceleração obtida em (a), quanto tempo levaria para parar completamente o carro partindo das 90 mi/h?

32. Uma partícula movendo-se ao longo de uma reta está sendo acelerada a uma taxa constante de 5 m/s^2. Encontre sua velocidade inicial se ela percorre 60 metros nos primeiros 4 segundos.

33. Um motociclista, partindo do repouso, aumenta sua velocidade com uma aceleração constante de 2,6 m/s^2. Após ter percorrido 120 m, ele diminui a velocidade com uma aceleração constante de −1,5 m/s^2 até atingir a velocidade de 12 m/s. Qual é a distância percorrida pelo motociclista até esse instante?

34. Um corredor dos 100 m arranca com uma aceleração de 4,0 m/s^2, a qual mantém por 2 segundos. Sua aceleração, então, cai para zero pelo restante da prova.

(a) Qual foi o seu tempo de corrida?

(b) Faça um gráfico da distância a partir da arrancada *versus* tempo.

35. Um carro, após ter parado no guichê do pedágio, saiu com uma aceleração constante de 4 pés/s^2. No instante em que deixa o guichê, está a 2.500 pés de um caminhão viajando a uma velocidade constante de 50 pés/s. Quanto tempo o carro irá levar para alcançar o caminhão, e qual será a distância percorrida desde o guichê até esse instante?

36. Na etapa final de uma corrida de barcos a remo, o desafiante está remando a uma velocidade constante de 12 m/s. No momento em que está a 100 m da linha de chegada, com o desafiante 15 m atrás, o líder está remando a 8 m/s, mas começa a acelerar constantemente a 0,5 m/s^2. Quem vencerá a prova?

37-46 Suponha que o modelo de queda livre se aplique. Resolva estes exercícios aplicando as Fórmulas (15) e (16) ou, quando apropriado, use aquelas do Exercício 28 com $a = -g$. Nestes exercícios, tome $g = 32$ pés/s^2 ou 9,8 m/s^2, dependendo das unidades.

37. Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir do solo com uma velocidade inicial de 112 pés/s.

(a) Encontre a velocidade em $t = 3$ s e $t = 5$ s.

(b) Qual é a altura máxima atingida pelo projétil?

(c) Encontre a velocidade do projétil quando ele atingir o solo.

38. Um projétil lançado para baixo de uma altura de 112 pés atingiu o solo em 2 s. Qual é a sua velocidade inicial?

39. Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir do solo, com uma velocidade inicial de 16 pés/s.

(a) Quanto tempo irá levar para o projétil atingir o solo?

(b) Por quanto tempo o projétil estará se movendo para cima?

40. Em 1939, Joe Sprinz do Seals Baseball Club, de San Francisco, EUA, tentou pegar uma bola largada de um dirigível a uma altura de 800 pés (com a intenção de quebrar um recorde anterior).

(a) Quanto tempo levou para a bola cair os 800 pés?

(b) Qual era a velocidade da bola em milhas por hora após os 800 pés (88 pés / s = 60 mi/h)?

[*Nota*: Na prática, não é possível ignorar a resistência do ar neste problema; porém, mesmo com o amortecimento devido à resistência do ar, o impacto da bola fez com que a luva de Sprinz batesse em seu rosto, fraturando o maxilar superior em 12 lugares, quebrando 5 dentes e fazendo-o cair inconsciente, deixando a bola cair da luva.]

41. Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir do chão com uma velocidade inicial de 60 m/s.

(a) Quanto tempo leva para o projétil atingir o seu ponto mais alto?

(b) A que altura chega o projétil?

(c) Quanto tempo leva o projétil para cair no chão a partir do ponto mais alto?

(d) Qual é a velocidade escalar do projétil ao atingir o chão?

42. (a) Use os resultados do Exercício 41 para fazer uma conjectura sobre a relação entre as velocidades inicial e final de um projétil que é lançado verticalmente para cima a partir do nível do chão e retorna para o chão.

(b) Prove sua conjectura.

43. Um projétil é disparado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 49 m/s, do alto de uma torre com 150 m de altura.

(a) Quanto tempo irá levar para ele atingir a altura máxima?

(b) Qual é a altura máxima?

(c) Quanto tempo o projétil irá levar para passar pelo ponto de partida na descida?

(d) Qual será a velocidade quando ele passar pelo ponto de partida na descida?

(e) Quanto tempo o projétil irá levar para atingir o solo?

(f) Qual será a sua velocidade no impacto?

44. Um homem em uma ponte deixa cair uma pedra. Qual é a altura da ponte se:

(a) a pedra atinge a água 4 segundos depois de largada?

(b) o homem ouvir o som da pedra batendo na água depois de 4 s? [Considere a velocidade do som como sendo de 340 m/s.]

45. No Exemplo 6, qual é a velocidade com a qual Nolan Ryan deveria lançar uma bola para cima a partir de uma altura de 7 pés para alcançar o teto do Astrodome?

46. Uma pedra jogada verticalmente para baixo com uma velocidade inicial desconhecida a partir de uma altura de 300 m alcança o solo em 5 segundos. Obtenha a velocidade com que ela atinge o solo.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.7

1. t^2+t+2 **2.** $6-2t$ **3.** $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$ **4.** 36 pés

6.8 CALCULANDO INTEGRAIS DEFINIDAS POR SUBSTITUIÇÃO

Nesta seção discutiremos dois métodos para calcular integrais definidas em que é necessária uma substituição.

■ DOIS MÉTODOS PARA FAZER SUBSTITUIÇÕES EM INTEGRAIS DEFINIDAS

Lembre que na Seção 6.3 foi visto que integrais indefinidas da forma

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

podem ser calculadas, às vezes, fazendo-se a substituição u

$$u = g(x), \quad du = g'(x)\,dx \tag{1}$$

que converte a integral para o formato

$$\int f(u)\,du$$

Para aplicar esse método a uma integral definida do tipo

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$$

precisamos levar em conta o efeito da substituição nos limites de integração de x. Há duas maneiras de fazer isso.

Método 1

Determinar primeiro a integral indefinida

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

por substituição, e então usar a relação

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \left[\int f(g(x))g'(x)\,dx\right]_a^b$$

para calcular a integral definida. Esse procedimento não requer qualquer modificação nos limites de integração.

Método 2

Fazer a substituição (1) diretamente na integral definida e, então, usar a relação $u = g(x)$ para substituir os limites em x, $x = a$ e $x = b$, pelos correspondentes limites em u, $u = g(a)$ e $u = g(b)$. Isso produz uma nova integral definida

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

que está expressa inteiramente em termos de u.

▶ Exemplo 1 Use os dois métodos acima para calcular $\int_0^2 x(x^2+1)^3\,dx$.

Solução pelo Método 1 Pondo

$$u = x^2 + 1, \quad \text{de modo que} \quad du = 2x\,dx \tag{2}$$

obtemos

$$\int x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int u^3\,du = \frac{u^4}{8} + C = \frac{(x^2+1)^4}{8} + C$$

Assim,

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3\,dx = \left[\int x(x^2+1)^3\,dx\right]_{x=0}^2$$
$$= \left.\frac{(x^2+1)^4}{8}\right]_{x=0}^2 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78$$

Solução pelo Método 2 Se fizermos a substituição $u = x^2 + 1$ em (2), então

$$u = 1 \quad \text{se} \quad x = 0$$
$$u = 5 \quad \text{se} \quad x = 2$$

Logo,

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_1^5 u^3\,du$$
$$= \left.\frac{u^4}{8}\right]_{u=1}^5 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78$$

o que está de acordo com o resultado obtido pelo Método 1. ◀

O teorema a seguir estabelece as condições precisas sob as quais pode ser usado o Método 2.

6.8.1 TEOREMA *Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua em um intervalo contendo os valores de $g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMONSTRAÇÃO Como f é contínua em um intervalo contendo os valores de $g(x)$ para $a \le x \le b$, segue que f tem uma antiderivada F nesse intervalo. Tomando $u = g(x)$, a regra da cadeia implica que

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = \frac{d}{dx}F(u) = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx} = f(g(x))g'(x)$$

para cada x em $[a, b]$. Assim, $F(g(x))$ é uma antiderivada de $f(g(x))g'(x)$ em $[a, b]$. Portanto, pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 6.6.1), temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad \blacksquare$$

A escolha do método para determinação de uma integral definida por substituição é, geralmente, uma questão de gosto, mas nos exemplos a seguir usaremos o segundo método, por ser uma idéia nova.

► Exemplo 2 Calcule

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/8} \operatorname{sen}^5 2x \cos 2x\,dx \qquad \text{(b)} \int_2^5 (2x-5)(x-3)^9\,dx$$

Solução (a) Seja

$$u = \operatorname{sen} 2x, \quad \text{portanto} \quad du = 2\cos 2x\,dx \quad (\text{ou } \tfrac{1}{2}\,du = \cos 2x\,dx)$$

Com essa substituição, temos que

$$u = \operatorname{sen}(0) = 0 \quad \text{se} \quad x = 0$$
$$u = \operatorname{sen}(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \quad \text{se} \quad x = \pi/8$$

Logo,

$$\int_0^{\pi/8} \operatorname{sen}^5 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} u^5\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^6}{6}\Big]_{u=0}^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6(\sqrt{2})^6} - 0\right] = \frac{1}{96}$$

Solução (b) Seja

$$u = x - 3, \quad \text{portanto} \quad du = dx$$

Desse modo, falta resolver o fator $2x + 5$ no integrando. Contudo,

$$x = u + 3, \quad \text{portanto} \quad 2x - 5 = 2(u+3) - 5 = 2u + 1$$

Com essa substituição,

$$u = 2 - 3 = -1 \quad \text{se} \quad x = 2$$
$$u = 5 - 3 = 2 \quad \text{se} \quad x = 5$$

e então

$$\int_2^5 (2x-5)(x-3)^9\,dx = \int_{-1}^2 (2u+1)u^9\,du = \int_{-1}^2 (2u^{10} + u^9)\,du$$
$$= \left[\frac{2u^{11}}{11} + \frac{u^{10}}{10}\right]_{u=-1}^2 = \left(\frac{2^{12}}{11} + \frac{2^{10}}{10}\right) - \left(-\frac{2}{11} + \frac{1}{10}\right)$$
$$= \frac{52.233}{110} \approx 474{,}8 \;◄$$

► **Exemplo 3** Calcule

$$\text{(a)} \int_0^{3/4} \frac{dx}{1-x} \qquad \text{(b)} \int_0^{\ln 3} e^x(1+e^x)^{1/2}\, dx$$

Solução (a) Seja

$$u = 1 - x, \quad \text{portanto} \quad du = -dx$$

Com essa substituição, temos que

$$u = 1 \quad \text{se} \quad x = 0$$
$$u = \tfrac{1}{4} \quad \text{se} \quad x = \tfrac{3}{4}$$

Assim,

$$\int_0^{3/4} \frac{dx}{1-x} = -\int_1^{1/4} \frac{du}{u}$$
$$= -\ln|u|\Big]_{u=1}^{1/4} = -\left[\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \ln(1)\right] = \ln 4$$

A substituição u no Exemplo 3(a) produz uma integral em que o extremo superior em u é menor do que o extremo inferior. Use a Definição 6.5.3(b) para converter essa integral em uma na qual o extremo inferior é menor do que o extremo superior, e verifique que isso produz uma integral com o mesmo valor que a do exemplo.

Solução (b) Fazemos a substituição u

$$u = 1 + e^x, \quad du = e^x\, dx$$

e trocamos os limites de integração de x ($x = 0$, $x = \ln 3$) para os limites de u

$$u = 1 + e^0 = 2, \quad u = 1 + e^{\ln 3} = 1 + 3 = 4$$

Assim, obtemos

$$\int_0^{\ln 3} e^x(1+e^x)^{1/2}\, dx = \int_2^4 u^{1/2}\, du$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_2^4 = \frac{2}{3}[4^{3/2} - 2^{3/2}] = \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3}$$ ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.8 (*Ver página 425 para respostas.*)

1. Suponha que g' seja contínua em $[a, b]$ e que f seja contínua em um intervalo que contém os valores de $g(x)$ para $a \le x \le b$. Se F for uma antiderivada de f, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = _______$$

2. Em cada parte, use a substituição para substituir a integral dada por uma integral que envolva a variável u. (Não calcule a integral.)

(a) $\int_0^2 3x^2(1+x^3)^3\, dx;\ u = 1 + x^3$

(b) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\, dx;\ u = 5 - x^2$

(c) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx;\ u = \sqrt{x}$

3. Calcule a integral fazendo uma substituição apropriada.

(a) $\int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(3x - \pi)\, dx = _______$

(b) $\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 2}\, dx = _______$

(c) $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = _______$

EXERCÍCIOS 6.8 Recurso Gráfico C CAS

1-4 Expresse a integral em termos da variável u, mas não a calcule.

1. (a) $\int_1^3 (2x-1)^3\,dx;\ u = 2x-1$

(b) $\int_0^4 3x\sqrt{25-x^2}\,dx;\ u = 25-x^2$

(c) $\int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi\theta)\,d\theta;\ u = \pi\theta$

(d) $\int_0^1 (x+2)(x+1)^5\,dx;\ u = x+1$

2. (a) $\int_{-1}^4 (5-2x)^8\,dx;\ u = 5-2x$

(b) $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2+\cos x}}\,dx;\ u = 2+\cos x$

(c) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx;\ u = \operatorname{tg} x$

(d) $\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+3}\,dx;\ u = x^2+3$

3. (a) $\int_0^1 e^{2x-1}\,dx;\ u = 2x-1$

(b) $\int_e^{e^2} \dfrac{\ln x}{x}\,dx;\ u = \ln x$

4. (a) $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}}{1+x^2}\,dx;\ u = \operatorname{arc\,tg} x$

(b) $\int_1^{\sqrt{e}} \dfrac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}};\ u = \ln x$

5-18 Calcule a integral definida de duas formas: primeiro com uma substituição u na integral definida e, depois, com uma substituição u na integral indefinida.

5. $\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$

6. $\int_1^2 (4x-2)^3\,dx$

7. $\int_0^1 (2x-1)^3\,dx$

8. $\int_1^2 (4-3x)^8\,dx$

9. $\int_0^8 x\sqrt{1+x}\,dx$

10. $\int_{-3}^0 x\sqrt{1-x}\,dx$

11. $\int_0^{\pi/2} 4\operatorname{sen}(x/2)\,dx$

12. $\int_0^{\pi/6} 2\cos 3x\,dx$

13. $\int_{-2}^{-1} \dfrac{x}{(x^2+2)^3}\,dx$

14. $\int_{1-\pi}^{1+\pi} \sec^2\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{4}\right)dx$

15. $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \dfrac{e^x}{e^x+4}\,dx$

16. $\int_0^{\ln 5} e^x(3-4e^x)\,dx$

17. $\int_1^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

18. $\int_{\ln 2}^{\ln(2/\sqrt{3})} \dfrac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

19-22 Calcule a integral definida expressando-a em termos de u e calculando a integral resultante, usando uma fórmula de Geometria.

19. $\int_{-5/3}^{5/3} \sqrt{25-9x^2}\,dx;\ u = 3x$

20. $\int_0^2 x\sqrt{16-x^4}\,dx;\ u = x^2$

21. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-4\cos^2\theta}\,d\theta;\ u = 2\cos\theta$

22. $\int_{e^{-3}}^{e^3} \dfrac{\sqrt{9-(\ln x)^2}}{x}\,dx;\ u = \ln x$

23. Encontre a área sob a curva $y = \operatorname{sen}\pi x$ acima do intervalo $[0, 1]$.

24. Encontre a área sob a curva $y = 3\cos 2x$ acima do intervalo $[0, \pi/8]$.

25. Encontre a área sob a curva $y = 9/(x+2)^2$ acima do intervalo $[-1, 1]$.

26. Encontre a área sob a curva $y = 1/(3x+1)^2$ acima do intervalo $[0, 1]$.

27. Encontre a área da região delimitada pelos gráficos de $y = 1/\sqrt{1-9x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \frac{1}{6}$.

28. Encontre a área da região delimitada pelos gráficos de $y = \operatorname{arc\,sen} x$, $x = 0$ e $y = \pi/2$.

29-48 Calcule as integrais por qualquer método.

29. $\int_1^5 \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}}$

30. $\int_1^2 \sqrt{5x-1}\,dx$

31. $\int_{-1}^1 \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+9}}$

32. $\int_{\pi/2}^{\pi} 6\operatorname{sen} x(\cos x+1)^5\,dx$

33. $\int_1^3 \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx$

34. $\int_1^2 \dfrac{dx}{x^2-6x+9}$

35. $\int_0^{\pi/4} 4\operatorname{sen} x\cos x\,dx$

36. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$

37. $\int_0^{\sqrt{\pi}} 5x\cos(x^2)\,dx$

38. $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

39. $\int_{\pi/12}^{\pi/9} \sec^2 3\theta\,d\theta$

40. $\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} 2\theta\,d\theta$

41. $\int_0^1 \dfrac{y^2\,dy}{\sqrt{4-3y}}$

42. $\int_{-1}^4 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{5+x}}$

43. $\int_0^e \dfrac{dx}{2x+e}$

44. $\int_1^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\,dx$

45. $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{4-3x^4}}\,dx$

46. $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}\,dx$

47. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+\ x^2}\,dx$ **48.** $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{3+x^4}\,dx$

C **49.** a e um S ara enc ntrar a r e at a integra

$$\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\,dx$$

b nfirme a r e at ca cu an à mã
Sugestão: e a i enti a e c $^2 x = 1 -$ en$^2 x$

C **50.** a e um S ara enc ntrar a r e at a integra

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x\,dx$$

b nfirme a r e at ca cu an à mã
Sugestão: e a i enti a e $1 + \operatorname{tg}^2 x =$ ec$^2 x$

51. a Enc ntre $\int_0^1 f(3x+1)\,dx$ se $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$.

b Enc ntre $\int_0^3 f(3x)\,dx$ se $\int_0^9 f(x)\,dx = 5$.

c Enc ntre $\int_{-2}^0 xf(x^2)\,dx$ se $\int_0^4 f(x)\,dx = 1$.

52. Da ue m e n ã inteir iti , m tre ue

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

azen uma ub tituiçã ã tente ca cu ar a integrai

53. Da ue n é um inteir iti , m tre ue

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

u an uma i enti a e trig n métrica e azen uma ub tituiçã ã tente ca cu ar a integrai

54. Da ue n é um inteir iti , ca cu e a integra

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx$$

55. Su nha ue em $t = 0$ e i tam 750 bactéria em um reci iente e ue a u açã e bactéria y t cre ça a uma ta a y' t = 02,137$e^{1,52\ t}$ bactéria r h ra uanta bactéria ha erá em 12 h ra

56. Su nha ue uma artícu a, m en e a ng e um ei , tenha e ci a e v t $= 25 + 10e^{-0,05t}$ é /

a ua a i tância erc rri a e a artícu a e $t = 0$ até $t = 10$

b term $10e^{-0,05t}$ a eta muit a i tância erc rri a e a ar tícu a n inter a e tem E i ue eu raci cíni

57. Enc ntre um a r iti e k ta ue a área b gráfic e $y = e^{2x}$ n inter a 0, k e a 3 uni a e ua ra a

58. e um recur gráfic ara e timar a r e k $k > 0$ e ta m ue a regiã e imita a r $y = 1/\ 1 + kx^2$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$ tenha uma área e 0, uni a e e área

C **59.** a Enc ntre imite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/n)}{n}$$

ca cu an uma integra efini a a r ria a n inter a 0, 1

b erifi ue ua re ta em a ca cu an imite ireta mente c m um S

ENFOCANDO CONCEITOS

60. tre ue, e f e g rem unçõe c ntínua , entã

$$\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx = \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$$

61. a Se a

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}\,dx$$

tre ue $I = a/2$

Sugestão: Faça $u = a - x$, e entã e re e integran c m a ma e ua ração

b e re u ta e a ara enc ntrar

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}}\,dx$$

c e re u ta e a ara enc ntrar

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$$

62. Se a

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

tre ue a ub tituiçã $x = 1/u$ re u ta em

$$I = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = -I$$

g $2I = 0$, im ican $I = 0$ P rém, i é im í e , uma ez ue integran a integra a a é iti n inter a e integraçã ua é err

63. a Pr e ue, e f r uma unçã ím ar, entã

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

e ê uma e icaçã ge métrica e e re u ta
Sugestão: ma rma e r ar ue uma uanti a e q é zer é m trar ue $q = -q$.

b Pr e ue, e f r uma unçã ar, entã

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

e ê uma e icaçã ge métrica e e re u ta
Sugestão: Di i a inter a e integraçã e $-a$ até a em ua arte em 0

64. a cu e

a $\int_{-1}^1 x\sqrt{\cos(x^2)}\,dx$

b $\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x \cos^5 x\,dx$.

Sugestão: e a ub tituiçã $u = x - \ \pi/2$

✔RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.8

1. $F(g(b)) - F(g(a))$ **2.** (a) $\int_1^9 u^3\,du$ (b) $\int_1^5 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$ (c) $\int_0^1 2e^u\,du$ **3.** (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{2}\right)$ (c) $\frac{3}{4}$

6.9 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS DO PONTO DE VISTA DA INTEGRAL

Na Seção 1.6 definimos a função logaritmo natural $\ln x$ *como sendo a inversa de* e^x. *Embora isso tenha sido conveniente e nos tenha permitido deduzir muitas propriedades de* $\ln x$, *seu fundamento matemático não foi muito sólido, já que aceitamos a continuidade de* e^x *e de todas as funções exponenciais sem demonstração (ver nota de rodapé à página 67). Nesta seção mostraremos que* $\ln x$ *pode ser definido como uma certa integral e utilizaremos essa nova definição para provar que as funções exponenciais são contínuas. Essa definição integral também é importante nas aplicações, pois fornece uma maneira de reconhecer quando as integrais que aparecem como soluções de problemas podem ser expressas como logaritmos naturais.*

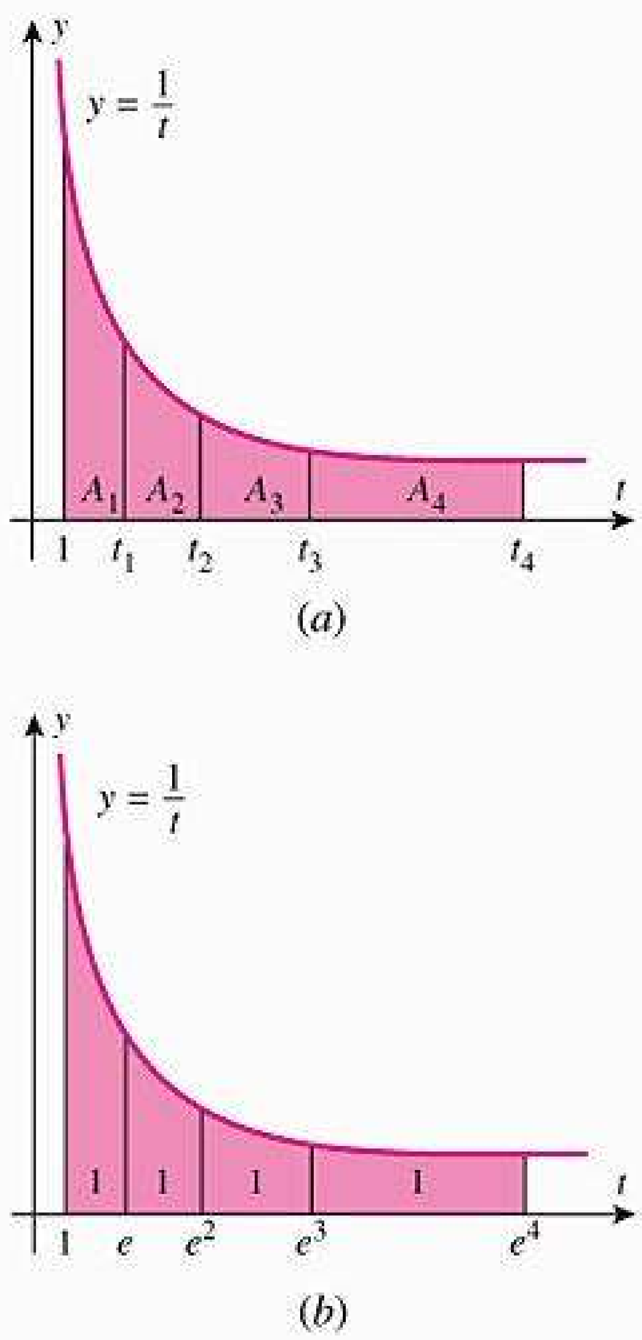


Figura 6.9.1

A CONEXÃO ENTRE LOGARITMOS NATURAIS E INTEGRAIS

A conexão entre os logaritmos naturais e as integrais foi feita em meados do século XVII, no curso das pesquisas a respeito das áreas sob a curva $y = 1/t$. O problema era encontrar valores de $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ para os quais as áreas $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ na Figura 6.9.1*a* seriam iguais. Através do trabalho combinado de Isaac Newton, do padre jesuíta belga Gregory de Saint Vincent (1584-1667) e do estudante deste último, Alfons A. de Sarasa (1618-1667), foi mostrado que, escolhendo-se os pontos

$$t_1 = e,\ t_2 = e^2,\ t_3 = e^3,\ \ldots,\ t_n = e^n,\ \ldots$$

cada uma das área é 1 (Figura 6.9.1*b*). Assim, em notação moderna de integral

$$\int_1^{e^n} \frac{1}{t}\,dt = n$$

a qual pode ser expressa como

$$\int_1^{e^n} \frac{1}{t}\,dt = \ln(e^n)$$

Comparando-se o limite superior da integral e a expressão dentro do logaritmo, é natural pular para o resultado mais geral

$$\int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = \ln x$$

que, hoje, tomamos como a definição formal de logaritmo natural.

Reveja o Teorema 6.5.8 e então explique por que se requer x positivo na Definição 6.9.1.

6.9.1 DEFINIÇÃO O ***logaritmo natural*** de x é denotado por $\ln x$ e definido pela integral

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0 \tag{1}$$

Nossa estratégia para dar um fundamento matemático sólido para as funções logarítmicas e exponenciais é usar (1) como um ponto de partida e, então, definir e^x como a inversa de $\ln x$. Isso é o oposto exato de nossa abordagem anterior, na qual definimos $\ln x$ como sendo a inversa de e^x. Contudo, enquanto anteriormente tivemos de *supor* que e^x era contínua, agora a

Nenhuma das propriedades de ln x obtidas nesta seção deveriam ser novidade, mas agora, pela primeira vez, elas têm uma base matemática sólida.

continuidade de e^x decorrerá de nossa definição como um *teorema*. Nosso primeiro desafio é demonstrar que as propriedades de ln x que resultam da Definição 6.9.1 são consistentes com aquelas obtidas anteriormente. Para começar, observe que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 6.6.3) implica que ln x é diferenciável e que

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \tag{2}$$

Isso é consistente com a fórmula da derivada de ln x que obtivemos anteriormente. Além disso, como diferenciabilidade implica continuidade, segue que ln x é uma função contínua no intervalo $(0, +\infty)$.

Outras propriedades de ln x podem ser obtidas interpretando geometricamente a integral em (1): no caso em que $x > 1$, essa integral representa a área sob a curva $y = 1/t$ desde $t = 1$ até $t = x$ (Figura 6.9.2*a*); no caso em que $0 < x < 1$, a integral representa o negativo da área sob a curva $y = 1/t$ desde $t = x$ até $t = 1$ (Figura 6.9.2*b*); e no caso em que $x = 1$, a integral tem valor 0 porque coincidem seus limites de integração inferior e superior. Essas observações geométricas implicam que

$$\begin{aligned} \ln x > 0 &\quad \text{se} \quad x > 1 \\ \ln x < 0 &\quad \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ \ln x = 0 &\quad \text{se} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Também, como $1/x$ é positivo para $x > 0$, segue de (2) que ln x é uma função crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Tudo isso é consistente com o gráfico de ln x na Figura 6.9.3.

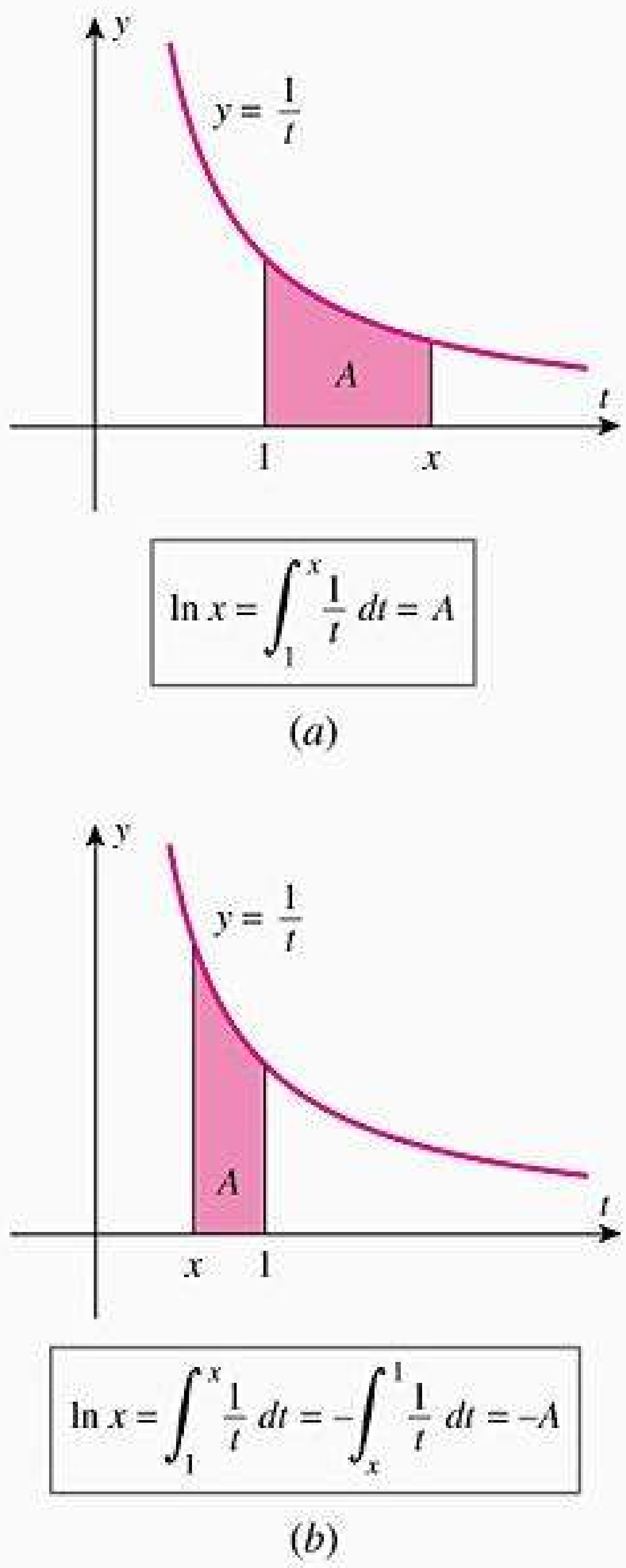


Figura 6.9.2

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DE ln x

Podemos usar (1) para mostrar que a Definição 6.9.1 produz as propriedades algébricas padrão dos logaritmos.

6.9.2 TEOREMA *Para quaisquer números positivos a e c e qualquer número racional r:*

(*a*) $\ln ac = \ln a + \ln c$ (*b*) $\ln \frac{1}{c} = -\ln c$

(*c*) $\ln \frac{a}{c} = \ln a - \ln c$ (*d*) $\ln a^r = r \ln a$

DEMONSTRAÇÃO (*a*) Tratando a como uma constante, considere a função $f(x) = \ln(ax)$. Então

$$f'(x) = \frac{1}{ax} \cdot \frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

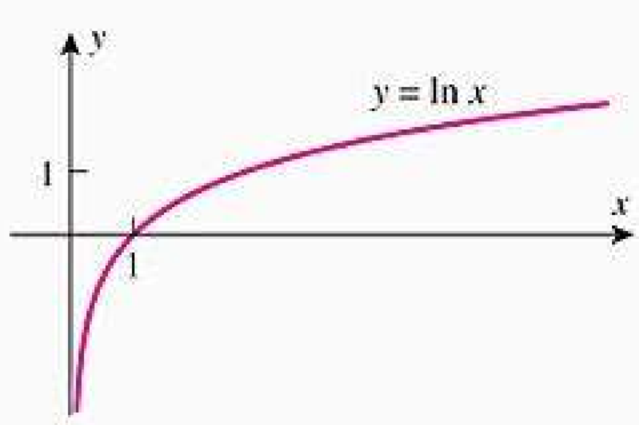


Figura 6.9.3

Assim, ln ax e ln x têm a mesma derivada em $(0, +\infty)$, de modo que, nesse intervalo, essas funções devem diferir por uma constante. Logo, existe uma constante k tal que

$$\ln ax - \ln x = k \tag{3}$$

em $(0, +\infty)$. Substituindo $x = 1$ nessa equação, concluímos que $\ln a = k$ (verifique). Assim, podemos escrever (3) como

$$\ln ax - \ln x = \ln a$$

Tomando $x = c$ estabelece que

$$\ln ac - \ln c = \ln a \quad \text{ou} \quad \ln ac = \ln a + \ln c$$

DEMONSTRAÇÕES (*b*) E (*c*) A parte (*b*) segue imediatamente da parte (*a*), substituindo a por $1/c$ (verifique). Então (*c*) decorre de (*a*) e (*b*):

$$\ln \frac{a}{c} = \ln\left(a \cdot \frac{1}{c}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{c} = \ln a - \ln c$$

DEMONSTRAÇÃO (*d*) Inicialmente, vamos mostrar que a parte (*d*) é satisfeita se r for um número inteiro não-negativo qualquer. Se $r = 1$, então evidentemente vale (*d*); se $r = 0$, então (*d*) segue do fato de que $\ln 1 = 0$. Vamos supor que (*d*) seja válida para r igual a algum número inteiro n. Então, segue da parte (*a*) que

$$\ln a^{n+1} = \ln[a \cdot a^n] = \ln a + \ln a^n = \ln a + n \ln a = (n+1)\ln a$$

De que maneira é semelhante a uma fileira de dominós caindo a prova do Teorema 6.9.2(*d*) no caso em que r é um inteiro não-negativo? (Esse argumento "dominó" usa uma versão informal de uma propriedade dos inteiros conhecida como *princípio da indução matemática*.)

Assim, se (*d*) for válida para r igual a algum inteiro n, então também será válida para $r = n + 1$. Contudo, como sabemos que (*d*) é válida para $r = 1$, segue que (*d*) também é válida para $r = 2$. Mas isso implica que (*d*) é válida para $r = 3$, o que por sua vez implica que (*d*) é válida para $r = 4$, e assim por diante. Concluímos que (*d*) é satisfeita se r for um número inteiro não-negativo qualquer.

Em seguida, vamos supor que $r = -m$ seja um inteiro negativo. Então

$$\begin{aligned}\ln a^r = \ln a^{-m} = \ln \frac{1}{a^m} &= -\ln a^m && \text{Pela parte } (b)\\ &= -m \ln a && \text{A parte } (d) \text{ é válida para potências positivas}\\ &= r \ln a\end{aligned}$$

o que mostra que (*d*) é válida para qualquer inteiro r negativo. Combinando esse resultado com nossa conclusão anterior de que (*d*) é satisfeita se r for um número inteiro não-negativo, temos que (*d*) é válida para *qualquer* inteiro r.

Por fim, vamos supor que $r = m / n$ seja um número racional qualquer, onde $m \neq 0$ e $n \neq 0$ são inteiros. Então

$$\begin{aligned}\ln a^r = \frac{n \ln a^r}{n} &= \frac{\ln[(a^r)^n]}{n} && \text{A parte } (d) \text{ é válida para potências inteiras}\\ &= \frac{\ln a^{rn}}{n} && \text{Propriedade de expoentes}\\ &= \frac{\ln a^m}{n} && \text{Definição de } r\\ &= \frac{m \ln a}{n} && \text{A parte } (d) \text{ é válida para potências inteiras}\\ &= \frac{m}{n} \ln a = r \ln a\end{aligned}$$

o que mostra que (*d*) também é válida para números racionais r. ■

■ APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DE ln *x*

Para valores específicos de x, o valor de $\ln x$ pode ser aproximado numericamente pela integral definida em (1), digamos, usando a aproximação pelo ponto médio que foi discutida na Seção 6.4.

► Exemplo 1 Aproxime $\ln 2$ usando a aproximação do ponto médio com $n = 10$.

Solução A partir de (1), o valor exato de $\ln 2$ é representado pela integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt$$

A regra do ponto médio está dada nas Fórmulas (5) e (9) da Seção 6.4. Em termos de t, aquela fórmula é

$$\int_a^b f(t)\, dt \approx \Delta t \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)$$

onde Δt é o comprimento comum dos subintervalos e $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*$ são os pontos médios. Nesse caso, temos 10 subintervalos; logo, $\Delta t = (2 - 1)/10 = 0{,}1$. Os cálculos com seis casas

Tabela 6.9.1

$n = 10$
$\Delta t = (b - a)/n = (2 - 1)/10 = 0{,}1$

k	t_k^*	$1/t_k^*$
1	1,05	0,952381
2	1,15	0,869565
3	1,25	0,800000
4	1,35	0,740741
5	1,45	0,689655
6	1,55	0,645161
7	1,65	0,606061
8	1,75	0,571429
9	1,85	0,540541
10	1,95	0,512821
		6,928355

$$\Delta t \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*) \approx (0{,}1)(6{,}928355) \approx 0{,}692836$$

decimais estão na Tabela 6.9.1. A título de comparação, uma calculadora ajustada para dispor seis casas decimais dá $\ln 2 \approx 0{,}693147$, de modo que o tamanho do erro na aproximação do ponto médio é de cerca de 0,000311. Maior precisão na aproximação do ponto médio pode ser obtida aumentando-se n. Por exemplo: com $n = 100$, obtém-se $\ln 2 \approx 0{,}693144$, a qual está correta até a quinta casa decimal. ◄

DOMÍNIO, IMAGEM E COMPORTAMENTO FINAL DE ln *x*

6.9.3 TEOREMA

(*a*) *O domínio de* $\ln x$ *é* $(0, +\infty)$.

(*b*) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ *e* $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

(*c*) *A imagem de* $\ln x$ *é* $(-\infty, +\infty)$.

DEMONSTRAÇÃO (*a*) E (*b*) Já mostramos que $\ln x$ está definida e é crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Para provar que $\ln x \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, devemos mostrar que, dado qualquer número $M > 0$, o valor de $\ln x$ excede M para valores suficientemente grandes de x. Para mostrar isso, seja N um inteiro qualquer. Se $x > 2^N$, então

$$\ln x > \ln 2^N = N \ln 2 \tag{4}$$

pelo Teorema 6.9.2(*d*). Como

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt > 0$$

segue que $N \ln 2$ pode ser feito arbitrariamente grande, bastando escolher N suficientemente grande. Em particular, podemos escolher N de tal modo que $N \ln 2 > M$. Agora, segue de (4) que, se $x > 2^N$, então $\ln x > M$, e isso prova que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Além disso, observando que $v = 1/x \to +\infty$ quando $x \to 0^+$, podemos usar o limite precedente e o Teorema 6.9.2(*b*) para concluir que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{v\to+\infty} \ln \frac{1}{v} = \lim_{v\to+\infty} (-\ln v) = -\infty$$

DEMONSTRAÇÃO (*c*) Segue da parte (*a*), da continuidade de $\ln x$ e do Teorema do Valor Intermediário (2.5.7) que $\ln x$ toma cada valor real quando x varia sobre o intervalo $(0, +\infty)$ (por quê?). ■

DEFINIÇÃO DE e^x

No Capítulo 1 definimos $\ln x$ como a inversa da função exponencial natural e^x. Agora que dispomos de uma definição formal de $\ln x$ em termos de uma integral, definiremos a função exponencial natural como a inversa de $\ln x$.

Como $\ln x$ é crescente e contínua em $(0, +\infty)$, com imagem dada por $(-\infty, +\infty)$, existe exatamente uma solução (positiva) da equação $\ln x = 1$. Agora *definimos e* como a única solução de $\ln x = 1$, de modo que

$$\ln e = 1 \tag{5}$$

Além disso, se x for um número real qualquer, existe uma única solução positiva y de $\ln y = x$, de modo que para valores irracionais de x *definimos* e^x como sendo essa solução. Assim, quando x for irracional, definimos e^x por

$$\ln e^x = x \tag{6}$$

Observe que para valores racionais de x também temos $\ln e^x = x \ln e = x$ pelo Teorema 6.9.2(d). Também segue imediatamente que $e^{\ln x} = x$ para qualquer $x > 0$. Assim, (6) define a função exponencial para quaisquer valores reais de x como a inversa da função logaritmo natural.

6.9.4 DEFINIÇÃO A inversa da função logaritmo natural $\ln x$ é denotada por e^x e denominada ***função exponencial natural***.

Podemos, agora, estabelecer a diferenciabilidade de e^x e confirmar que

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

6.9.5 TEOREMA *A função exponencial natural e^x é diferenciável, e portanto contínua, em $(-\infty, +\infty)$ e sua derivada é*

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

DEMONSTRAÇÃO Como $\ln x$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} > 0$$

para cada x em $(0, +\infty)$, segue do Teorema 4.3.1, com $f(x) = \ln x$ e $f^{-1}(x) = e^x$, que e^x é diferenciável em $(-\infty, +\infty)$ e que sua derivada é

$$\frac{d}{dx}\underbrace{[e^x]}_{f^{-1}(x)} = \frac{1}{\underbrace{1/e^x}_{f'(f^{-1}(x))}} = e^x \qquad \blacksquare$$

■ EXPOENTES IRRACIONAIS

Lembre que no Teorema 6.9.2(d) vimos que, se $a > 0$ e se r é um número racional, então $\ln a^r = r \ln a$. Segue que $a^r = e^{\ln a^r} = e^{r \ln a}$ vale para quaisquer valores positivos de a e qualquer número racional r. Mas essa expressão $e^{r \ln a}$ faz sentido para *qualquer* número real r, tanto racional quanto irracional, de modo que é um bom candidato para dar sentido a a^r para qualquer número real r.

Use a Definição 6.9.6 para provar que, se $a > 0$ e r é um número real, então $\ln a^r = r \ln a$.

6.9.6 DEFINIÇÃO Se $a > 0$ e r é um número real, então definimos a^r por

$$a^r = e^{r \ln a} \tag{7}$$

Com essa definição, podemos mostrar que as propriedades algébricas padrão de expoentes, tais como

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (a^p)(b^p) = (ab)^p$$

valem para quaisquer valores reais de a, b, p e q, onde a e b são positivos. Além disso, usando (7) para um expoente real r, podemos definir a função potência x^r, cujo domínio consiste em todos os números reais positivos; e, para uma base b positiva qualquer, podemos definir a ***função exponencial b^x de base b***, cujo domínio consiste em todos os números reais.

6.9.7 TEOREMA

(*a*) *Para qualquer número real r, a função potência x^r é diferenciável em $(0, +\infty)$ e sua derivada é*

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$$

(*b*) *Para $b > 0$ e $b \neq 1$, a função exponencial b^x de base b é diferenciável em $(-\infty, +\infty)$ e sua derivada é*

$$\frac{d}{dx}[b^x] = b^x \ln b$$

DEMONSTRAÇÃO A diferenciabilidade de $x^r = e^{r \ln x}$ e de $b^x = e^{x \ln b}$ em seus domínios segue da diferenciabilidade de $\ln x$ em $(0, +\infty)$ e de e^x em $(-\infty, +\infty)$:

$$\frac{d}{dx}[x^r] = \frac{d}{dx}[e^{r \ln x}] = e^{r \ln x} \cdot \frac{d}{dx}[r \ln x] = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

$$\frac{d}{dx}[b^x] = \frac{d}{dx}[e^{x \ln b}] = e^{x \ln b} \cdot \frac{d}{dx}[x \ln b] = b^x \ln b$$ ■

Nas Fórmulas (7) e (8) da Seção 2.3 e na Fórmula (1) da Seção 4.2, expressamos e como o valor de um limite. Agora, dispomos das ferramentas matemáticas necessárias para provar a existência desses limites.

6.9.8 TEOREMA

(*a*) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$ (*b*) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (*c*) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

DEMONSTRAÇÃO Provaremos a parte (*a*); as provas das partes (*b*) e (*c*) seguem desse limite e são deixadas como exercício. Primeiro observamos que

$$\frac{d}{dx}[\ln(x + 1)]\bigg|_{x=0} = \frac{1}{x + 1} \cdot 1\bigg|_{x=0} = 1$$

Contudo, usando a definição da derivada, obtemos

$$1 = \frac{d}{dx}[\ln(x + 1)]\bigg|_{x=0} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(0 + h + 1) - \ln(0 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \ln(1 + h)\right]$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1 + x) = 1 \tag{8}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)}$$ Definição 6.9.6

$$= e^{[\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)]}$$ Teorema 2.5.5

$$= e^1$$ Equação (8)

$$= e$$ ■

LOGARITMOS GERAIS

Observamos que, para $b > 0$ e $b \neq 1$, a função b^x é injetora, portanto, possui uma função inversa. Usando a definição de b^x, podemos resolver $y = b^x$ para x como uma função de y:

$$y = b^x = e^{x \ln b}$$
$$\ln y = \ln(e^{x \ln b}) = x \ln b$$
$$\frac{\ln y}{\ln b} = x$$

Assim, a função inversa de b^x é $(\ln x)/(\ln b)$.

6.9.9 DEFINIÇÃO Para $b > 0$ e $b \neq 1$, definimos a função ***logaritmo de base b***, denotada por $\log_b x$, por

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \tag{9}$$

Segue imediatamente dessa definição que $\log_b x$ é a função inversa de b^x e que satisfaz as propriedades da Tabela 1.6.3. Além disso, $\log_b x$ é diferenciável, e portanto contínua, em $(0, +\infty)$, sendo sua derivada dada por

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x \ln b}$$

Como uma última observação de consistência, observamos que $\log_e x = \ln x$.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR INTEGRAIS

As funções que vimos até agora neste livro são denominadas ***funções elementares***; elas incluem polinômios, funções racionais, funções potências, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções trigonométricas e todas as outras que podem ser obtidas dessas por adição, subtração, multiplicação, radiciação e composição.

Entretanto, há muitas funções importantes que não se incluem nessa categoria. Tais funções surgem de muitas maneiras, mas comumente aparecem no decorrer da solução de problemas de valor inicial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{10}$$

No Exemplo 6 da Seção 6.2 e na discussão que o precede, vimos que o método básico para resolver (10) é integrar $f(x)$ e então usar a condição inicial para determinar a constante de integração. Pode-se provar que, se f for contínua, então (10) tem uma única solução, que é a obtida com esse procedimento. Há, porém, uma outra abordagem: em vez de resolver individualmente cada problema de valor inicial, podemos encontrar uma fórmula geral para a solução de (10) e, então, aplicá-la na solução de problemas específicos. Vamos mostrar agora que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \tag{11}$$

é uma fórmula para a solução de (10). Para confirmar, precisamos mostrar que $dy/dx = f(x)$ e que $y(x_0) = y_0$. Os cálculos são os seguintes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right] = 0 + f(x) = f(x)$$

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t)\, dt = y_0 + 0 = y_0$$

► Exemplo 2 No Exemplo 6 da Seção 6.2, mostramos que a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad y(0) = 1$$

é $y(x) = 1 + \operatorname{sen} x$. Esse problema também pode ser resolvido aplicando-se a Fórmula (11) com $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$. Então,

$$y(x) = 1 + \int_0^x \cos t\,dt = 1 + \Big[\operatorname{sen} t\Big]_{t=0}^x = 1 + \operatorname{sen} x \quad ◄$$

No último exemplo, fomos capazes de efetuar a integração da Fórmula (11) e de expressar a solução do problema de valor inicial como uma função elementar. Há casos, contudo, nos quais isso não é possível, e então a solução do problema deve ser deixada em termos de uma integral "não-calculada". Por exemplo, a solução por (11) do problema do valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}, \quad y(0) = 1$$

é

$$y(x) = 1 + \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Entretanto, pode ser mostrado que é impossível expressar a integral nessa solução em termos de funções elementares. Assim, encontramos uma *nova* função, que consideramos estar *definida* pela integral. Um parente próximo dessa função, conhecido como ***função erro***, desempenha um papel importante em Probabilidade e Estatística; ele é denotado por erf (x) e é definido por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt \tag{12}$$

Realmente, muitas das funções mais importantes nas ciências e na Engenharia estão definidas como integrais e têm nomes e notações especiais associados a elas. Por exemplo, as funções definidas por

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad \text{e} \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \tag{13-14}$$

são chamadas de ***funções seno e cosseno de Fresnel***, respectivamente, em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), que primeiro as encontrou em seu estudo da difração das ondas de luz.

■ DETERMINAÇÃO DOS VALORES E DOS GRÁFICOS DE FUNÇÕES DEFINIDAS POR INTEGRAIS

Os valores a seguir de $S(1)$ e $C(1)$ foram produzidos por um CAS que tem um algoritmo para aproximar integrais definidas:

$$S(1) = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \approx 0{,}438259, \qquad C(1) = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \approx 0{,}779893$$

Para gerar os gráficos de funções definidas por integrais, os programas de computador escolhem um conjunto de valores de x no domínio, aproximam a integral para cada um desses valores e, então, fazem o gráfico com os pontos resultantes. Assim, há muito cálculo envolvido na geração de tais gráficos, uma vez que cada ponto requer a aproximação de uma integral. Os gráficos das funções de Fresnel da Figura 6.9.4 foram gerados dessa forma, usando um CAS.

Embora as funções de Fresnel exijam uma quantidade razoável de cálculo para gerar os gráficos, as derivadas de $S(x)$ e $C(x)$ são fáceis de obter usando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo (6.6.3); elas são

$$S'(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) \quad \text{e} \quad C'(x) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) \tag{15-16}$$

Essas derivadas podem ser usadas para determinar a localização dos extremos relativos e de pontos de inflexão, bem como de outras propriedades de $S(x)$ e $C(x)$.

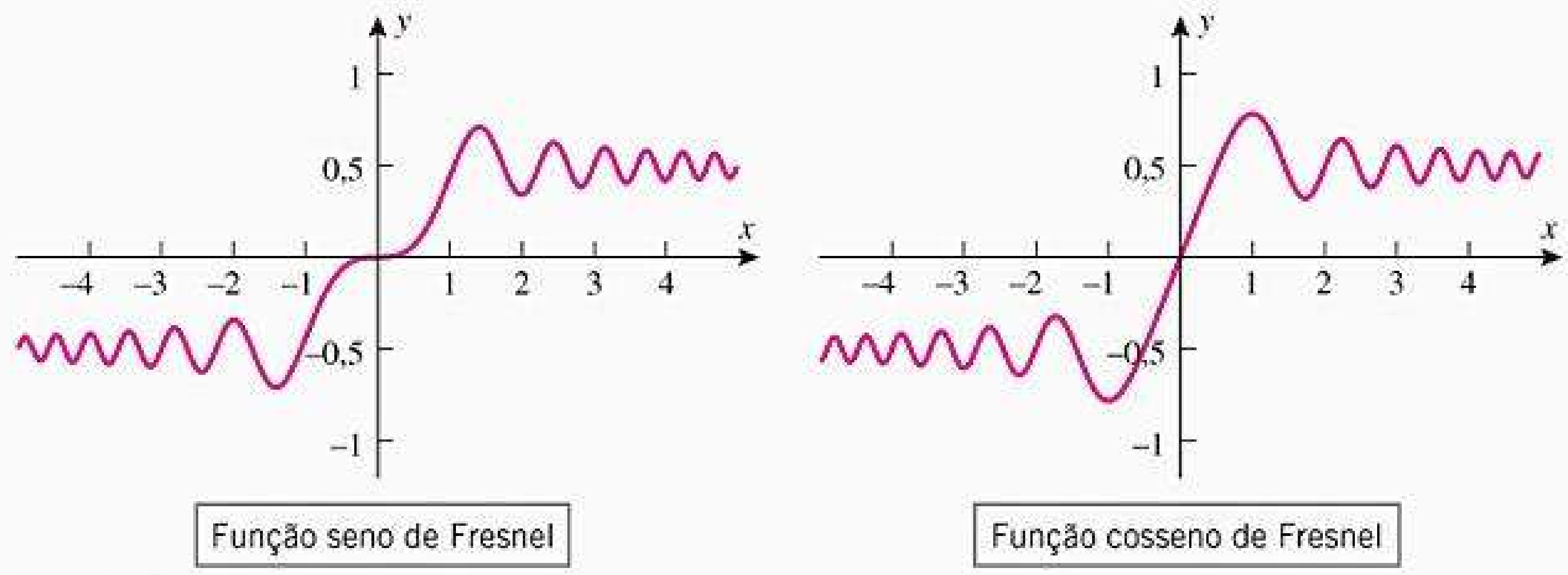


Figura 6.9.4

INTEGRAIS COM FUNÇÕES COMO LIMITES DE INTEGRAÇÃO

Várias aplicações podem levar a integrais em que um ou ambos os limites de integração são funções de x. Alguns exemplos são

$$\int_x^1 \sqrt{\operatorname{sen} t}\, dt, \quad \int_{x^2}^{\operatorname{sen} x} \sqrt{t^3+1}\, dt, \quad \int_{\ln x}^{\pi} \frac{dt}{t^7-8}$$

Vamos completar esta seção mostrando como diferenciar integrais da forma

$$\int_a^{g(x)} f(t)\, dt \tag{17}$$

onde a é uma constante. Derivadas de outros tipos de integrais com funções por limite de integração serão discutidas nos exercícios.

Para diferenciar (17), podemos considerar a integral como uma composição $F(g(x))$, onde

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Aplicando, então, a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^{g(x)} f(t)\, dt\right] = \frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) \underset{\text{Teorema 6.6.3}}{=} f(g(x))g'(x)$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^{g(x)} f(t)\, dt\right] = f(g(x))g'(x) \tag{18}$$

Em mais palavras:

Para diferenciar uma integral com um limite inferior constante e um limite superior igual a uma função, substitua o limite superior no integrando e multiplique pela derivada do limite superior.

► **Exemplo 3**

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{\operatorname{sen} x}(1-t^2)\,dt\right] = (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x = \cos^3 x \quad ◄$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.9 (*Ver página 436 para respostas.*)

1. (a) $\int_1^{1/e} \frac{1}{t}\,dt =$ ________.
   (b) Se $\ln a = 2$ e $\ln b = -3$, então $\int_1^{ab^2} \frac{1}{t}\,dt =$ ________.
2. Dê uma estimativa de ln 2 usando a Definição 6.9.1 e
   (a) a aproximação pelo extremo esquerdo, com $n = 2$.
   (b) a aproximação pelo extremo direito, com $n = 2$.
3. $\pi^{1/(\ln \pi)} =$ ________
4. A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = \pi$$

   é $y =$ ________
5. $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{e^{-x}} \frac{1}{1+t^4}\,dt\right] =$ ________

EXERCÍCIOS 6.9 Recurso Gráfico C CAS

1. Esboce a curva $y = 1/t$ e sombreie a região sob a curva cuja área é
   (a) ln 2 (b) −ln 0,5 (c) 2
2. Esboce a curva $y = 1/t$ e sombreie duas regiões diferentes, sob a curva, cuja área é ln 1,5.
3. Dado que $\ln a = 2$ e $\ln c = 5$, encontre
   (a) $\int_1^{ac} \frac{1}{t}\,dt$ (b) $\int_1^{1/c} \frac{1}{t}\,dt$
   (c) $\int_1^{a/c} \frac{1}{t}\,dt$ (d) $\int_1^{a^3} \frac{1}{t}\,dt$
4. Dado que $\ln a = 9$, encontre
   (a) $\int_1^{\sqrt{a}} \frac{1}{t}\,dt$ (b) $\int_1^{2a} \frac{1}{t}\,dt$
   (c) $\int_1^{2/a} \frac{1}{t}\,dt$ (d) $\int_2^{a} \frac{1}{t}\,dt$
5. Aproxime ln 5 usando a regra do ponto médio com $n = 10$ e estime a magnitude do erro comparando sua resposta com a produzida diretamente por um recurso computacional.
6. Aproxime ln 3 usando a regra do ponto médio com $n = 20$ e estime a magnitude do erro comparando sua resposta com a produzida diretamente por um recurso computacional.
7. Simplifique a expressão e enuncie os valores de x para os quais sua simplificação seja válida.
   (a) $e^{-\ln x}$ (b) $e^{\ln x^2}$
   (c) $\ln(e^{-x^2})$ (d) $\ln(1/e^x)$
   (e) $\exp(3 \ln x)$ (f) $\ln(xe^x)$
   (g) $\ln\left(e^{x-\sqrt[3]{x}}\right)$ (h) $e^{x-\ln x}$
8. (a) Seja $f(x) = e^{-2x}$. Encontre o valor exato mais simples de $f(\ln 3)$.
   (b) Seja $f(x) = e^x + 3e^{-x}$. Encontre o valor exato mais simples de $f(\ln 2)$.

9-10 Expresse a quantidade dada como uma potência de e.

9. (a) 3^π (b) $2^{\sqrt{2}}$
10. (a) π^{-x} (b) $x^{2x}, x > 0$

11-12 Encontre os limites fazendo uma substituição apropriada nos limites dados pelo Teorema 6.9.8.

11. (a) $\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ (b) $\lim_{x \to 0}(1 + 2x)^{1/x}$
12. (a) $\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$ (b) $\lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/(3x)}$

13-14 Encontre $g'(x)$ usando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo e verifique sua resposta calculando a integral e depois diferenciando.

13. $g(x) = \int_1^x (t^2 - t)\,dt$
14. $g(x) = \int_\pi^x (1 - \cos t)\,dt$

15-16 Encontre a derivada usando a Fórmula (18) e verifique sua resposta calculando a integral e depois derivando o resultado.

15. (a) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \frac{1}{t}\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_1^{\ln x} e^t\,dt$
16. (a) $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x^2} \sqrt{t+1}\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_\pi^{1/x} \operatorname{sen} t\,dt$
17. Seja $F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t^2+1}\,dt$. Encontre
    (a) $F(0)$ (b) $F'(0)$ (c) $F''(0)$

18. Seja $F(x) = \int_2^x \sqrt{3t^2+1}\,dt$. Encontre

(a) $F(2)$ (b) $F'(2)$ (c) $F''(2)$

C **19.** (a) Use a Fórmula (18) para encontrar

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} t\sqrt{1+t}\,dt$$

(b) Use um CAS para calcular a integral e diferenciar a função resultante.

(c) Use o comando de simplificação do CAS, se necessário, para confirmar que as respostas de (a) e (b) são iguais.

20. Mostre que

(a) $\frac{d}{dx}\left[\int_x^a f(t)\,dt\right] = -f(x)$

(b) $\frac{d}{dx}\left[\int_{g(x)}^a f(t)\,dt\right] = -f(g(x))g'(x)$

21-22 Use os resultados do Exercício 20 para encontrar a derivada.

21. (a) $\frac{d}{dx}\int_x^{\pi} \cos(t^3)\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_{\operatorname{tg} x}^{3} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$

22. (a) $\frac{d}{dx}\int_x^{0} \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_{1/x}^{\pi} \cos^3 t\,dt$

23. Encontre

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1}\,dt\right]$$

escrevendo

$$\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1}\,dt = \int_{3x}^{0} \frac{t-1}{t^2+1}\,dt + \int_{0}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1}\,dt$$

24. Use o Exercício 20 (b) e a idéia do Exercício 23 para mostrar que

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

25. Use o resultado obtido no Exercício 24 para efetuar as seguintes diferenciações:

(a) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen}^2 t\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t}\,dt$

26. Prove que a função

$$F(x) = \int_x^{5x} \frac{1}{t}\,dt$$

é constante no intervalo $(0, +\infty)$, usando o Exercício 24 para encontrar $F'(x)$. Obtenha a constante.

ENFOCANDO CONCEITOS

27. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função do gráfico a seguir.

(a) Encontre $F(0)$, $F(3)$, $F(5)$, $F(7)$ e $F(10)$.

(b) Em quais subintervalos de $[0, 10]$ F é crescente e em quais é decrescente?

(c) Onde F toma seu valor máximo e onde toma seu valor mínimo?

(d) Esboce o gráfico de F.

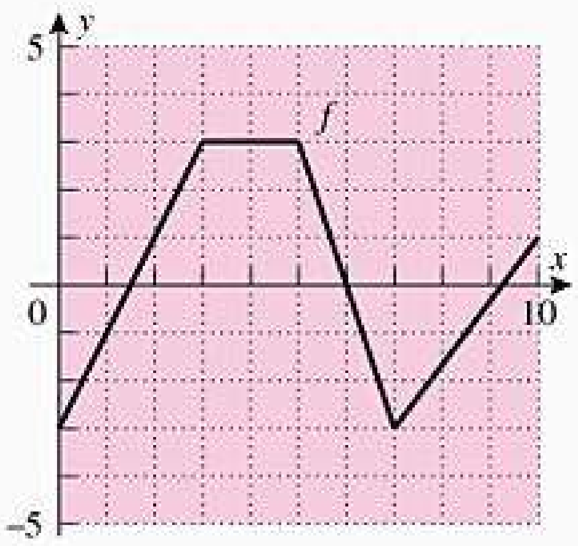


Figura Ex-27

28. Determine o(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de F do Exercício 27.

29-30 Expresse $F(x)$ por partes, de forma que não envolva uma integral.

29. $F(x) = \int_{-1}^{x} |t|\,dt$

30. $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$

31-34 Use a Fórmula (11) para resolver o problema de valor inicial.

31. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+1}{x}$, $y(1) = 2$ **32.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$, $y(1) = 0$

33. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - \operatorname{sen} x$, $y(\pi/4) = 1$

34. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$, $y(e) = 1$

35. Suponha que, em $t = 0$, P_0 pessoas tenham a doença X, e que um certo modelo para a transmissão dela prediga que a taxa de transmissão é de $r(t)$ pessoas por dia. Escreva uma fórmula para o número de pessoas que terão a doença X após x dias.

36. Suponha que $v(t)$ seja a função velocidade de uma partícula movendo-se ao longo do eixo s. Escreva uma fórmula para a coordenada da partícula no tempo T, se ela estiver no ponto s_1 em $t = 1$.

ENFOCANDO CONCEITOS

37. A figura abaixo mostra os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = \int_0^x f(t)\,dt$. Determine de qual função são os gráficos e explique seu raciocínio.

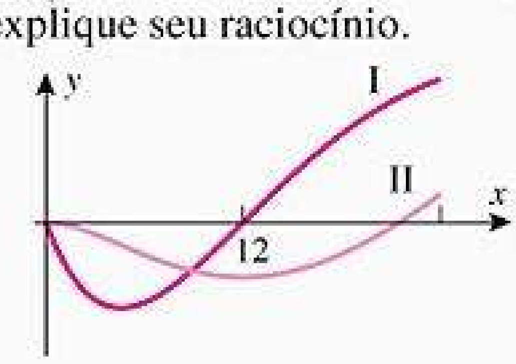


Figura Ex- 37

38. (a) Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{k\to 0}\int_1^b t^{k-1}\,dt \quad (b > 0)$$

(b) Verifique sua conjectura calculando a integral e depois encontrando o limite. [*Sugestão*: Interprete o limite como a definição da derivada de uma função exponencial.]

39. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico é mostrado abaixo.

(a) Onde ocorrem os mínimos relativos de F?

(b) Onde ocorrem os máximos relativos de F?

(c) No intervalo [0, 5], onde ocorre o máximo absoluto de F?

(d) No intervalo [0, 5], onde ocorre o mínimo absoluto de F?

(e) Onde F é côncava para cima e onde é côncava para baixo?

(f) Esboce o gráfico de F.

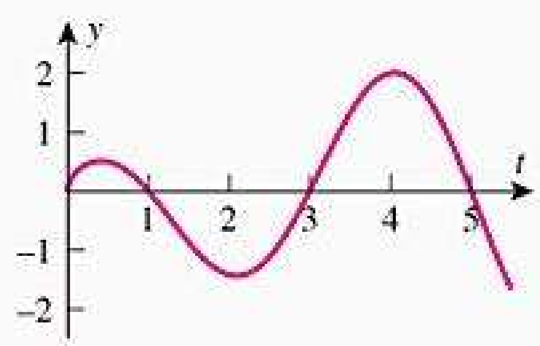


Figura Ex- 39

40. Os programas CAS têm comandos para trabalhar com a maioria das funções não-elementares importantes. Verifique seu manual para informações sobre a função erro erf (x) [veja a Fórmula (12)], e então faça o seguinte.

(a) Gere o gráfico de erf (x).

(b) Use o gráfico para fazer uma conjectura sobre a existência e a localização de possíveis máximos e mínimos relativos de erf (x).

(c) Verifique sua conjectura em (b), usando a derivada de erf (x).

(d) Use o gráfico para fazer uma conjectura sobre a existência e a localização de possíveis pontos de inflexão de erf (x).

(e) Verifique sua conjectura em (d) usando a derivada segunda de erf (x).

(f) Use o gráfico para fazer uma conjectura sobre a existência de assíntotas horizontais de erf (x).

(g) Verifique sua conjectura em (f) usando o CAS para encontrar os limites de erf (x) quando $x \to \pm\infty$.

41. As funções seno e cosseno de Fresnel $S(x)$ e $C(x)$ foram definidas nas Fórmulas (13) e (14) e têm seus gráficos mostrados na Figura 6.9.4. Suas derivadas foram dadas nas Fórmulas (15) e (16).

(a) Em que pontos $C(x)$ tem mínimos relativos? E máximos relativos?

(b) Onde ocorrem os pontos de inflexão de $C(x)$?

(c) Confirme que suas respostas em (a) e (b) estão em conformidade com o gráfico de $C(x)$.

42. Encontre o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \ln t\,dt$$

43. Encontre uma função f e um número a tais que

$$4 + \int_a^x f(t)\,dt = e^{2x}$$

ENFOCANDO CONCEITOS

44. (a) Dê um argumento geométrico para mostrar que

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

(b) Use o resultado de (a) para provar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

(c) Use o resultado de (b) para provar que

$$e^{x/(x+1)} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e, \quad x > 0$$

e, portanto, que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(d) Use a desigualdade em (c) para provar que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, \quad x > 0$$

45. Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

na janela [0, 100] × [0; 0,2]. Use esse gráfico e a parte (d) do Exercício 44 para fazer uma estimativa grosseira do erro na aproximação

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50}$$

46. Prove: se f for contínua em um intervalo aberto I e a for um ponto qualquer em I, então

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é contínua em I.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 6.9

1. (a) −1 (b) −4 **2.** (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{7}{12}$ **3.** e **4.** $-\cos x + \pi + 1$ **5.** $-\dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-4x}}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO Recurso Gráfico C CAS

1. Escreva um parágrafo que descreva o *método dos retângulos* para a área abaixo da curva $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$.

2. (a) Esquematize um procedimento para encontrar as estimativas da área da região na figura abaixo por falta e por excesso (em cm^2).
   (b) Use seu procedimento para encontrar estimativas por falta e por excesso da área.
   (c) Aprimore as estimativas obtidas em (b).



Figura Ex-2

3-10 Calcule as integrais.

3. $\int \left[\frac{1}{2x^3} + 4\sqrt{x}\right] dx$ 4. $\int [u^3 - 2u + 7]\, du$

5. $\int [4 \operatorname{sen} x + 2\cos x]\, dx$ 6. $\int \sec x(\operatorname{tg} x + \cos x)\, dx$

7. $\int [x^{-2/3} - 5e^x]\, dx$ 8. $\int \left[\frac{3}{4x} - \sec^2 x\right] dx$

9. $\int \left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx$

10. $\int \left[\frac{12}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{1-x^4}{1+x^2}\right] dx$

11. Resolva o problema de valor inicial
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}},\ y(1) = 0$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x - 5e^x,\ y(0) = 0$

12. A figura abaixo mostra o campo de direções para uma equação diferencial $dy/dx = f(x)$. Qual das seguintes funções tem mais chances de ser $f(x)$?

$$\sqrt{x}, \quad \operatorname{sen} x, \quad x^4, \quad x$$

Explique seu raciocínio.

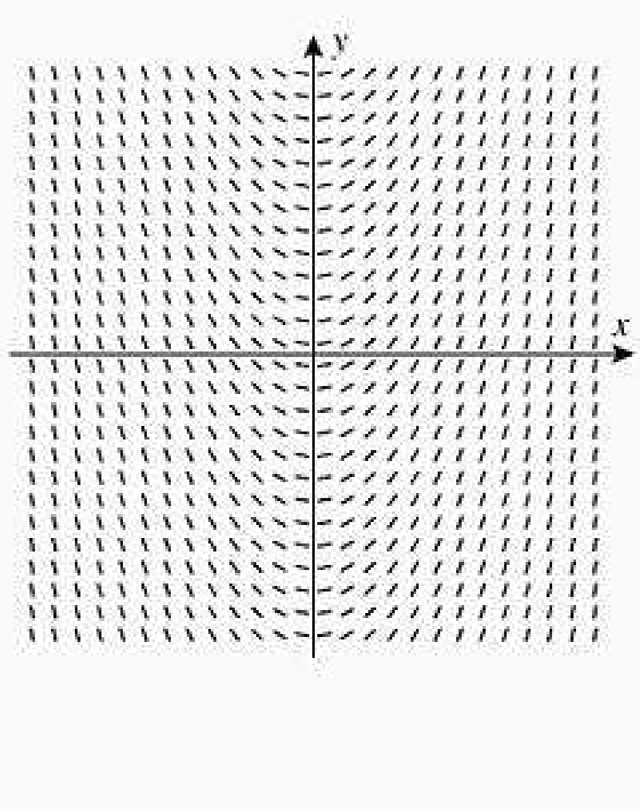


Figura Ex-12

13. (a) Mostre que as substituições $u = \sec x$ e $u = \operatorname{tg} x$ produzem valores diferentes para a integral

$$\int \sec^2 x \operatorname{tg} x\, dx$$

   (b) Explique por que ambos estão corretos.

14. Use as duas substituições no Exercício 13 para estimar a integral definida

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \operatorname{tg} x\, dx$$

e confirme que os resultados são iguais.

15. Calcule a integral

$$\int \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^4-2x^2}}\, dx$$

fazendo a substituição $u = x^2 - 1$.

16. Calcule a integral

$$\int \sqrt{1 + x^{-2/3}}\, dx$$

fazendo a substituição $u = 1 + x^{2/3}$.

17-20 Calcule à mão as integrais e verifique suas respostas com um CAS, se disponível.

17. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{5 + 2\operatorname{sen} 3x}}\, dx$ 18. $\int \frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

19. $\int \frac{x^2}{(ax^3+b)^2}\, dx$ 20. $\int x \sec^2(ax^2)\, dx$

21. Em cada parte, confirme a igualdade dada.
   (a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
   (b) $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{9}{n} - \frac{k}{n^2}\right) = \frac{17}{2}$
   (c) $\sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{2} (i+j)\right) = 21$

22. Expresse

$$\sum_{k=4}^{18} k(k-3)$$

na notação com somatório, com
   (a) $k = 0$ como limite inferior do somatório
   (b) $k = 5$ como limite inferior do somatório

23. A figura a seguir mostra um quadrado com n unidades por n unidades subdividido em um quadrado unitário e $n - 1$ regiões em forma de L. Use essa figura para mostrar que a soma dos n primeiros inteiros ímpares positivos consecutivos é n^2.

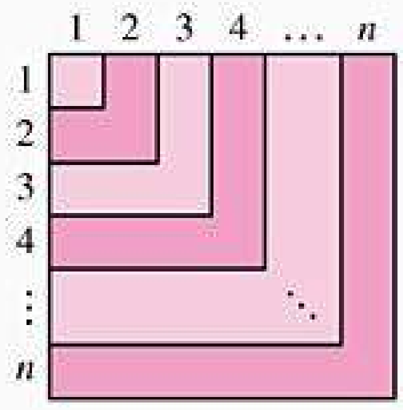


Figura Ex-23

24. Deduza o resultado do Exercício 23 escrevendo

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$$

25. A figura abaixo mostra 5 pontos no gráfico de uma função desconhecida f. Planeje uma estratégia que use os pontos conhecidos para aproximar a área A abaixo do gráfico de $y = f(x)$ e acima do intervalo [1, 5]. Descreva sua estratégia e use-a para aproximar A.

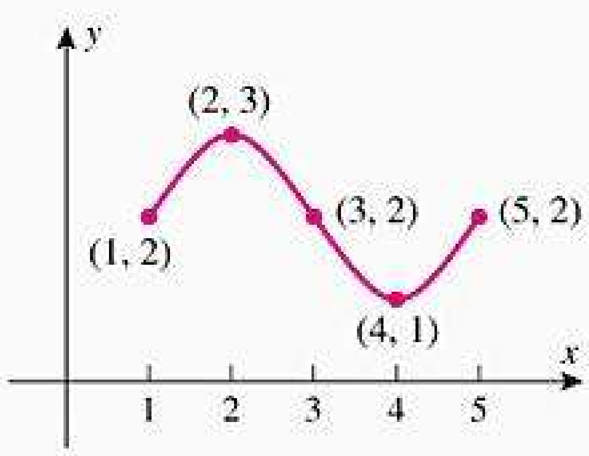


Figura Ex-25

26. Encontre as aproximações pelo extremo esquerdo, pelo extremo direito e pelo ponto médio da área abaixo da curva $y = e^x$ e acima do intervalo [0, 5], usando $n = 5$ subintervalos.

27. Encontre a área sob o gráfico de $f(x) = 4x - x^2$ acima do intervalo [0, 4] usando a Definição 6.4.3, tomando x_k^* como sendo o extremo *direito* de cada subintervalo.

28. Encontre a área sob o gráfico de $f(x) = 5x - x^2$ acima do intervalo [0, 5] usando a Definição 6.4.3, tomando x_k^* como sendo o extremo *esquerdo* de cada subintervalo.

29-30 Use um recurso computacional para encontrar as aproximações pelo extremo esquerdo, pelo extremo direito e pelo ponto médio da área abaixo da curva $y = f(x)$ acima do intervalo dado, usando $n = 10$ subintervalos.

29. $y = \ln x$; [1, 2]   **30.** $y = e^x$; [0, 1]

31. A integral *definida* de f no intervalo $[a, b]$ está definida como o limite

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

Explique o significado dos vários símbolos do lado direito dessa equação.

32. Dê um argumento geométrico convincente para mostrar que

$$\int_1^e \ln x\,dx + \int_0^1 e^x\,dx = e$$

33. Suponha que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}, \quad \int_1^2 f(x)\,dx = \tfrac{1}{4},$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = -1, \quad \int_0^1 g(x)\,dx = 2$$

Em cada parte, use essa informação para calcular a integral dada, se possível. Se não houver informação suficiente para calcular a integral, então diga isso.

(a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ (b) $\int_1^3 f(x)\,dx$ (c) $\int_2^3 5f(x)\,dx$

(d) $\int_1^0 g(x)\,dx$ (e) $\int_0^1 g(2x)\,dx$ (f) $\int_0^1 [g(x)]^2\,dx$

34. Em cada parte, use a informação do Exercício 33 para calcular a integral dada. Se não houver informação suficiente, então diga isso.

(a) $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx$ (b) $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

(c) $\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ (d) $\int_0^1 [4g(x) - 3f(x)]\,dx$

35. Em cada parte, calcule a integral. Quando apropriado, use uma fórmula geométrica.

(a) $\int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1 - x^2})\,dx$

(b) $\int_0^3 (x\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{9 - x^2})\,dx$

(c) $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\,dx$

36. Calcule a integral $\int_0^1 |2x - 1|\,dx$ e faça um esboço da região cuja área ela representa.

37. Um dos números π, $\pi/2$, $35\pi/128$, $1 - \pi$ é o valor correto da integral

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x\,dx$$

Use o gráfico abaixo de $y = \operatorname{sen}^8 x$ e um processo lógico de eliminação para encontrar o valor correto. [Não tente calcular a integral.]

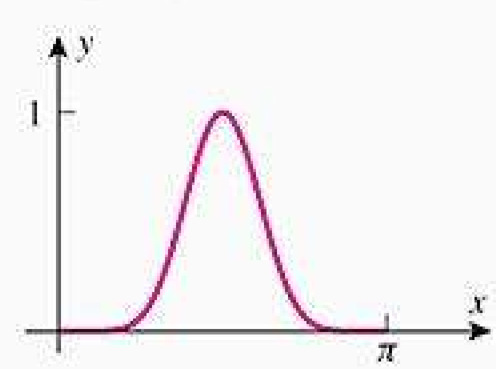


Figura Ex-37

38. Em cada parte, encontre o limite interpretando-o como o limite de uma soma de Riemann, na qual o intervalo [0, 1] está dividido em n subintervalos de mesmo comprimento.

(a) $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{1/n} + e^{2/n} + e^{3/n} + \cdots + e^{n/n}}{n}$

39. (a) Expresse a equação

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

na notação de somatório.

(b) Se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ forem constantes e $f_1, f_2, \ldots, f_n$ forem funções integráveis em $[a, b]$, é sempre verdadeiro que

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{n}\left[c_k \int_a^b f_k(x)\,dx\right]?$$

Explique seu raciocínio.

40. Expresse o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} e^{x_k^*}\,\Delta x_k$$

como uma integral definida sobre [0, 1] e então calcule o limite calculando a integral.

41. Encontre uma fórmula (definida por partes) para o contorno superior do trapézio mostrado abaixo e então integre essa função para deduzir a fórmula para a área do trapézio dada na capa interna frontal deste livro.

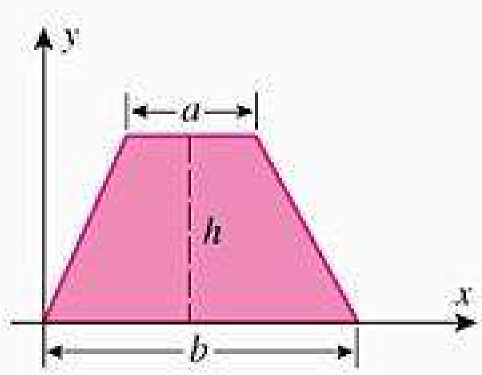


Figura Ex-41

42. (a) Divida o intervalo [1, 2] em 5 subintervalos de mesmo comprimento e use uma soma de Riemann apropriada para mostrar que

$$0{,}2\left[\tfrac{1}{1{,}2} + \tfrac{1}{1{,}4} + \tfrac{1}{1{,}6} + \tfrac{1}{1{,}8} + \tfrac{1}{2{,}0}\right] < \ln 2 < 0{,}2\left[\tfrac{1}{1{,}0} + \tfrac{1}{1{,}2} + \tfrac{1}{1{,}4} + \tfrac{1}{1{,}6} + \tfrac{1}{1{,}8}\right]$$

(b) Mostre que se o intervalo [1, 2] for dividido em n subintervalos de mesmo comprimento, então

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \ln 2 < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

(c) Mostre que a diferença entre as duas somas em (b) é $1/(2n)$, e use esse resultado para mostrar que a soma da parte (a) aproxima ln 2 com erro de, no máximo, 0,1.

(d) Quão grande deve ser n para garantir que a soma da parte (b) aproxime ln 2 com três casas decimais?

43-46 Encontre a área sob a curva $y = f(x)$ acima do intervalo dado.

43. $f(x) = \sqrt{x}$; $[1, 9]$

44. $f(x) = x^{-3/5}$; $[1, 4]$

45. $f(x) = e^x$; $[1, 3]$

46. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $[1, e^3]$

47-54 Calcule as integrais usando o Teorema Fundamental do Cálculo e (se for necessário) propriedades da integral definida.

47. $\displaystyle\int_{-3}^{0} (x^2 - 4x + 7)\,dx$

48. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x(1 + x^3)\,dx$

49. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$

50. $\displaystyle\int_{1}^{8} (5x^{2/3} - 4x^{-2})\,dx$

51. $\displaystyle\int_{0}^{1} (x - \sec x \operatorname{tg} x)\,dx$

52. $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(\frac{3}{\sqrt{t}} - 5\sqrt{t} - t^{-3/2}\right) dt$

53. $\displaystyle\int_{0}^{2} |2x - 3|\,dx$

54. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \left|\tfrac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right|\,dx$

55. Encontre a área que está acima do eixo x mas abaixo da curva $y = (1 - x)(x - 2)$. Faça um esboço dessa região.

C **56.** Use um CAS para aproximar a área da região do primeiro quadrante que se situa abaixo da curva $y = x + x^2 - x^3$ e acima do eixo x.

57. Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_1^x (t^3 + 1)\,dt$$

(a) Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar $F'(x)$.

(b) Confira o resultado de (a) primeiro integrando e depois derivando.

58. Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_4^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

(a) Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar $F'(x)$.

(b) Confira o resultado de (a) primeiro integrando e depois derivando.

59-64 Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo e (quando for necessário) a Fórmula (18) da Seção 6.9 para encontrar as derivadas.

59. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt\right]$

60. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\cos t^2}\,dt\right]$

61. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x |t - 1|\,dt\right]$

62. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_\pi^x \cos\sqrt{t}\,dt\right]$

63. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_2^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+t^3}\,dt\right]$

64. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_e^{\sqrt{x}} (\ln t)^2\,dt\right]$

65. Enuncie as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo e explique qual o significado da frase "diferenciação e integração são processos inversos".

C **66.** Seja $F(x)=\int_0^x \frac{t^2-3}{t^4+7}\,dt$.

(a) Encontre os intervalos nos quais F é crescente e aqueles nos quais é decrescente.

(b) Encontre os intervalos abertos nos quais F é côncava para cima e o nos quais é côncava para baixo.

(c) Encontre os valores de x, se houver, nos quais a função F tem extremos absolutos.

(d) Use um CAS para fazer o gráfico de F e confirme que os resultados de (a), (b) e (c) estão de acordo com o gráfico.

67. Prove que a função

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

é constante no intervalo $(0,+\infty)$.

68. Qual é o domínio natural da função

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2-9}\,dt?$$

Explique seu raciocínio.

69. Em cada parte, determine os valores de x para os quais $F(x)$ é positivo, negativo ou zero, sem efetuar a integração. Explique seu raciocínio.

(a) $F(x)=\int_1^x \frac{t^4}{t^2+3}\,dt$ (b) $F(x)=\int_{-1}^x \sqrt{4-t^2}\,dt$

C **70.** Use um CAS para aproximar o maior e o menor valor da integral

$$\int_{-1}^x \frac{t}{\sqrt{2+t^3}}\,dt$$

para $1\le x\le 3$.

71. Encontre todos os valores de x^* no intervalo dado cuja existência é garantida pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, e explique o que esses números representam.

(a) $f(x)=\sqrt{x};\ [0,3]$ (b) $f(x)=1/x;\ [1,e]$

72. Um tumor de 10 g é descoberto em um rato de laboratório em 1° de março. O tumor cresce a uma taxa de $r(t)=t/7$ gramas por semana, onde t denota o número de semanas desde 1° de março. Qual será a massa do tumor em 7 de junho?

73. Deduza as fórmulas para as funções posição e velocidade de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo com movimento uniformemente acelerado.

74. A velocidade de uma partícula movendo-se ao longo do eixo s é medida em intervalos de 5 segundos durante 40 segundos, e a função velocidade está modelada por uma curva lisa que passa pelos pontos dados, conforme a figura a seguir. Use esse modelo em cada parte.

(a) A partícula tem aceleração constante? Explique seu raciocínio.

(b) Há algum intervalo de 15 segundos durante o qual a aceleração é constante? Explique seu raciocínio.

(c) Estime a distância percorrida pela partícula de $t=0$ a $t=40$.

(d) Estime a velocidade média da partícula no período de 40 segundos.

(e) A partícula está diminuindo sua velocidade alguma vez durante os 40 segundos? Explique seu raciocínio.

(f) Há informação suficiente para determinar a coordenada s da partícula em $t=10$? Se houver, encontre-a. Se não, explique qual a informação adicional necessária.

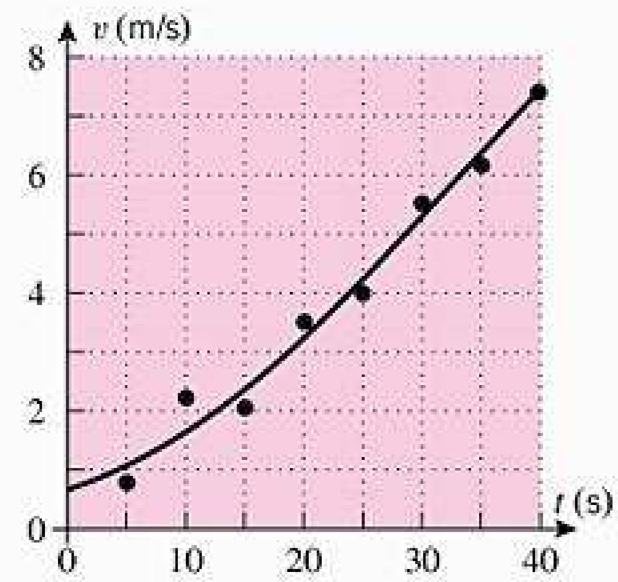


Figura Ex-74

75-78 Uma partícula move-se ao longo de um eixo s. Use a informação dada para encontrar a função posição da partícula.

75. $v(t)=t^3-2t^2+1;\ s(0)=1$

76. $a(t)=4\cos 2t;\ v(0)=-1,\ s(0)=-3$

77. $v(t)=2t-3;\ s(1)=5$

78. $a(t)=\cos t-2t;\ v(0)=0,\ s(0)=0$

79-82 Uma partícula move-se com velocidade $v(t)$ m/s ao longo de um eixo s. Encontre o deslocamento e a distância percorrida por ela durante os intervalos de tempo dados.

79. $v(t)=2t-4;\ 0\le t\le 6$

80. $v(t)=|t-3|;\ 0\le t\le 5$

81. $v(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{t^2};\ 1\le t\le 3$

82. $v(t)=\frac{3}{\sqrt{t}};\ 4\le t\le 9$

83-84 Uma partícula move-se com aceleração $a(t)$ m/s^2 ao longo de um eixo s e tem velocidade v_0 m/s no instante $t=0$. Encontre o deslocamento e a distância percorrida por ela durante os intervalos de tempo dados.

83. $a(t)=-2;\ v_0=3;\ 1\le t\le 4$

84. $a(t)=\frac{1}{\sqrt{5t+1}};\ v_0=2;\ 0\le t\le 3$

85-87 Esboce a curva e encontre a área total entre ela e o intervalo dado no eixo x.

85. $y=x^2-1;\ [0,3]$

86. $y=\sqrt{x+1}-1;\ [-1,1]$

87. $y=\frac{x-1}{x};\ \left[\frac{1}{2},2\right]$

88. Suponha que a função velocidade de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo s seja $v(t)=20t^2-100t+50$ m/s e que a partícula está na origem no instante $t=0$. Use um recurso gráfico

computacional para gerar os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ nos primeiros 6 segundos do movimento.

89. Um carro desloca-se a 72 km/h ao longo de uma estrada reta desacelerando a uma taxa constante de 1 m/s^2.

(a) Quanto tempo leva para a velocidade chegar a 54 km/h?

(b) Qual a distância que o carro percorrerá até parar?

90. Uma partícula em movimento ao longo de uma reta está acelerando a uma taxa constante de 3 m/s^2. Obtenha sua velocidade inicial se ela avançou 40 m nos primeiros 4 segundos.

91. Uma bola é jogada verticalmente para cima a partir de uma altura de s_0 metros com velocidade inicial de v_0 m/s. Se ela for pega na altura s_0, determine sua velocidade média no ar usando o modelo de queda livre.

92. Uma pedra, largada de uma altura desconhecida, bate no chão com uma velocidade de 24 m/s. Encontre a altura da qual ela foi largada.

93-100 Calcule as integrais fazendo uma substituição apropriada.

93. $\int_0^1 (2x+1)^4\,dx$

94. $\int_{-5}^0 x\sqrt{4-x}\,dx$

95. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

96. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx$

97. $\int_0^1 \operatorname{sen}^2(\pi x)\cos(\pi x)\,dx$

98. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

99. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

100. $\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2}\,dx$

101. Calcule os limites.

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}$

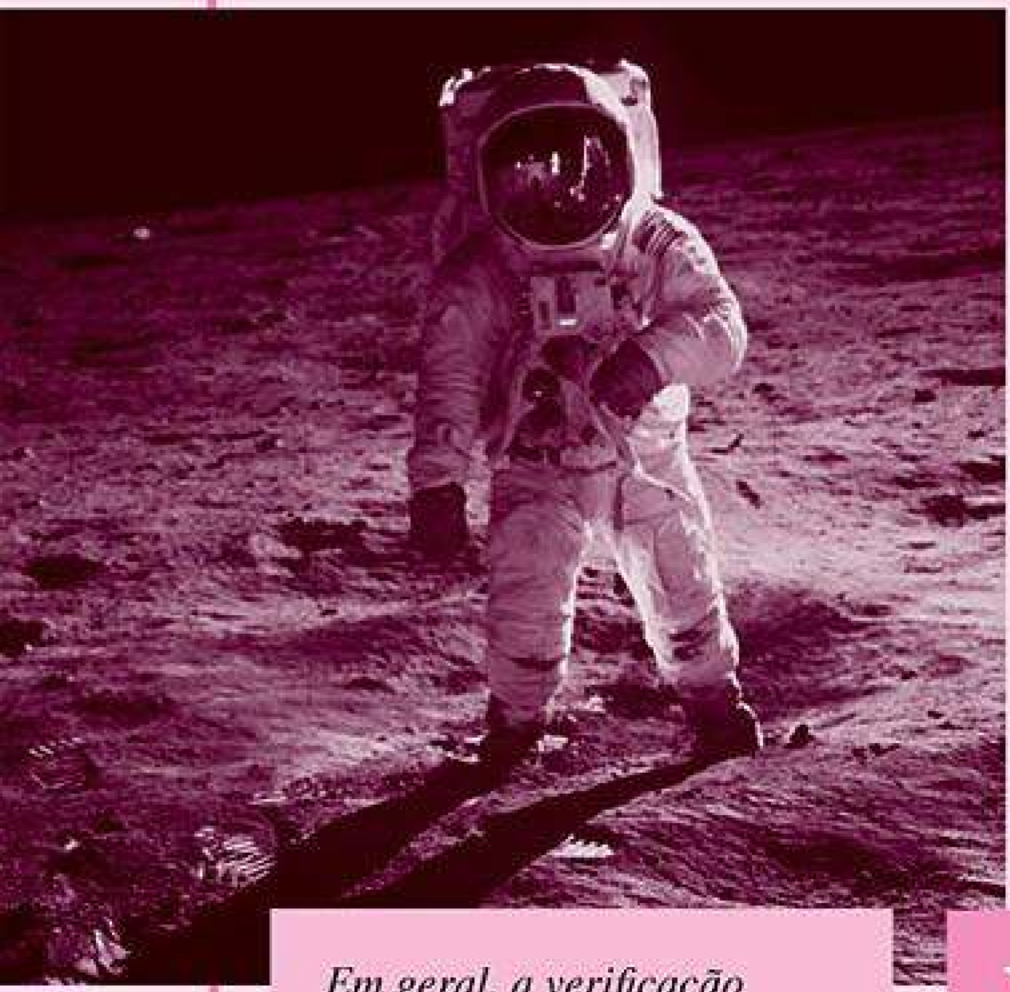
102. Resolva os problemas de valor inicial.

(a) $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x},\ y(1) = 2$

(b) $\frac{dy}{dx} = xe^{x^2},\ y(0) = 0$

103. Encontre uma função f e um número a tais que

$$2 + \int_a^x f(t)\,dt = e^{3x}$$



APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA GEOMETRIA, NAS CIÊNCIAS E NA ENGENHARIA

Em geral, a verificação experimental de uma teoria acerca de um fenômeno natural qualquer depende do resultado de uma integração.

—**J. W. Mellor**
Químico

No capítulo anterior, introduzimos a integral definida como o limite de somas de Riemann, no contexto de encontrar áreas. No entanto, as somas de Riemann e as integrais definidas têm aplicações que se estendem muito além dos problemas de área. Neste capítulo, mostraremos como as somas de Riemann e as integrais definidas surgem em problemas tais como obter o volume e a superfície de um sólido, o comprimento de uma curva plana, calcular o trabalho feito por uma força, a pressão e a força exercidas por um fluido sobre um objeto submerso, e encontrar as propriedades de cabos suspensos.

Embora esses problemas sejam diversos, todos os cálculos requeridos podem ser abordados pelo mesmo procedimento utilizado para encontrar áreas, ou seja, quebrando os cálculos em "partes pequenas", fazendo uma aproximação boa porque a parte é pequena, somando as aproximações das partes e obtendo uma soma de Riemann que aproxime a quantidade toda a ser calculada, para então tomar o limite da soma de Riemann e obter um resultado exato.

Foto: ***O Cálculo é essencial nas contas que devem ser feitas para pousar um astronauta na Lua.***

7.1 ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

No capítulo anterior mostramos como encontrar a área entre uma curva $y = f(x)$ e um intervalo no eixo x. Aqui, vamos mostrar como encontrar a área entre duas curvas.

UMA REVISÃO DE SOMAS DE RIEMANN

Antes de considerar o problema de encontrar a área entre duas curvas, é conveniente rever os princípios básicos do cálculo de área como uma integral definida. Lembre que, se f for contínua e não-negativa em $[a, b]$, então a integral definida para a área A, abaixo de $y = f(x)$ e acima do intervalo fechado $[a, b]$, é obtida em quatro passos (Figura 7.1.1):

- Dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e usá-los para dividir a região sob a curva $y = f(x)$ em n faixas.
- Supondo ser Δx_k a largura da k-ésima faixa, aproximar a área daquela faixa pela área $f(x_k^*)\Delta x_k$ de um retângulo com largura Δx_k e altura $f(x_k^*)$, onde x_k^* é um ponto do k-ésimo intervalo.

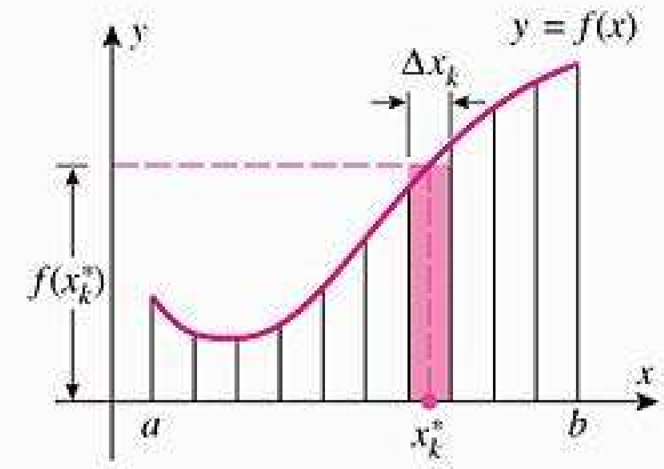


Figura 7.1.1

- Somar as áreas aproximadas das faixas para aproximar toda a área A pela soma de Riemann:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

- Tomar o limite das somas de Riemann, quando o número de subintervalos crescer e suas amplitudes tenderem a zero. Isso faz com que o erro na aproximação tenda a zero e produza a seguinte integral definida para a área exata A:

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

A Figura 7.1.2 ilustra o efeito do processo de tomar o limite sobre as várias partes da soma de Riemann:

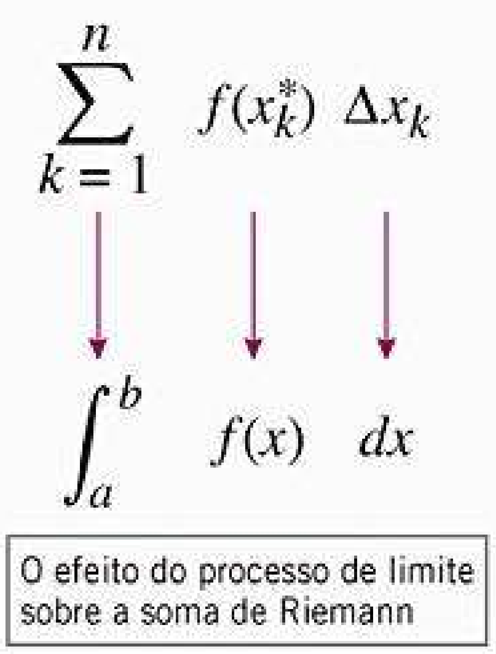


Figura 7.1.2

- A quantidade x_k^* na soma de Riemann torna-se a variável x na integral definida.
- O comprimento de intervalo Δx_k na soma de Riemann torna-se o dx na integral definida.
- O intervalo $[a, b]$, que é a união dos subintervalos de comprimentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ não aparece explicitamente na soma de Riemann, mas é representado pelos limites de integração inferior e superior na integral definida.

■ ÁREA ENTRE $y = f(x)$ E $y = g(x)$

Vamos considerar, agora, a seguinte extensão do problema da área.

7.1.1 PRIMEIRO PROBLEMA DE ÁREA Suponha que f e g sejam funções contínuas em um interalo $[a, b]$ e

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

[Isso significa que a curva $y = f(x)$ está acima da curva $y = g(x)$ e que as duas podem se tocar, mas não se cruzam.] Encontre a área A da região delimitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 7.1.3a).

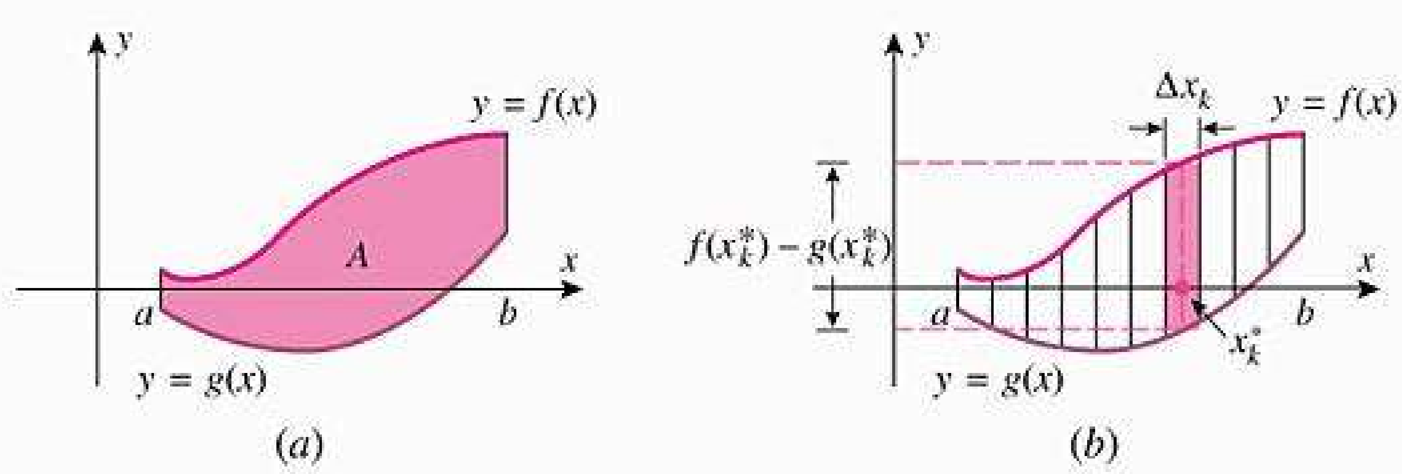


Figura 7.1.3

Para resolver esse problema, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, o que tem o efeito de subdividir a região em n faixas (Figura 7.1.3b). Supondo que a largura da k-ésima faixa seja Δx_k, então a área da faixa pode ser aproximada pela do retângulo com a mesma largura e altura $f(x_k^*) - g(x_k^*)$, onde x_k^* é um ponto qualquer do k-ésimo subintervalo. Somando essas aproximações, a soma de Riemann a seguir aproxima a área A:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k$$

Tomando o limite quando n crescer e a largura dos subintervalos tender a zero, obtemos

a seguinte integral definida para a área entre as curvas:

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Em resumo, temos o seguinte resultado:

> **7.1.2 FÓRMULA PARA A ÁREA** Se f e g forem funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então a área da região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$, à esquerda pela reta $x = a$ e à direita pela reta $x = b$ é
>
> $$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \tag{1}$$

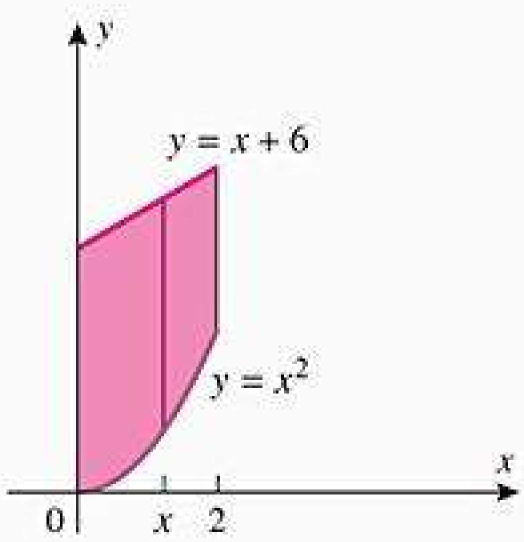


Figura 7.1.4

▶ Exemplo 1 Encontre a área da região limitada acima por $y = x + 6$, abaixo por $y = x^2$ e nas laterais por $x = 0$ e $x = 2$.

Solução A região e a secção transversal estão na Figura 7.1.4. A secção transversal se estende de $g(x) = x^2$ na base até $f(x) = x + 6$ no topo. Movendo-se a secção transversal através da região, a posição mais à esquerda será $x = 0$ e a mais à direita, $x = 2$. Assim, de (1)

$$A = \int_0^2 [(x+6) - x^2]\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{34}{3} - 0 = \frac{34}{3} \blacktriangleleft$$

> O que representa a integral em (1) quando os gráficos de f e g se entrecortam ao longo do intervalo $[a, b]$? Como deveríamos proceder, nesse caso, para encontrar a área entre as duas curvas?

É possível os contornos superior e inferior intersectarem-se em um ou em ambos os extremos; nesses casos, as laterais da região serão pontos em vez de segmentos de reta verticais (Figura 7.1.5). Quando isso ocorrer, precisamos determinar os pontos de intersecção para obter os limites de integração.

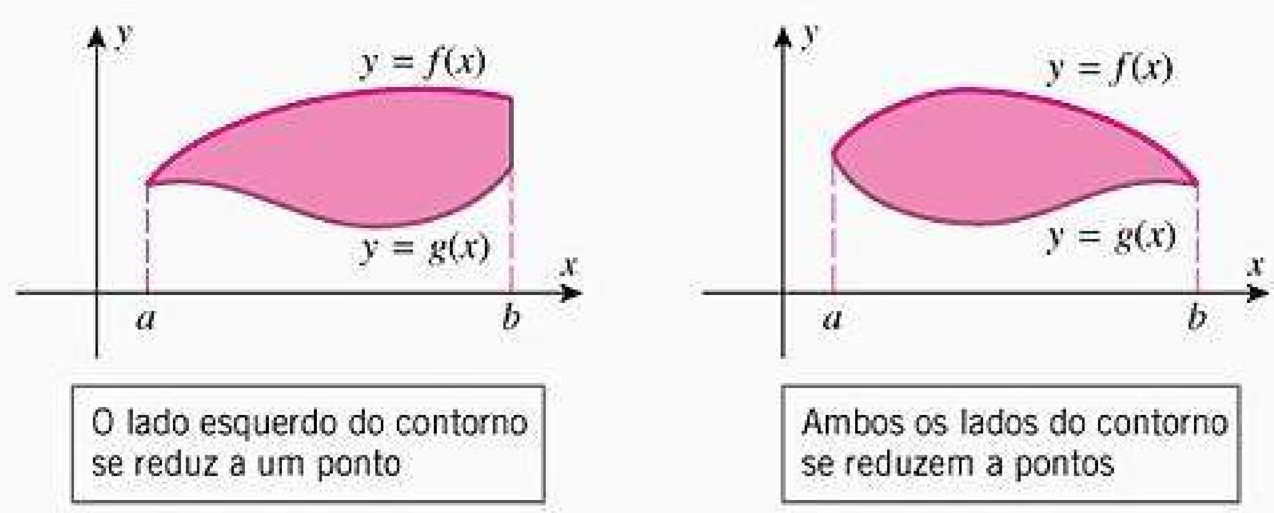


Figura 7.1.5

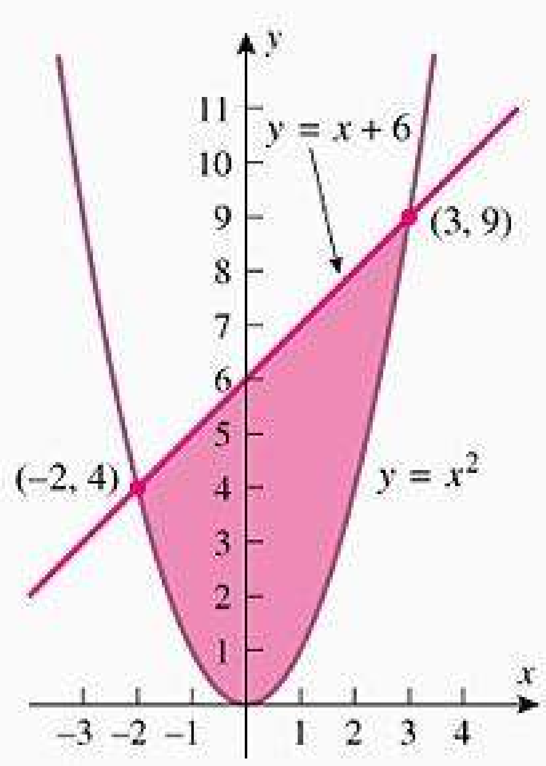


Figura 7.1.6

▶ Exemplo 2 Encontre a área da região englobada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 6$.

Solução O esboço da região (Figura 7.1.6) mostra que o contorno inferior é $y = x^2$ e o superior, $y = x + 6$. Nos extremos da região, os contornos têm as mesmas coordenadas y; assim, para encontrar os extremos, equacionamos

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x + 6 \tag{2}$$

Isso fornece

$$x^2 = x + 6 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad (x+2)(x-3) = 0$$

a partir do que obtemos

$$x = -2 \quad \text{e} \quad x = 3$$

Embora as coordenadas y dos extremos não sejam essenciais à nossa solução, elas podem ser obtidas a partir de (2) substituindo $x = -2$ e $x = 3$ em qualquer uma das equações. Disso resulta $y = 4$ e $y = 9$; logo, as intersecções superior e inferior dos contornos são $(-2, 4)$ e $(3, 9)$.

A partir de (1), com $f(x) = x + 6$, $g(x) = x^2$, $a = -2$ e $b = 3$, obtemos a área

$$A = \int_{-2}^{3} [(x+6) - x^2]\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} = \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{125}{6}$$ ◄

Caso f e g sejam *não-negativas* no intervalo $[a, b]$, a fórmula

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

estabelece que a área A entre as curvas pode ser obtida subtraindo a área abaixo de $y = g(x)$ da área abaixo de $y = f(x)$ (Figura 7.1.7).

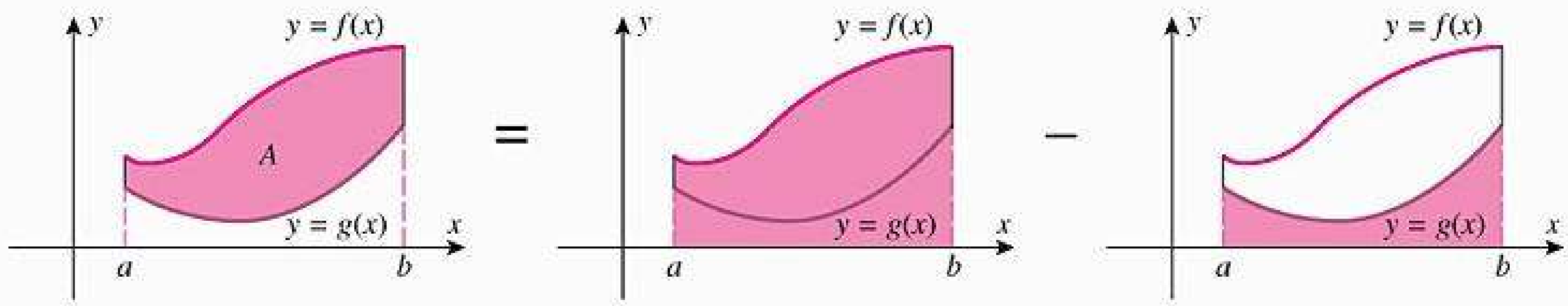


Figura 7.1.7

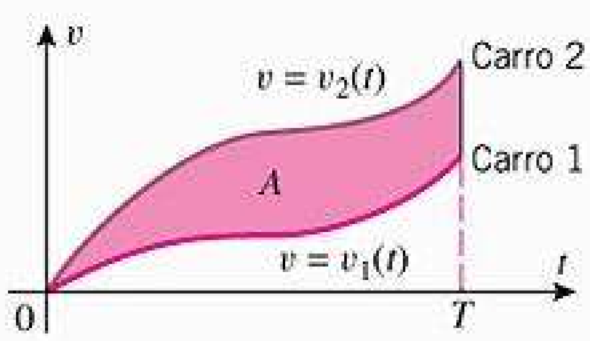


Figura 7.1.8

► Exemplo 3 A Figura 7.1.8 mostra as curvas velocidade *versus* tempo para dois carros de corrida movendo-se em uma pista reta, partindo do repouso no mesmo instante. O que representa a área A entre as curvas e acima do intervalo $0 \le t \le T$?

Solução A partir de (1)

$$A = \int_0^T [v_2(t) - v_1(t)]\,dt = \int_0^T v_2(t)\,dt - \int_0^T v_1(t)\,dt$$

Como $0 \le v_1(t) \le v_2(t)$ em $[0, T]$, segue da Fórmula (4) da Seção 6.7 que a integral de v_2 é a distância percorrida pelo carro 2 durante o intervalo de tempo, e a integral de v_1 é a distância percorrida pelo carro 1. Assim, A é a distância pelo qual o carro 2 está à frente do carro 1 no instante T. ◄

Algumas regiões podem dar algum trabalho para encontrar o integrando e os limites de integração em (1). A seguir, esboçamos um procedimento sistemático que pode ser seguido na obtenção dessa fórmula.

Não é necessário fazer um esboço exageradamente preciso no Passo 1; o único propósito desse esboço é determinar qual curva é o contorno superior e qual é o contorno inferior.

Encontrando os Limites de Integração para a Área entre Duas Curvas

Passo 1 Esboce a região e então trace um segmento de reta vertical através dela em um ponto x arbitrário do eixo x, ligando os contornos superior e inferior (Figura 7.1.9*a*).

Passo 2 A coordenada y na extremidade superior do segmento de reta esboçado no Passo 1 será $f(x)$, na inferior será $g(x)$ e o comprimento do segmento de reta será $f(x) - g(x)$. Isso é o integrando em (1).

Passo 3 Para determinar os limites de integração, imagine mover o segmento de reta para a esquerda e depois para a direita. A posição mais à esquerda em que o segmento de reta ainda intersecta a região é $x = a$, e a mais à direita é $x = b$ (Figuras 7.1.9*b* e 7.1.9*c*).

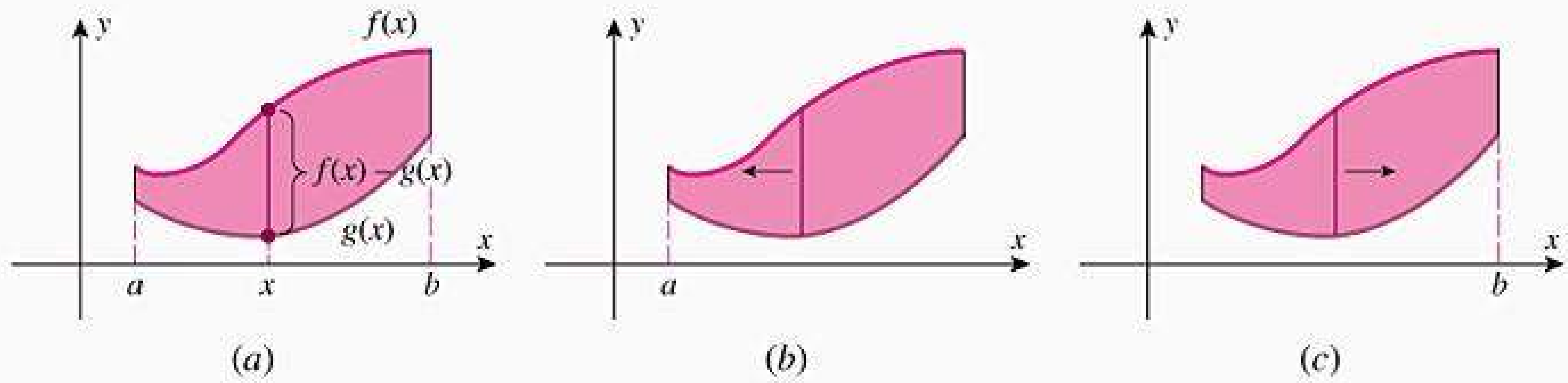


Figura 7.1.9

Há uma maneira bem conveniente de lembrar esse procedimento:

> *Olhando para o segmento de reta vertical como uma "seção transversal" da região pelo ponto x, então a Fórmula (1) afirma que a área entre as curvas é obtida integrando o comprimento da seção transversal ao longo do intervalo* $[a, b]$.

É possível que os contornos superior e inferior de uma região consistam em duas ou mais curvas, caso em que será conveniente subdividir a região em pedaços menores, e só então aplicar a Fórmula (1). Isso está ilustrado no exemplo seguinte.

► Exemplo 4 Encontre a área da região englobada por $x = y^2$ e $y = x - 2$.

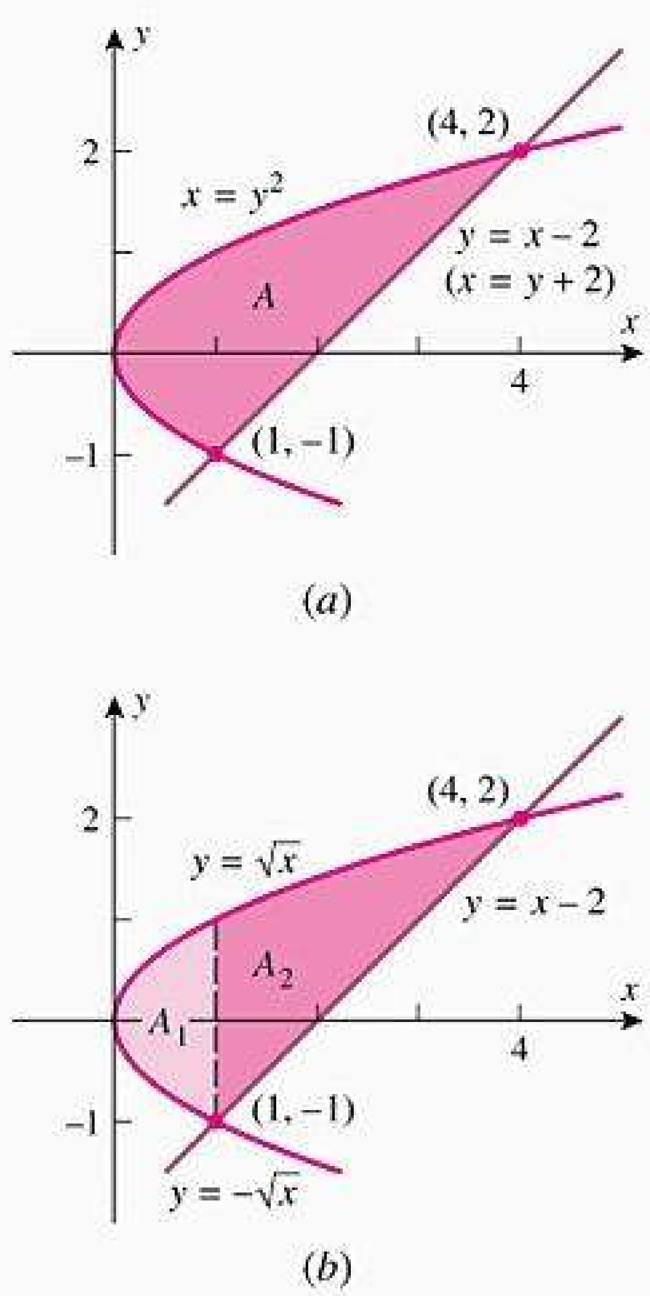


Figura 7.1.10

Solução Para determinar os contornos apropriados da região, precisamos saber onde as curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$ intersectam-se. No Exemplo 2, encontramos as intersecções equacionando as expressões para y. Aqui é mais fácil reescrever a última equação como $x = y + 2$ e então equacionar as expressões para x, ou seja:

$$x = y^2 \quad \text{e} \quad x = y + 2 \tag{3}$$

Disso resulta

$$y^2 = y + 2 \quad \text{ou} \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad (y + 1)(y - 2) = 0$$

e então obtemos $y = -1$, $y = 2$. Substituindo esses valores em qualquer das duas equações em (3), vemos que os correspondentes valores de x são $x = 1$ e $x = 4$, respectivamente, de modo que os pontos de intersecção são $(1, -1)$ e $(4, 2)$ (Figura 7.1.10*a*).

Para aplicar a Fórmula (1), devemos escrever, nas equações dos contornos, y explicitamente em função de x. O contorno superior pode ser escrito como $y = \sqrt{x}$ (reescrevendo $x = y^2$ como $y = \pm\sqrt{x}$ e escolhendo o + para a parte superior da curva). O contorno inferior consiste em duas partes:

$$y = -\sqrt{x} \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad y = x - 2 \quad \text{para} \quad 1 \le x \le 4$$

(Figura 7.1.10*b*). Por causa dessa mudança na fórmula do contorno inferior, é necessário dividir a região em duas partes e encontrar as áreas separadamente.

A partir de (1), com $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\sqrt{x}$, $a = 0$ e $b = 1$, obtemos

$$A_1 = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

A partir de (1), com $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$, $a = 1$ e $b = 4$, obtemos

$$A_2 = \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)]\,dx = \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^4 = \left(\frac{16}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{19}{6}$$

Logo, a área de toda a região é

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}$$ ◄

■ REVERTENDO OS PAPÉIS DE *x* E *y*

Às vezes, é possível evitar a divisão da região em partes integrando-se em relação a y em vez de x. Vamos mostrar agora como isso pode ser feito.

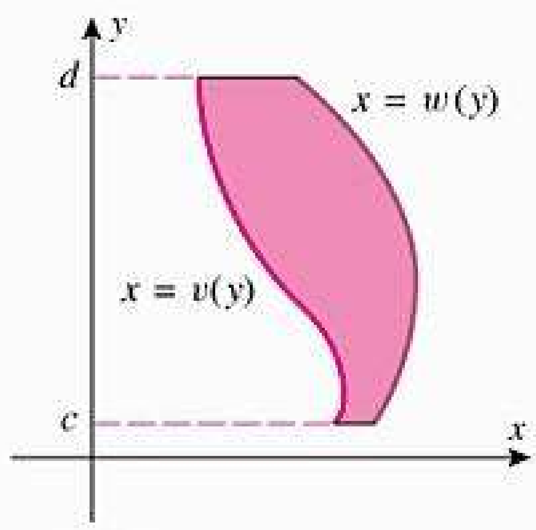


Figura 7.1.11

7.1.3 SEGUNDO PROBLEMA DE ÁREA Suponha que w e v sejam funções contínuas de y no intervalo fechado $[c, d]$ e que

$$w(y) \geq v(y) \quad \text{para} \quad c \leq y \leq d$$

[Isso significa que a curva $x = w(y)$ está à direita da curva $x = v(y)$ e que elas podem se tocar mas não se cruzam.] Encontre a área A da região limitada à esquerda por $x = v(y)$, à direita por $x = w(y)$ e acima e abaixo pelas retas $y = d$ e $y = c$, respectivamente (Figura 7.1.11).

Procedendo-se como na dedução de (1), mas com os papéis de x e y trocados, somos levados à seguinte analogia de 7.1.2.

7.1.4 FÓRMULA PARA A ÁREA Se w e v forem funções contínuas e $w(y) \geq v(y)$ para todo y em $[c, d]$, então a área da região limitada à esquerda por $x = v(y)$, à direita por $x = w(y)$, acima por $y = d$ e abaixo por $y = c$ é

$$A = \int_c^d [w(y) - v(y)]\, dy \tag{4}$$

O princípio que norteia a aplicação dessa fórmula é o mesmo que em (1): o integrando em (4) pode ser visto como o comprimento de uma seção transversal horizontal em um ponto arbitrário do eixo y, caso em que a Fórmula (4) afirma que a área pode ser encontrada integrando-se o comprimento da seção transversal horizontal acima do intervalo $[c, d]$ no eixo y (Figura 7.1.12).

No Exemplo 4, dividimos a região em duas partes para facilitar a integração em relação a x. No exemplo seguinte, veremos que é possível evitar a divisão da região integrando em relação a y.

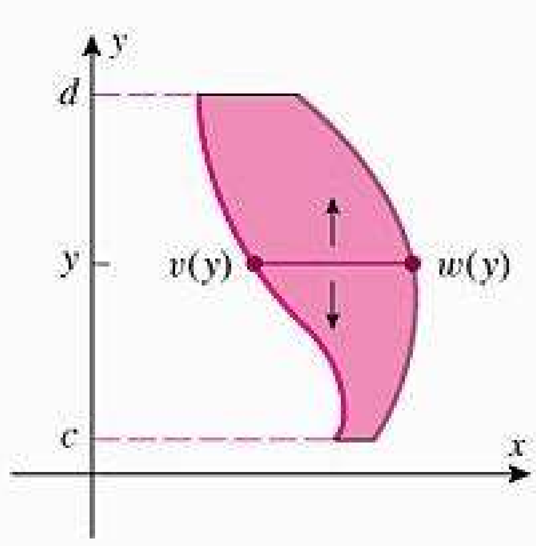


Figura 7.1.12

A escolha entre as Fórmulas (1) e (4) é, geralmente, ditada pela forma da região e pela fórmula que requer a menor quantidade de subdivisões. Contudo, às vezes podemos escolher a fórmula que requer mais subdivisões por ser mais fácil calcular a integral resultante.

► Exemplo 5 Encontre a área da região englobada pelas curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$, integrando em relação a y.

Solução A partir da Figura 7.1.10, vemos que o contorno esquerdo é $x = y^2$, o direito é $y = x - 2$ e a região se estende acima do intervalo $-1 \leq y \leq 2$. Porém, para aplicar (4), as equações dos contornos devem ser dadas explicitamente como funções de y. Assim, reescrevemos $y = x - 2$ como $x = y + 2$. Segue de (4) que

$$A = \int_{-1}^{2} [(y + 2) - y^2]\, dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

o que está de acordo com o resultado obtido no Exemplo 4. ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.1 (*Ver página 499 para respostas.*)

1. Uma expressão integral para a área da região situada entre as curvas $y = 20 - 3x^2$ e $y = e^x$ e limitada lateralmente por $x = 0$ e $x = 2$ é __________. O valor dessa integral é __________.

2. Uma expressão integral para a área do paralelogramo delimitado por $y = 2x + 8$, $y = 2x - 3$, $x = -1$ e $x = 5$ é __________. O valor dessa integral é __________.

3. (a) Os pontos de intersecção do círculo $x^2 + y^2 = 4$ e da reta $y = x + 2$ são __________ e __________.

(b) Expressa como uma integral definida em relação a x, __________ dá a área da região dentro do círculo $x^2 + y^2 = 4$ e acima da reta $y = x + 2$.

(c) Expressa como uma integral definida em relação a y, __________ dá a área da região descrita em (b).

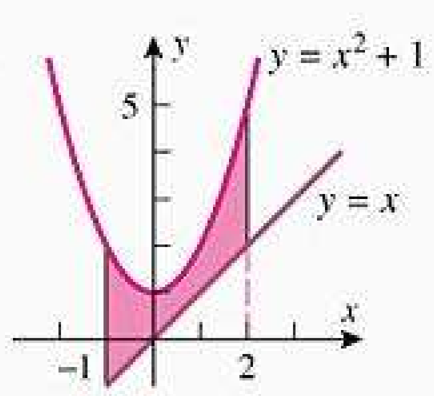
(d) Utilizando fórmulas apropriadas de Geometria, a área da região descrita em (b) é __________.

4. A área da região englobada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt[3]{x}$ é __________.

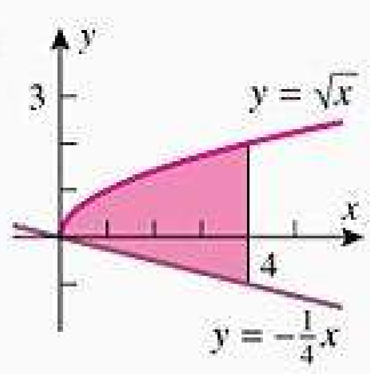
EXERCÍCIOS 7.1 Recurso Gráfico C CAS

1-4 Encontre a área da região sombreada.

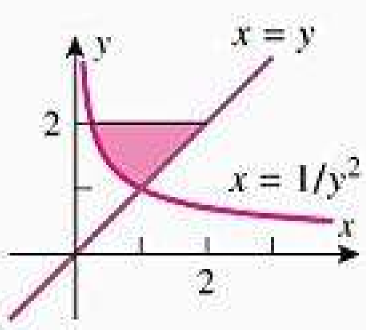
1.



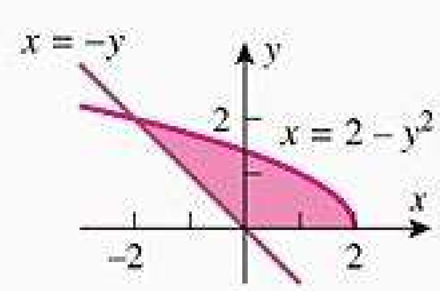
2.



3.



4.



5. Encontre a área da região englobada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x$ integrando

(a) em relação a x (b) em relação a y

6. Encontre a área da região englobada pelas curvas $y^2 = 4x$ e $y = 2x - 4$ integrando

(a) em relação a x (b) em relação a y

7-18 Esboce a região englobada pelas curvas e encontre a área.

7. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$

8. $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

9. $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = \pi/4$, $x = \pi/2$

10. $y = \sec^2 x$, $y = 2$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$

11. $x = \operatorname{sen} y$, $x = 0$, $y = \pi/4$, $y = 3\pi/4$

12. $x^2 = y$, $x = y - 2$

13. $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 0$, $x = \ln 2$

14. $x = 1/y$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e$

15. $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$, $y = |x|$

16. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y = 2$

17. $y = 2 + |x - 1|$, $y = -\frac{1}{5}x + 7$

18. $y = x$, $y = 4x$, $y = -x + 2$

19-26 Use um recurso gráfico computacional, quando necessário, para encontrar a área da região englobada pelas curvas.

19. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$, $y = 0$

20. $y = x^3 - 2x^2$, $y = 2x^2 - 3x$

21. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$

22. $y = x^3 - 4x$, $y = 0$

23. $x = y^3 - y$, $x = 0$

24. $x = y^3 - 4y^2 + 3y$, $x = y^2 - y$

25. $y = xe^{x^2}$, $y = 2|x|$

26. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}$, $y = \dfrac{3}{x}$

27. Dê uma estimativa para o valor de k $(0 < k < 1)$, tal que a região englobada por $y = 1/\sqrt{1 - x^2}$, $y = x$, $x = 0$ e $x = k$ tenha uma área de 1 unidade.

28. Dê uma estimativa para a área da região do primeiro quadrante englobada por $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

C 29. Use um CAS para encontrar a área englobada pelas curvas $y = 3 - 2x$ e $y = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^2$.

C 30. Use um CAS para encontrar a área exata englobada pelas curvas $y = x^5 - 2x^3 - 3x$ e $y = x^3$.

31. Encontre uma reta horizontal $y = k$ que divida a área englobada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 9$ em duas partes iguais.

32. Encontre uma reta vertical $x = k$ que divida a área englobada pelas curvas $x = \sqrt{y}$, $x = 2$ e $y = 0$ em duas partes iguais.

33. (a) Encontre a área da região englobada pela parábola $y = 2x - x^2$ e o eixo x.

(b) Encontre o valor de m de tal forma que a reta $y = mx$ divida a região de (a) em duas regiões de mesma área.

34. Encontre a área da região englobada pela curva $y = \text{sen } x$ e a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(5\pi/6, 1/2)$ na curva.

35-38 Use o método de Newton (Seção 5.6), quando necessário, para aproximar as coordenadas x das intersecções das curvas com pelo menos quatro casas decimais; em seguida, use isso para aproximar a área da região.

35. A região que está abaixo da curva $y = \text{sen } x$ e acima da reta $y = 0{,}2x$, sendo $x \geq 0$.

36. A região entre os gráficos de $y = x^2$ e $y = \cos x$.

37. A região englobada pelos gráficos de $y = (\ln x)/x$ e $y = x - 2$.

38. A região englobada pelos gráficos de $y = 3 - 2 \cos x$ e $y = 2/(1 + x^2)$.

39. Encontre a área da região englobada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 2 \text{ sen } x$.

C **40.** Com referência à figura abaixo, encontre o valor de k de forma que as áreas sombreadas sejam iguais.

Fonte: Este exercício é baseado no Problema A1 da 54ª Competição Matemática Anual William Lowell Putnam.

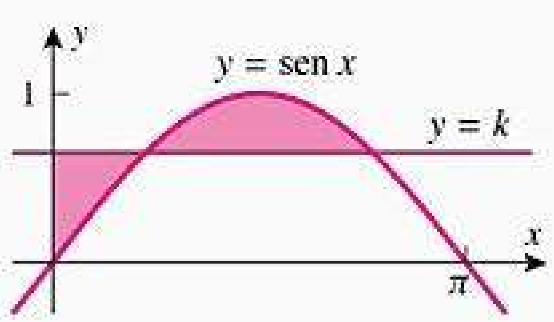


Figura Ex-40

ENFOCANDO CONCEITOS

41. Dois carros de corrida, lado a lado em uma pista reta, movem-se com funções velocidade $v_1(t)$ m/s e $v_2(t)$ m/s, respectivamente. Suponha que ambos estejam alinhados no instante $t = 60$ s. Interprete o valor da integral

$$\int_0^{60} [v_2(t) - v_1(t)]\, dt$$

nesse contexto.

42. A figura a seguir mostra as curvas aceleração *versus* tempo para dois carros movendo-se ao longo de uma pista reta, começando alinhados e acelerando a partir do repouso. O que representa a área A entre as curvas acima do intervalo $0 \leq t \leq T$? Justifique sua resposta.

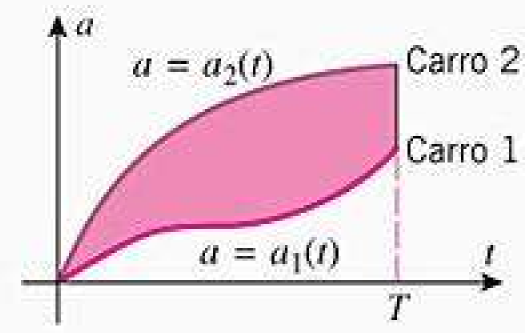


Figura Ex-42

43. Suponha que f e g sejam integráveis em $[a, b]$, mas que não sejam válidos nem $f(x) \geq g(x)$ nem $g(x) \geq f(x)$ para todo x em $[a, b]$ [isto é, as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são entrelaçadas].

(a) Qual é o significado geométrico da integral

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx?$$

(b) Qual é o significado geométrico da integral

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx?$$

44. Seja $A(n)$ a área do primeiro quadrante englobada pelas curvas $y = \sqrt[n]{x}$ e $y = x$.

(a) Considerando como varia o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ quando n cresce, faça uma conjectura sobre o limite de $A(n)$ quando $n \to +\infty$.

(b) Confirme sua conjectura calculando o limite.

45. Encontre a área da região envolvida pela curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ e os eixos coordenados.

46. Mostre que a área da elipse da figura abaixo é πab. [Sugestão: Use uma fórmula de Geometria.]

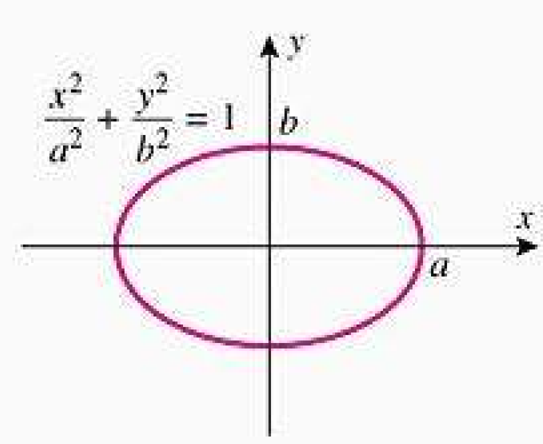


Figura Ex-46

47. Um retângulo com os lados paralelos aos eixos coordenados tem um vértice na origem e o vértice diagonalmente oposto na curva $y = kx^m$ no ponto em que $x = b$ $(b > 0, k > 0, m \geq 0)$. Mostre que a fração da área do retângulo compreendida entre a curva e o eixo x depende de m, mas não de k ou b.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.1

1. $\displaystyle\int_0^2 [(20 - 3x^2) - e^x]\, dx$; $33 - e^2$ **2.** $\displaystyle\int_{-1}^5 [(2x + 8) - (2x - 3)]\, dx$; 66 **3.** (a) $(-2, 0)$; $(0, 2)$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^0 [\sqrt{4 - x^2} - (x + 2)]\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^2 [(y - 2) + \sqrt{4 - y^2}]\, dy$ (d) $\pi - 2$ **4.** $\dfrac{5}{12}$

7.2 VOLUMES POR FATIAMENTO; DISCOS E ARRUELAS

Na seção anterior mostramos que a área de uma região plana delimitada por duas curvas pode ser obtida integrando-se o comprimento de uma seção tranversal genérica sobre um intervalo apropriado. Nesta seção veremos que o mesmo princípio básico pode ser usado para obter os volumes de certos sólidos tridimensionais.

VOLUMES POR FATIAMENTO

Lembre que o princípio básico para encontrar a área de uma região plana é dividir a região em faixas finas, aproximar a área de cada faixa pela de um retângulo, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para produzir uma integral para a área. Sob condições apropriadas, a mesma estratégia pode ser usada para encontrar o volume de um sólido. A idéia é dividir o sólido em fatias finas, aproximar o volume de cada fatia, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para produzir uma integral para o volume (Figura 7.2.1).

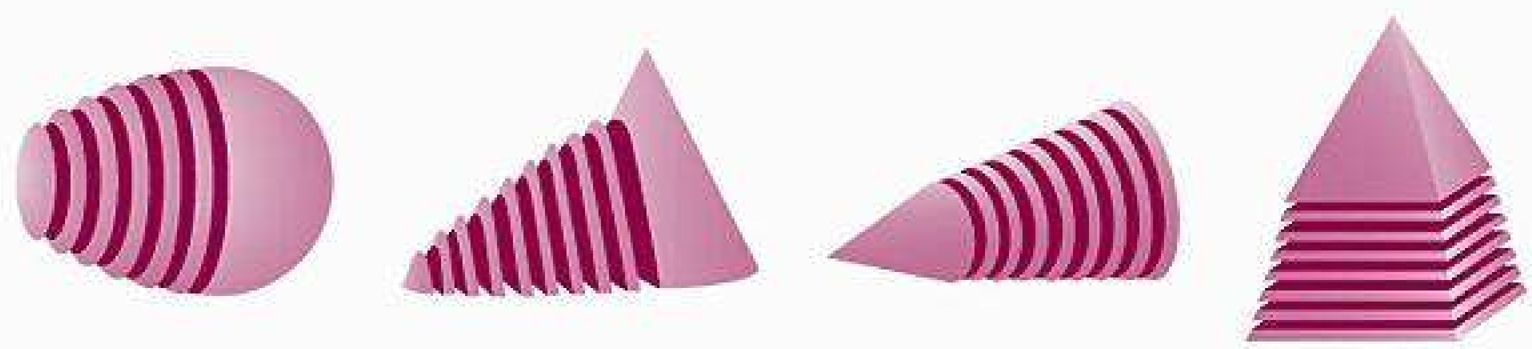
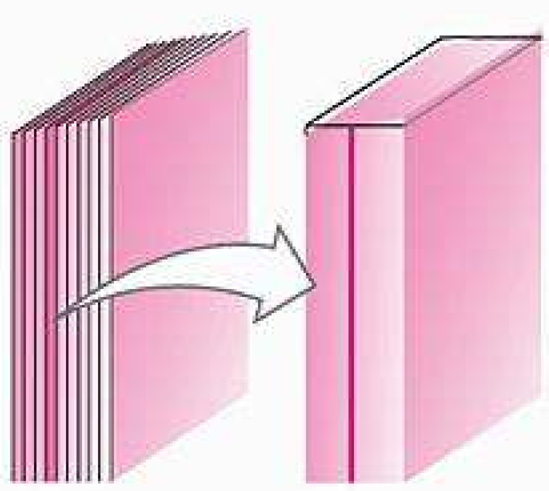


Figura 7.2.1

O que faz funcionar esse método é o fato de que uma fatia *fina* tem seções transversais que não variam muito nem em tamanho nem em forma, o que, como veremos, faz com que fique fácil aproximar seus volumes (Figura 7.2.2). Além disso, quanto mais fina a fatia, menor a variação em suas seções transversais e melhor a aproximação. Assim, uma vez aproximados os volumes das fatias, podemos formar uma soma de Riemann cujo limite é o volume de todo o sólido. Daremos brevemente os detalhes, mas primeiro precisamos discutir como encontrar o volume de um sólido cujas seções transversais não variem nem em tamanho nem em forma (isto é, são congruentes).



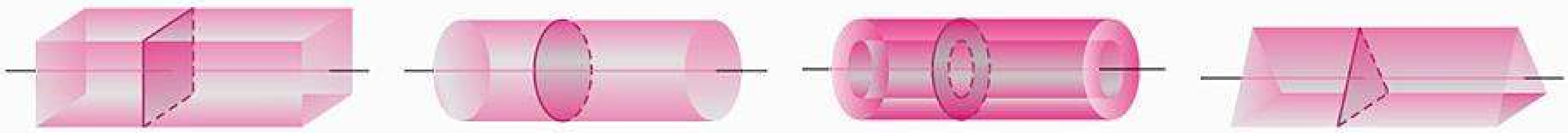
Em uma fatia fina, as seções não variam muito na forma e no tamanho

Figura 7.2.2

Um dos exemplos mais simples de um sólido com seções transversais congruentes é um cilindro circular reto de raio r, uma vez que todas as seções transversais tomadas perpendiculares ao eixo central são regiões circulares de raio r. O volume V de um cilindro circular de raio r e altura h pode ser dado em termos da altura e da área de uma seção transversal como

$$V = \pi r^2 h = [\text{área de uma seção transversal}] \times [\text{altura}] \qquad (1)$$

Esse é um caso especial de uma fórmula mais geral que se aplica a sólidos denominados cilindros retos. Um ***cilindro reto*** é um sólido que é gerado quando uma região plana é transladada ao longo de uma reta ou ***eixo*** que é perpendicular a ela (Figura 7.2.3).



Alguns cilindros retos

Figura 7.2.3

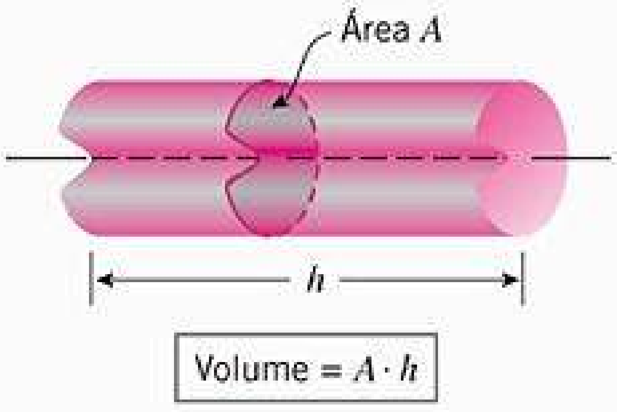


Figura 7.2.4

Se um cilindro reto for gerado pela translação de uma região de área A ao longo de uma distância h, então dizemos que h é a ***altura*** (ou a ***extensão***) do cilindro e o volume V deste é definido por

$$V = A \cdot h = [\text{área de uma seção transversal}] \times [\text{altura}] \tag{2}$$

(Figura 7.2.4). Observe que isso está de acordo com a Fórmula (1) para o volume do cilindro *circular* reto.

Agora temos todas as ferramentas necessárias à resolução do seguinte problema.

7.2.1 PROBLEMA Seja S um sólido que se estende ao longo do eixo x e que é limitado à esquerda e à direita, respectivamente, pelos planos perpendiculares ao eixo x em $x = a$ e $x = b$ (Figura 7.2.5*a*). Encontre o volume V do sólido, supondo que sua seção transversal tenha área $A(x)$, conhecida em cada ponto x do intervalo $[a, b]$.

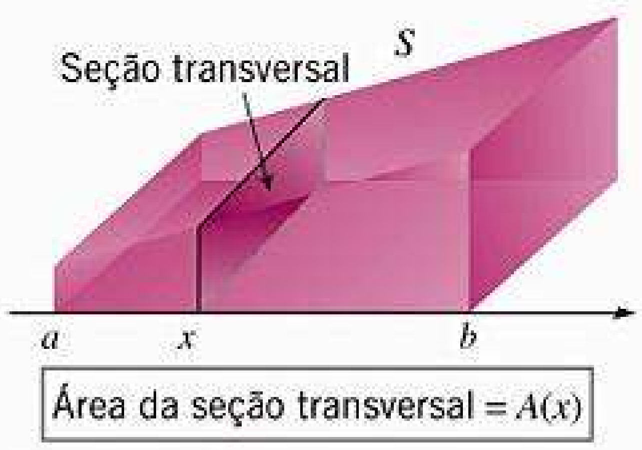


Figura 7.2.5

Para resolver esse problema, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, o que tem o efeito de dividir o sólido em n fatias, como mostra o lado esquerdo da Figura 7.2.6. Se admitimos que a extensão do k-ésimo subintervalo é Δx_k, então o volume da fatia pode ser aproximado pelo volume de um cilindro reto com extensão (altura) Δx_k e seção transversal com área $A(x_k^*)$, onde x_k^* é um ponto qualquer do k-ésimo intervalo (ver o lado direito da Figura 7.2.6).

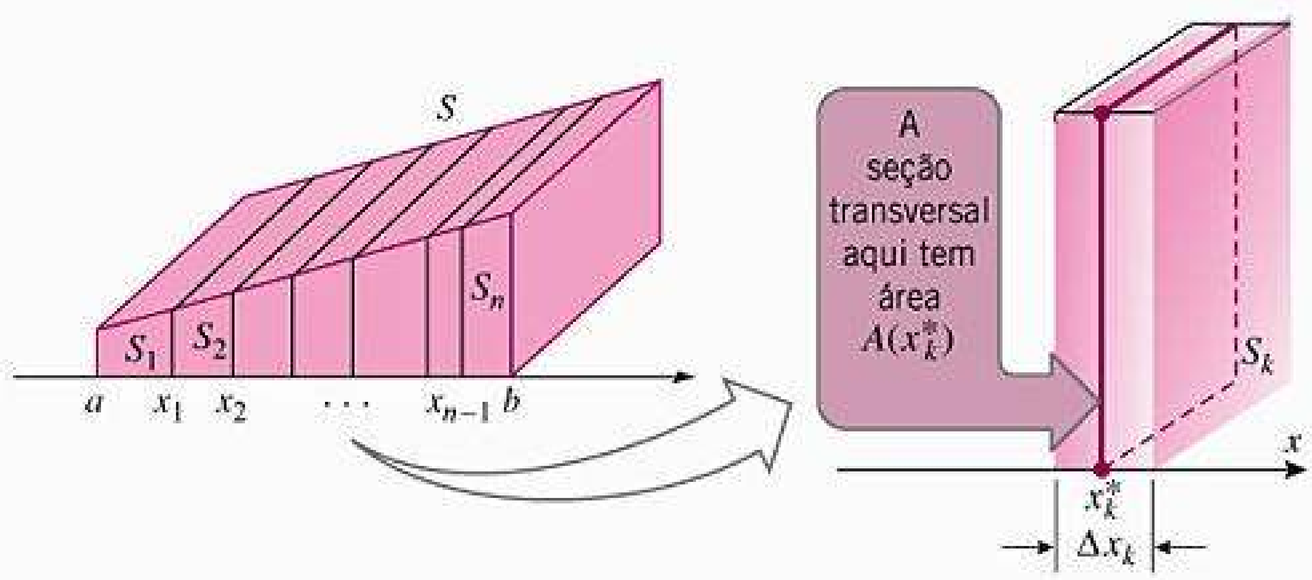


Figura 7.2.6

Somando essas aproximações, obtemos a seguinte soma de Riemann que aproxima o volume V:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k$$

Tomando o limite quando n cresce e as extensões dos subintervalos tendem a zero, obtemos a integral definida

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$$

Em suma, temos o resultado seguinte.

7.2.2 FÓRMULA PARA O VOLUME Seja S um sólido delimitado por dois planos perpendiculares ao eixo x em $x = a$ e $x = b$. Se, para cada x em $[a, b]$, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x for $A(x)$, então o volume do sólido é

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \tag{3}$$

desde que $A(x)$ seja integrável.

Há um resultado análogo se a seção transversal for perpendicular ao eixo y.

> **7.2.3 FÓRMULA PARA O VOLUME** Seja S um sólido delimitado por dois planos perpendiculares ao eixo y em $y = c$ e $y = d$. Se, para cada y em $[c, d]$, a área da seção transversal a S perpendicular ao eixo y for $A(y)$, então o volume do sólido é
>
> $$V = \int_c^d A(y)\,dy \tag{4}$$
>
> desde que $A(y)$ seja integrável.

Em palavras, essas fórmulas afirmam:

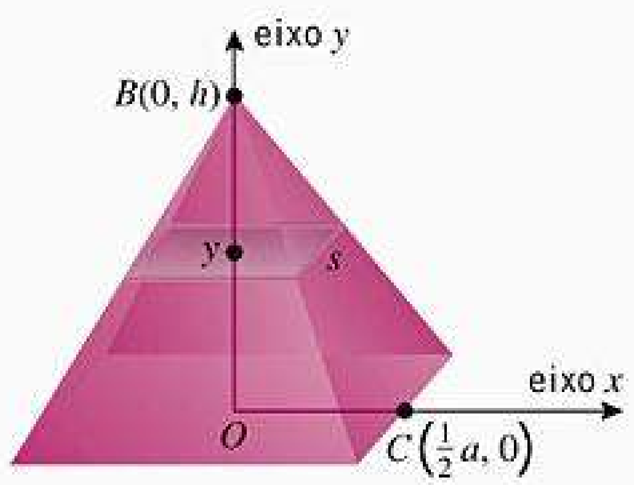
O volume de um sólido pode ser obtido integrando-se a área da seção transversal de um extremo ao outro do sólido.

► Exemplo 1 Obtenha a fórmula para o volume de uma pirâmide reta com altura h e cuja base é um quadrado com lados de comprimento a.

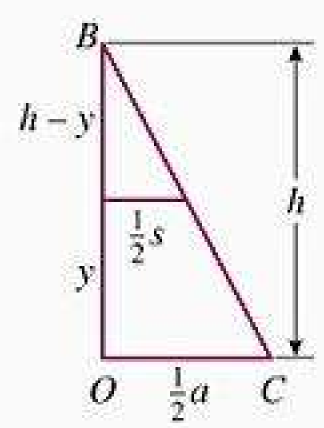
Solução Conforme ilustrado na Figura 7.2.7a, introduzimos um sistema retangular de coordenadas no qual o eixo y passa pelo ápice e é perpendicular à base, o eixo x passa pela base e é paralelo a um lado dela.

Em qualquer ponto y de $[0, h]$ sobre o eixo y, a seção transversal perpendicular ao eixo y é um quadrado. Se s for o comprimento de um lado desse quadrado, então, por semelhança de triângulos (Figura 7.2.7b), temos

$$\frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{2}a} = \frac{h-y}{h} \quad \text{ou} \quad s = \frac{a}{h}(h-y)$$



(a)



(b)

Figura 7.2.7

Assim, a área $A(y)$ da seção transversal em y é

$$A(y) = s^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2$$

e por (4) o volume é

$$V = \int_0^h A(y)\,dy = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2\,dy = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2\,dy$$

$$= \frac{a^2}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-y)^3\right]_{y=0}^{h} = \frac{a^2}{h^2}\left[0 + \frac{1}{3}h^3\right] = \frac{1}{3}a^2h$$

Isto é, o volume é $\frac{1}{3}$ da área da base vezes a altura. ◄

■ SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Um ***sólido de revolução*** é um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta que está no mesmo plano da região; a reta é denominada ***eixo de revolução***. Muitos sólidos conhecidos são desse tipo (Figura 7.2.8).

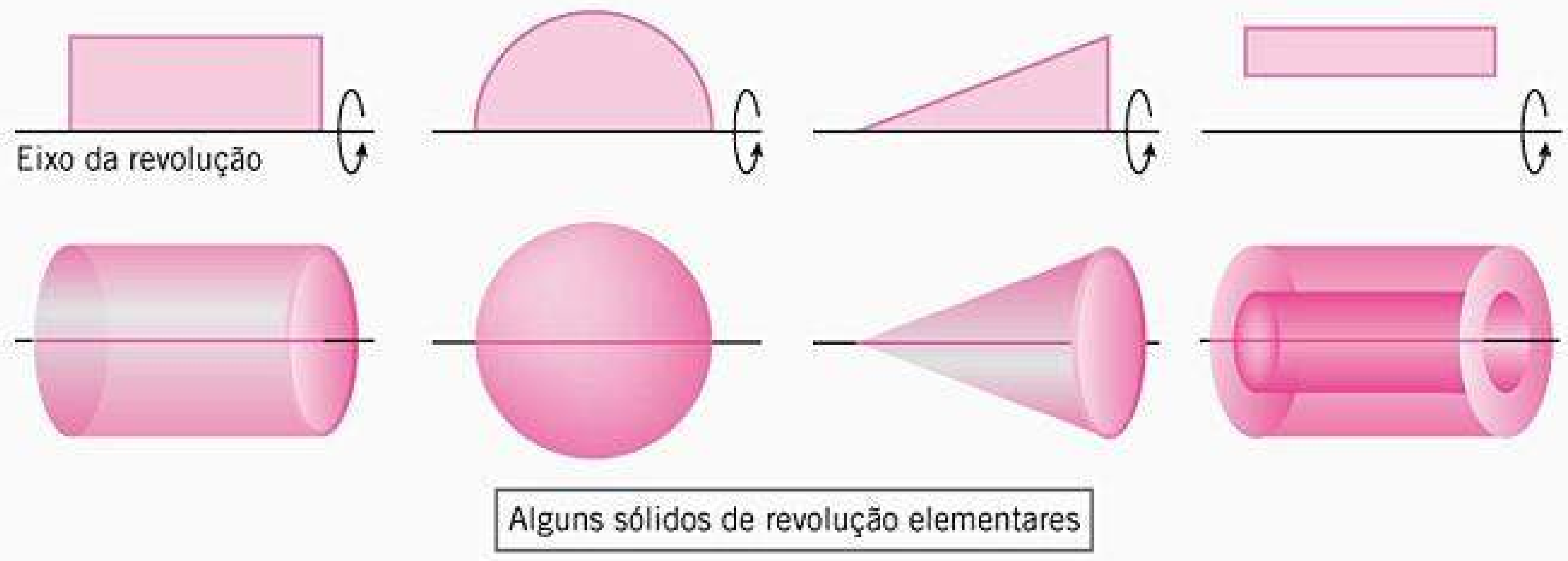


Figura 7.2.8

■ VOLUME POR DISCOS PERPENDICULARES AO EIXO x

Estaremos interessados no seguinte problema geral:

> **7.2.4 PROBLEMA** Seja f contínua e não-negativa em $[a, b]$ e seja R a região que é limitada acima por $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 7.2.9a). Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x.

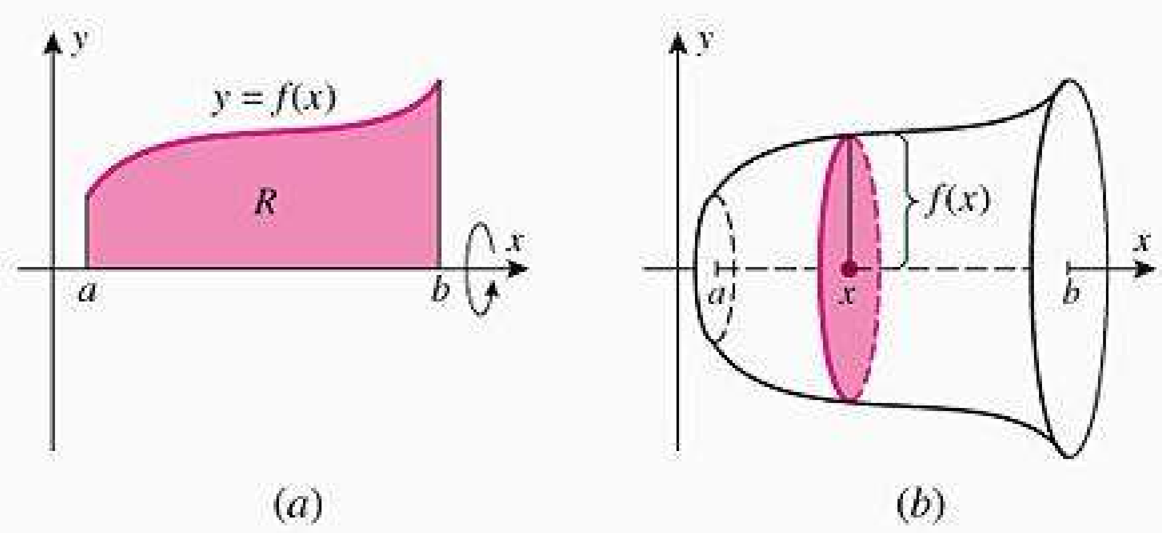


Figura 7.2.9

Podemos resolver esse problema por fatiamento. Para isso, observamos que a seção transversal do sólido tomada perpendicularmente ao eixo x no ponto x é um disco de raio $f(x)$ (Figura 7.2.9b). A área dessa região é

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

Assim, por (3), o volume de sólido é

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx \tag{5}$$

Como as secções transversais têm a forma de disco, a aplicação dessa fórmula é chamada de ***método dos discos***.

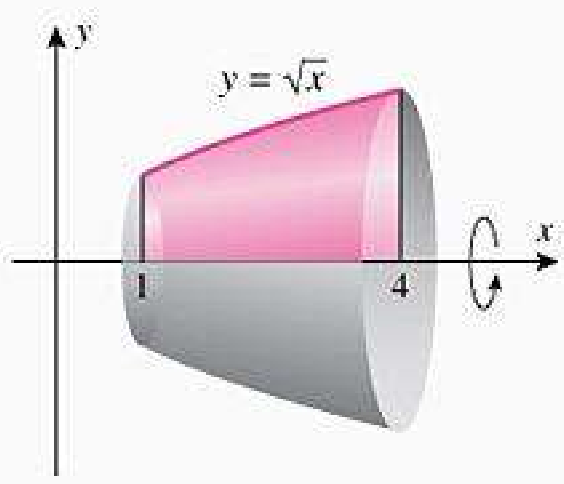


Figura 7.2.10

► Exemplo 2 Encontre o volume do sólido obtido quando a região sob a curva $y = \sqrt{x}$ e acima do intervalo $[1, 4]$ é girada em torno do eixo x (Figura 7.2.10).

Solução A partir de (5), o volume é

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx = \int_1^4 \pi x\,dx = \left.\frac{\pi x^2}{2}\right]_1^4 = 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$ ◄

► Exemplo 3 Obtenha a fórmula para o volume de uma esfera de raio r.

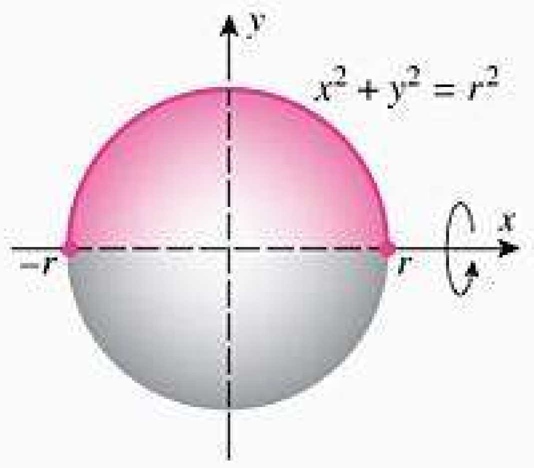


Figura 7.2.11

Solução Conforme indicado na Figura 7.2.11, uma esfera de raio r pode ser gerada girando-se o disco semicircular superior que está entre o eixo x e

$$x^2 + y^2 = r^2$$

em torno do eixo x. Como a metade superior desse círculo é o gráfico de $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, segue de (5) que o volume da esfera é:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$ ◄

■ VOLUME POR ARRUELAS PERPENDICULARES AO EIXO *x*

Nem todo sólido de revolução tem interior sólido; alguns têm buracos ou canais, os quais criam superfícies interiores como na última parte da Figura 7.2.8. Assim, estaremos interessados em problemas do tipo a seguir.

> **7.2.5 PROBLEMA** Sejam f e g contínuas e não-negativas em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região que é limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 7.2.12*a*). Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo x.

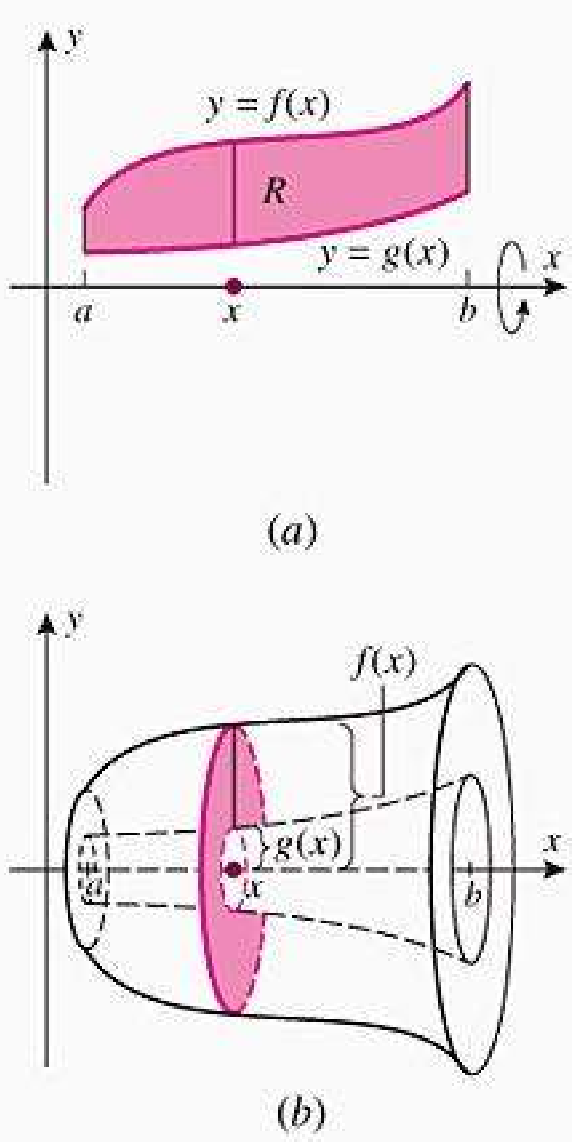


Figura 7.2.12

Podemos resolver esse problema por fatiamento. Para isso, observe que a seção transversal do sólido perpendicular ao eixo x é a região anular ou "em forma de arruela" com raio interior $g(x)$ e raio exterior $f(x)$ (Figura 7.2.12*b*); logo, sua área é

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2 = \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)$$

Assim, por (3), o volume do sólido é

$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx \tag{6}$$

Como as secções transversais têm forma de arruelas, a aplicação dessa fórmula é chamada de ***método das arruelas***.

► Exemplo 4 Encontre o volume do sólido gerado quando a região entre os gráficos das equações $f(x) = \frac{1}{2} + x^2$ e $g(x) = x$ que está acima do intervalo [0, 2] é girada em torno do eixo x (Figura 7.2.13).

Solução A partir de (6), o volume é

$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx = \int_0^2 \pi\left(\left[\tfrac{1}{2} + x^2\right]^2 - x^2\right)dx$$

$$= \int_0^2 \pi\left(\frac{1}{4} + x^4\right)dx = \pi\left[\frac{x}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{69\pi}{10}$$ ◄

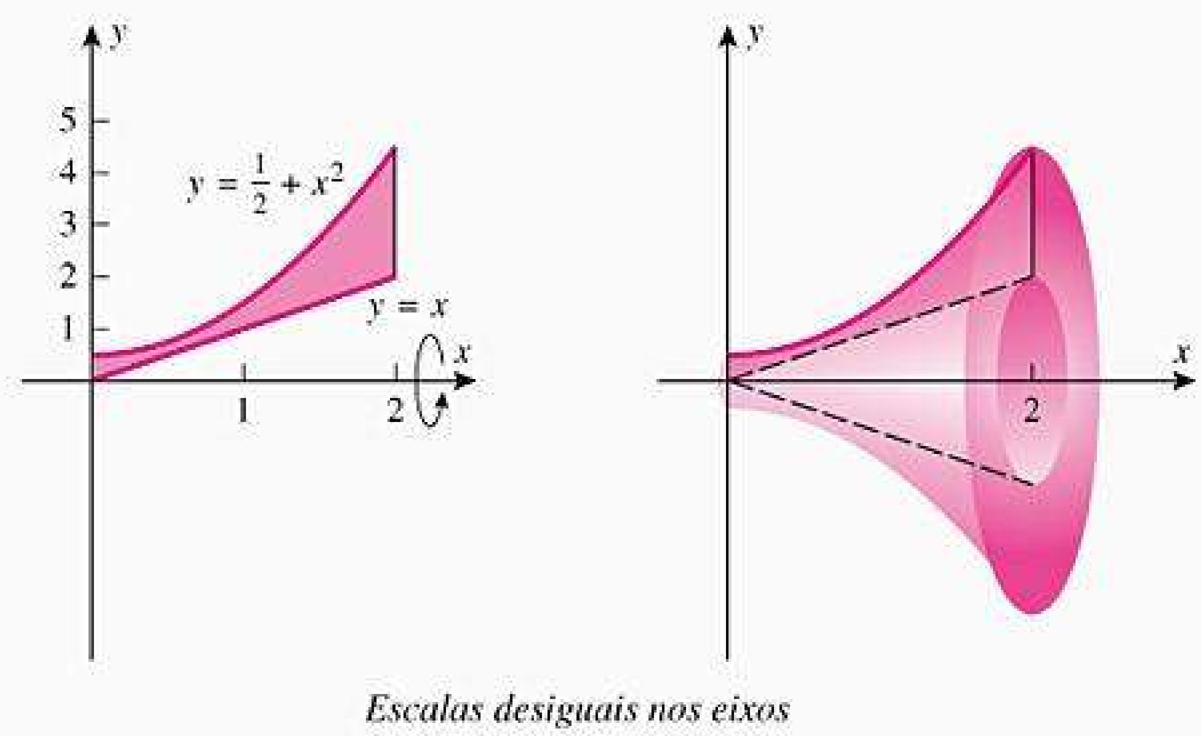


Figura 7.2.13

■ VOLUMES POR DISCOS E ARRUELAS PERPENDICULARES AO EIXO *y*

O método dos discos e das arruelas tem análogos quando as regiões são giradas em torno do eixo *y* (Figuras 7.2.14 e 7.2.15). Usando o método do fatiamento e a Fórmula (4), o leitor não deveria ter dificuldades para deduzir as seguintes fórmulas para o volume dos sólidos nas figuras.

$$V = \int_c^d \pi[u(y)]^2\,dy \quad \text{(Discos)} \qquad V = \int_c^d \pi([w(y)]^2 - [v(y)]^2)\,dy \quad \text{(Arruelas)} \tag{7-8}$$

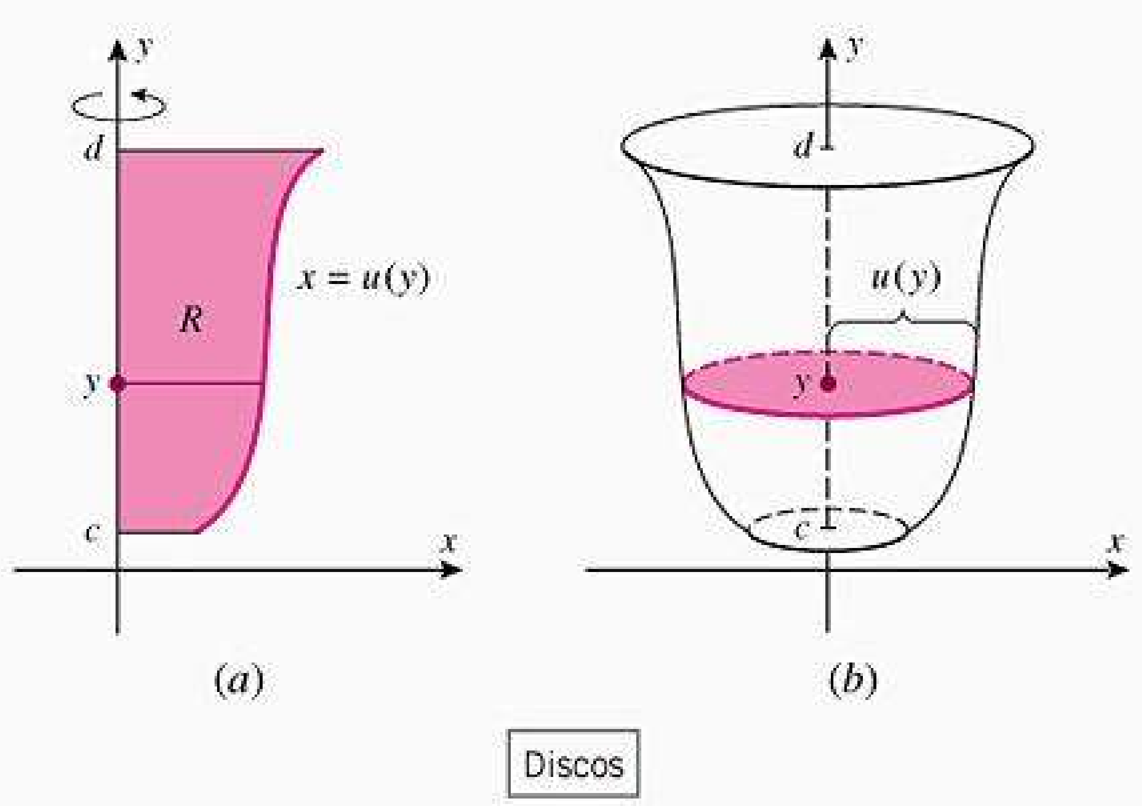


Figura 7.2.14

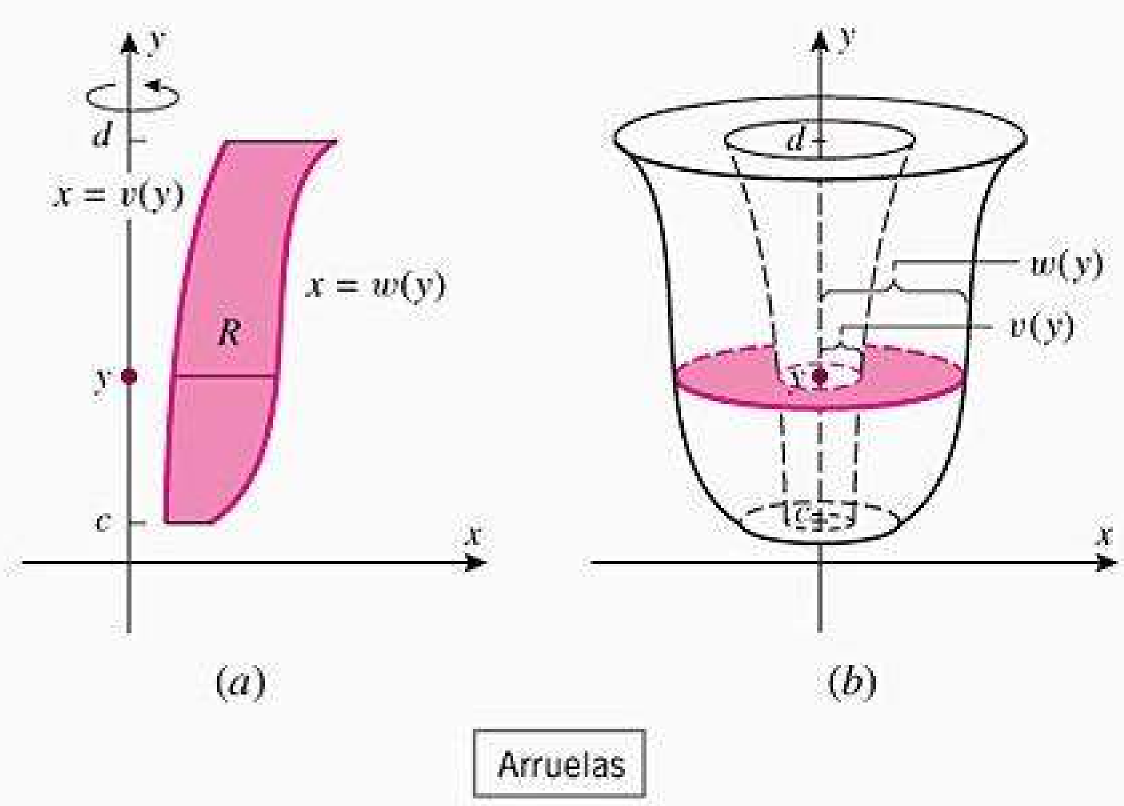


Figura 7.2.15

► Exemplo 5 Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e $x = 0$ é girada em torno do eixo *y* (Figura 7.2.16).

Solução As seções transversais perpendiculares ao eixo *y* são discos; logo, aplicaremos (7). Mas, primeiro, precisamos reescrever $y = \sqrt{x}$ como $x = y^2$. Assim, a partir de (7), com $u(y) = y^2$, o volume é

$$V = \int_c^d \pi[u(y)]^2\,dy = \int_0^2 \pi y^4\,dy = \left.\frac{\pi y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5} \quad ◄$$

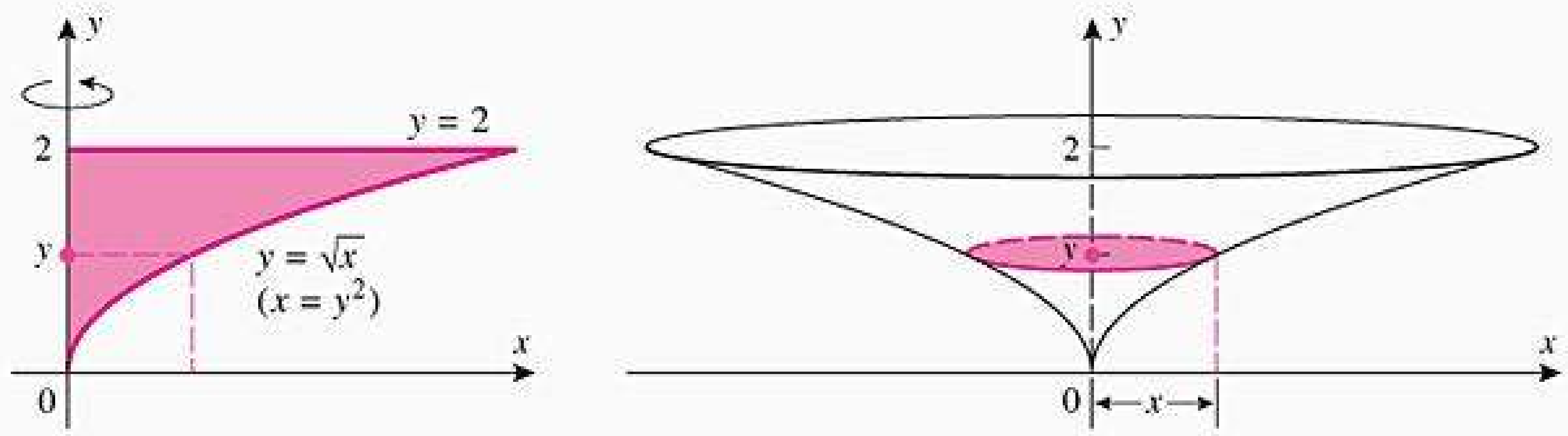


Figura 7.2.16

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.2 (*Ver página 459 para respostas.*)

1. Um sólido S se estende ao longo do eixo x de $x = 1$ até $x = 3$. Para x entre 1 e 3, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x é $3x^2$. Uma expressão integral para o volume de S é __________. O valor dessa integral é __________.

2. Um sólido S é gerado fazendo girar em torno do eixo x a região delimitada pelo eixo x e a curva $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ $(0 \leq x \leq \pi)$.

(a) Para x entre 0 e π, a área da seção transversal de S em x, perpendicular ao eixo x, é $A(x) =$ __________.

(b) Uma expressão integral para o volume de S é __________.

(c) O valor da integral em (b) é __________.

3. Um sólido S é gerado fazendo girar em torno do eixo x a região delimitada pela reta $y = 2x + 1$ e a curva $y = x^2 + 1$.

(a) Para x entre __________ e __________, a área da seção transversal de S em x, perpendicular ao eixo x, é $A(x) =$ __________.

(b) Uma expressão integral para o volume de S é __________.

(c) O valor da integral em (b) é __________.

4. Um sólido S é gerado fazendo girar em torno do eixo y a região delimitada pela reta $y = x + 1$ e a curva $y = x^2 + 1$.

(a) Para y entre __________ e __________, a área da seção transversal de S em y, perpendicular ao eixo y, é $A(y) =$ __________.

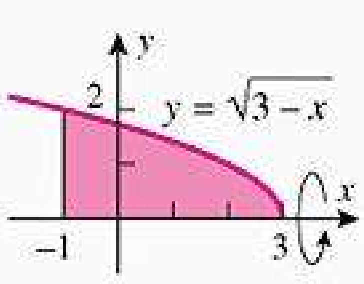
(b) Uma expressão integral para o volume de S é __________.

(c) O valor da integral em (b) é __________.

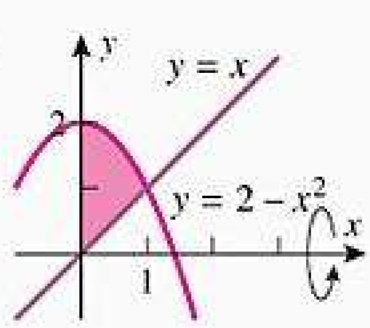
EXERCÍCIOS 7.2 [C] CAS

1-4 Encontre o volume do sólido que resulta quando a região sombreada gira em torno do eixo indicado.

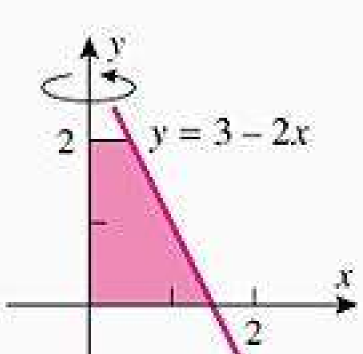
1.



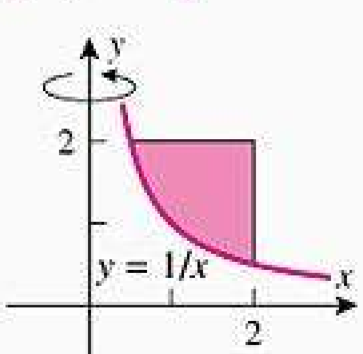
2.



3.



4.



5. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $y = x^2$ e o eixo x de $x = 0$ até $x = 2$ e cujas seções transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo x, são quadrados.

6. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $y = \sec x$ e o eixo x de $x = \pi/4$ até $x = \pi/3$ e cujas seções transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo x, são quadrados.

7-16 Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada pelas curvas dadas gira em torno do eixo x.

7. $y = \sqrt{\cos x}$, $x = \pi/4$, $x = \pi/2$, $y = 0$

8. $y = x^2$, $y = x^3$

9. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 3$

10. $y = 9 - x^2$, $y = 0$

11. $x = \sqrt{y}$, $x = y/4$

12. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$.
[*Sugestão*: Use a identidade $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.]

13. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 3$

14. $y = e^{-2x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

15. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$, $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$

16. $y = \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1 + e^{6x}}}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

17. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $y = x^3$ e o eixo y de $y = 0$ até $y = 1$ e cujas seções

transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo y, são quadrados.

18. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $x = 1 - y^2$ e o eixo y e cujas seções transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo y, são quadrados.

19-26 Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada pelas curvas dadas gira em torno do eixo y.

19. $x = \sqrt{1+y}, x = 0, y = 3$

20. $y = x^2 - 1, x = 2, y = 0$

21. $x = \operatorname{cossec} y, y = \pi/4, y = 3\pi/4, x = 0$

22. $y = x^2, x = y^2$

23. $x = y^2, x = y + 2$

24. $x = 1 - y^2, x = 2 + y^2, y = -1, y = 1$

25. $y = \ln x, x = 0, y = 0, y = 1$

26. $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2}}\quad (x > 0), x = 0, y = 0, y = 2$

27. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região acima do eixo x e abaixo da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

gira em torno do eixo x.

28. Seja V o volume do sólido que resulta quando a região delimitada por $y = 1/x, y = 0, x = 2$ e $x = b$ $(0 < b < 2)$ gira em torno do eixo x. Encontre o valor de b para o qual $V = 3$.

29. Encontre o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{2x}$ e $y = 0$ gira em torno do eixo x. [*Sugestão*: Divida o sólido em duas partes.]

30. Encontre o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ e $y = 0$ gira em torno do eixo x. [*Sugestão*: Divida o sólido em duas partes.]

ENFOCANDO CONCEITOS

31. Suponha que f seja uma função contínua em $[a, b]$ e seja R a região delimitada pela curva $y = f(x)$ e a reta $y = k$ de $x = a$ até $x = b$. Usando o método dos discos, deduza e explique uma fórmula para o volume do sólido que resulta quando a região R é feita girar em torno da reta $y = k$. Enuncie e explique as hipóteses adicionais sobre f, se as houver, que são necessárias para a validade da fórmula obtida.

32. Suponha que v e w sejam funções contínuas em $[c, d]$ e seja R a região delimitada pelas curvas $x = v(y)$ e $x = w(y)$ de $y = c$ até $y = d$. Usando o método das arruelas, deduza e explique uma fórmula para o volume do sólido que resulta quando a região R é feita girar em torno da reta $x = k$. Enuncie e explique as hipóteses adicionais sobre v e w, se as houver, que são necessárias para a validade da fórmula obtida.

33. Considere o sólido que resulta quando a região sombreada do Exercício 1 gira em torno da reta $y = 2$.

(a) Faça uma conjectura sobre qual é maior: o volume desse sólido ou o volume do sólido do Exercício 1. Explique seu raciocínio.

(b) Confira sua conjectura calculando esse volume e comparando-o com o volume obtido no Exercício 1.

34. Considere o sólido que resulta quando a região sombreada do Exercício 4 gira em torno da reta $x = 2{,}5$.

(a) Faça uma conjectura sobre qual é maior: o volume desse sólido ou o volume do sólido do Exercício 4. Explique seu raciocínio.

(b) Confira sua conjectura calculando esse volume e comparando-o com o volume obtido no Exercício 4.

35. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 9$ gira em torno da reta $x = 9$.

36. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região do Exercício 35 gira em torno da reta $y = 3$.

37. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região delimitada por $x = y^2$ e $x = y$ gira em torno da reta $y = -1$.

38. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região do Exercício 37 gira em torno da reta $x = -1$.

39. A ponta cônica de reentrada de um veículo espacial é desenhada de tal forma que uma seção transversal tomada x pés da ponta e perpendicular ao eixo de simetria é um círculo com raio de $\frac{1}{4}x^2$ pés. Encontre o volume da ponta cônica sabendo que seu comprimento é de 20 pés.

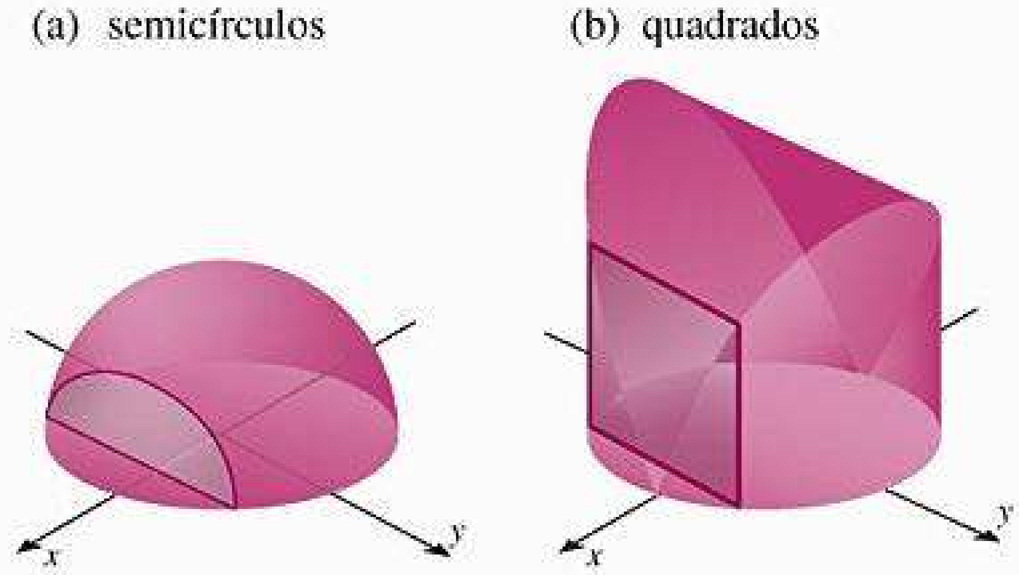
40. Um certo sólido tem uma altura de 1 m e uma seção transversal, tomada x metros acima da base do sólido, é uma região anular de raio interno x^2 m e raio externo $\sqrt{x}$ m. Encontre o volume do sólido.

41. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

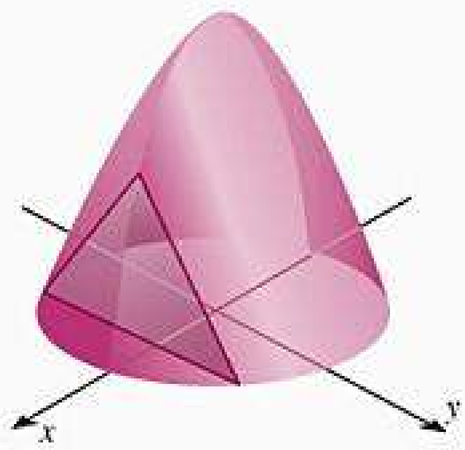
42. A base de um certo sólido é a região delimitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 4$. Cada seção transversal perpendicular ao eixo x é um semicírculo, com diâmetro de um lado a outro da base. Encontre o volume do sólido.

43. Nas partes (a) a (c), encontre o volume do sólido cuja base é o interior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ e cujas seções transversais tomadas perpendicularmente à base são

(a) semicírculos (b) quadrados



(c) triângulos equiláteros



44. Conforme a figura abaixo, a cúpula de uma catedral foi projetada com três suportes semicirculares de raio r, de modo que cada seção transversal horizontal é um hexágono regular. Mostre que o volume dessa cúpula é $r^3\sqrt{3}$.

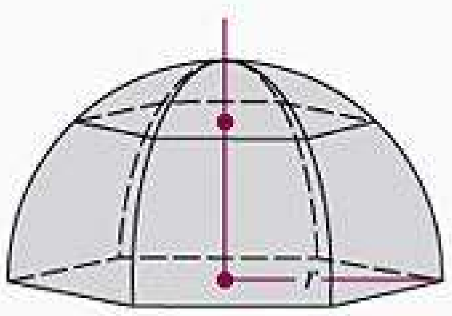


Figura Ex-44

45-48 Use um CAS para estimar o volume do sólido que resulta quando a região delimitada pelas curvas gira em torno dos eixos indicados.

C **45.** $y = \text{sen}^8 x$, $y = 2x/\pi$, $x = 0$, $x = \pi/2$; eixo x

C **46.** $y = \pi^2 \text{ sen } x \cos^3 x$, $y = 4x^2$, $x = 0$, $x = \pi/4$; eixo x

C **47.** $y = e^x$, $x = 1$, $y = 1$; eixo y

C **48.** $y = x\sqrt{\text{arc tg } x}$, $y = x$; eixo x

49. A figura abaixo mostra uma ***calota esférica*** de raio ρ e altura h cortada de uma esfera de raio r. Mostre que o volume V da calota pode ser expresso como

(a) $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ (b) $V = \frac{1}{6}\pi h(3\rho^2 + h^2)$

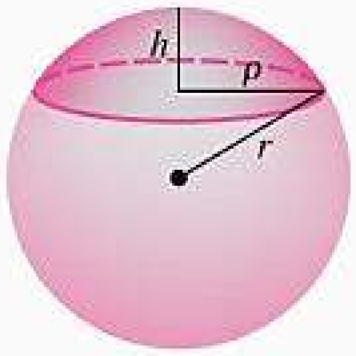


Figura Ex-49

50. Se um fluido entra em um tanque semi-esférico com raio de 3 m, a uma taxa de 0,5 m^3/min, com que velocidade estará subindo quando a profundidade for de 1,5 m? [*Sugestão*: Veja o Exercício 49.]

51. A figura a seguir mostra as dimensões de uma pequena lâmpada em 10 pontos igualmente espaçados.

(a) Use fórmulas de Geometria para fazer uma primeira estimativa do volume englobado pela parte de vidro da lâmpada.

(b) Use a aproximação das médias nos pontos extremos à esquerda e à direita para aproximar o volume.

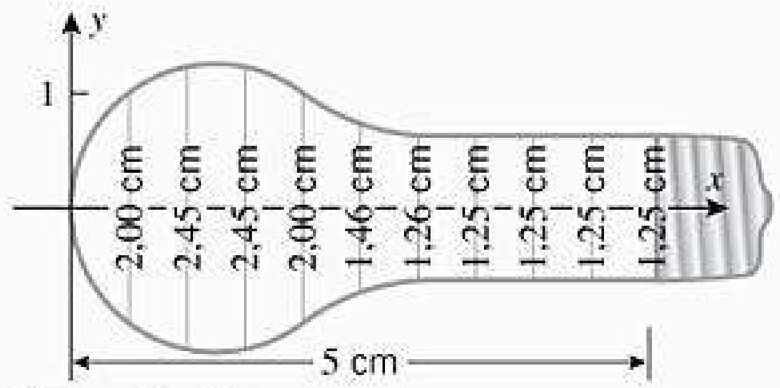


Figura Ex-51

52. Use o resultado do Exercíco 49 para encontrar o volume do sólido que sobra quando um buraco de raio $r/2$ é feito através do centro de uma esfera de raio r e verifique sua resposta por integração.

53. Conforme a figura abaixo, um copo de coquetel com a forma de um hemisfério com diâmetro de 8 cm contém uma cereja com 2 cm de diâmetro. Se o copo for preenchido até uma profundidade de h cm, que volume de líquido ele conterá? [*Sugestão*: Considere primeiro o caso em que a cereja está parcialmente submersa e, depois, quando ela está totalmente submersa.]



Figura Ex-53

54. Encontre o volume do toro que resulta quando a região interior ao círculo de raio r com centro em um ponto $(h, 0)$, $h > r$, gira em torno do eixo y. [*Sugestão*: Use fórmulas apropriadas de Geometria plana para ajudar no cálculo da integral definida.]

55. Uma fatia em forma de cunha é cortada de um cilindro circular reto de raio r por dois planos: um perpendicular ao eixo do cilindro e o outro fazendo um ângulo θ com o primeiro. Encontre o volume da fatia por fatiamento perpendicular ao eixo y, conforme a figura abaixo.

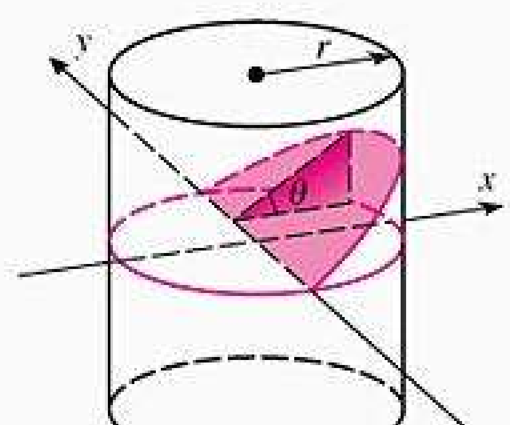


Figura Ex-55

56. Encontre o volume da cunha descrita no Exercício 55 por fatiamento perpendicular ao eixo x.

57. Dois cilindros circulares retos de raio r têm eixos que se intersectam em ângulos retos. Encontre o volume do sólido comum a ambos. [*Sugestão*: Um oitavo do sólido está esboçado na Figura Ex-57.]

58. Em 1635, Bonaventura Cavalieri, um aluno de Galileu, estabeleceu o seguinte resultado, chamado ***princípio de Cavalieri***: *se dois sólidos tiverem a mesma altura, e se as áreas de suas seções transversais, tomadas paralelas e a iguais distâncias de suas bases, forem sempre iguais, então os sólidos têm o mesmo volume*. Use esse resultado para obter o volume do cilindro oblíquo da Figura Ex-58.

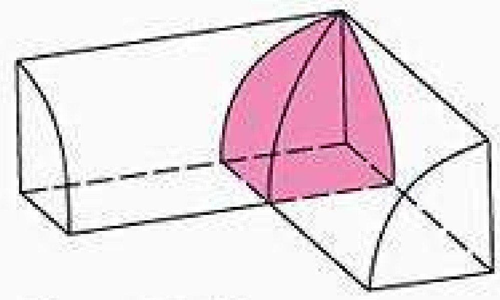


Figura Ex-57

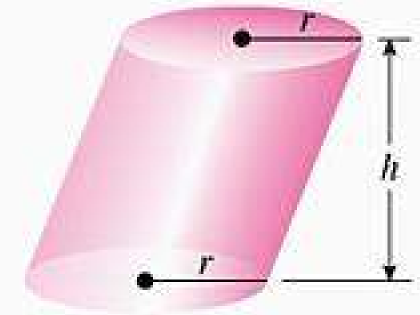


Figura Ex-58

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.2

1. $\int_1^3 3x^2\,dx$; 26 **2.** (a) π sen x (b) $\int_0^\pi \pi \operatorname{sen} x\,dx$ (c) 2π **3.** (a) 0; 2; $\pi[(2x+1)^2-(x^2+1)^2]=\pi[-x^4+2x^2+4x]$ (b) $\int_0^2 \pi[-x^4+2x^2+4x]\,dx$ (c) $\frac{104}{15}\pi$ **4.** (a) 1; 2; $\pi[(y-1)-(y-1)^2]=\pi[-y^2+3y-2]$ (b) $\int_1^2 \pi[-y^2+3y-2]\,dy$ (c) $\frac{\pi}{6}$

7.3 VOLUMES POR CAMADAS CILÍNDRICAS

Os métodos para os cálculos de volume discutidos até o momento dependem de nossa habilidade em computar a área da seção transversal de um sólido e integrá-la através dele. Nesta seção vamos desenvolver um outro método para encontrar volumes que pode ser aplicado quando a área da seção transversal não puder ser encontrada ou a integração for muito difícil.

■ CAMADAS CILÍNDRICAS

Nesta seção estaremos interessados no seguinte problema:

7.3.1 PROBLEMA Seja f contínua e não-negativa em $[a, b]$ $(0 \le a < b)$ e R a região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. Encontre o volume V do sólido de revolução S gerado pela rotação da região R em torno do eixo y (Figura 7.3.1).

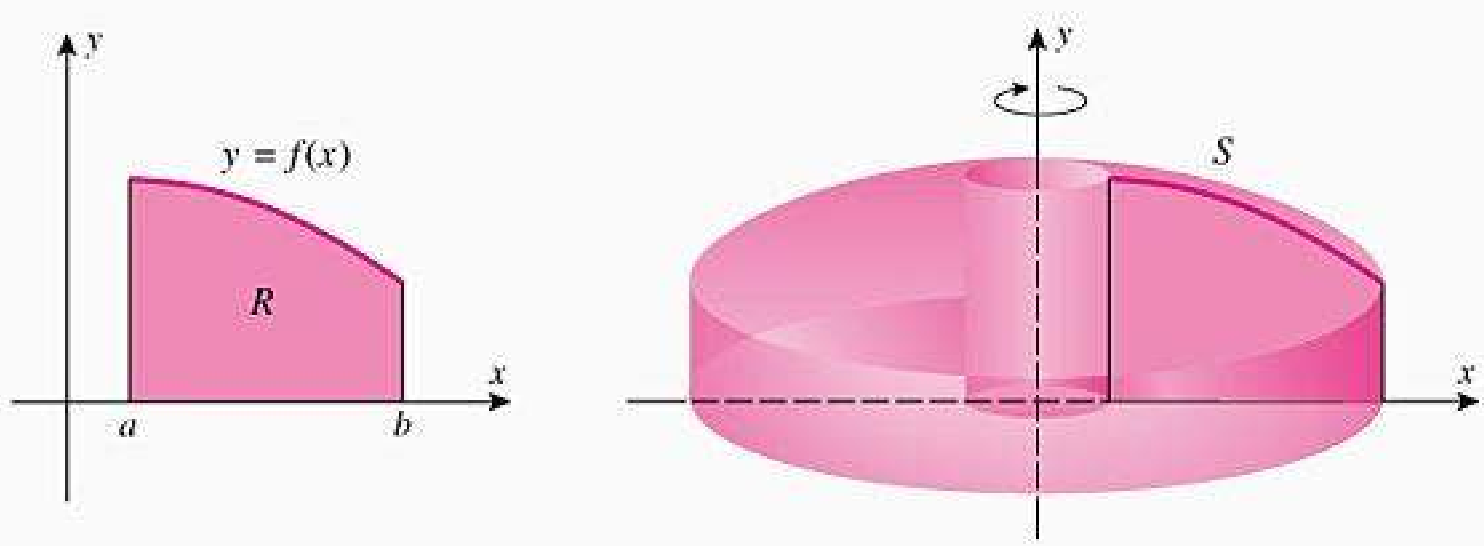


Figura 7.3.1

Às vezes, problemas desse tipo podem ser resolvidos pelos métodos dos discos ou das arruelas perpendiculares ao eixo y, mas quando tais métodos não são aplicáveis ou a integral é difícil, *o método das camadas cilíndricas*, também denominado *método das cascas*, que discutiremos a seguir, freqüentemente funciona.

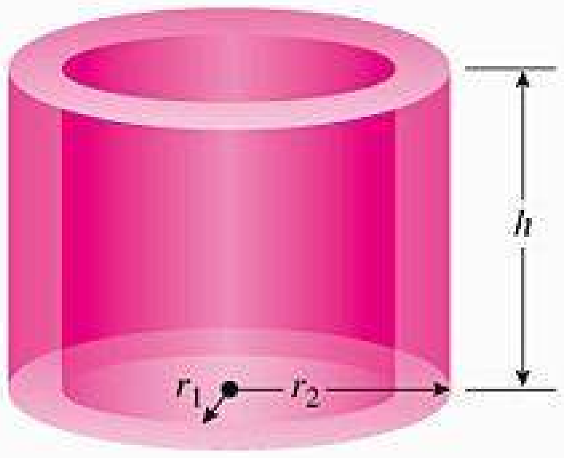


Figura 7.3.2

Uma ***camada cilíndrica*** é um sólido envolvido por dois cilindros retos concêntricos (Figura 7.3.2). O volume V de uma camada cilíndrica com raio interno r_1, raio externo r_2 e altura h pode ser escrito como

$$\begin{aligned} V &= [\text{área da seção transversal}] \cdot [\text{altura}] \\ &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \cdot \left[\tfrac{1}{2}(r_1 + r_2)\right] \cdot h \cdot (r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Mas $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ é o raio médio da camada e $r_2 - r_1$, sua espessura; assim,

$$V = 2\pi \cdot [\text{raio médio}] \cdot [\text{altura}] \cdot [\text{espessura}] \quad (1)$$

Vamos mostrar agora como essa fórmula pode ser usada para resolver o Problema 7.3.1. A idéia subjacente é dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e, desse modo, subdividir a região R em n faixas, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ (Figura 7.3.3*a*). Quando a região R gira em torno do eixo y, essas faixas geram os sólidos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ em "forma de tubo", alinhados um dentro do outro, e que, juntos, formam todo o sólido S (Figura 7.3.3*b*). Assim, o volume V do sólido pode ser obtido somando os volumes dos tubos; isto é,

$$V = V(S_1) + V(S_2) + \cdots + V(S_n)$$

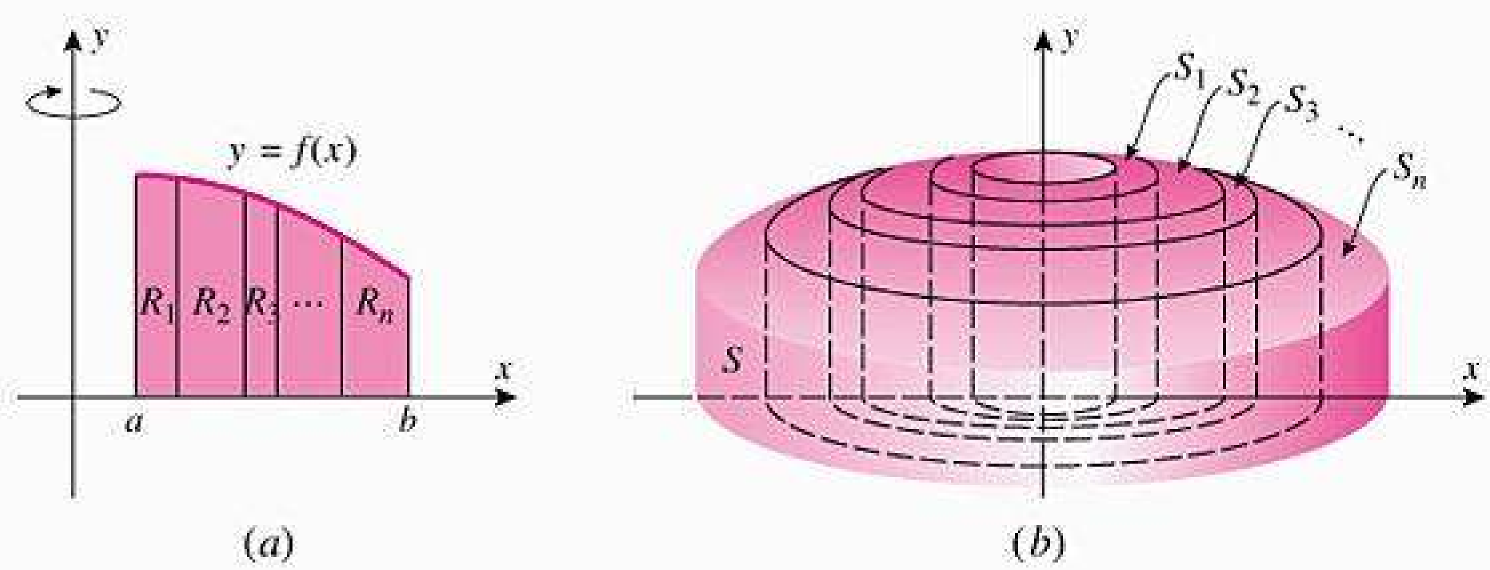


Figura 7.3.3

Como regra, os tubos terão superfícies superiores curvas; portanto, não haverá uma fórmula simples para seus volumes. Porém, se as faixas forem finas, então podemos aproximar cada uma por um retângulo (Figura 7.3.4*a*). Esses retângulos, quando giram em torno do eixo y, produzem camadas cilíndricas cujos volumes se aproximam bastante dos volumes gerados pelas faixas originais (Figura 7.3.4*b*). Vamos mostrar que, somando os volumes das camadas cilíndricas, podemos obter uma soma de Riemann que aproxima o volume V e, tomando o limite das somas de Riemann, podemos obter uma integral para o volume exato V.

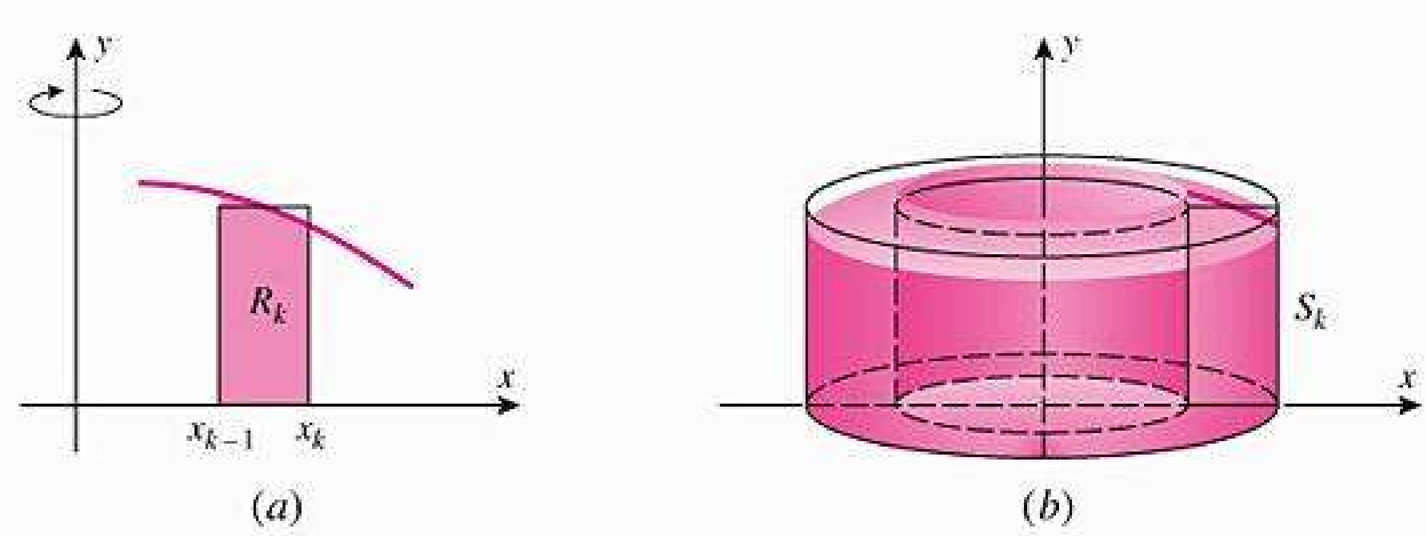


Figura 7.3.4

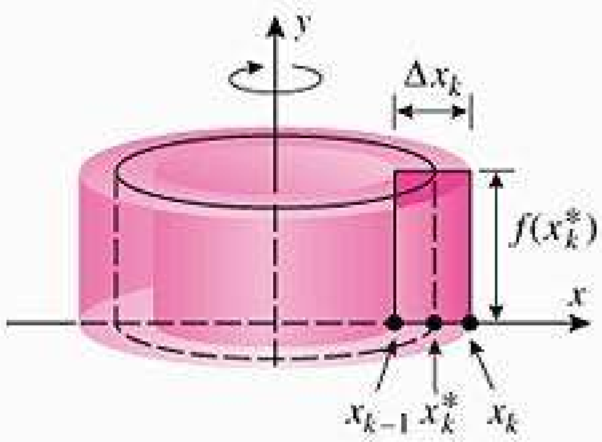


Figura 7.3.5

Para implementar essa idéia, vamos supor que a k-ésima faixa se estenda do ponto x_{k-1} ao ponto x_k e que a extensão dessa faixa seja

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Se x_k^* for o *ponto médio* do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ e se construirmos um retângulo de altura $f(x_k^*)$ acima desse intervalo, então, fazendo esse retângulo girar em torno do eixo y, obtemos uma camada cilíndrica de altura $f(x_k^*)$, raio médio x_k^* e espessura Δx_k (Figura 7.3.5). A partir de (1), o volume V_k dessa camada cilíndrica é

$$V_k = 2\pi x_k^* f(x_k^*)\Delta x_k$$

Somando os volumes das n camadas cilíndricas, obtemos a seguinte soma de Riemann que aproxima o volume V:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k^* f(x_k^*)\Delta x_k$$

Tomando o limite quando n cresce e a extensão dos subintervalos tende a zero, obtemos a integral definida

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k^* f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

Em suma, temos o seguinte resultado:

7.3.2 VOLUME POR CAMADAS CILÍNDRICAS EM TORNO DO EIXO y Sejam f uma função contínua não-negativa em $[a, b]$ $(0 \le a < b)$ e R a região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, o volume V do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo y é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \qquad (2)$$

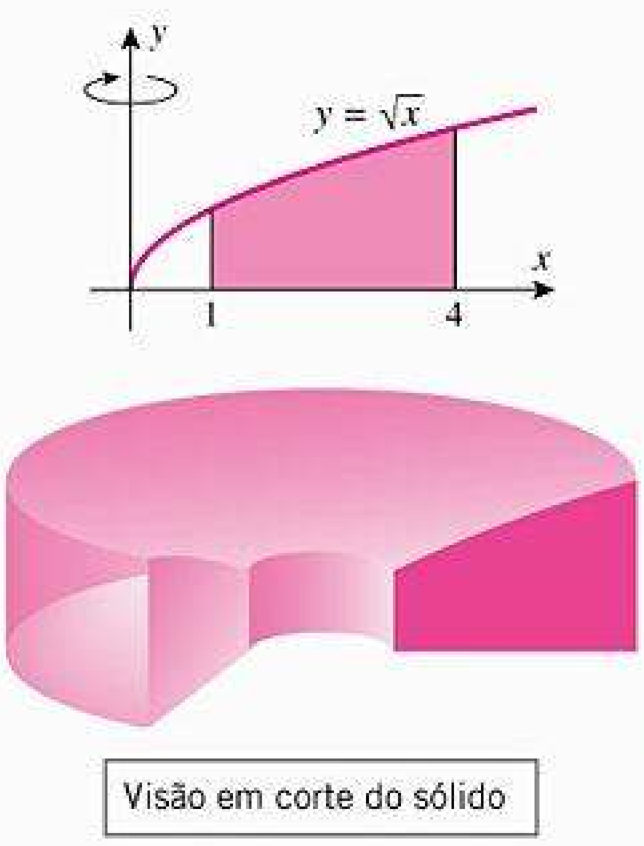


Figura 7.3.6

► **Exemplo 1** Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y da região envolvida por $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$ e o eixo x (Figura 7.3.6).

Solução Como $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ e $b = 4$, a Fórmula (2) fornece

$$V = \int_1^4 2\pi x\sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_1^4 x^{3/2}\, dx = \left[2\pi \cdot \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_1^4 = \frac{4\pi}{5}[32 - 1] = \frac{124\pi}{5} \blacktriangleleft$$

■ VARIAÇÕES DO MÉTODO DAS CAMADAS CILÍNDRICAS

O método da camada cilíndrica é aplicável em várias situações que não preenchem as condições requeridas pela Fórmula (2). Por exemplo, a região pode estar limitada entre duas curvas, ou o eixo de revolução pode ser uma outra reta que não o eixo y. Porém, em vez de desenvolver uma fórmula separada para cada situação possível, vamos considerar uma maneira geral de pensar no método das camadas cilíndricas, que pode ser adaptada a cada nova situação que surgir.

Com esse propósito, precisaremos reexaminar o integrando na Fórmula (2): em cada ponto x no intervalo $[a, b]$, o segmento de reta vertical do eixo x até a curva $y = f(x)$ pode ser visto como a seção transversal da região R em x (Figura 7.3.7a). Quando a região R gira

em torno do eixo y, a seção transversal em x varre a *superfície* de um cilindro circular reto de altura $f(x)$ e raio x (Figura 7.3.7b). A área dessa superfície é

$$2\pi x f(x)$$

(Figura 7.3.7c), que é o integrando em (2). Assim, a Fórmula (2) pode ser vista informalmente da seguinte maneira

7.3.3 UM PONTO DE VISTA INFORMAL SOBRE CAMADAS CILÍNDRICAS O volume V de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região R em torno de um eixo pode ser obtido integrando-se a área da superfície gerada por uma seção transversal arbitrária de R tomada paralelamente ao eixo de revolução.

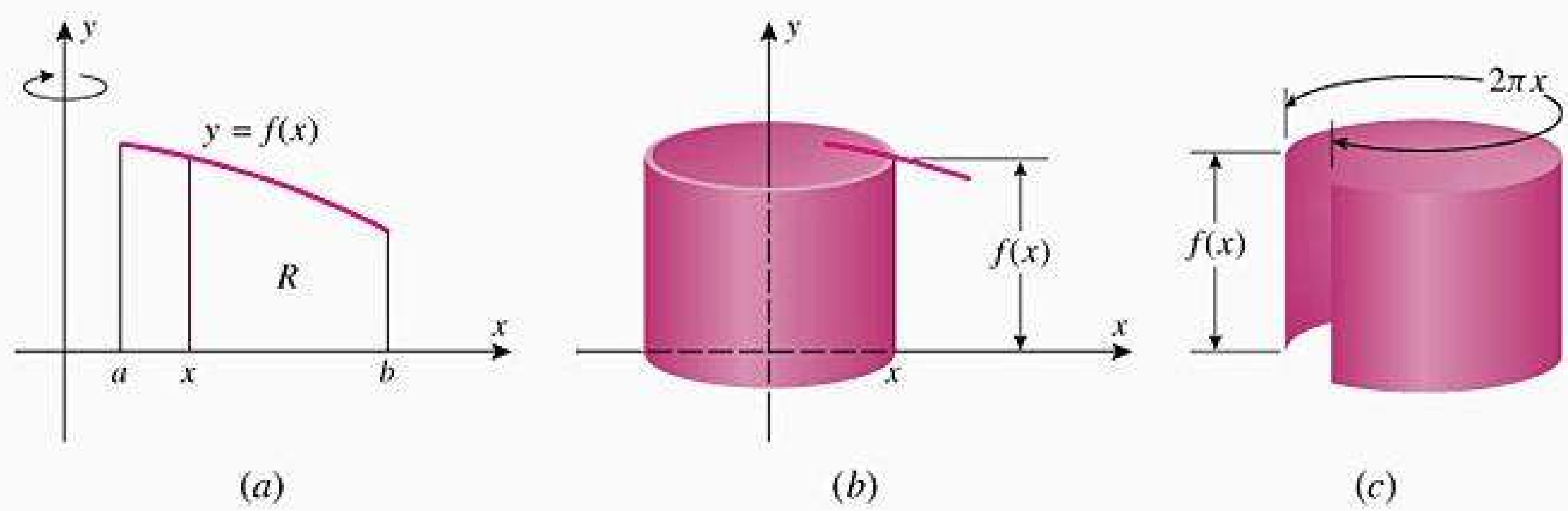


Figura 7.3.7

Os seguintes exemplos ilustram como aplicar esse resultado nas situações em que a Fórmula (2) não é aplicável:

► Exemplo 2 Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y da região R delimitada por $y = x$ e $y = x^2$ do primeiro quadrante (Figura 7.3.8).

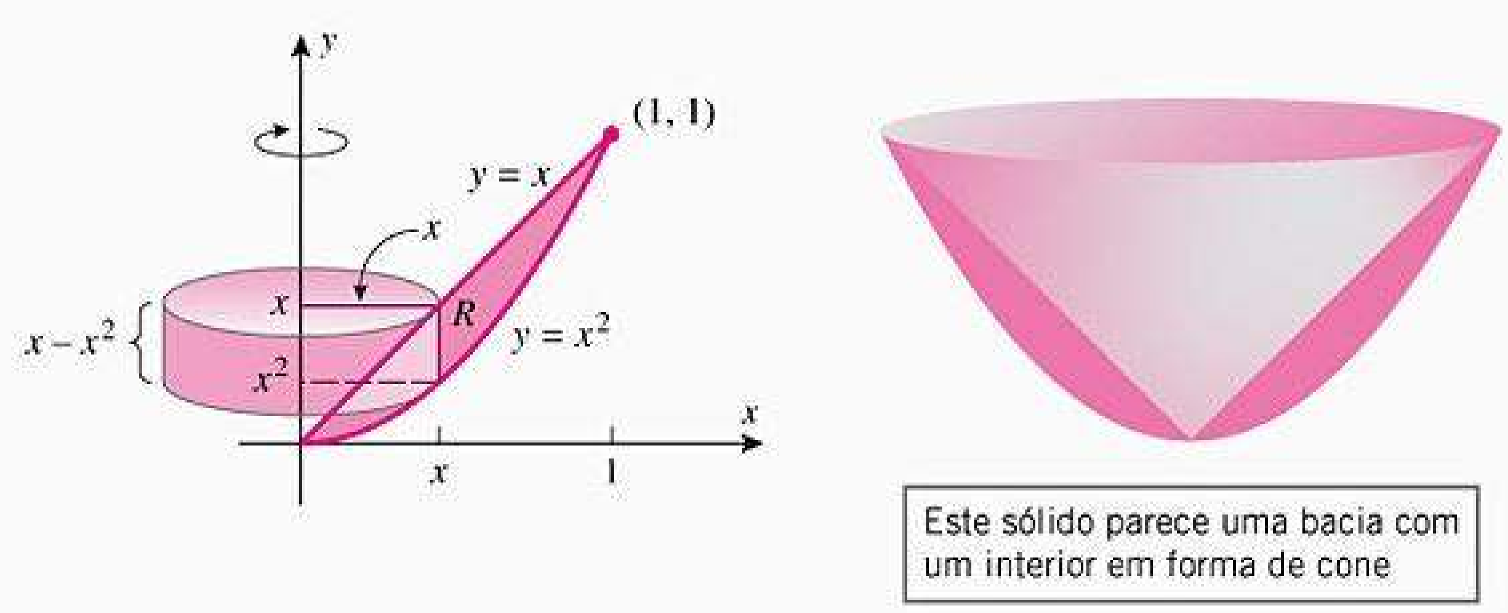


Figura 7.3.8

Solução Conforme a figura, em cada x de [0, 1] a seção transversal de R paralela ao eixo y gera uma superfície cilíndrica de altura $x - x^2$ e raio x. Como a área dessa superfície é

$$2\pi x(x - x^2)$$

o volume do sólido é

$$V = \int_0^1 2\pi x(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi}{6}$$ ◄

► Exemplo 3 Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y = -1$ da região R abaixo de $y = x^2$ e acima do intervalo $[0, 2]$ (Figura 7.3.9).

Solução Em cada y no intervalo $0 \le y \le 4$, a seção transversal de R paralela ao eixo x gera uma superfície cilíndrica de altura $2 - \sqrt{y}$ e raio $y + 1$. Como a área dessa superfície é

$$2\pi(y + 1)(2 - \sqrt{y})$$

segue que o volume do sólido é

$$\int_0^4 2\pi(y + 1)(2 - \sqrt{y})\,dy = 2\pi \int_0^4 (2y - y^{3/2} + 2 - y^{1/2})\,dy$$

$$= 2\pi\left[y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2} + 2y - \frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^4 = \frac{176\pi}{15}$$ ◄

Os volumes dos Exemplos 2 e 3 podem também ser obtidos pelo método das arruelas. Confirme que os volumes obtidos por aquele método estão de acordo com os obtidos pelas camadas cilíndricas.

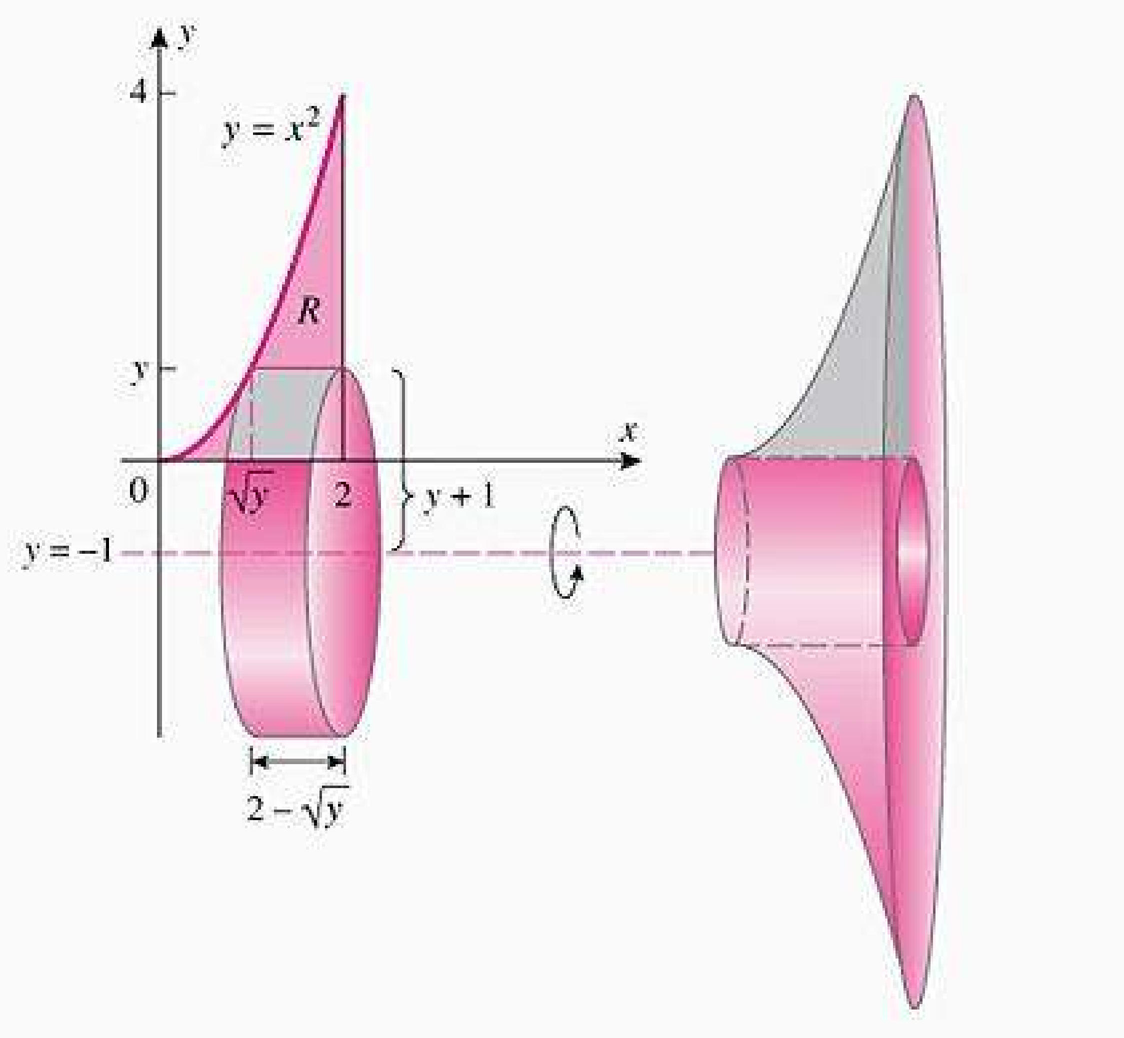


Figura 7.3.9

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.3 (*Ver página 465 para respostas.*)

1. Seja R a região entre o eixo x e a curva $y = 1 + \sqrt{x}$, para $1 \le x \le 4$.
   (a) Para x entre 1 e 4, a área da superfície cilíndrica gerada pela rotação em torno do eixo y da seção transversal vertical de R em x é __________.
   (b) Usando camadas cilíndricas, uma expressão integral para o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo y é __________.
   (c) O valor da integral de (b) é __________.

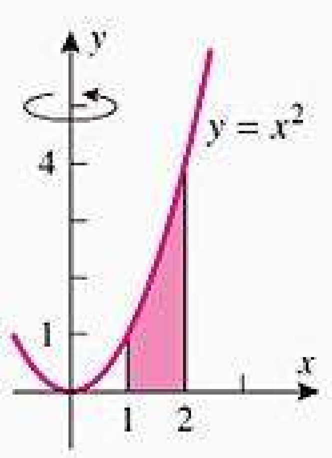
2. Seja R a região descrita no Exercício 1.
   (a) Para x entre 1 e 4, a área da superfície cilíndrica gerada pela rotação em torno da reta $x = 5$ da seção transversal vertical de R em x é __________.
   (b) Usando camadas cilíndricas, uma expressão integral para o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno da reta $x = 5$ é __________.
   (c) O valor da integral de (b) é __________.

3. Um sólido S é gerado pela rotação em torno do eixo x da região englobada pelas curvas $x = (y-2)^2$ e $x = 4$. Usando camadas cilíndricas, uma expressão integral para o volume de S é __________. O valor dessa integral é __________.

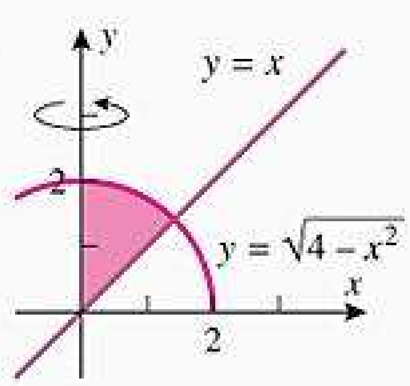
EXERCÍCIOS 7.3 [C] CAS

1-4 Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que resulta quando a região sombreada gira em torno do eixo indicado.

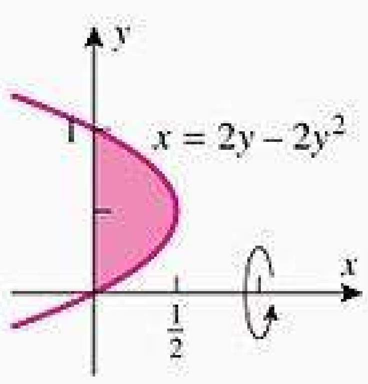
1.



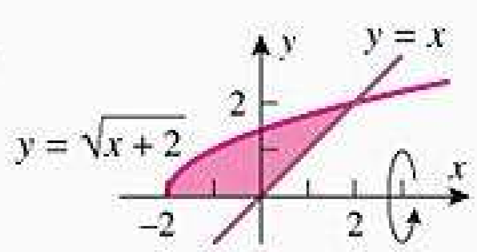
2.



3.



4.



5-12 Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que resulta quando a região englobada pelas curvas gira em torno do eixo y.

5. $y = x^3,\ x = 1,\ y = 0$
6. $y = \sqrt{x},\ x = 4,\ x = 9,\ y = 0$
7. $y = 1/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$
8. $y = \cos(x^2),\ x = 0,\ x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ y = 0$
9. $y = 2x - 1,\ y = -2x + 3,\ x = 2$
10. $y = 2x - x^2,\ y = 0$
11. $y = \dfrac{1}{x^2+1},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$
12. $y = e^{x^2},\ x = 1,\ x = \sqrt{3},\ y = 0$

13-16 Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que resulta quando a região englobada pelas curvas gira em torno do eixo x.

13. $y^2 = x,\ y = 1,\ x = 0$
14. $x = 2y,\ y = 2,\ y = 3,\ x = 0$
15. $y = x^2,\ x = 1,\ y = 0$
16. $xy = 4,\ x + y = 5$

[C] 17. Use um CAS para encontrar o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = e^x$ e $y = 0$ para $1 \le x \le 2$ gira em torno do eixo y.

[C] 18. Use um CAS para encontrar o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = \cos x$, $y = 0$ e $x = 0$ para $0 \le x \le \pi/2$ gira em torno do eixo y.

[C] 19. Considere a região situada à direita do eixo y, à esquerda da reta vertical $x = k$ $(0 < k < \pi)$ e entre a curva $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo x. Use um CAS para encontrar o valor de k para o qual o sólido que resulta quando essa região gira em torno do eixo y tem um volume igual a 8 unidades.

ENFOCANDO CONCEITOS

20. Sejam R_1 e R_2 regiões com a forma mostrada abaixo. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que resulta quando
   (a) a região R_1 gira em torno do eixo y;
   (b) a região R_2 gira em torno do eixo x.

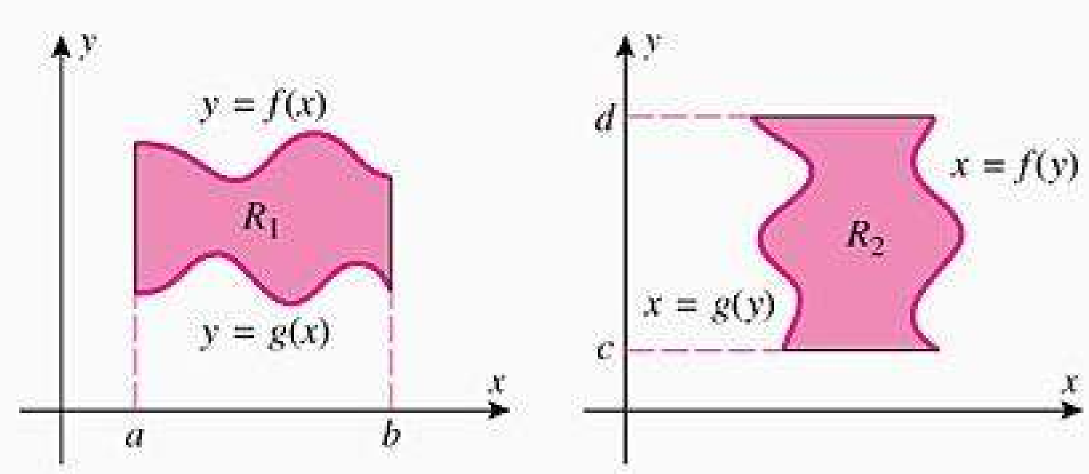


Figura Ex-20

21. (a) Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que é gerado quando a região sob a curva
$$y = x^3 - 3x^2 + 2x$$
e acima de [0, 1] gira em torno do eixo y.
   (b) Para esse problema, o método das camadas cilíndricas é mais fácil ou mais difícil do que o método do fatiamento, discutido na última seção? Explique.

22. Sejam f uma função contínua e não-negativa em $[a, b]$ e R a região delimitada por $y = f(x)$ e $y = 0$ para $a \le x \le b$. Usando o método das camadas cilíndricas, deduza e explique uma fórmula para o volume do sólido que resulta quando a região R gira em torno da reta $x = k$, sendo $k \le a$.

23. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que é gerado quando a região envolvida por $y = 1/x^3$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$ gira em torno da reta $x = -1$.

24. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido que é gerado quando a região envolvida por $y = x^3$, $y = 1$ e $x = 0$ gira em torno da reta $y = 1$.

25. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do cone gerado quando o triângulo com vértices (0, 0), (0, r) e (h, 0), sendo $r > 0$ e $h > 0$, gira em torno do eixo x.

26. A região entre a curva $y^2 = kx$ e a reta $x = \frac{1}{4}k$ gira em torno da reta $x = \frac{1}{2}k$. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido resultante (suponha $k > 0$).

27. Conforme a figura a seguir, um buraco cilíndrico é feito passando pelo centro de uma esfera. Mostre que o volume do sólido remanescente depende somente do comprimento L do buraco e não do tamanho da esfera.

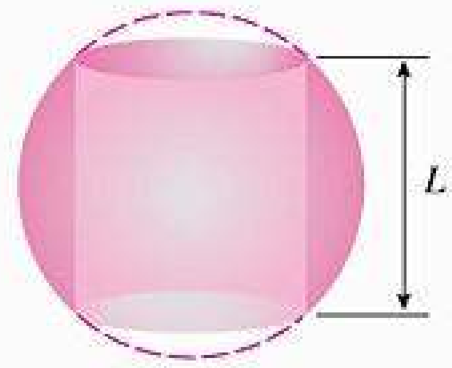


Figura Ex-27

28. Use camadas cilíndricas para encontrar o volume do toro obtido fazendo girar o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ em torno da reta $x = b$, sendo $b > a > 0$. [*Sugestão*: Pode ajudar na integração imaginar que a integral é uma área.]

29. Sejam V_x e V_y os volumes dos sólidos resultantes quando a região limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = b$ $\left(b > \frac{1}{2}\right)$ gira em torno dos eixos x e y, respectivamente. Há algum valor de b para o qual $V_x = V_y$?

30. (a) Encontre o volume V do sólido que resulta quando a região delimitada por $y = 1/(1 + x^4)$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b$ ($b > 1$) gira em torno do eixo y.
(b) Encontre $\lim_{b\to+\infty} V$.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.3

1. (a) $2\pi x(1+\sqrt{x})$ (b) $\int_1^4 2\pi x(1+\sqrt{x})\,dx$ (c) $39{,}8\,\pi$ **2.** (a) $2\pi(5-x)(1+\sqrt{x})$ (b) $\int_1^4 2\pi(5-x)(1+\sqrt{x})\,dx$ (c) $\frac{553}{15}\pi$

3. $\int_0^4 2\pi y[4-(y-2)^2]\,dy$; $\frac{128}{3}\pi$

7.4 COMPRIMENTO DE UMA CURVA PLANA

Nesta seção utilizaremos as ferramentas do Cálculo para estudar o problema de encontrar o comprimento de uma curva plana.

■ COMPRIMENTO DE ARCO

Nosso primeiro objetivo é definir o que se entende por ***comprimento de arco***, ou simplesmente ***comprimento***, de uma curva plana $y = f(x)$ acima de um intervalo $[a, b]$ (Figura 7.4.1). Uma vez alcançado isso, poderemos nos concentrar no problema de calcular comprimentos de arco. Para evitar complicações desnecessárias, impomos a exigência de que f' seja contínua em $[a, b]$, caso em que dizemos que $y = f(x)$ é uma ***curva lisa*** em $[a, b]$, ou então que f é uma ***função lisa***, ou ***suave***, em $[a, b]$. Assim, passamos a nos ocupar do problema seguinte.

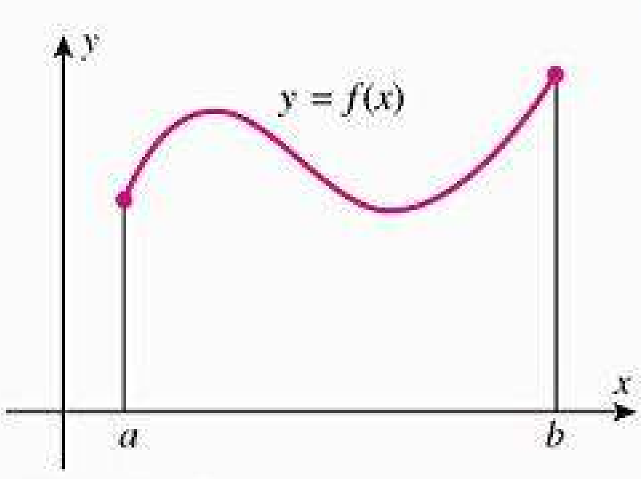


Figura 7.4.1

> **7.4.1 PROBLEMA DO COMPRIMENTO DE ARCO** Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva lisa no intervalo $[a, b]$. Defina e obtenha uma fórmula para o comprimento de arco L da curva $y = f(x)$ acima do intervalo $[a, b]$.

Intuitivamente, podemos pensar no comprimento de arco de uma curva como o número obtido alinhando um pedaço de barbante com a curva e então medindo o comprimento do barbante depois de espichado.

Para definir o comprimento de arco de uma curva, começamos quebrando a curva em segmentos pequenos. Então aproximamos esses segmentos da curva por segmentos de reta e somamos os comprimentos dos segmentos de reta para formar uma soma de Riemann. A Figura 7.4.2 ilustra como tais segmentos de reta tendem a se tornar aproximações cada vez

melhores da curva, à medida que aumenta o número de segmentos utilizados. Quando o número de segmentos aumenta, as somas de Riemann correspondentes tendem a uma integral definida cujo valor será tomado como sendo o comprimento de arco L da curva.



Figura 7.4.2

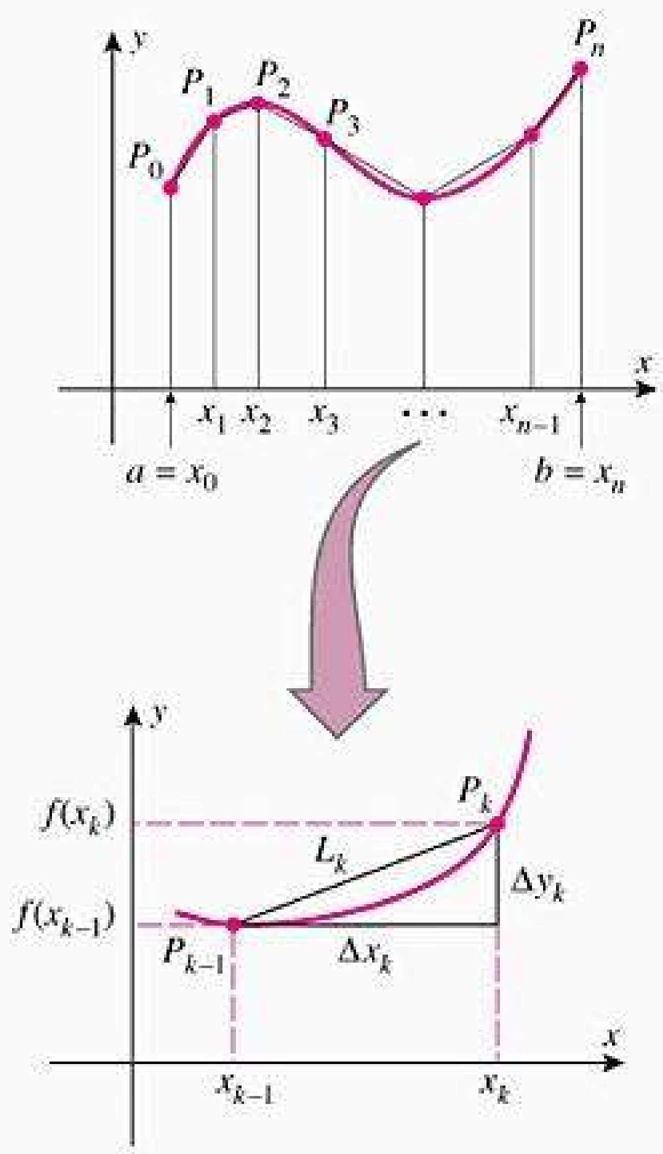


Figura 7.4.3

Para implementar nossa idéia de resolução do Problema 7.4.1, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos inserindo os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre $a = x_0$ e $b = x_n$. Como mostra a parte superior da Figura 7.4.3, sejam $P_0, P_1, \ldots, P_n$ os pontos da curva com coordenadas x iguais a $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b = x_n$; agora, liguemos esses pontos por segmentos de reta. Esses segmentos de reta formam um ***caminho poligonal*** que pode ser considerado como uma aproximação da curva $y = f(x)$. Como indica a parte inferior da Figura 7.4.3, o comprimento L_k do k-ésimo segmento do caminho poligonal é

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} \tag{1}$$

Agora, se somarmos os comprimentos desses segmentos de reta, obteremos a seguinte aproximação do comprimento L da curva

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} \tag{2}$$

Para colocar isso na forma de uma soma de Riemann, vamos aplicar o Teorema do Valor Médio (5.7.2). Esse teorema implica que existe um ponto x_k^* entre x_{k-1} e x_k tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \quad \text{ou} \quad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)\Delta x_k$$

e, portanto, podemos reescrever (2) como

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k$$

Explique por que a aproximação em (2) não pode ser maior do que L.

Assim, tomando o limite quando n cresce e as extensões dos subintervalos tendem a zero, obtemos a integral seguinte que define o comprimento de arco L:

$$L = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Em suma, temos a seguinte definição:

7.4.2 DEFINIÇÃO Se $y = f(x)$ for uma curva lisa no intervalo $[a, b]$, então o comprimento de arco L dessa curva sobre $[a, b]$ é definido por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{3}$$

Esse resultado fornece tanto uma definição quanto uma fórmula para o cálculo do comprimento de arcos. Quando for conveniente, (3) pode ser expressa como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{4}$$

Além disso, para uma curva expressa na forma $x = g(y)$, em que g' é contínua em $[c, d]$, o comprimento de arco L de $y = c$ até $y = d$ pode ser expresso como

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{5}$$

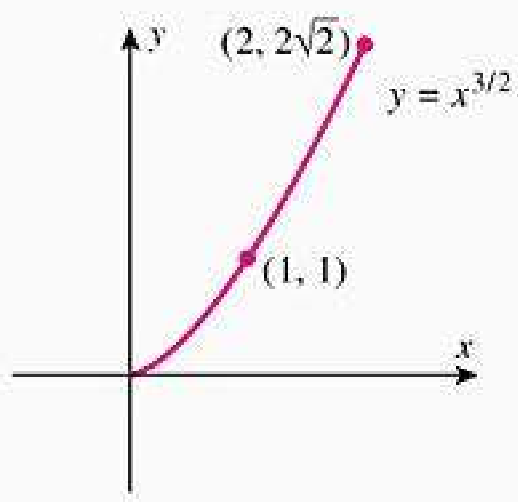


Figura 7.4.4

▶ Exemplo 1 Encontre o comprimento de arco da curva $y = x^{3/2}$ de $(1, 1)$ até $(2, 2\sqrt{2})$ (Figura 7.4.4) de duas formas: (a) usando a Fórmula (4) e (b) usando a Fórmula (5).

Solução (a) Uma vez que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

e como a curva se estende de $x = 1$ a $x = 2$, usando (4) obtemos

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\, dx$$

Para calcular essa integral, fazemos a substituição u

$$u = 1 + \tfrac{9}{4}x, \quad du = \tfrac{9}{4}\, dx$$

e, então, mudando os limites x de integração ($x = 1$, $x = 2$) para os correspondentes limites u $\left(u = \frac{13}{4}, u = \frac{22}{4}\right)$:

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{22/4} u^{1/2}\, du = \frac{8}{27}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{22/4} = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{22}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}}{27} \approx 2{,}09$$

Solução (b) Para aplicar a Fórmula (5), precisamos primeiro reescrever a equação $y = x^{3/2}$ de tal forma que x seja expresso como uma função de y. Isso fornece $x = y^{2/3}$ e

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{3}y^{-1/3}$$

Como a curva se estende de $y = 1$ até $y = 2\sqrt{2}$, usando (5) obtemos

$$L = \int_1^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \tfrac{4}{9}y^{-2/3}}\, dy = \frac{1}{3}\int_1^{2\sqrt{2}} y^{-1/3}\sqrt{9y^{2/3} + 4}\, dy$$

Para calcular essa integral, fazemos a substituição u

$$u = 9y^{2/3} + 4, \quad du = 6y^{-1/3}\, dy$$

e mudamos os limites y de integração ($y = 1$, $y = 2\sqrt{2}$) para os correspondentes limites u ($u = 13$, $u = 22$). Isso dá

$$L = \frac{1}{18}\int_{13}^{22} u^{1/2}\, du = \frac{1}{27}u^{3/2}\Big]_{13}^{22} = \frac{1}{27}[(22)^{3/2} - (13)^{3/2}] = \frac{22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}}{27}$$

O arco desde o ponto $(1, 1)$ ao ponto $(2, 2\sqrt{2})$ na Figura 7.4.4 é quase reto, de modo que o comprimento de arco deveria ser somente um pouco maior do que a distância em linha reta entres esses dois pontos. Mostre que isso realmente ocorre.

Esse resultado está de acordo com a parte (a); porém, a integração aqui é mais enfadonha. Nos problemas em que houver uma escolha entre (4) ou (5), é usual o caso em que uma das fórmulas leva a cálculos mais simples do que a outra. ◄

■ ENCONTRANDO O COMPRIMENTO DE ARCO POR MÉTODOS NUMÉRICOS

No próximo capítulo desenvolveremos algumas técnicas de integração que nos permitirão encontrar valores exatos de outras integrais encontráveis no cálculo de comprimento de arco; contudo, falando vagamente, a maioria dessas integrais é impossível de ser calculada em termos de funções elementares. Nesses casos, geralmente aproximamos a integral utilizando algum método numérico, como a aproximação pelo ponto médio discutida na Seção 6.4.

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se seu recurso computacional dispuser de um comando para integração numérica, use-o para confirmar que o comprimento de arco L no Exemplo 2 é, aproximadamente, $L \approx 3{,}8202$.

► Exemplo 2 A partir de (4), o comprimento de arco de $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$ é dado pela integral

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\, dx$$

Essa integral não pode ser calculada em termos de funções elementares; porém, usando um recurso computacional capaz de fazer integração numérica, obtemos a aproximação $L \approx 3{,}8202$. ◄

■ COMPRIMENTO DE ARCO DE CURVAS PARAMÉTRICAS

As Fórmulas (4) e (5) podem ser vistas como casos especiais de (6). Por exemplo, a Fórmula (4) pode ser obtida a partir de (6) escrevendo $y = f(x)$ parametricamente como

$$x = t, \quad y = f(t)$$

e a Fórmula (5) pode ser obtida escrevendo $x = g(y)$ parametricamente como

$$x = g(t), \quad y = t$$

(ver Exercício 18).

7.4.3 FÓRMULA DO COMPRIMENTO DE ARCO PARA CURVAS PARAMÉTRICAS Se nenhum segmento da curva representada pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

for traçado mais de uma vez, quando t cresce de a para b, e se dx/dt e dy/dt forem funções contínuas em $a \le t \le b$, então o comprimento de arco L da curva é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{6}$$

► Exemplo 3 Use (6) para encontrar a circunferência de um círculo de raio a a partir das equações paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

Solução

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a\, dt = at\Big]_0^{2\pi} = 2\pi a \quad ◄$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.4 (*Ver página 471 para respostas.*)

1. Dizemos que uma função é lisa, ou suave, em $[a, b]$ se f' for __________ em $[a, b]$.

2. Se uma função f for lisa em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$ acima de $[a, b]$ é _________.

3. A distância entre os pontos $(1, 0)$ e $(e, 1)$ é __________.

4. Seja L o comprimento da curva $y = \ln x$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$.
   (a) Integrando em relação a x, uma expressão integral para L é __________.
   (b) Integrando em relação a y, uma expressão integral para L é __________.

EXERCÍCIOS 7.4 Recurso Gráfico C CAS

1. Use o Teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento do segmento de reta de $y = 2x$ entre $(1, 2)$ e $(2, 4)$, e confirme que o valor está de acordo com o comprimento calculado usando a:
   (a) Fórmula (4) (b) Fórmula (5)

2. Use o Teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento do segmento de reta $x = t$, $y = 5t$ $(0 \le t \le 1)$, e confirme que o valor está de acordo com o comprimento calculado usando a Fórmula (6).

3-8 Encontre o comprimento de arco exato das curvas acima dos intervalos dados.

3. $y = 3x^{3/2} - 1$ de $x = 0$ até $x = 1$
4. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$ de $y = 0$ até $y = 1$
5. $y = x^{2/3}$ de $x = 1$ até $x = 8$
6. $y = (x^6 + 8)/(16x^2)$ de $x = 2$ até $x = 3$
7. $24xy = y^4 + 48$ de $y = 2$ até $y = 4$
8. $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4}y^{-2}$ de $y = 1$ até $y = 4$

9-14 Encontre o comprimento de arco exato das curvas paramétricas dadas sem eliminar o parâmetro.

9. $x = \frac{1}{3}t^3,\ y = \frac{1}{2}t^2\ (0 \le t \le 1)$
10. $x = (1 + t)^2, y = (1 + t)^3\ (0 \le t \le 1)$
11. $x = \cos 2t, y = \operatorname{sen} 2t\ (0 \le t \le \pi/2)$
12. $x = \cos t + t \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t - t \cos t\ (0 \le t \le \pi)$
13. $x = e^t \cos t, y = e^t \operatorname{sen} t\ (0 \le t \le \pi/2)$
14. $x = e^t (\operatorname{sen} t + \cos t), y = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\ (1 \le t \le 4)$

15-16 Expresse o comprimento de arco exato da curva acima do intervalo dado, como uma integral que tenha sido simplificada para eliminar o radical; em seguida, calcule a integral usando um CAS.

C 15. $y = \ln(\sec x)$ de $x = 0$ até $x = \pi/4$

C 16. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ de $x = \pi/4$ até $x = \pi/2$

ENFOCANDO CONCEITOS

17. Considere a curva $y = x^{2/3}$.
   (a) Esboce a parte da curva entre $x = -1$ e $x = 8$.
   (b) Explique por que a Fórmula (4) não pode ser usada para encontrar o comprimento de arco da curva esboçada em (a).
   (c) Encontre o comprimento de arco da curva esboçada em (a).

18. Deduza as Fórmulas (4) e (5) da Fórmula (6), escolhendo uma parametrização apropriada das curvas.

19. Considere os segmentos de curva $y = x^2$ de $x = \frac{1}{2}$ até $x = 2$ e o segmento de curva $y = \sqrt{x}$ de $x = \frac{1}{4}$ até $x = 4$.
   (a) Faça o gráfico dos dois segmentos de curva e utilize-os para explicar por que os comprimentos desses dois segmentos deveriam ser iguais.
   (b) Monte integrais que dêem os comprimentos de arco dos dois segmentos de curva, com integração em relação a x. Demonstre com uma substituição que essas duas integrais são iguais.
   (c) Monte integrais que dêem os comprimentos de arco dos dois segmentos de curva, com integração em relação a y.
   (d) Aproxime o comprimento de arco de cada segmento de curva usando a Fórmula (2) com $n = 10$ subintervalos iguais.
   (e) Qual das duas aproximações em (d) é mais precisa? Explique.
   (f) Use a aproximação pelo ponto médio com $n = 10$ subintervalos para aproximar cada integral de comprimento de arco em (d), até quatro casas decimais.
   (g) Use uma calculadora com integração numérica para aproximar cada integral de comprimento de arco em (b), até quatro casas decimais.

20. Siga as instruções do Exercício 19 para os segmentos de curva $y = x^{8/3}$ de $x = 10^{-3}$ até $x = 1$ e para o segmento de curva $y = x^{3/8}$ de $x = 10^{-8}$ até $x = 1$.

21. Siga as instruções do Exercício 19 para os segmentos de curva $y = \operatorname{tg} x$ de $x = 0$ até $x = \pi/3$ e para o segmento de curva $y = \operatorname{arc\,tg} x$ de $x = 0$ até $x = \sqrt{3}$.

22. Seja $y = f(x)$ uma curva lisa no intervalo fechado $[a, b]$. Prove que, se m e M são números não-negativos, tais que $m \le |f'(x)| \le M$ para cada x em $[a, b]$, então o comprimento de arco L de $y = f(x)$ acima do intervalo $[a, b]$ satisfaz as desigualdades

$$(b - a)\sqrt{1 + m^2} \le L \le (b - a)\sqrt{1 + M^2}$$

23. Use o resultado do Exercício 22 para mostrar que o comprimento de arco L de $y = \sec x$ acima do intervalo $0 \le x \le \pi/3$ satisfaz

$$\frac{\pi}{3} \le L \le \frac{\pi}{3}\sqrt{13}$$

C **24.** Um jogador de basquete converte uma cesta. Suponha que a trajetória da bola a partir do momento em que é lançada até entrar no arco seja descrita por

$$y = 2{,}15 + 2{,}09x - 0{,}41x^2, \quad 0 \le x \le 4{,}6$$

onde x é a distância horizontal (em metros) desde o ponto em que é lançada e y é a distância vertical (em metros) acima do chão. Use um CAS ou uma calculadora científica com integração numérica para aproximar a distância percorrida pela bola, desde o momento em que é lançada até entrar no arco. Arredonde o resultado para duas casas decimais.

C **25.** Encontre um valor positivo de k (até duas casas decimais) tal que a curva $y = k \operatorname{sen} x$ tenha um comprimento de arco igual a $L = 5$ unidades acima do intervalo de $x = 0$ a $x = \pi$. [*Sugestão*: Encontre uma integral para o comprimento de arco L em termos de k, e então use um CAS ou uma calculadora científica com integração numérica para encontrar valores inteiros de k nos quais os valores $L - 5$ têm sinais opostos. Complete a solução usando o Teorema do Valor Intermediário (2.5.7) para aproximar o valor de k, com duas casas decimais.]

C **26.** Conforme a figura abaixo, uma viga horizontal com dimensões 2 pol × 6 pol × 16 pés (12 pol = 1 pé) fixada nos dois extremos é sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 120 lb/pé. Como resultado da carga, a linha central da viga sofre uma deflexão, que é descrita por

$$y = -1{,}67 \times 10^{-8}(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)$$

($0 \le x \le 192$), onde $L = 192$ pol é o comprimento da viga sem carga, x é a distância horizontal ao longo da viga, medida em polegadas, a partir do extremo esquerdo, e y é a deflexão da linha central em polegadas.

(a) Faça o gráfico de y *versus* x para $0 \le x \le 192$.

(b) Encontre a deflexão máxima da linha central.

(c) Use um CAS ou uma calculadora com integração numérica para encontrar o comprimento da linha central da viga carregada. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

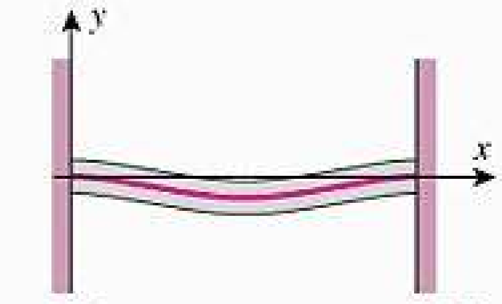


Figura Ex-26

C **27.** Um golfista dá uma tacada com sucesso. Suponha que a trajetória da bola do momento da tacada até atingir a grama seja descrita por

$$y = 12{,}54x - 0{,}41x^2$$

onde x é a distância horizontal em jardas (1 jarda = 0, 91 m) desde o ponto onde a bola é atingida, e y é a distância vertical em jardas acima da parte plana do campo de golfe entre os buracos. Use um CAS ou uma calculadora com integração numérica para encontrar a distância percorrida pela bola desde o momento da tacada até atingir a grama. Suponha que a parte plana do campo entre os buracos e a grama está no mesmo nível e arredonde sua resposta para duas casas decimais.

C **28.** (a) Na Seção 1.8 vimos que uma ciclóide é o caminho traçado por um ponto na borda de uma roda que rola ao longo de uma reta (Figura 1.8.14). Use as equações paramétricas na Fórmula (11) daquela seção para mostrar que o comprimento L de um arco de uma ciclóide é dado pela integral

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\, d\theta$$

(b) Use um CAS para mostrar que L é 8 vezes o raio da roda (veja a figura abaixo).

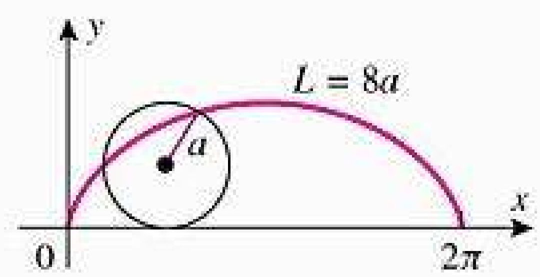


Figura Ex-28

29. Afirmou-se no Exercício 45 da Seção 1.8 que a curva dada parametricamente pelas equações

$$x = a\cos^3\phi, \quad y = a\operatorname{sen}^3\phi$$

é denominada *hipociclóide de quatro cúspides* (também chamada ***astróide***).

(a) Use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico no caso em que $a = 1$, traçando-a exatamente uma vez.

(b) Encontre o comprimento de arco exato da curva de (a).

30. Mostre que o comprimento de arco total da elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, para $a > b > 0$, é dado por

$$4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\, dt$$

onde $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$.

C **31.** (a) Mostre que o comprimento de arco total da elipse

$$x = 2\cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

é dado por

$$4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

(b) Use um CAS ou uma calculadora científica com integração numérica para aproximar o comprimento de arco de (a). Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

(c) Suponha que as equações paramétricas de (a) descrevam a trajetória de uma partícula movendo-se no plano xy, onde t está em segundos e x e y em centímetros. Use um CAS ou uma calculadora científica com integração numérica para aproximar a distância percorrida pela partícula de $t = 1{,}5$ s até $t = 4{,}8$ s. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.4

1. contínua **2.** $\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ **3.** $\sqrt{(e-1)^2+1}$ **4.** (a) $\int_1^e \sqrt{1+(1/x)^2}\,dx$ (b) $\int_0^1 \sqrt{1+e^{2y}}\,dy$

7.5 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Nesta seção consideraremos o problema de encontrar a área de uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana em torno de uma reta.

■ ÁREA DE SUPERFÍCIE

Uma ***superfície de revolução*** é uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo que se situa no mesmo plano da curva. Por exemplo, a superfície de uma esfera pode ser gerada ao se fazer girar um semicírculo em torno de seu diâmetro, e a superfície lateral de um cilindro circular reto pode ser gerada pela rotação de um segmento de reta em torno de um eixo paralelo a ele (Figura 7.5.1).

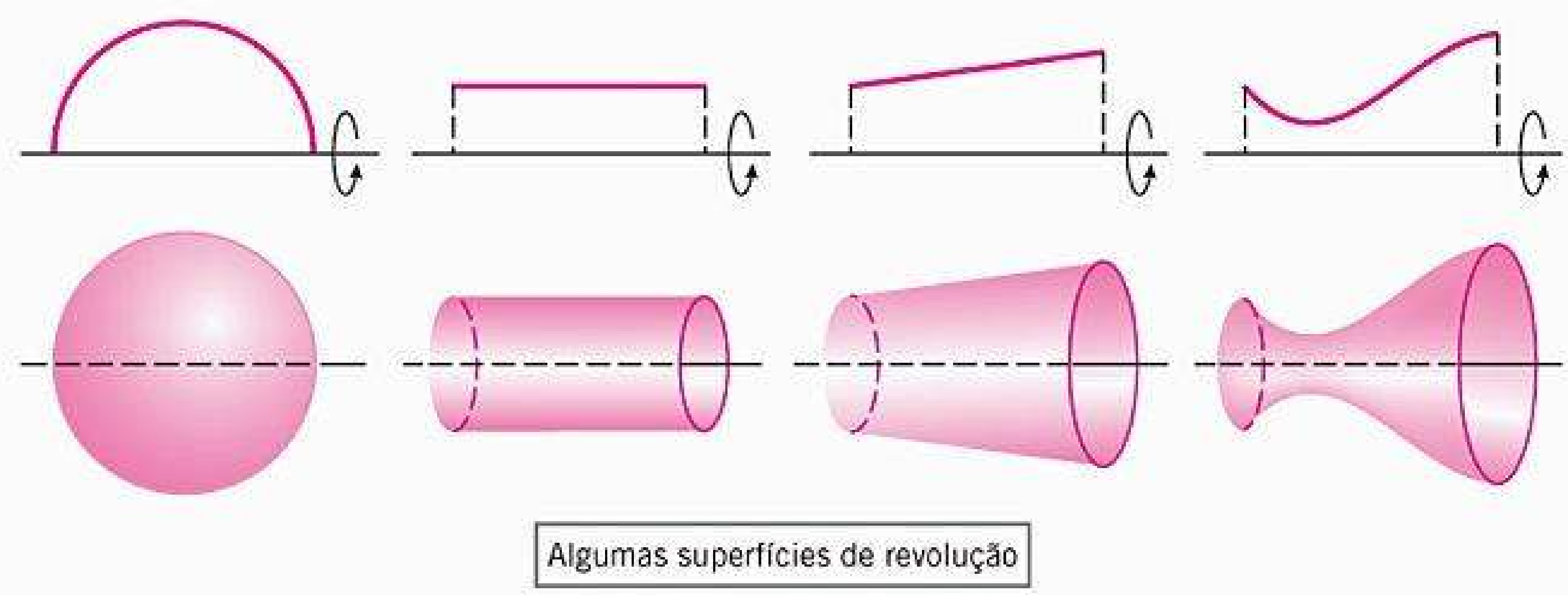


Figura 7.5.1

Nesta seção estaremos preocupados com o problema seguinte.

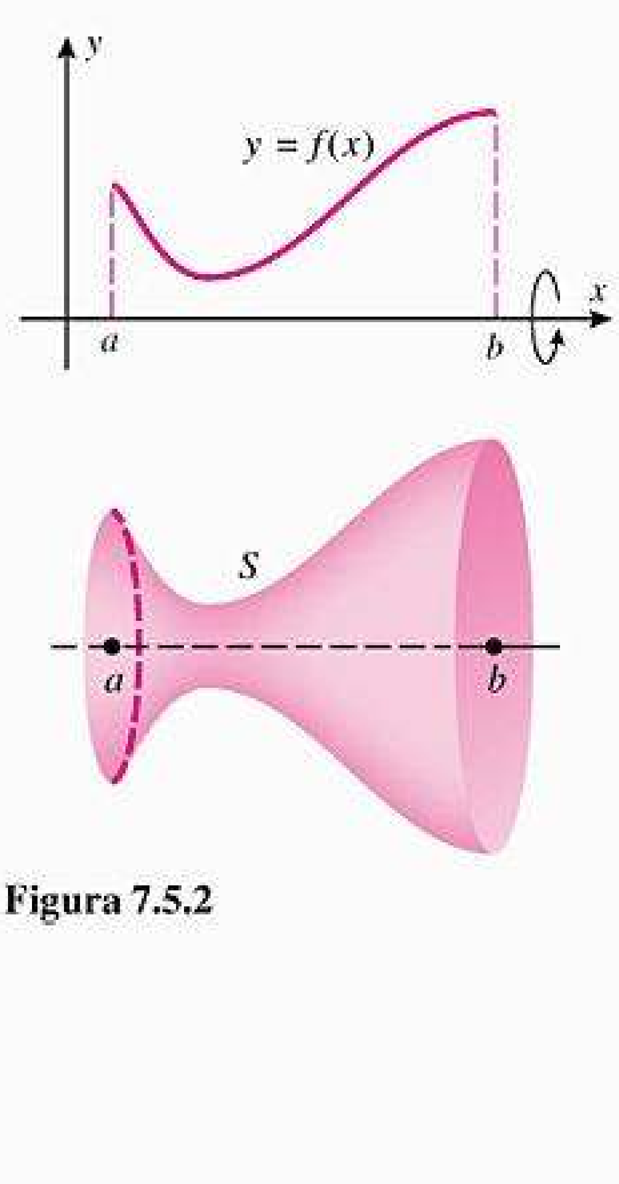


Figura 7.5.2

7.5.1 PROBLEMA DA ÁREA DE SUPERFÍCIE Suponha que f seja uma função lisa e não-negativa em $[a, b]$ e que uma superfície de revolução seja gerada pela rotação da parte da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo x (Figura 7.5.2). Defina o que podemos entender por *área* S da superfície e encontre uma fórmula para calculá-la.

Para motivar uma definição apropriada de área S de uma superfície de revolução, vamos decompor a superfície em pequenas seções cujas áreas possam ser aproximadas por fórmulas elementares. Somando as aproximações das áreas das seções, obtemos uma soma de Riemann que aproxima S, e tomando o limite da soma de Riemann, obtemos uma integral para o valor exato de S.

Para implementar essa idéia, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, inserindo os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre $a = x_0$ e $b = x_n$. Conforme ilustrado na Figura 7.5.3a, os pontos correspondentes do gráfico de f definem um caminho poligonal que aproxima a curva $y = f(x)$ acima do intervalo $[a, b]$. Quando esse caminho poligonal gira em torno do eixo x,

gera uma superfície que consiste em n partes, cada uma delas sendo um tronco de cone circular reto (Figura 7.5.3*b*). Assim, a área de cada parte da superfície aproximante pode ser obtida pela fórmula

$$S = \pi(r_1 + r_2)l \tag{1}$$

para a área lateral S de um tronco de cone de altura inclinada l e raios das bases r_1 e r_2 (Figura 7.5.4). Conforme sugerido pela Figura 7.5.5, o k-ésimo tronco de cone tem raios $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ e altura Δx_k. Sua altura inclinada é o comprimento L_k do k-ésimo segmento de reta da poligonal, o qual, pela Fórmula (1) da Seção 7.4, é

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

Assim, a área lateral S_k do k-ésimo tronco de cone é

$$S_k = \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

Se somarmos essas áreas, vamos obter a seguinte aproximação da área S da superfície inteira:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} \tag{2}$$

Para colocar isso na forma de uma soma de Riemann, vamos aplicar o Teorema do Valor Médio (5.7.2). Esse teorema implica a existência de um ponto x_k^* entre x_{k-1} e x_k, tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \quad \text{ou} \quad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)\Delta x_k$$

e, assim, podemos reescrever (2) como

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k \tag{3}$$

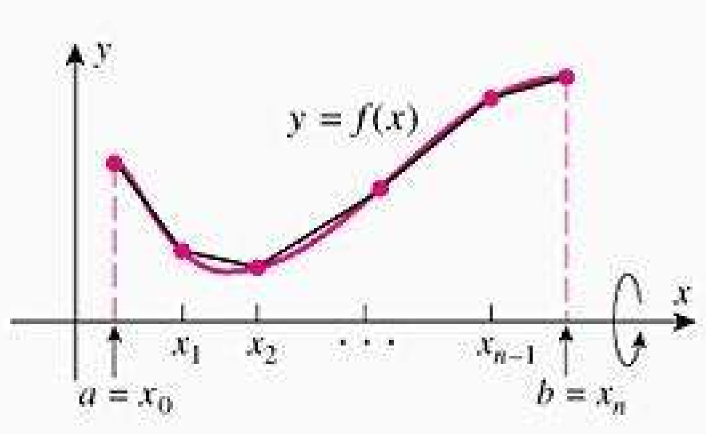
No entanto, isso ainda não é uma soma de Riemann, pois envolve as variáveis x_{k-1} e x_k. Para eliminar essas variáveis da expressão, observe que o valor médio dos números $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ está entre esses números. Dessa forma, a continuidade de f e o Teorema do Valor Intermediário (2.5.7) implicam a existência de um ponto x_k^{**} entre x_{k-1} e x_k, de tal modo que

$$\tfrac{1}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] = f(x_k^{**})$$

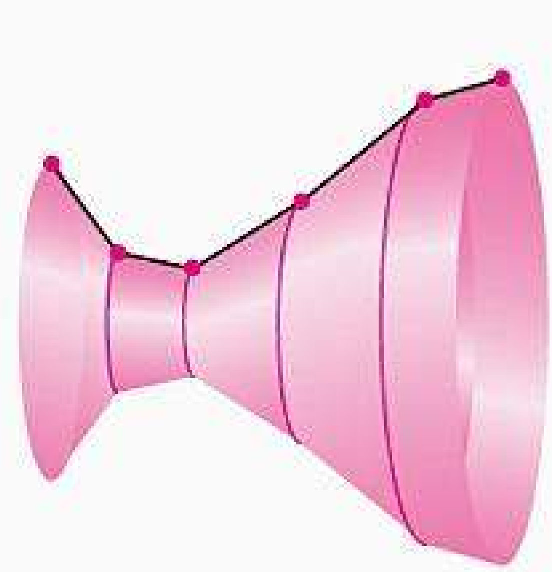
Assim, (2) pode ser expressa como

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x_k^{**})\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k$$

Embora essa expressão esteja próxima à forma de uma soma de Riemann, ela não é uma soma de Riemann verdadeira, pois envolve duas variáveis x_k^* e x_k^{**}, em vez de somente x_k^*. Entretanto, prova-se em Cálculo avançado que isso não tem nenhum efeito sobre o limite, devido à



(*a*)



(*b*)

Figura 7.5.3

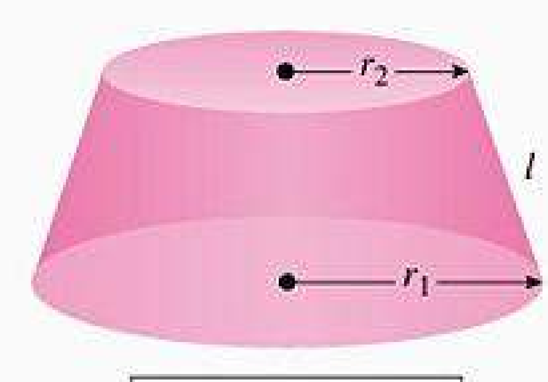


Figura 7.5.4

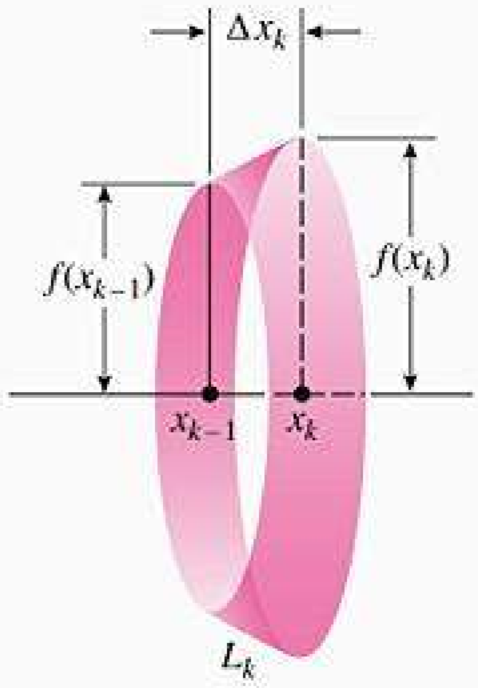


Figura 7.5.5

continuidade de f. Desse modo, podemos supor que $x_k^{**} = x_k^*$ ao tomar o limite, o que sugere que S possa ser definida como

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x_k^{**})\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Em suma, temos a seguinte definição:

7.5.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função lisa e não-negativa em $[a, b]$, então a área da superfície de revolução gerada pela rotação da parte da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo x é definida por

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Esse resultado fornece tanto uma definição quanto uma fórmula para o cálculo de áreas de superfícies. Quando for conveniente, essa fórmula também pode ser expressa como

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (4)$$

Além disso, se g for não-negativa e $x = g(y)$ for uma curva lisa em $[c, d]$, então a área da superfície gerada quando a parte da curva $x = g(y)$ entre $y = c$ e $y = d$ gira em torno do eixo y pode ser expressa como

$$S = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \qquad (5)$$

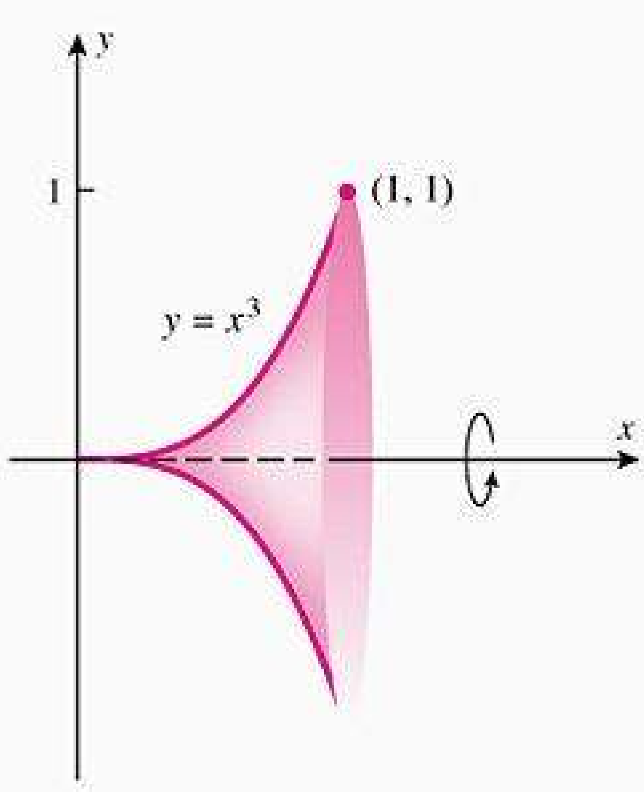


Figura 7.5.6

► **Exemplo 1** Encontre a área da superfície gerada pela rotação da parte da curva $y = x^3$ entre $x = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo x (Figura 7.5.6).

Solução Como $y = x^3$, temos $dy/dx = 3x^2$ e, portanto, a partir de (4), a área S da superfície é

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^1 2\pi x^3\sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3(1 + 9x^4)^{1/2}\, dx \\ &= \frac{2\pi}{36}\int_1^{10} u^{1/2}\, du \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = 1 + 9x^4 \\ du = 36x^3\, dx \end{array}} \\ &= \frac{2\pi}{36} \cdot \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{u=1}^{10} = \frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1) \approx 3{,}56 \end{aligned}$$ ◄

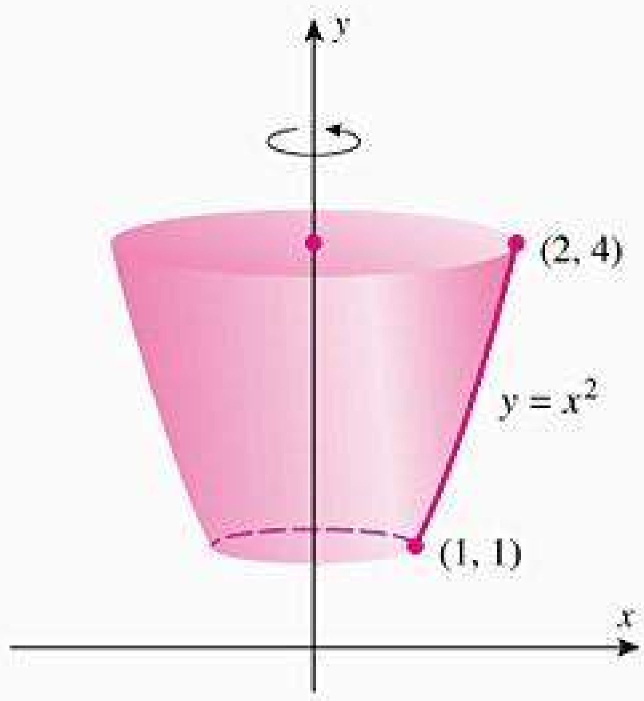


Figura 7.5.7

▶ **Exemplo 2** Encontre a área da superfície gerada pela rotação da parte da curva $y = x^2$ entre $x = 1$ e $x = 2$ em torno do eixo y (Figura 7.5.7).

Solução Como a curva gira em torno do eixo y, vamos aplicar a Fórmula (5). Com essa finalidade, vamos reescrever $y = x^2$ como $x = \sqrt{y}$ e observar que os valores de y correspondentes a $x = 1$ e $x = 2$ são $y = 1$ e $y = 4$. Uma vez que $x = \sqrt{y}$, temos $dx/dy = 1/(2\sqrt{y})$ e, portanto, a partir de (5), a área da superfície é

$$S = \int_1^4 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_1^4 2\pi\sqrt{y}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy$$

$$= \pi \int_1^4 \sqrt{4y+1}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_5^{17} u^{1/2}\, du \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = 4y+1 \\ du = 4\,dy \end{array}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{u=5}^{17} = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 30{,}85 \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.5 (*Ver página 476 para respostas.*)

1. Se f for uma função lisa e não-negativa em $[a, b]$, então a área de superfície S da superfície de revolução que é gerada quando a parte da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ gira em torno do eixo x é __________.

2. A área lateral do tronco de cone de altura inclinada $\sqrt{10}$ e raios de base $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$ é __________.

3. Uma expressão integral para a área da superfície que é gerada quando o segmento de reta que liga (3, 1) a (6, 2) gira em torno do eixo x é __________. O valor dessa integral é __________.

4. Uma expressão integral para a área da superfície que é gerada quando o segmento de reta que liga (3, 1) a (6, 2) gira em torno do eixo y é __________. O valor dessa integral é __________.

EXERCÍCIOS 7.5 [C] CAS

1-4 Encontre a área da superfície gerada quando a curva dada gira em torno do eixo x.

1. $y = 7x,\ 0 \le x \le 1$
2. $y = \sqrt{x},\ 1 \le x \le 4$
3. $y = \sqrt{4 - x^2},\ -1 \le x \le 1$
4. $x = \sqrt[3]{y},\ 1 \le y \le 8$

5-8 Encontre a área da superfície gerada quando a curva dada gira em torno do eixo y.

5. $x = 9y + 1,\ 0 \le y \le 2$
6. $x = y^3,\ 0 \le y \le 1$
7. $x = \sqrt{9 - y^2},\ -2 \le y \le 2$
8. $x = 2\sqrt{1 - y},\ -1 \le y \le 0$

9-12 Use um CAS para encontrar a área exata da superfície gerada quando a curva dada gira em torno do eixo dado.

[C] 9. $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x^{3/2},\ 1 \le x \le 3$; eixo x

[C] 10. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^{-1},\ 1 \le x \le 2$; eixo x

[C] 11. $8xy^2 = 2y^6 + 1,\ 1 \le y \le 2$; eixo y

[C] 12. $x = \sqrt{16 - y},\ 0 \le y \le 15$; eixo y

13-16 Use um CAS, ou uma calculadora com integração numérica, para aproximar a área da superfície gerada quando a curva dada gira em torno do eixo dado. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

C **13.** $y = \text{sen } x$, $0 \le x \le \pi$; eixo x

C **14.** $x = \text{tg } y$, $0 \le y \le \pi/4$; eixo y

C **15.** $y = e^x$, $0 \le x \le 1$; eixo x

C **16.** $y = e^x$, $1 \le y \le e$; eixo y

17-18 Aproxime a área da superfície usando a Fórmula (2) com $n = 20$ subintervalos de mesmo comprimento. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

17. A superfície do Exercício 13.

18. A superfície do Exercício 16.

19. Use a Fórmula (4) para mostrar que a área lateral S de um cone circular reto de altura h e raio da base r é

$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

20. Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$. [*Sugestão*: Gire o semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo x.]

ENFOCANDO CONCEITOS

21. (a) A figura no Exercício 49 da Seção 7.2 mostra uma calota esférica de altura h, cortada de uma esfera de raio r. Mostre que a área da superfície S da calota é $S = 2\pi rh$. [*Sugestão*: Faça uma parte apropriada do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ girar em torno do eixo y.]

(b) A parte da esfera cortada por dois planos paralelos é chamada de ***zona***. Use o resultado de (a) para mostrar que a área da superfície de uma zona depende do raio da esfera e da distância entre os planos, mas não da localização da zona.

22. (a) Se um cone de altura inclinada l e raio da base r for cortado verticalmente aberto sobre um plano, então, conforme mostra a Figura Ex-22, obtém-se um setor circular de raio l. Use a fórmula $A = \frac{1}{2}l^2\theta$ para a área de um setor de raio l e ângulo central θ (em radianos) para mostrar que a área da superfície lateral do cone é πrl.

(b) Use o resultado de (a) para obter a Fórmula (1) para a área da superfície lateral de um tronco de cone.

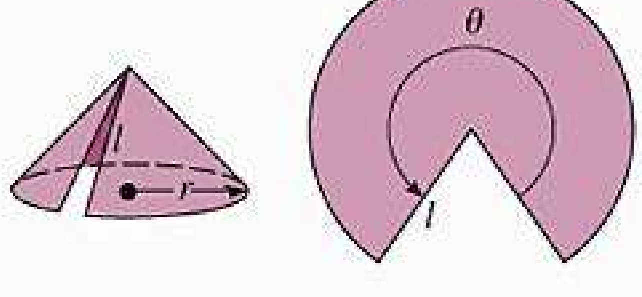


Figura Ex-22

23. Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva suave no intervalo $[a, b]$ e que $f(x) \ge 0$ para cada $a \le x \le b$. Deduza uma fórmula para a área da superfície gerada quando a curva $y = f(x)$, $a \le x \le b$ gira em torno da reta $y = -k$ $(k > 0)$.

24. Seja $y = f(x)$ uma curva lisa no intervalo $[a, b]$ e suponha que $f(x) \ge 0$ para $a \le x \le b$. Pelo Teorema do Valor Extremo (5.4.2), a função f tem um valor máximo K e um valor mínimo k em $[a, b]$. Prove: se L for o comprimento de curva da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$, e se S for a área da superfície gerada quando essa curva gira em torno do eixo x, então

$$2\pi kL \le S \le 2\pi KL$$

25. Use os resultados do exercício anterior e do Exercício 23 da Seção 7.4 para mostrar que a área S da superfície gerada quando a curva $y = \sec x$, $0 \le x \le \pi/3$ gira em torno do eixo x satisfaz

$$\frac{2\pi^2}{3} \le S \le \frac{4\pi^2}{3}\sqrt{13}$$

26. Seja $y = f(x)$ uma curva suave em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \ge 0$ para $a \le x \le b$. Sejam A a área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ e S a área da superfície gerada quando essa seção da curva gira em torno do eixo x.

(a) Prove que $2\pi A \le S$.

(b) Para quais funções f é $2\pi A = S$?

27-28 Nestes exercícios, divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos inserindo os pontos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ entre $a = t_0$ e $b = t_n$ e suponha que $x'(t)$ e $y'(t)$ sejam funções contínuas tais que nenhuma parte da curva

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

seja percorrida mais de uma vez.

27. Seja S a área da superfície gerada quando a curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \le t \le b)$ gira em torno do eixo x. Explique como S pode ser aproximada por

$$S \approx \sum_{k=1}^{n}(\pi[y(t_{k-1}) + y(t_k)] \times \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2})$$

Usando resultados do Cálculo avançado, pode ser mostrado que, quando $\Delta t_k \to 0$, essa soma converge a

$$S = \int_a^b 2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \qquad \text{(A)}$$

28. Seja S a área da superfície gerada quando a curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \le t \le b)$ gira em torno do eixo y. Explique como S pode ser aproximada por

$$S \approx \sum_{k=1}^{n}(\pi[x(t_{k-1}) + x(t_k)] \times \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2})$$

Usando resultados do Cálculo avançado, pode ser mostrado que, quando $\Delta t_k \to 0$, essa soma converge a

$$S = \int_a^b 2\pi x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \qquad \text{(B)}$$

29-36 Use as Fórmulas (A) e (B) dos Exercícios 27 e 28.

29. Encontre a área da superfície gerada quando a curva paramétrica $x = t^2$, $y = 2t$ $(0 \le t \le 4)$ gira em torno do eixo x.

C **30.** Use um CAS para encontrar a área da superfície gerada quando a curva paramétrica

$$x = \cos^2 t, \quad y = 5 \operatorname{sen} t \qquad (0 \le t \le \pi/2)$$

gira em torno do eixo x.

31. Encontre a área da superfície gerada quando a curva paramétrica $x = t$, $y = 2t^2$ $(0 \le t \le 1)$ gira em torno do eixo y.

32. Encontre a área da superfície gerada quando as equações $x = \cos^2 t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ giram em torno do eixo y.

33. Fazendo girar o semicírculo

$$x = r\cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

em torno do eixo x, mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.

34. As equações

$$x = a\,\phi - a \operatorname{sen} \phi, \quad y = a - a\cos\phi \qquad (0 \le \phi \le 2\pi)$$

representam o arco de uma ciclóide. Mostre que a área da superfície gerada quando essa curva gira em torno do eixo x é $S = 64\pi a^2/3$. [*Sugestão*: Use as identidades

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1 - \cos\phi}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^3 \phi = (1 - \cos^2 \phi) \operatorname{sen} \phi,$$

para ajudar na integração.]

C **35.** Use um CAS para encontrar a área da superfície gerada quando a curva paramétrica $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ gira em torno do eixo x.

36. Deduza as Fórmulas (4) e (5) das Fórmulas (A) e (B) dos Exercícios 27 e 28, escolhendo uma parametrização apropriada para as curvas $y = f(x)$ e $x = g(y)$.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.5

1. $\displaystyle\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ **2.** $3\sqrt{10}\pi$ **3.** $\displaystyle\int_3^6 (2\pi)\left(\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{10}{9}}\,dx = \int_3^6 \frac{2\sqrt{10}\pi}{9}x\,dx;\ 3\sqrt{10}\pi$

4. $\displaystyle\int_1^2 (2\pi)(3y)\sqrt{10}\,dy;\ 9\sqrt{10}\pi$

7.6 VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO E SUAS APLICAÇÕES

Nesta seção definiremos a noção de "valor médio" de uma função e apresentaremos várias aplicações dessa idéia.

VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO CONTÍNUA

Em trabalhos científicos, muitas vezes as informações numéricas são resumidas calculando-se algum tipo de *média* ou *valor médio* dos dados observados. Há vários tipos de média, porém, a mais comum é a ***média aritmética***, formada somando-se os dados e dividindo-se pelo número deles. Assim, a média aritmética $\overline{a}$ dos n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é

$$\overline{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

No caso em que os a_k são valores de uma função f, digamos

$$a_1 = f(x_1),\ a_2 = f(x_2),\ \ldots,\ a_n = f(x_n)$$

então a média aritmética $\overline{a}$ desses valores da função é

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Vamos mostrar agora como ampliar esse conceito de tal forma que possamos calcular não somente a média aritmética de um número finito de valores da função, mas também uma

média de *todos* os valores de $f(x)$ quando x varia em um intervalo fechado $[a, b]$. Com esse propósito, lembre-se do Teorema do Valor Médio para Integrais (6.6.2), que afirma que, se f for contínua no intervalo $[a, b]$, então há pelo menos um ponto x^* nesse intervalo, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b-a)$$

A quantidade

$$f(x^*) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

será nossa candidata a valor médio de f acima do intervalo $[a, b]$. Para explicar o que motiva isso, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual comprimento

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{1}$$

e, nos sucessivos subintervalos, vamos escolher pontos arbitrários $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Então, a média aritmética dos números $f(x_1^*), f(x_2^*), \ldots, f(x_n^*)$ é

$$\text{média} = \frac{1}{n}[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)]$$

ou, por (1),

$$\text{média} = \frac{1}{b-a}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Como essa equação descreve o que acontece quando calculamos a média "com cada vez mais" valores de $f(x)$, somos levados à definição seguinte.

Observe que o Teorema do Valor Médio para Integrais, quando expresso na forma (2), garante haver pelo menos um ponto x^* em $[a, b]$ no qual o valor de f é igual ao seu valor médio no intervalo.

7.6.1 DEFINIÇÃO Se f for contínua em $[a, b]$, então o ***valor médio*** de f em $[a, b]$ é definido por

$$f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

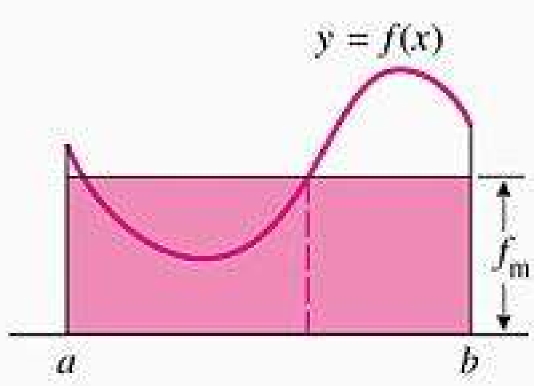


Figura 7.6.1

Se f for não-negativa em $[a, b]$, a quantidade f_m tem uma interpretação geométrica simples, que pode ser vista escrevendo (2) como

$$f_m \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

O lado esquerdo dessa equação é a área de um retângulo com uma altura f_m e comprimento da base $b - a$, e o lado direito é a área sob $y = f(x)$ e acima de $[a, b]$. Assim, f_m é a altura de um retângulo construído sobre o intervalo $[a, b]$, cuja área é a mesma que aquela sob o gráfico de f naquele intervalo (Figura 7.6.1).

► **Exemplo 1** Encontre o valor médio da função $f(x) = \sqrt{x}$ acima do intervalo [1, 4] e obtenha todos os pontos do intervalo nos quais o valor de f é igual ao valor médio.

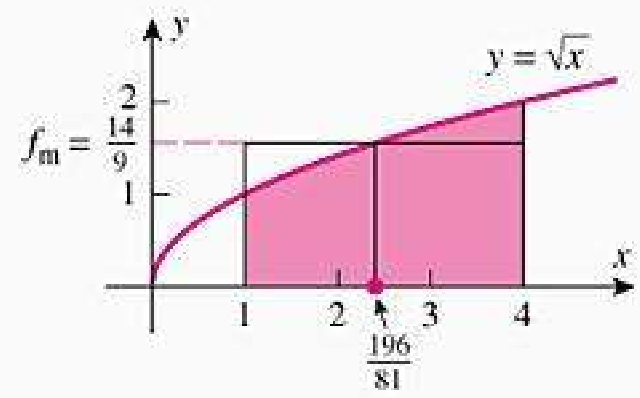


Figura 7.6.2

Solução

$$f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{4-1}\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right] = \frac{14}{9} \approx 1{,}6$$

Os valores de x nos quais $f(x) = \sqrt{x}$ é igual ao valor médio satisfazem $\sqrt{x} = 14/9$, logo $x = 196/81 \approx 2{,}4$ (Figura 7.6.2). ◄

■ LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON

► **Exemplo 2** Um copo de limonada a uma temperatura de 40º F é deixado em uma sala cuja temperatura constante é de 70º F. Usando um princípio da Física denominado ***Lei do Resfriamento de Newton***, pode-se mostrar que, se a temperatura da limonada atingir os 52º F em uma hora, então sua temperatura T como função do tempo decorrido pode ser modelada pela equação

$$T = 70 - 30e^{-0{,}5t}$$

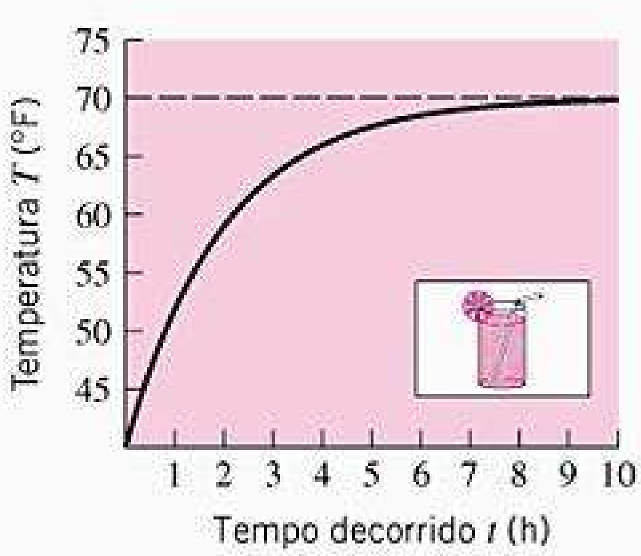


Figura 7.6.3

em que T está em graus Fahrenheit e t, em horas. O gráfico dessa equação, mostrado na Figura 7.6.3, confirma nossa experiência do dia-a-dia de que a temperatura da limonada converge gradualmente à temperatura da sala. Encontre a temperatura média T_m da limonada ao longo das primeiras 5 horas.

Solução Pela Definição 7.6.1, o valor médio de T no intervalo [0, 5] é

$$T_m = \frac{1}{5}\int_0^5 (70 - 30e^{-0{,}5t})\,dt \tag{3}$$

Para calcular essa integral, fazemos a substituição

$$u = -0{,}5\,t \quad \text{de modo que} \quad du = -0{,}5\,dt \quad [\text{ou } dt = -2\,du]$$

Com essa substituição,

$$u = 0 \qquad \text{se} \quad t = 0,$$
$$u = (-0{,}5)5 = -2{,}5 \quad \text{se} \quad t = 5$$

Assim, podemos expressar (3) como

$$T_m = \frac{1}{5}\int_0^{-2{,}5} (70 - 30e^u)(-2)\,du = -\frac{2}{5}\int_0^{-2{,}5} (70 - 30e^u)\,du$$

$$= -\frac{2}{5}\left[70u - 30e^u\right]_{u=0}^{-2{,}5} = -\frac{2}{5}\left[(-175 - 30e^{-2{,}5}) - (-30)\right]$$

$$= 58 + 12e^{-2{,}5} \approx 59\,°\text{F}$$ ◄

■ REVISÃO DE VELOCIDADE MÉDIA

Considere uma partícula em movimento retilíneo. Na Seção 3.1 definimos a velocidade média da partícula ao longo de um intervalo de tempo como o seu deslocamento no intervalo de tempo dividido pelo tempo decorrido. Assim, se a partícula tem função posição $s(t)$, então sua velocidade média v_m ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é

$$v_m = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Contudo, o deslocamento $s(t_1) - s(t_0)$ é a integral da velocidade ao longo do intervalo $[t_0, t_1]$ [Fórmula (3) da Seção 6.7]. Assim, podemos expressar v_m como

$$v_m = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt \tag{4}$$

que, pela Definição 7.6.1, é o valor médio da função velocidade no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$. Assim, mostramos que:

O valor médio da função velocidade de uma partícula em movimento retilíneo em um intervalo de tempo é igual à sua velocidade média ao longo daquele intervalo; ou seja, o valor médio da função velocidade é igual ao deslocamento da partícula dividido pelo tempo decorrido.

O resultado do Exemplo 3 pode ser generalizado para mostrar que a velocidade média de uma partícula em movimento uniformemente acelerado ao longo de um intervalo de tempo $[a, b]$ é a velocidade no instante $t = (a + b)/2$. (Ver Exercício 20.)

Como as funções velocidade costumam ser contínuas, segue da observação à margem da Definição 7.6.1 que a velocidade média de uma partícula ao longo de um intervalo de tempo é igual à sua velocidade em algum instante de tempo daquele intervalo.

► Exemplo 3 Mostre que, se um corpo largado do repouso (velocidade inicial nula) está em movimento de queda livre, então sua velocidade média no intervalo de tempo $[0, T]$ de sua queda é sua velocidade no instante $t = T / 2$.

Solução Segue da Fórmula (16) da Seção 6.7 com $v_0 = 0$ que a função velocidade do corpo é $v(t) = -gt$. Assim, sua velocidade média no intervalo de tempo $[0, T]$ é

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{1}{T - 0} \int_0^T v(t)\, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T -gt\, dt \\ &= -\frac{g}{T} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = -g \cdot \frac{T}{2} = v\left(\frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$ ◄

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.6 (*Ver página 481 para respostas.*)

1. A média aritmética dos n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é_________.
2. Se f for contínua em $[a, b]$, então o valor médio de f em $[a, b]$ é __________.
3. Se f for contínua em $[a, b]$, então o Teorema __________ para Integrais garante que, em pelo menos um ponto x^* de $[a, b]$, $f(x^*)$ é igual ao valor médio de f em $[a, b]$.
4. O valor médio de $f(x) = 4x^3$ em $[1, 3]$ é __________.

EXERCÍCIOS 7.6 [C] CAS

1. (a) Encontre f_m de $f(x) = 2x$ em $[0, 4]$.
   (b) Encontre um ponto x^* em $[0, 4]$ tal que $f(x^*) = f_m$.
   (c) Esboce o gráfico de $f(x) = 2x$ em $[0, 4]$ e construa um retângulo acima do intervalo, cuja área seja igual à área abaixo do gráfico de f naquele intervalo.
2. (a) Encontre f_m de $f(x) = x^2$ em $[0, 2]$.
   (b) Encontre um ponto x^* em $[0, 2]$ tal que $f(x^*) = f_m$.
   (c) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2$ em $[0, 2]$ e construa um retângulo acima do intervalo, cuja área seja igual à área abaixo do gráfico de f naquele intervalo.

3-14 Encontre o valor médio da função no intervalo dado.

3. $f(x) = 3x;\ [1, 3]$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x};\ [-1, 8]$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x;\ [0, \pi]$

6. $f(x) = \sec x \operatorname{tg} x;\ [0, \pi/3]$

7. $f(x) = 1/x;\ [1, e]$

8. $f(x) = e^x;\ [-1, \ln 5]$

9. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2};\ [1, \sqrt{3}]$

10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

11. $f(x) = \dfrac{x}{(5x^2+1)^2};\ [0, 2]$

12. $f(x) = \sec^2 \pi x;\ \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

13. $f(x) = e^{-2x};\ [0, 4]$

14. $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{6x}};\ \left[-\dfrac{\ln 3}{6}, 0\right]$

ENFOCANDO CONCEITOS

15. Seja $f(x) = 3x^2$.

(a) Encontre a média aritmética dos valores $f(0{,}4)$, $f(0{,}8)$, $f(1{,}2)$, $f(1{,}6)$ e $f(2{,}0)$.

(b) Encontre a média aritmética dos valores $f(0{,}1)$, $f(0{,}2)$, $f(0{,}3), \ldots, f(2{,}0)$.

(c) Encontre o valor médio de f em $[0, 2]$.

(d) Explique por que a resposta em (c) é menor do que as respostas em (a) e (b).

16. Seja $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

(a) Encontre a média aritmética dos valores $f\left(\frac{6}{5}\right)$, $f\left(\frac{7}{5}\right)$, $f\left(\frac{8}{5}\right)$, $f\left(\frac{9}{5}\right)$ e $f(2)$.

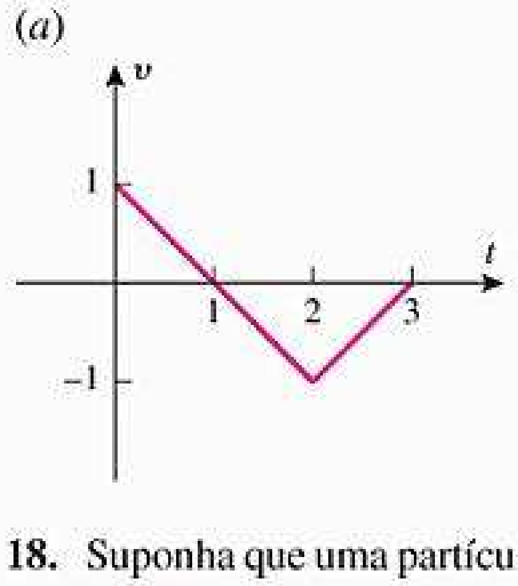
(b) Encontre a média aritmética dos valores $f(1{,}1)$, $f(1{,}2)$, $f(1{,}3), \ldots, f(2)$.

(c) Encontre o valor médio de f em $[1, 2]$.

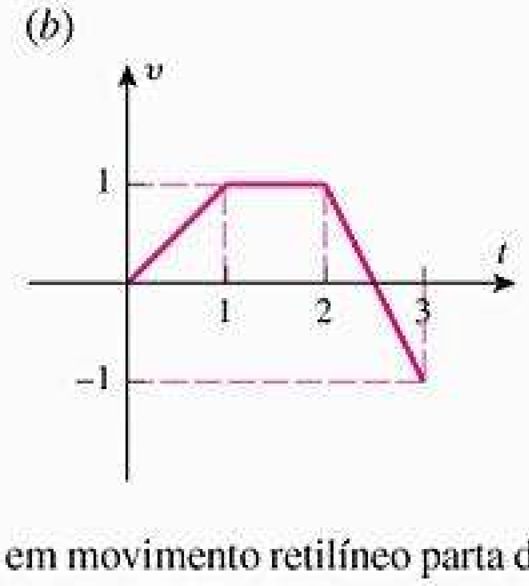
(d) Explique por que a resposta em (c) é maior do que as respostas em (a) e (b).

17. Em cada parte, é dada a curva velocidade *versus* tempo de uma partícula em movimento retilíneo. Use a curva para encontrar a velocidade média da partícula ao longo do intervalo de tempo $0 \le t \le 3$.

(*a*)



(*b*)



18. Suponha que uma partícula em movimento retilíneo parta do repouso e tenha uma velocidade média de 2 m/s ao longo do intervalo de tempo $0 \le t \le 5$. Esboce uma curva velocidade *versus* tempo para a partícula, supondo que a partícula também está em repouso no instante $t = 5$. Explique por que sua curva satisfaz as propriedades solicitadas.

19. Seja f uma função linear. Use o gráfico de f para explicar por que o valor médio de f em $[a, b]$ é

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

20. Suponha que uma partícula move-se ao longo de uma reta coordenada com aceleração constante. Mostre que a velocidade média da partícula ao longo do intervalo $[a, b]$ é igual à velocidade que ela tem no ponto médio do intervalo.

21. (a) Suponha que a função velocidade de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado seja $v(t) = 3t^3 + 2$. Encontre a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $1 \le t \le 4$ por integração.

(b) Suponha que a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado seja $s(t) = 6t^2 + t$. Encontre a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $1 \le t \le 4$ algebricamente.

22. (a) Suponha que a função aceleração de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado seja $a(t) = t + 1$. Encontre a aceleração média da partícula no intervalo de tempo $0 \le t \le 5$ por integração.

(b) Suponha que a função velocidade de uma partícula movendo-se ao longo de um eixo coordenado seja $v(t) = \cos t$. Encontre a aceleração média da partícula no intervalo de tempo $0 \le t \le \pi/4$ algebricamente.

23. A água está fluindo a uma taxa constante de 1 pé^3/min para encher um tanque cilíndrico com 3 pés de raio e 5 pés de altura. Supondo que o tanque esteja vazio inicialmente, faça uma conjectura sobre o peso médio da água nele no intervalo de tempo necessário para enchê-lo, e verifique-a por integração. [Considere a densidade específica da água como sendo de 62,4 libras por pé cúbico.]

24. (a) A temperatura de uma barra de metal com 10 metros de comprimento é de 15°C em uma ponta e 30°C na outra. Supondo que a temperatura aumenta linearmente do extremo mais frio para o mais quente, qual é a temperatura média da barra?

(b) Explique por que deve haver um ponto na barra em que a temperatura é igual à média; encontre-o.

25. Uma engenheira de tráfego monitora o trânsito durante uma hora do horário de pico da tarde. A partir de seus dados, ela estima que, entre as 4 horas e 30 minutos e as 5 horas e 30 minutos da tarde, a taxa $R(t)$ segundo a qual os carros entram em uma certa via expressa é dada pela fórmula $R(t) = 100(1 - 0{,}0001t^2)$ carros por minuto, onde t é o tempo (em minutos) desde as 4 horas e 30 minutos. Encontre a taxa média, em carros por minuto, segundo a qual os carros entram na via expressa entre as 4 horas e 30 minutos e as 5 horas da tarde.

26. Suponha que o valor em dólares de um iate com t anos de uso seja $V(t) = 275.000e^{-0{,}17t}$. Qual é o valor médio do iate ao longo de seus primeiros 10 anos de uso?

27. (a) A tabela abaixo mostra a fração da Lua (como vista da Terra) que está iluminada pelo Sol à meia-noite (no horário de Nova York) durante a primeira semana de 2005. Encontre a fração média da Lua que está iluminada durante essa primeira semana de 2005.

Fonte: Dados do Departamento de Astronomia Aplicada do Observatório Naval dos EUA.

(b) A função $f(x) = 0{,}5 + 0{,}5\,\text{sen}(0{,}213x + 2{,}481)$ modela os dados para a iluminação da Lua durante os primeiros 60 dias de 2005. Encontre o valor médio dessa função iluminação ao longo do intervalo [0, 7].

DIA	1	2	3	4	5	6	7
ILUMINAÇÃO	0,74	0,65	0,56	0,45	0,35	0,25	0,16

Tabela Ex-27

28. A função J_0 definida por

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\,\text{sen}\,t)\,dt$$

é chamada de ***função de Bessel de ordem zero***.

(a) Encontre uma função f e um intervalo $[a, b]$ para o qual $J_0(1)$ seja o valor médio de f sobre $[a, b]$.

(b) Dê uma estimativa para $J_0(1)$.

(c) Use um CAS para traçar o gráfico de $y = J_0(x)$ no intervalo $0 \le x \le 8$.

(d) Dê uma estimativa para o menor zero positivo de J_0.

29. Encontre um valor positivo de k para o qual o valor médio de $f(x) = \sqrt{3x}$ acima do intervalo $[0, k]$ seja 6.

30. Encontre um valor positivo de k para o qual o valor médio de $f(x) = 1/(k^2 + x^2)$ acima do intervalo $[-k, k]$ seja π.

31. A eletricidade é fornecida para as casas na forma de ***corrente alternada***, significando que a voltagem tem uma forma senoidal, descrita por uma equação da forma

$$V = V_p\,\text{sen}(2\,\pi\,ft)$$

(ver figura abaixo). Nessa equação, V_p é o ***pico de voltagem*** ou ***amplitude*** da corrente, f é a ***freqüência*** e $1/f$ é o ***período***. As voltagens V e V_p são medidas em volts (V), o tempo é medido em segundos (s) e a freqüência é medida em hertz (Hz) ou, às vezes, em ciclos por segundo. (Um ***ciclo*** é o termo elétrico para um período.) Os voltímetros de corrente alternada medem o que é chamado ***rms*** ou ***raiz média quadrada*** do valor de V. Por definição, isso é a raiz quadrada do valor médio de V^2 sobre um período.

(a) Mostre que

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

[*Sugestão*: Calcule a média sobre o ciclo de $t = 0$ a $t = 1/f$, e use a identidade $\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ para ajudar a calcular a integral.]

(b) Nos Estados Unidos, o fornecimento de energia elétrica é feito com uma voltagem *rms* de 120 V, a uma freqüência de 60 Hz. Qual é o pico de voltagem desse fornecimento?

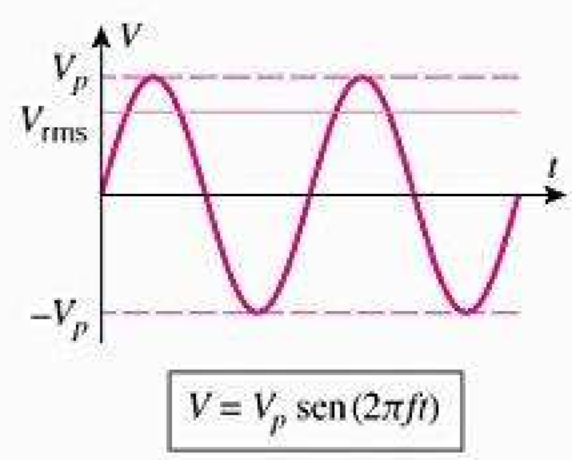


Figura Ex-31

32. Suponha que um tumor cresça a uma taxa de $r(t) = kt$ gramas por semana, para alguma constante positiva k, onde t indica o número de semanas desde que ele surgiu. Quando, durante as semanas 27 a 52, o peso do tumor é igual ao peso médio durante essas 26 semanas?

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.6

1. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ **2.** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ **3.** Valor Médio **4.** 40

7.7 TRABALHO

Nesta seção usaremos as ferramentas de integração desenvolvidas no capítulo precedente para estudar alguns dos princípios básicos do "trabalho", um dos conceitos fundamentais da Física e da Engenharia.

O PAPEL DO TRABALHO NA FÍSICA E NA ENGENHARIA

Nesta seção estaremos interessados em dois conceitos relacionados, *trabalho* e *energia*. Para pôr essas idéias em um cenário familiar: quando empurramos um carro atolado por uma certa

distância, estamos realizando trabalho; e o efeito desse trabalho é fazer o carro se movimentar. A energia do movimento causada pelo trabalho é a *energia cinética* do carro. A relação exata entre trabalho e energia cinética é governada por um princípio da Física, a *relação energia-trabalho*. No que segue, tocaremos nessa idéia, mas um estudo detalhado da relação entre trabalho e energia será deixado para os cursos de Física e de Engenharia. Nossa meta principal aqui será explicar o papel da integração no estudo do trabalho.

TRABALHO FEITO POR UMA FORÇA CONSTANTE APLICADA NA DIREÇÃO E NO SENTIDO DO MOVIMENTO

Quando um carro atolado é empurrado, a velocidade atingida por ele depende da força F com a qual é empurrado e da distância d, durante a qual a força é aplicada (Figura 7.7.1). Assim, força e distância são os ingredientes do trabalho na definição seguinte.

7.7.1 DEFINIÇÃO Se uma força constante de magnitude F for aplicada na direção e no sentido do movimento de um objeto, e se esse objeto se move por uma distância d, então definimos o ***trabalho*** W realizado pela força sobre o objeto como sendo

$$W = F \cdot d \qquad (1)$$

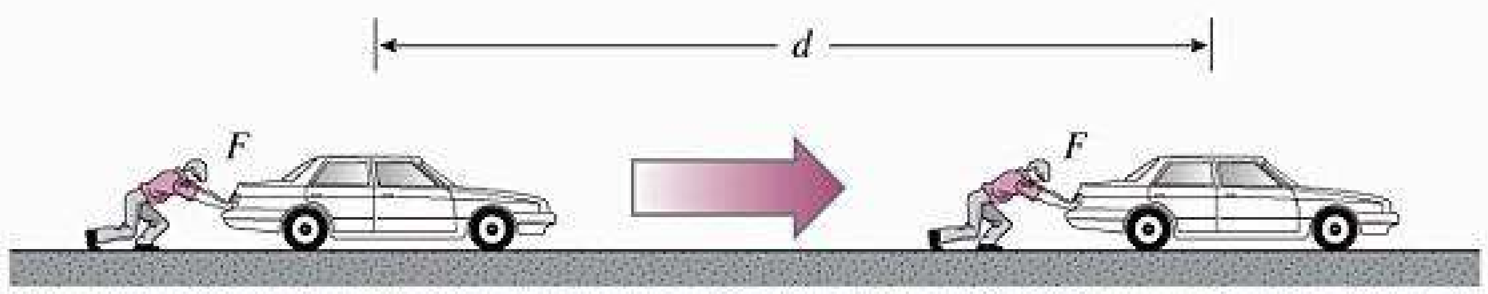


Figura 7.7.1

Se empurrarmos um objeto que não se move (p. ex., uma parede de tijolos), podemos ficar cansados, mas não realizamos trabalho. Por quê?

Unidades comuns de medida de força são newtons (N) no sistema MKS (metro, quilo e segundo), dina (din) no sistema CGS (centímetro, grama e segundo) e libras (lb) no sistema Britânico de Engenharia (BE). Um newton é a força necessária para dar a uma massa de 1 kg uma aceleração de 1 m/s^2; um dina é a força necessária para dar a uma massa de 1 g uma aceleração de 1 cm/s^2; e uma libra de força é a força necessária para dar a uma massa de 1 libra (lb) uma aceleração de 32 pés/s^2.

Tem-se, a partir da Definição 7.7.1, que o trabalho tem unidades de força vezes distância. As unidades mais comuns de trabalho são o newton-metro (N · m), o dina-centímetro (din · cm) e o pé-libra (pé · lb). Conforme indicado na Tabela 7.7.1, 1 newton-metro é também chamado de 1 ***joule*** (J) e 1 dina-centímetro, 1 ***erg***. Já 1 pé-libra equivale aproximadamente a 1,36 J.

Tabela 7.7.1

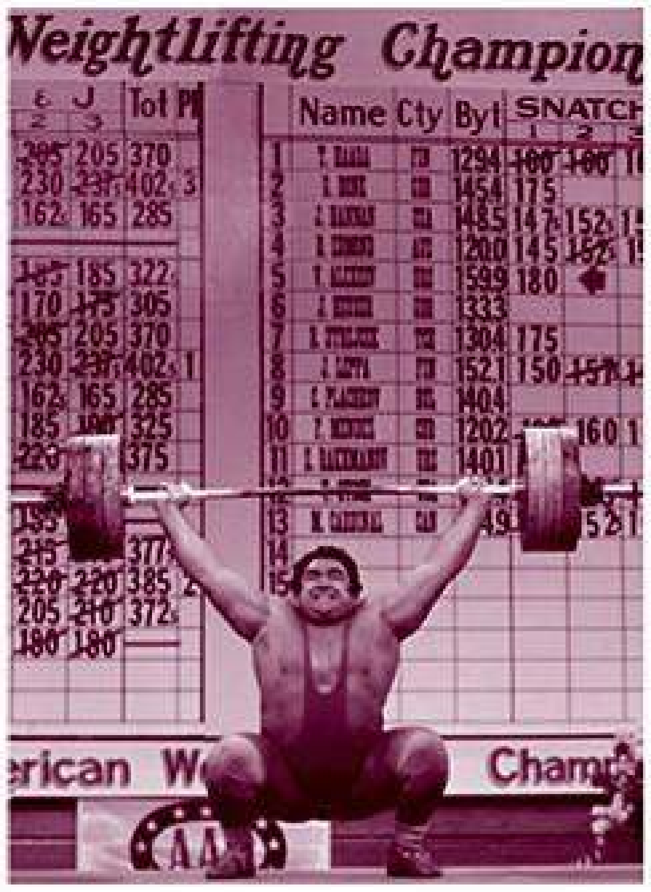
SISTEMA	FORÇA ×	DISTÂNCIA =	TRABALHO
MKS	newton (N)	metro (m)	joule (J)
CGS	dina (din)	centímetro (cm)	erg
BE	libra (lb)	pé (ft)	pé-libra (pé · lb)

FATORES DE CONVERSÃO

1 N = 10^5 din ≈ 0,225 lb	1 lb ≈ 4,45 N
1 J = 10^7 erg ≈ 0,738 pé·lb	1 pé · lb ≈ 1,36 J = 1,36 × 10^7 erg

▶ Exemplo 1 Um objeto move-se 5 pés ao longo de uma reta, enquanto sujeito a uma força constante de 100 lb, no sentido de seu movimento. O trabalho realizado é

$$W = F \cdot d = 100 \cdot 5 = 500 \text{ pés} \cdot \text{lb}$$



Vasili Alexeev quebrando o recorde de levantamento de peso, com 562 lb, na Olimpíada de 1976.

Um objeto move-se 25 m ao longo de uma reta, enquanto sujeito a uma força constante de 4 N, no sentido de seu movimento. O trabalho realizado é

$$W = F \cdot d = 4 \cdot 25 = 100 \text{ N} \cdot \text{m} = 100 \text{ J} \blacktriangleleft$$

▶ **Exemplo 2** Na Olimpíada de 1976, Vasili Alexeev espantou o mundo levantando 562 lb a cerca de 2 m desde o chão até acima de sua cabeça, quebrando um recorde. Igualmente espantoso foi o feito de Paul Anderson, que, em 1957, de bruços no chão, e usando as costas, levantou 6.270 lb de chumbo e de peças de automóvel por uma altura de 1 cm. Quem realizou mais trabalho?

Solução Para levantar um objeto, é necessário aplicar uma força suficiente para vencer a força gravitacional exercida pela Terra. A força que a Terra exerce no objeto é o seu peso; dessa forma, Alexeev aplicou uma força de 562 lb por uma distância de 2 m, enquanto Anderson aplicou uma força de 6.270 lb por uma distância de 1 cm. Como libras são unidades do sistema BE, metros são unidades do MKS e centímetros são unidades do CGS, precisamos decidir em qual sistema vamos trabalhar. Vamos usar o sistema MKS e, portanto, expressar em joules o trabalho dos dois homens. Usando a Tabela 7.7.1, obteremos

$$562 \text{ lb} \approx 562 \text{ lb} \times 4{,}45 \text{ N/lb} \approx 2500 \text{ N}$$
$$6270 \text{ lb} \approx 6270 \text{ lb} \times 4{,}45 \text{ N/lb} \approx 27{,}900 \text{ N}$$

Usando esses valores e o fato de que 1 cm = 0,01 m, obtemos

$$\text{trabalho de Alexeev} = (2500 \text{ N}) \times (2 \text{ m}) \approx 5000 \text{ J}$$
$$\text{trabalho de Anderson} = (27{,}900 \text{ N}) \times (0{,}01 \text{ m}) \approx 279 \text{ J}$$

Logo, muito embora o levantamento de Anderson tenha exigido uma enorme força para cima, ela foi aplicada por tão pouca distância que Alexeev realizou mais trabalho. ◀

TRABALHO FEITO POR UMA FORÇA VARIÁVEL APLICADA NA DIREÇÃO E NO SENTIDO DO MOVIMENTO

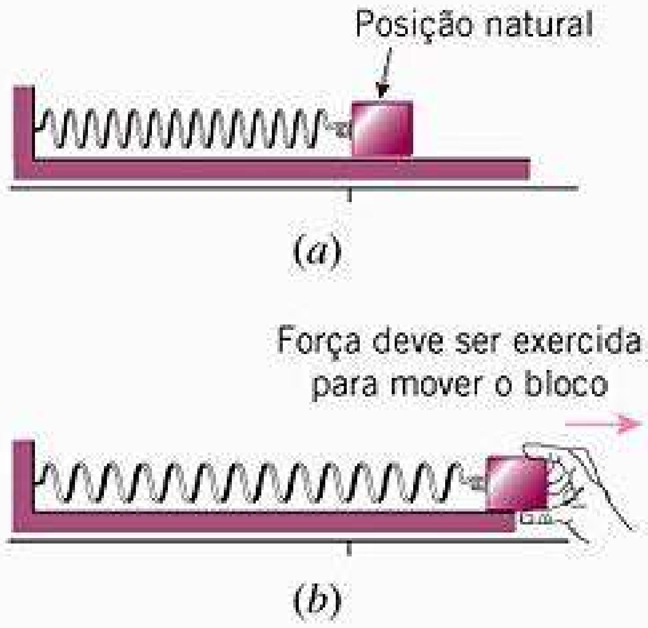


Figura 7.7.2

Muitos problemas importantes tratam de encontrar o trabalho realizado por uma força *variável* aplicada na direção e no sentido do movimento. Por exemplo, a Figura 7.7.2*a* mostra uma mola em seu estado natural (nem comprimida, nem esticada). Se quisermos puxar o bloco horizontalmente (Figura 7.7.2*b*), então teremos de aplicar uma força cada vez maior para vencer a força crescente da mola esticada. Assim, nosso próximo objetivo é definir o que entendemos por trabalho realizado por uma força variável e encontrar uma fórmula para calculá-lo. Isso irá requerer Cálculo.

7.7.2 PROBLEMA Suponha que um objeto se mova no sentido positivo, ao longo de um eixo coordenado, sujeito a uma força variável $F(x)$ que é aplicada no sentido do movimento. Defina o que entendemos por *trabalho W* realizado pela força sobre o objeto, quando este se move de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

A idéia básica para resolver esse problema é dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos suficientemente pequenos para que a força não varie muito em cada intervalo. Isso nos permitirá tratar a força como constante em cada intervalo e, em cada um deles, aproximar o trabalho usando a Fórmula (1). Somando as aproximações do trabalho nos subintervalos, iremos obter uma soma de Riemann, que aproxima o trabalho W em todo intervalo; tomando o limite das somas de Riemann iremos obter uma integral para W.

Para implementar essa idéia, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, inserindo os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre $a = x_0$ e $b = x_n$. Podemos usar a Fórmula (1) para aproximar o trabalho W_k realizado no k-ésimo subintervalo, escolhendo um ponto qualquer x_k^* nesse intervalo e considerando a força como tendo um valor constante $F(x_k^*)$ em todo o intervalo. Uma vez que a extensão do k-ésimo subintervalo é $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, obtemos a aproximação

$$W_k \approx F(x_k^*)\Delta x_k$$

Somando essas aproximações, obtemos a seguinte soma de Riemann, que aproxima o trabalho W realizado em todo o intervalo:

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*)\Delta x_k$$

Tomando o limite quando n cresce e as extensões dos subintervalos tendem a zero, obtemos a integral definida

$$W = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b F(x)\, dx$$

Em suma, temos o seguinte resultado:

7.7.3 DEFINIÇÃO Suponha que um objeto se mova no sentido positivo ao longo de um eixo coordenado pelo intervalo $[a, b]$, enquanto sujeito a uma força variável $F(x)$ que é aplicada no sentido do movimento. Então, definimos o ***trabalho*** W realizado pela força sobre o objeto por

$$W = \int_a^b F(x)\, dx \tag{2}$$

A ***lei de Hooke*** [Robert Hooke (1635-1703), físico inglês] afirma que, sob condições apropriadas, uma mola esticada x unidades além de seu comprimento natural puxa de volta com uma força

$$F(x) = kx$$

onde k é uma constante (chamada de ***constante da mola*** ou ***rigidez da mola***). O valor de k depende de fatores tais como a espessura da mola e o material usado em sua composição. Como $k = F(x)/x$, a constante k tem unidades de força por unidade de comprimento.

► Exemplo 3 Uma mola exerce uma força de 5 N quando esticada 1 m além de seu comprimento natural.

(a) Encontre a constante k da mola.

(b) Quanto trabalho é necessário para esticar a mola 1,8 m além de seu comprimento natural?

Solução (a) A partir da lei de Hooke,

$$F(x) = kx$$

A partir dos dados, $F(x) = 5$ N quando $x = 1$ m, logo $5 = k \cdot 1$. Assim, a constante da mola é $k = 5$ newtons por metro (N/m). Isso significa que a força $F(x)$ necessária para esticar a mola em x metros é

$$F(x) = 5x \tag{3}$$

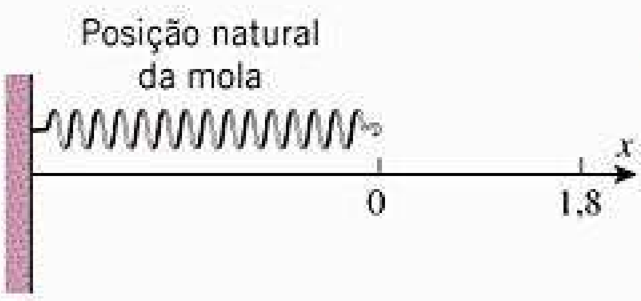


Figura 7.7.3

Solução (b) Coloquemos a mola ao longo de um eixo coordenado, conforme a Figura 7.7.3. Queremos encontrar o trabalho W necessário para esticar a mola pelo intervalo de $x = 0$ a $x = 1{,}8$. A partir de (2) e (3), o trabalho necessário é

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_0^{1,8} 5x\,dx = \frac{5x^2}{2}\bigg]_0^{1,8} = 8{,}1 \text{ J}$$

▶ Exemplo 4 O *peso* de um astronauta (ou, mais precisamente, seu *peso terrestre*) é a força exercida sobre ele pela gravidade da Terra. À medida que o astronauta se move para cima no espaço, a atração gravitacional da Terra decresce e, portanto, o mesmo acontece com seu peso. Iremos mostrar, mais adiante, que, se supusermos que a Terra é uma esfera com um raio de 4.000 milhas (cerca de 6.400 km), então, um astronauta que pesa 150 libras (cerca de 68 kg) na Terra terá um peso de

$$w(x) = \frac{2.400.000.000}{x^2} \text{ lb}, \quad x \geq 4000$$

a uma distância de x milhas do centro da Terra. Use essa fórmula para determinar o trabalho em pés-libras necessário para elevar o astronauta a um ponto que está a 800 milhas acima da superfície da Terra (Figura 7.7.4).

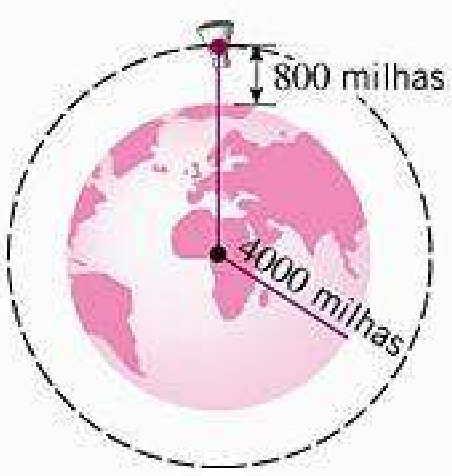


Figura 7.7.4

Solução Como a Terra tem um raio de 4.000 milhas, o astronauta será elevado para um ponto a 4.800 milhas do centro da Terra. Assim, a partir de (2), e lembrando que 1 milha = 5.280 pés, o trabalho necessário para elevá-lo é

$$\begin{aligned} W &= \int_{4000}^{4800} \frac{2.400.000.000}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{2.400.000.000}{x}\bigg]_{4000}^{4800} \\ &= -500.000 + 600.000 \\ &= 100.000 \text{ milhas-libras} \\ &= (100.000 \text{ milhas} \cdot \text{lb}) \times (5.280 \text{ pés/milhas}) \\ &= 5{,}28 \times 10^8 \text{ pés} \cdot \text{lb} \end{aligned}$$

■ CALCULANDO TRABALHO A PARTIR DE PRINCÍPIOS BÁSICOS

Alguns problemas não podem ser resolvidos pela substituição mecânica de dados em fórmulas, sendo preciso recorrer a princípios básicos para obter as soluções. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

▶ Exemplo 5 Um tanque de água cônico tem um raio de 10 pés e altura de 30 pés, estando cheio até uma profundidade de 15 pés (Figura 7.7.5*a*). Qual é o trabalho necessário para bombear para fora toda a água através de um orifício no topo do tanque?

Solução Nossa estratégia será dividir a água em camadas finas, aproximar o trabalho necessário para mover cada camada até o topo do tanque, somar as aproximações das camadas para obter uma soma de Riemann que aproxime o trabalho total e então tomar o limite das somas de Riemann para obter uma integral do trabalho total.

Para implementar essa idéia, introduzimos um eixo x, como mostra a Figura 7.7.5*a*, e dividimos a água em n camadas, denotando a espessura da k-ésima camada por Δx_k. Essa divisão induz uma partição do intervalo [15, 30] em n subintervalos. Embora as superfícies superior e inferior da k-ésima camada estejam a distâncias diferentes do topo, essa diferença será pequena se a camada for fina, e é razoável supor que a camada inteira esteja concentrada

em um único ponto x_k^* (Figura 7.7.5*a*). Assim, o trabalho W_k necessário para mover a k-ésima camada até o topo do tanque é, aproximadamente,

$$W_k \approx F_k x_k^* \quad (4)$$

onde F_k é a força necessária para elevar a k-ésima camada. Mas a força requerida para elevar a k-ésima camada é a força necessária para vencer a gravidade, e essa é a mesma que o peso da camada. Se a camada for muito fina, podemos aproximar o volume da k-ésima camada pelo volume de um cilindro de altura Δx_k e raio r_k, onde (por semelhança de triângulos)

$$\frac{r_k}{x_k^*} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

ou, equivalentemente, $r_k = x_k^*/3$ (Figura 7.7.5*b*). Portanto, o volume da k-ésima camada de água é, aproximadamente,

$$\pi r_k^2 \Delta x_k = \pi(x_k^*/3)^2 \Delta x_k = \frac{\pi}{9}(x_k^*)^2 \Delta x_k$$

Como a densidade de peso da água é 62,4 lb/pé³, segue que

$$F_k \approx \frac{62{,}4\pi}{9}(x_k^*)^2 \Delta x_k$$

Assim, por (4)

$$W_k \approx \left(\frac{62{,}4\pi}{9}(x_k^*)^2 \Delta x_k\right) x_k^* = \frac{62{,}4\pi}{9}(x_k^*)^3 \Delta x_k$$

e, portanto, o trabalho W requerido para mover todas as n camadas tem a aproximação

$$W = \sum_{k=1}^{n} W_k \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{62{,}4\pi}{9}(x_k^*)^3 \Delta x_k$$

Para encontrar o valore *exato* do trabalho, tomamos o limite quando $\Delta x_k \to 0$. Isso fornece

$$W = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{62{,}4\pi}{9}(x_k^*)^3 \Delta x_k = \int_{15}^{30} \frac{62{,}4\pi}{9} x^3\,dx$$

$$= \frac{62{,}4\pi}{9}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_{15}^{30} = 1.316.250\pi \approx 4.135.000 \text{ pés}\cdot\text{lb} \blacktriangleleft$$

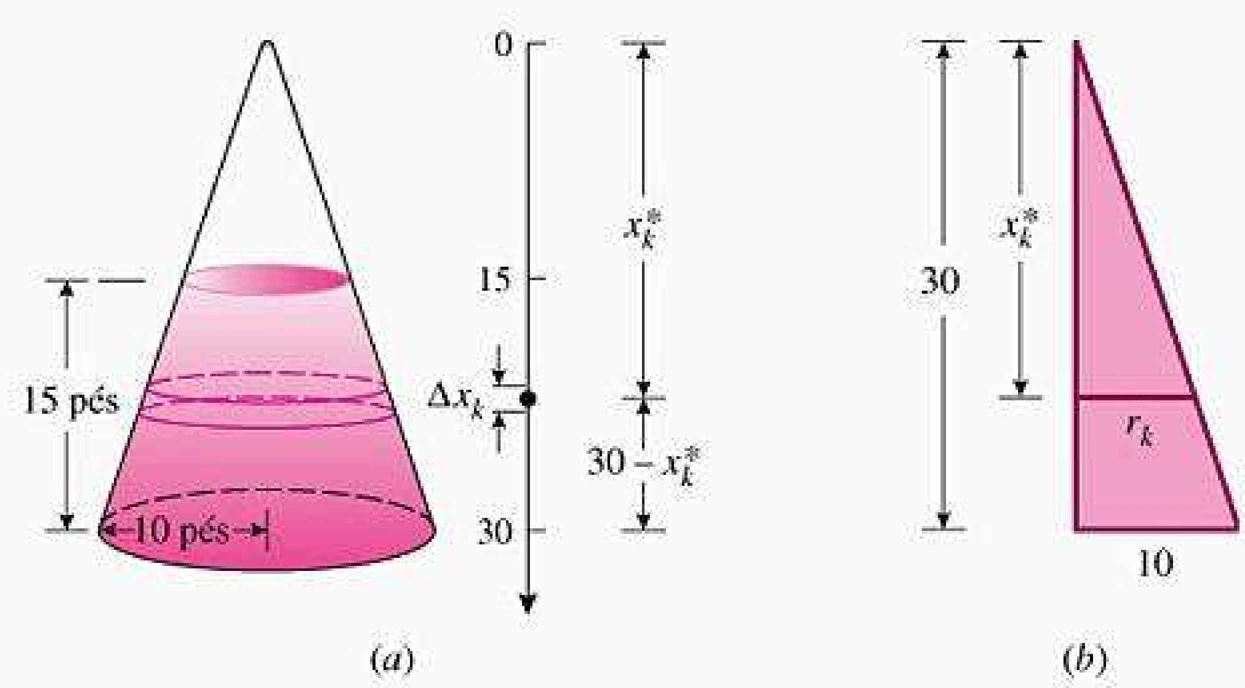


Figura 7.7.5

■ A RELAÇÃO ENERGIA-TRABALHO

Quando vemos um objeto em movimento, podemos ter certeza de que foi realizado algum trabalho para criar esse movimento. Por exemplo, quando largamos uma pedra de um prédio, a pedra ganha velocidade escalar porque a força da gravidade terrestre realiza trabalho sobre ela; quando um jogador de hóquei no gelo golpeia o disco com seu bastão, o trabalho realizado no disco durante o breve instante de tempo em que está em contato com o bastão cria a enorme velocidade escalar do disco deslizando sobre o gelo.

Contudo, a experiência mostra que a velocidade escalar obtida por um objeto depende não só da quantidade de trabalho realizada, mas também da massa do objeto. Por exemplo, o trabalho necessário para lançar uma bola de beisebol de 150 gramas a 80 km/h aceleraria uma bola de boliche de 5 kg a menos de 14 km/h.

Usando o método da substituição para integrais definidas, obteremos uma equação simples que relaciona o trabalho realizado sobre um objeto com a velocidade e a massa do mesmo. Além disso, essa equação nos permitirá motivar uma definição apropriada da "energia do movimento" de um objeto. Como na Definição 7.7.3, vamos supor que um objeto move-se no sentido positivo ao longo de uma reta coordenada no intervalo $[a, b]$ enquanto sujeito a uma força $F(x)$ aplicada na direção do movimento. Sejam $x = x(t)$, $v = v(t) = x'(t)$ e $v'(t)$ a posição, a velocidade e a aceleração do objeto no instante de tempo t, respectivamente. Segue da Segunda Lei de Newton do Movimento que

$$F(x(t)) = mv'(t)$$

onde m é a massa do objeto. Suponha que

$$x(t_0) = a \quad \text{e} \quad x(t_1) = b$$

com

$$v(t_0) = v_i \quad \text{e} \quad v(t_1) = v_f$$

sendo as velocidades inicial e final do objeto, respectivamente. Então

$$\begin{aligned}
W &= \int_a^b F(x)\,dx = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F(x)\,dx \\
&= \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))x'(t)\,dt && \boxed{\text{Pelo Teorema 6.8.1 com } x = x(t),\ dx = x'(t)\,dt} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} mv'(t)v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} mv(t)v'(t)\,dt \\
&= \int_{v(t_0)}^{v(t_1)} mv\,dv && \boxed{\text{Pelo Teorema 6.8.1 com } v = v(t),\ dv = v'(t)\,dt} \\
&= \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = \tfrac{1}{2}mv^2\Big|_{v_i}^{v_f} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2
\end{aligned}$$

Vemos, a partir da equação

$$W = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \tag{5}$$

que o trabalho realizado no objeto é igual à variação na quantidade $\frac{1}{2}mv^2$ de seu valor inicial para o valor final. Dizemos que a Equação (5) expressa a ***relação energia-trabalho***. Se definirmos a "energia do movimento" ou, mais precisamente, a ***energia cinética*** de nosso objeto como sendo

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{6}$$

então a Equação (5) nos diz que o trabalho realizado em um objeto é igual à *variação* da energia cinética do objeto. Falando informalmente, podemos dizer que o trabalho realizado em um objeto é "transformado" em energia cinética do mesmo. As unidades de energia cinética são as mesmas unidades do trabalho. Por exemplo, no sistema MKS, a energia cinética é medida em joules (J).

► Exemplo 6 Uma sonda espacial com massa $m = 5{,}00 \times 10^4$ kg viaja no espaço exterior, sujeita somente à força de seu próprio mecanismo. Começando pelo instante em que sua velocidade é $v = 1{,}10 \times 10^4$ m/s, o mecanismo é acionado continuamente por uma distância de $2{,}50 \times 10^6$ m, com uma força constante de $4{,}00 \times 10^5$ N na direção e sentido do movimento. Qual é a velocidade final da sonda?

Solução Como a força aplicada pelo mecanismo é constante e na direção e sentido do movimento, o trabalho W realizado pelo mecanismo da sonda é

$$W = \text{força} \times \text{distância} = (4{,}00 \times 10^5) \times (2{,}50 \times 10^6 \text{ m}) = 1{,}00 \times 10^{12} \text{ J}$$

A partir de (5), a energia cinética final $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ da sonda pode ser expressa em termos do trabalho W e da energia cinética inicial $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$, como sendo

$$K_f = W + K_i$$

Assim, conhecidas a massa e a velocidade inicial, temos que

$$K_f = (1{,}00 \times 10^{12}\ \text{J}) + \tfrac{1}{2}(5{,}00 \times 10^4\ \text{kg})(1{,}10 \times 10^4\ \text{m/s})^2 = 4{,}025 \times 10^{12}\ \text{J}$$

A energia cinética final é $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$; logo, a velocidade final da sonda é

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(4{,}025 \times 10^{12})}{5{,}00 \times 10^4}} \approx 1{,}27 \times 10^4\ \text{m/s} \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.7 (*Ver página 490 para respostas.*)

1. Se uma força constante de 5 lb mover um objeto por 10 pés, então o trabalho realizado por ela no objeto será de __________.
2. Um newton-metro é também chamado de __________. Um dina-centímetro é também chamado de __________.
3. Suponha que um objeto move-se no sentido positivo ao longo de um eixo coordenado sobre o intervalo $[a, b]$. O trabalho realizado no objeto por uma força variável $F(x)$ aplicada no sentido do movimento é $W =$ __________.
4. Uma força de $F(x) = 10 - 2x$ N aplicada no sentido x positivo move um objeto por 3 m de $x = 2$ até $x = 5$. O trabalho realizado pela força no objeto é __________.

EXERCÍCIOS 7.7

1. Encontre o trabalho realizado quando
   (a) uma força constante de 30 lb, no sentido positivo do eixo x, move um objeto de $x = -2$ a $x = 5$ pés.
   (b) uma força variável $F(x) = 1/x^2$ lb, no sentido positivo do eixo x, move um objeto de $x = 1$ a $x = 6$ pés.
2. Uma força variável $F(x)$, no sentido positivo do eixo x, tem seu gráfico mostrado abaixo. Encontre o trabalho realizado por ela sobre uma partícula que se move de $x = 0$ a $x = 5$.

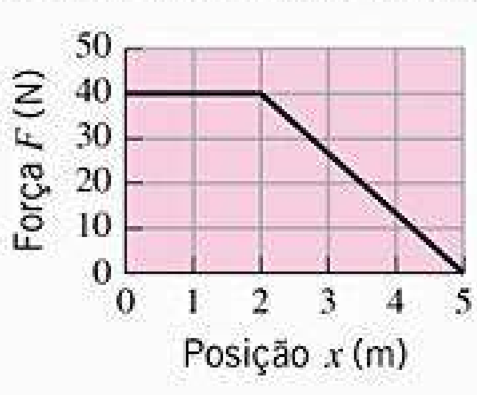


Figura Ex-2

ENFOCANDO CONCEITOS

3. Para a força variável $F(x)$ do Exercício 2, considere a distância d para a qual o trabalho realizado pela força sobre a partícula quando esta se move de $x = 0$ até $x = d$ é a metade do trabalho realizado quando a partícula se move de $x = 0$ até $x = 5$. Examinando o gráfico de F, decida se d é maior ou menor do que 2,5. Explique seu raciocínio e então obtenha o valor exato de d.
4. Suponha que uma força variável $F(x)$ seja aplicada no sentido positivo do eixo x, de tal forma que um objeto é movido de $x = a$ até $x = b$. Relacione o trabalho realizado pela força sobre o objeto com o valor médio de F sobre $[a, b]$ e ilustre essa relação graficamente.
5. Em qual circunstância realizamos mais trabalho: levantando uma xícara de café da mesa até a boca ou segurando um livro de Cálculo à altura dos ombros durante 5 minutos? Explique.

6. Uma força constante de 40 N no sentido positivo do eixo x é aplicada a uma partícula cuja curva velocidade *versus* tempo está dada na figura abaixo. Encontre o trabalho feito pela força sobre a partícula no intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = 15$.

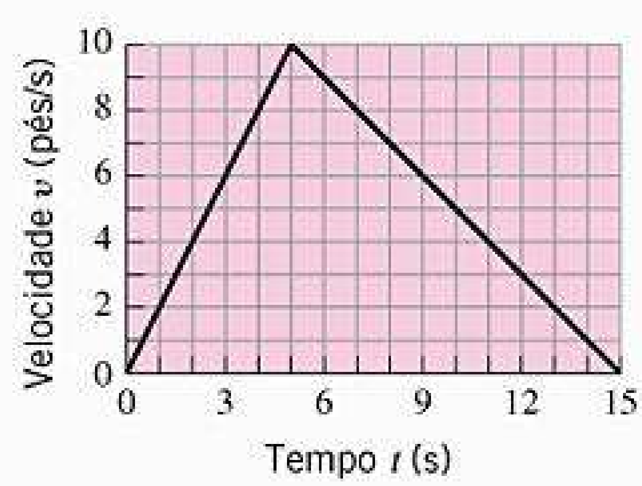


Figura Ex-6

7. Uma força constante de 10 lb no sentido positivo do eixo x é aplicada a uma partícula cuja curva velocidade *versus* tempo está dada na figura a seguir. Encontre o trabalho realizado pela força sobre a partícula do instante $t = 0$ até $t = 5$.

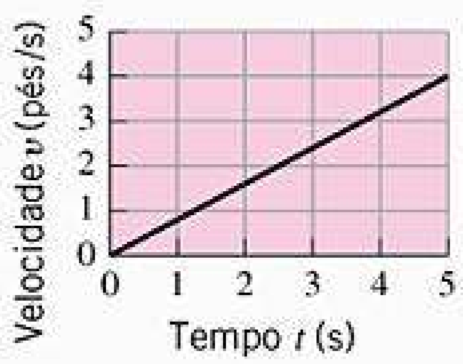


Figura Ex-7

8. Uma mola cujo tamanho natural é de 15 cm exerce uma força de 45 N, quando esticada até um comprimento de 20 cm.

(a) Encontre a constante da mola (em N/m).

(b) Encontre o trabalho realizado ao esticar a mola 3 cm além de seu tamanho natural.

(c) Encontre o trabalho realizado ao esticar a mola de 20 para 25 cm.

9. Uma mola exerce uma força de 100 N, quando esticada por 0,2 m além de seu comprimento natural. Qual é o trabalho necessário para esticar a mola 0,8 m além de seu comprimento natural?

10. Suponha que se requeira uma força de 6 N para comprimir uma mola de seu comprimento natural de 4 m para 3,5 m. Encontre o trabalho necessário para comprimir a mola de seu comprimento natural para 2 m. (A lei de Hooke se aplica também para as compressões.)

11. Suponha que um trabalho de 10 pés-lb seja necessário para esticar uma mola 1 pé, além de seu comprimento natural. Qual é a constante da mola?

12. Um tanque cilíndrico com raio de 5 m e altura de 9 m tem 2/3 cheios de água. Encontre o trabalho necessário para bombear toda água por cima da borda superior do tanque.

13. Resolva o Exercício 12, supondo que o tanque tem 2/3 cheios de um líquido que pesa ρ kg/m^3.

14. Um reservatório de água, com a forma de um cone, tem 6 m de diâmetro no topo e 4,5 m de profundidade. Se ele estiver cheio até uma profundidade de 3 m, qual é o trabalho necessário para bombear toda água até o topo do reservatório?

15. O tanque na Figura Ex-15 tem água até uma profundidade de 2 m. Encontre o trabalho necessário para bombear toda a água até o topo do tanque. [Use 9810 N/m^3 como a densidade do peso da água.]

16. Um tanque cilíndrico, mostrado na Figura Ex-16, está cheio com um líquido pesando 50 lb/pé^3. Encontre o trabalho necessário para bombear todo o líquido a um nível de 1 pé acima do topo do tanque.

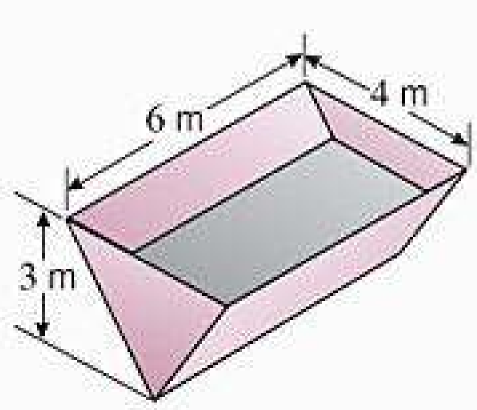


Figura Ex-15

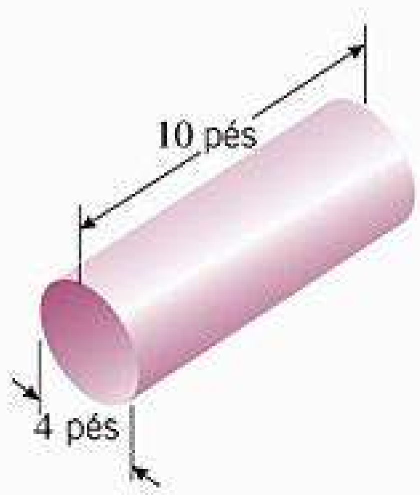


Figura Ex-16

17. Uma piscina é construída na forma de um paralelepípedo retangular com 3 m de profundidade, 4,5 m de largura e 6 m de comprimento.

(a) Se ela for preenchida até 30 cm abaixo do topo, qual é o trabalho necessário para bombear toda água para dentro de um ralo em sua beirada?

(b) Um motor de 1 cavalo de potência pode realizar 748 J/s. Qual é a potência necessária para um motor esvaziar a piscina em 1 h?

18. Quanto trabalho é necessário para encher a piscina do Exercício 17 até o nível de 30 cm abaixo do topo, se a água for bombeada para dentro através de uma abertura localizada no fundo da piscina?

19. Uma corrente de aço com 100 pés de comprimento e pesando 15 lb/pé está pendente por uma polia. Qual é o trabalho necessário para içar a corrente pela polia?

20. Um balde de 1,5 kg contendo 10 kg de água está pendurado na ponta de uma corda de 7 m que pesa 50 g/m. A outra extremidade da corda está presa em uma roldana. Qual é o trabalho requerido para içar toda a corda para cima, enrolando-a na roldana, se a corda for içada a uma taxa de 0,7 m/s e se, enquanto o balde for içado, a água vaza do balde a uma taxa de 250 g/s?

21. Um foguete pesando 3 toneladas carrega 40 toneladas de combustível líquido. No início do vôo, o combustível é queimado a uma taxa constante de 2 toneladas para cada 1.000 pés de altura vertical. Qual é o trabalho feito para elevar o foguete a uma altura de 3.000 pés?

22. Tem-se, a partir da lei de Coulomb da Física, que duas cargas eletrostáticas iguais repelem-se entre si com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Suponha que duas cargas A e B repelem-se com uma força de k N, quando localizadas nos pontos A $(-a, 0)$ e B $(a, 0)$, onde a está medido em metros. Encontre o trabalho W necessário para mover a carga A ao longo do eixo x até a origem, se a carga B ficar onde está.

23. A Física tem por lei que a força gravitacional exercida pela Terra sobre um objeto varia com o inverso do quadrado de sua distância ao centro da Terra. Assim, o peso $w(x)$ de um objeto está relacionado com sua distância x do centro da Terra por uma fórmula do tipo

$$w(x) = \frac{k}{x^2}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade que depende da massa do objeto.

(a) Use esse fato e a hipótese de que a Terra seja uma esfera com um raio de 4.000 milhas para obter a fórmula $w(x)$ usada no Exemplo 4.

(b) Encontre uma fórmula para peso $w(x)$ de um satélite que está a x milhas da superfície da Terra, se seu peso na Terra for de 6.000 lb.

(c) Qual é o trabalho necessário para elevar o satélite da superfície da Terra até uma posição orbital a 1.000 milhas de altura?

24. (a) A fórmula $w(x) = k/x^2$ do Exercício 23 é aplicável a todos os corpos celestes. Supondo que a Lua seja uma esfera com um raio de 1.080 milhas, encontre a força que ela exerce sobre um astronauta que está x milhas acima de sua superfície se seu peso na superfície da Lua for de 20 lb.

(b) Qual é o trabalho necessário para elevar o astronauta até um ponto a 10,8 milhas acima da superfíce da Lua?

25. O MAGLEV, o primeiro trem comercial magnético de alta velocidade do mundo, começou suas atividades normais em 2003, em um projeto de linha dupla de 30 km ligando Xangai, na China, ao Aeroporto Internacional de Pudong. Suponha que o MAGLEV tenha uma massa de $m = 4{,}00 \times 10^5$ kg e que, começando no instante em que o trem desenvolve uma velocidade de 20 m/s, o motor aplique uma força de $6{,}40 \times 10^5$ N no sentido do movimento ao longo de uma distância de $3{,}00 \times 10^3$ m. Use a relação energia-trabalho (5) para obter a velocidade final do trem.

26. Suponha que uma sonda para Marte de massa $m = 2{,}00 \times 10^3$ kg esteja sujeita apenas à força de seu próprio mecanismo. A partir do instante em que sua velocidade é $v = 1{,}00 \times 10^4$ m/s, o mecanismo é acionado continuamente por uma distância de $2{,}00 \times 10^5$ m, com uma força constante de $2{,}00 \times 10^5$ N no sentido do movimento. Use a relação energia-trabalho para encontrar a velocidade final da sonda.

27. Em 10 de agosto de 1972, um meteorito com uma massa estimada de 4×10^6 kg e uma velocidade de aproximadamente 15 km/s cruzou a atmosfera acima dos Estados Unidos e do Canadá, mas felizmente não atingiu a Terra.

(a) Supondo que ele tivesse atingido a Terra com uma velocidade de 15 km/s, qual seria sua variação de energia cinética em joules (J)?

(b) Expresse a energia como um múltiplo da energia explosiva de 1 megaton de TNT, que é de $4{,}2 \times 10^{15}$ J.

(c) A energia associada à bomba atômica de Hiroshima foi de 13 kilotons de TNT. A quantas bombas como essa equivaleria o impacto do meteorito?

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.7

1. 50 pés-lb **2.** joule; erg **3.** $\int_a^b F(x)\,dx$ **4.** 9 J

7.8 PRESSÃO E FORÇA DE FLUIDOS

Nesta seção usaremos as ferramentas de integração desenvolvidas no capítulo precedente para o estudo de pressões e de forças exercidas por fluidos sobre objetos submersos.

O QUE É UM FLUIDO?

Um ***fluido*** é uma substância que se ajusta aos contornos de qualquer recipiente no qual é colocado. O termo fluido inclui *líquidos*, tais como água, petróleo e mercúrio, bem como *gases*, como hélio, oxigênio e ar. O estudo dos fluidos se enquadra em duas categorias: *estática dos fluidos* (estudo dos fluidos em repouso) e *dinâmica dos fluidos* (estudo dos fluidos em movimento). Nesta seção trataremos somente de estática dos fluidos; posteriormente, perto do final do livro, investigaremos problemas de dinâmica dos fluidos.

O CONCEITO DE PRESSÃO

O efeito de uma força sobre um objeto depende de como ela se espalha sobre a superfície dele. Por exemplo, andando na neve com botas, o peso de nosso corpo esmaga a neve e afundamos. Porém, se pusermos um par de esquis, nosso peso se espalhará em uma área de superfície maior e seremos capazes de deslizar sobre a superfície. O conceito que leva em conta tanto a magnitude da força quanto a área sobre a qual é aplicada é chamado de *pressão*.

7.8.1 DEFINIÇÃO Se uma força de magnitude F for aplicada a uma superfície de área A, então definimos a ***pressão*** P exercida pela força sobre a superfície como sendo

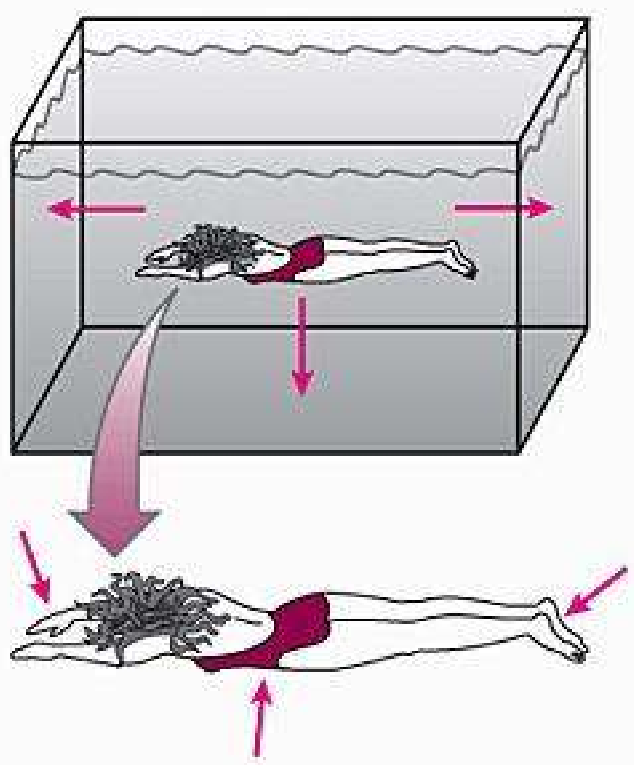
$$P = \frac{F}{A} \tag{1}$$

Segue dessa definição que as unidades de pressão são força por unidade de área. As unidades mais comuns de pressão são newtons por metro quadrado (N/m^2) e libras por polegada quadrada (lb/pol^2) ou libras por pé quadrado ($lb/pé^2$) no sistema BE. Conforme indicado na Tabela 7.8.1, 1 newton por metro quadrado é chamado de *pascal* (Pa). Uma pressão de 1 Pa é bem pequena ($1\ Pa = 1{,}45 \times 10^{-4}\ lb/pol^2$); portanto, é comum usar kilo-pascal (kPa), que vale 1000 Pa.

Tabela 7.8.1

SISTEMA	FORÇA ÷	ÁREA =	PRESSÃO
MKS	newton (N)	metro quadrado (m^2)	pascal (Pa)
BE	libra (lb)	pé quadrado ($pé^2$)	$lb/pé^2$
BE	libra (lb)	polegada quadrada (pol^2)	lb/pol^2 (psi)

FATORES DE CONVERSÃO:
$1\ Pa \approx 1{,}45 \times 10^{-4}\ lb/pol^2 \approx 2{,}09 \times 10^{-2}\ lb/pé^2$
$1\ lb/pol^2 \approx 6{,}89 \times 10^3\ Pa$ $\quad 1\ lb/pé^2 \approx 47{,}9\ Pa$



As forças de um fluido sempre agem perpendicularmente à superfície do objeto submerso.

Figura 7.8.1

Nesta seção, estudaremos forças e pressões sobre objetos submersos em fluidos. As pressões em si não têm nenhuma característica direcional; porém, as forças que elas criam agem sempre perpendicularmente à superfície do objeto submerso. Assim, na Figura 7.8.1, a pressão da água cria forças horizontais sobre os lados do tanque, forças verticais sobre o fundo do tanque e, sobre as diferentes partes do corpo da nadadora, forças que variam em direção e sentido, de forma a serem sempre perpendiculares ao corpo.

► **Exemplo 1** Referindo-se à Figura 7.8.1, suponha que as costas da mão da nadadora têm uma área de superfície de $8{,}4 \times 10^{-3}\ m^2$ e que a pressão agindo sobre ela seja de $5{,}1 \times 10^4$ Pa (um valor realista próximo do fundo de uma piscina). Encontre a força que age sobre a mão da nadadora.

Solução A partir de (1), a força F é

$$F = PA = (5{,}1 \times 10^4\ N/m^2)(8{,}4 \times 10^{-3}\ m^2) \approx 4{,}3 \times 10^2\ N$$

Isso é um valor bem grande para uma força (cerca de 100 lb no sistema BE). ◄



Blaise Pascal (1623-1662) Matemático e cientista francês. A mãe de Pascal morreu quando ele tinha três anos de idade e seu pai, um magistrado altamente instruído, cuidou pessoalmente dos estudos iniciais do rapaz. Embora Pascal mostrasse uma inclinação para a Ciência e a Matemática, seu pai recusou-se a ensiná-lo essas matérias até que dominasse latim e grego. A irmã de Pascal, sua principal biógrafa, afirma que ele descobriu sozinho as 32 primeiras proposições de Euclides, sem jamais ter lido um livro de Geometria. (Porém, é geralmente aceito que tal história é apócrifa.) Não obstante, o precoce Pascal publicou um ensaio altamente respeitável sobre seções cônicas, quando tinha 16 anos de idade. Descartes, lendo o ensaio, considerou-o tão brilhante que não podia acreditar ter sido escrito por um rapaz tão jovem. Quando tinha 18 anos, sua saúde começou a esvair-se e, até a morte, sofreu de dores constantes. Porém, sua criatividade nunca foi afetada.

As contribuições de Pascal para a Física incluem a descoberta de que a pressão do ar decresce com a altitude e o princípio da pressão dos fluidos que leva seu nome. No entanto, a originalidade de seu trabalho é questionada por alguns historiadores. Pascal deu grandes contribuições ao ramo da Matemática chamado "Geometria Projetiva", e ajudou a desenvolver a teoria de Probabilidades através de uma série de cartas para Fermat.

Em 1646, os problemas de saúde de Pascal causaram-lhe uma profunda crise emocional que o levou a tornar-se cada vez mais interessado em assuntos religiosos. Embora católico de nascimento, converteu-se a uma doutrina religiosa chamada jansenismo e gastou a maior parte de seus últimos anos escrevendo sobre religião e filosofia.

Tabela 7.8.2

DENSIDADE DE PESO

MKS	N/m³
Óleo de máquina	4,708
Gasolina	6,602
Água pura	9,810
Água do mar	10,045
Mercúrio	133,416
BE	**lb/pé³**
Óleo de máquina	30,0
Gasolina	42,0
Água pura	62,4
Água do mar	64,0
Mercúrio	849,0

Todas as densidades são afetadas por variações na temperatura e na pressão. Os pesos específicos também são afetados por variações de g.

DENSIDADE DE FLUIDO

Os mergulhadores sabem que, quanto mais fundo estiverem, maiores são a pressão e a força que sentem sobre seus corpos. Essa sensação de pressão e de força é causada pelo peso da água e do ar sobre eles – quanto mais fundo mergulharem, maior será o peso da água e, portanto, maior a pressão.

Para calcular as pressões e as forças sobre objetos submersos, precisamos saber alguma coisa sobre as características dos fluidos nos quais eles estão submersos. Para simplificar, vamos supor que os fluidos considerados são *homogêneos*, significando que duas amostras com o mesmo volume têm a mesma massa. Segue dessa hipótese que a massa por unidade de volume é uma constante δ, a qual depende das características do fluido, mas não do tamanho e da localização da amostra; chamamos

$$\delta = \frac{m}{V} \tag{2}$$

de ***densidade de massa*** do fluido. Às vezes, é mais conveniente trabalhar com o peso por unidade de volume. Assim, definimos a ***densidade de peso*** (***peso específico***) ρ de um fluido como sendo

$$\rho = \frac{w}{V} \tag{3}$$

onde w é o peso da amostra do fluido de volume V. Assim, se o peso específico for conhecido, o peso w da amostra do fluido com volume V pode ser calculado pela fórmula $w = \rho V$. A Tabela 7.8.2 mostra alguns pesos específicos típicos.

PRESSÃO DE FLUIDO

Para calcular pressões e forças de fluidos, precisamos fazer uso de uma observação experimental. Suponha que uma superfície plana de área A esteja submersa em um fluido homogêneo de densidade de peso ρ de tal maneira que toda a superfície se encontre entre as profundidades h_1 e h_2, onde $h_1 \le h_2$ (Figura 7.8.2). Os experimentos mostram que o fluido exerce em ambos os lados da superfície uma força que é perpendicular à superfície e cuja magnitude F satisfaz as desigualdades

$$\rho h_1 A \le F \le \rho h_2 A \tag{4}$$

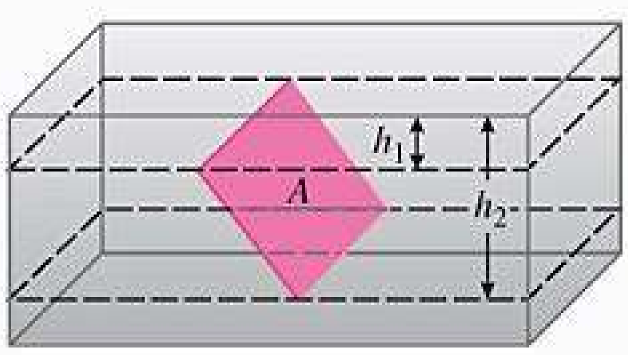


Figura 7.8.2

Assim, segue de (1) que a pressão $P = F/A$ em um dado lado da superfície satisfaz as desigualdades

$$\rho h_1 \le P \le \rho h_2 \tag{5}$$

Observe que agora é imediato calcular a força e a pressão de um fluido em uma superfície plana que está submersa *horizontalmente* a uma profundidade h, pois então $h = h_1 = h_2$ e as desigualdades (4) e (5) tornam-se as *igualdades*

$$F = \rho h A \tag{6}$$

e

$$P = \rho h \tag{7}$$

Exemplo 2 Encontre a pressão e a força do fluido no topo de uma placa circular plana, com raio de 2 m, submersa horizontalmente na água a uma profundidade de 6 m (Figura 7.8.3).

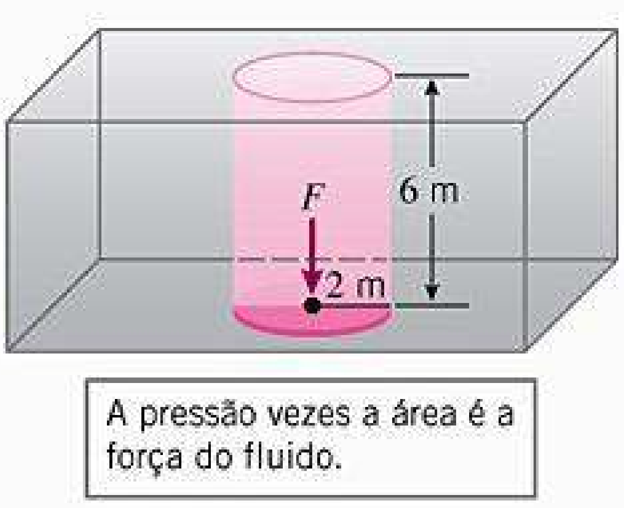


Figura 7.8.3

Solução Como o peso específico da água é $\rho = 9810$ N/m³, tem-se a partir de (7) que a pressão do fluido é

$$P = \rho h = (9810)(6) = 58.860 \text{ Pa}$$

e a partir de (6) que a força do fluido é

$$F = \rho h A = \rho h(\pi r^2) = (9810)(6)(4\pi) = 235.440\pi \approx 739.700 \text{ N}$$ ◄

■ FORÇA DO FLUIDO SOBRE UMA SUPERFÍCIE VERTICAL

Foi fácil calcular a força do fluido sobre a placa horizontal no Exemplo 2, pois todos os pontos estavam na mesma profundidade. O problema de encontrar a força do fluido sobre uma superfície vertical é mais complicado, pois a profundidade e, portanto, a pressão, não são constantes na superfície. Para encontrar a força do fluido sobre uma superfície vertical, vamos necessitar do Cálculo.

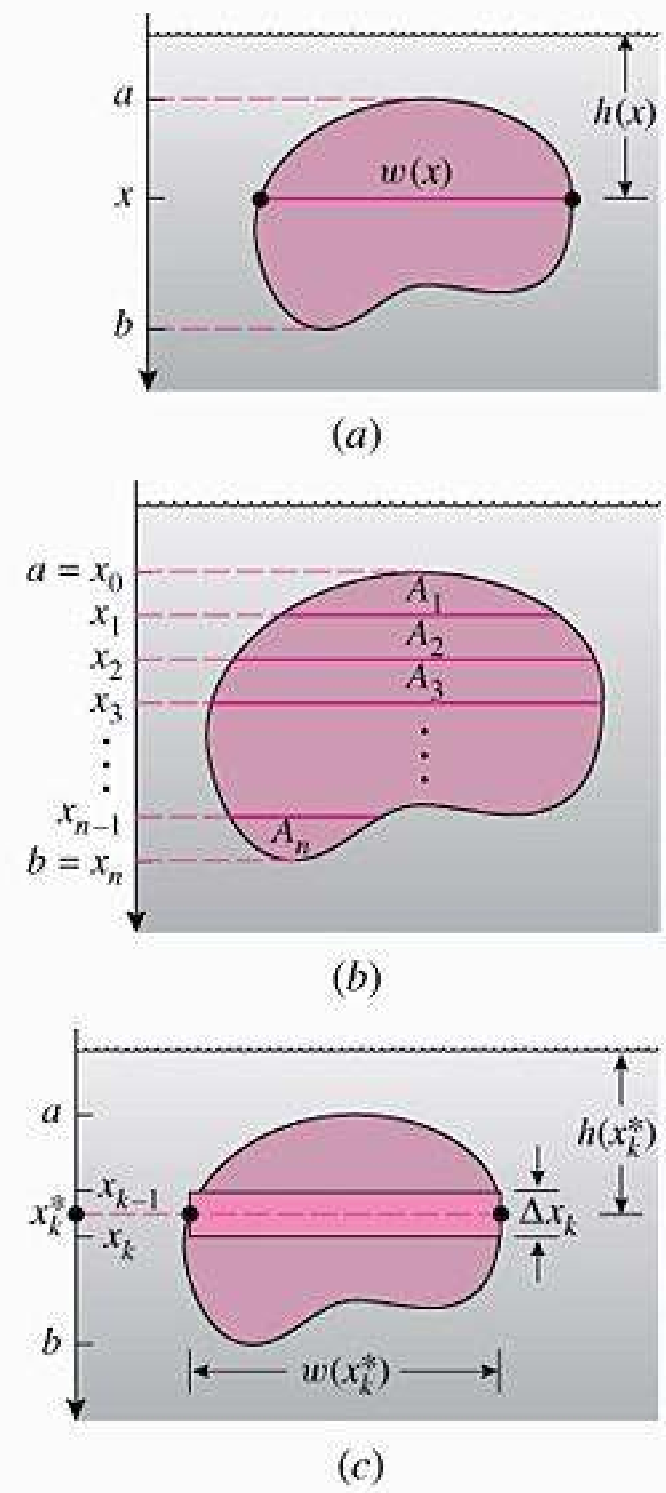


Figura 7.8.4

> **7.8.2 PROBLEMA** Suponha que uma superfície plana esteja imersa verticalmente em um fluido com peso específico ρ, e que a parte submersa da superfície se estenda de $x = a$ até $x = b$, ao longo da parte positiva do eixo x (Figura 7.8.4*a*). Para $a \le x \le b$, seja $w(x)$ a extensão da superfície e $h(x)$ a profundidade do ponto x. Defina o que entendemos por *força do fluido F* sobre a superfície e encontre uma fórmula para calculá-la.

A idéia básica para resolver esse problema é dividir a superfície em faixas horizontais cujas áreas possam ser aproximadas por áreas de retângulos. Essas aproximações de áreas, junto com as desigualdades (4), nos permitirão criar uma soma de Riemann que aproxime a força total na superfície. Tomando um limite de somas de Riemann, obteremos uma integral para F.

Para implementar essa idéia, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos inserindo os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre $a = x_0$ e $b = x_n$. Isso tem o efeito de dividir a superfície em n faixas com áreas A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ (Figura 7.8.4*b*). Segue de (4) que a força F_k na k-ésima faixa satisfaz as desigualdades

$$\rho h(x_{k-1})A_k \le F_k \le \rho h(x_k)A_k$$

ou, equivalentemente,

$$h(x_{k-1}) \le \frac{F_k}{\rho A_k} \le h(x_k)$$

Como a função profundidade $h(x)$ cresce linearmente, deve existir algum ponto x_k^* entre x_{k-1} e x_k tal que

$$h(x_k^*) = \frac{F_k}{\rho A_k}$$

ou, equivalentemente,

$$F_k = \rho h(x_k^*)A_k$$

Agora aproximamos a área A_k da k-ésima faixa da superfície pela área de um retângulo de largura $w(x_k^*)$ e altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Figura 7.8.4*c*). Segue que F_k pode ser aproximado por

$$F_k = \rho h(x_k^*)A_k \approx \rho h(x_k^*) \cdot \underbrace{w(x_k^*)\Delta x_k}_{\text{Área do retângulo}}$$

Somando essas aproximações, obtemos a seguinte soma de Riemann, que aproxima a força total F sobre a superfície:

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho h(x_k^*)w(x_k^*)\Delta x_k$$

Tomando o limite quando n cresce e a extensão dos subintervalos tende a zero, obtemos a integral definida

$$F = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho h(x_k^*)w(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b \rho h(x)w(x)\,dx$$

Em suma, temos o seguinte resultado:

7.8.3 DEFINIÇÃO Suponha que uma superfície plana esteja imersa verticalmente em um fluido com peso específico ρ, e que a parte submersa da superfície se estenda de $x = a$ até $x = b$ ao longo de um eixo x cujo sentido positivo seja para baixo (Figura 7.8.4a). Para $a \leq x \leq b$, suponha que $w(x)$ seja a extensão da superfície e que $h(x)$ seja a profundidade do ponto x. Então definimos a ***força do fluido F*** sobre a superfície por

$$F = \int_a^b \rho h(x) w(x)\, dx \tag{8}$$

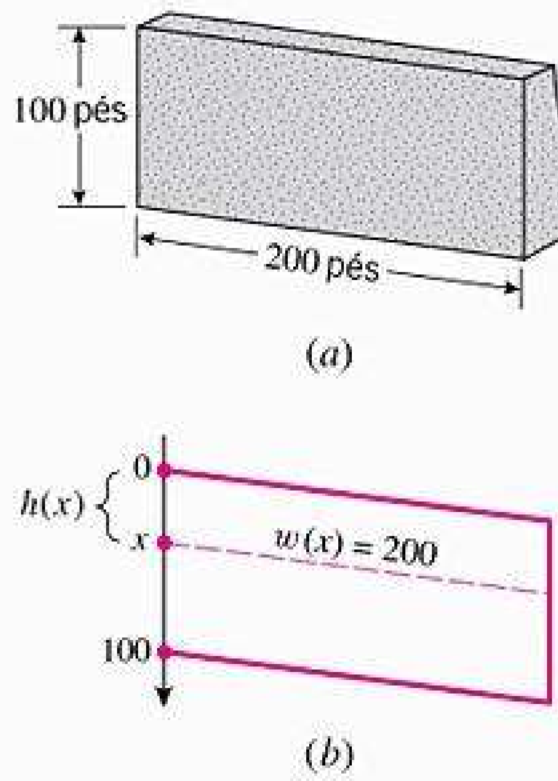


Figura 7.8.5

► Exemplo 3 A face de um dique é um retângulo vertical com altura de 100 pés e extensão de 200 pés (Figura 7.8.5a). Encontre a força total que o fluido exerce sobre a face, quando a superfície da água está no nível do topo do dique.

Solução Introduzimos um eixo x com origem na superfície da água, conforme mostra a Figura 7.8.5b. Em um ponto x sobre esse eixo, a extensão do dique é $w(x) = 200$ pés e a profundidade $h(x) = x$ pés. Assim, a partir de (8) com $\rho = 62{,}4$ lb/pé^3 (peso específico da água), obtemos como força total sobre a face

$$F = \int_0^{100} (62{,}4)(x)(200)\, dx = 12.480 \int_0^{100} x\, dx$$

$$= 12.480\, \frac{x^2}{2}\bigg]_0^{100} = 62.400.000 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

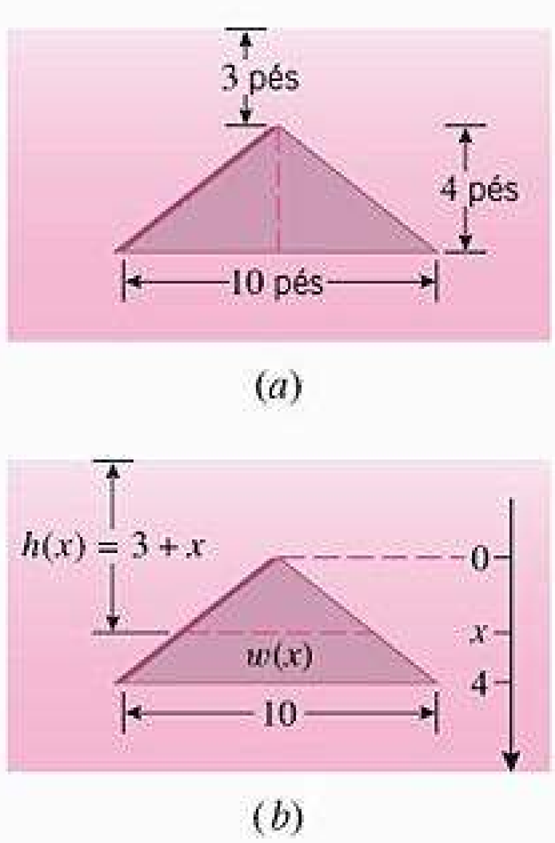


Figura 7.8.6

► Exemplo 4 Uma placa com o formato de triângulo isósceles, com base de 10 pés e altura de 4 pés, é imersa verticalmente em óleo de máquina, conforme mostra a Figura 7.8.6a. Encontre a força F que o fluido exerce sobre a superfície da placa se o peso específico do óleo for $\rho = 30$ lb/pé^3.

Solução Vamos introduzir um eixo x, conforme mostra a Figura 7.8.6b. Por semelhança de triângulos, a extensão da placa, em pés, a uma profundidade $h(x) = (3 + x)$ pés, satisfaz

$$\frac{w(x)}{10} = \frac{x}{4}, \quad \text{logo} \quad w(x) = \frac{5}{2}x$$

Assim, tem-se a partir de (8) que a força sobre a placa é

$$F = \int_a^b \rho h(x) w(x)\, dx = \int_0^4 (30)(3 + x)\left(\frac{5}{2}x\right) dx$$

$$= 75 \int_0^4 (3x + x^2)\, dx = 75\left[\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 3400 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.8 (*Ver página 496 para respostas.*)

1. A unidade de pressão equivalente a 1 newton por metro quadrado (N/m^2) é chamada de __________. A unidade de pressão psi significa __________.

2. Dado que o peso específico da água é 9.810 N/m^3, a pressão de fluido em uma lâmina retangular de 2 por 3 m que está submersa horizontalmente na água a uma profundidade de 10 m é de __________. A força do fluido na placa é de __________.

3. Suponha que uma superfície plana esteja imersa verticalmente em um fluido de peso específico ρ e que a parte submersa da superfície se estenda de $x = a$ até $x = b$ ao longo de um eixo x, cujo sentido positivo é para baixo. Se, para $a \leq x \leq b$, a superfície tiver largura $w(x)$ e profundidade $h(x)$, então a força de fluido na superfície é $F =$ __________.

4. Uma lâmina retangular com 2 m de largura por 3 m de altura está submersa verticalmente em água de tal modo que seu topo está a 5 m abaixo da superfície da água. Uma expressão integral para a força da água sobre a superfície plana é $F =$ __________. O valor dessa integral é __________.

EXERCÍCIOS 7.8

Nestes exercícios, quando necessário, consulte a Tabela 7.8.2 para os pesos específicos dos fluidos.

1. Uma placa retangular plana é imersa horizontalmente em água.

(a) Encontre a força (em lb) e a pressão (em lb/pés^2) sobre a superfície superior da placa se sua área for de 100 pés^2 e a superfície estiver a 5 pés de profundidade.

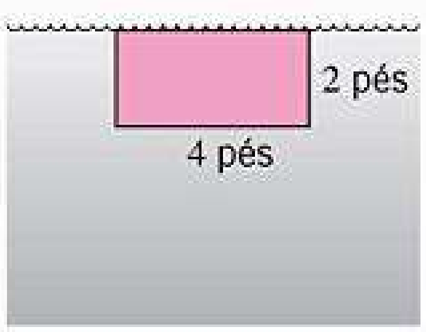
(b) Encontre a força (em N) e a pressão (em Pa) sobre a superfície superior da placa se sua área for de 25 m^2 e a superfície estiver a 10 m de profundidade.

2. (a) Encontre a força (em N) sobre o convés de um navio afundado se sua área for de 160 m^2 e a pressão sobre o convés for de $6{,}0 \times 10^5$ Pa.

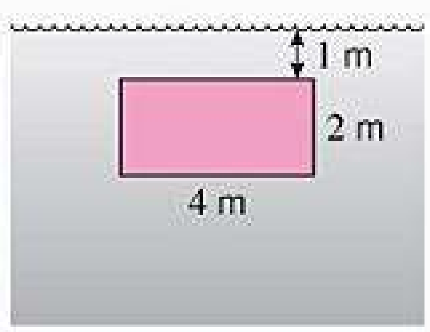
(b) Encontre a força (em lb) sobre a máscara de um mergulhador se sua área for de 60 pol^2 e a pressão sobre ela for de 100 lb/pol^2.

3-8 As superfícies planas mostradas estão imersas verticalmente em água. Encontre a força do fluido sobre cada superfície.

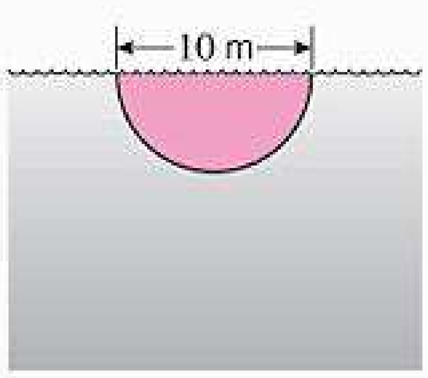
3.



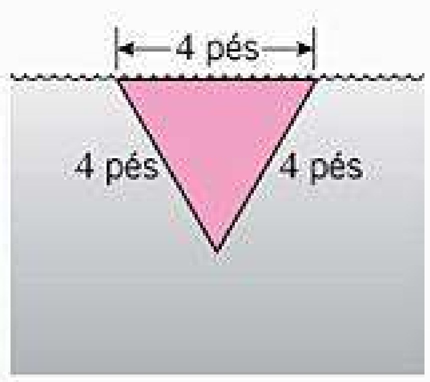
4.



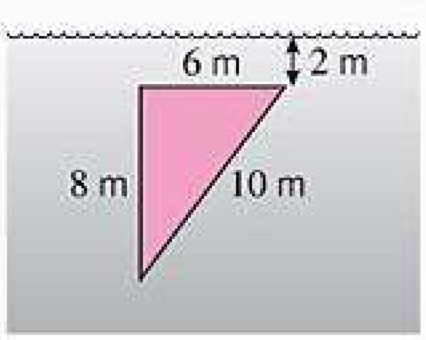
5.



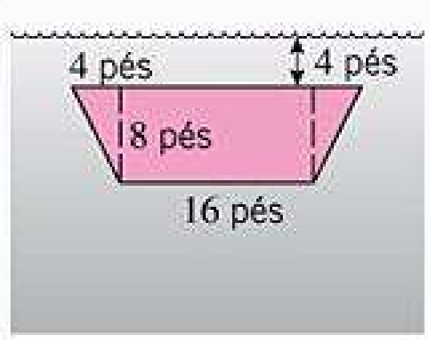
6.



7.



8.



9. Suponha que uma superfície plana esteja imersa verticalmente em um fluido de peso específico ρ. Dobrando-se ρ, dobra também a força sobre a superfície? Explique seu raciocínio.

10. Um tanque de óleo tem a forma de um cilindro circular reto, com 4 pés de diâmetro. Encontre a força total do fluido sobre um extremo, quando o eixo é horizontal e o tanque está cheio até a metade com um óleo de peso específico de 50 lb/pés^3.

11. Uma placa quadrada com a pés de lado está mergulhada em um líquido de peso específico ρ lb/pés^3. Encontre a força do fluido sobre a placa se um vértice estiver tocando a superfície e uma diagonal for perpendicular a esta.

12-15 A Fórmula (8) dá a força do fluido em uma superfície plana imersa verticalmente em um fluido. Mais geralmente, se uma superfície plana for submersa de tal modo que faz um ângulo de $0 \le \theta < \pi/2$ com a vertical, então a força do fluido sobre a superfície é dada por

$$F = \int_a^b \rho h(x) w(x) \sec\theta \, dx$$

Use essa fórmula nestes exercícios.

12. Derive a fórmula dada acima para a força do fluido sobre uma superfície plana imersa a um certo ângulo em um fluido.

13. A figura abaixo mostra uma piscina retangular cujo fundo é um plano inclinado. Encontre a força da água sobre o fundo quando a piscina estiver cheia até o topo.

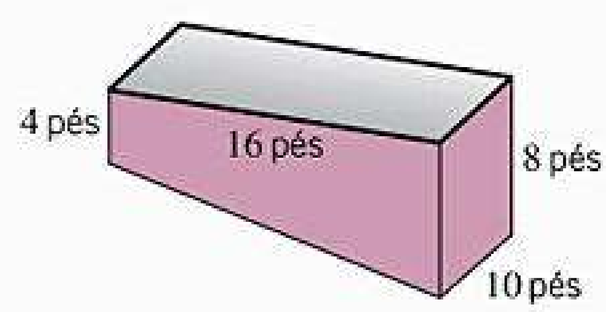


Figura Ex-13

14. Por quantos pés devemos baixar a água da piscina do Exercício 13 para que a força no fundo seja reduzida por um fator de $\frac{1}{2}$?

15. A figura abaixo mostra um dique cuja face é um retângulo inclinado. Encontre a força do fluido sobre a face quando o nível da água estiver no topo do dique.

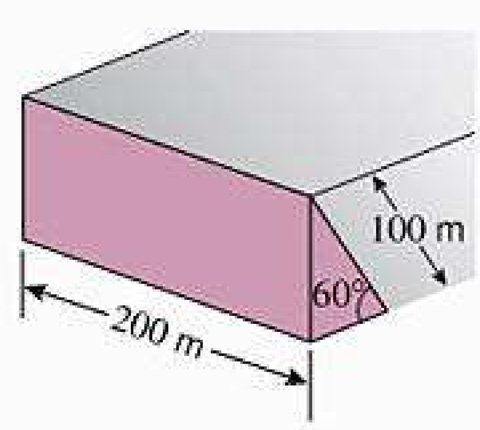


Figura Ex-15

16. Uma janela de observação em um submarino é um quadrado com 2 pés de lado. Usando ρ_0 como o peso específico da água do mar, encontre a força exercida pelo fluido sobre a janela quando o submarino estiver submerso de tal forma que a janela esteja vertical e seu topo se encontre a uma profundidade de h pés.

ENFOCANDO CONCEITOS

17. (a) Mostre: se o submarino do Exercício 16 estiver descendo verticalmente a uma taxa constante, então a força do fluido sobre a janela aumenta a uma taxa constante.

(b) Com que taxa a força do fluido sobre a janela está crescendo se o submarino estiver descendo verticalmente a 20 pés/min?

18. (a) Denote por $D = D_a$ um disco de raio a submerso em um fluido de peso específico ρ de tal maneira que o centro de D esteja h unidades abaixo da superfície do fluido. Para cada valor de r no intervalo $(0, a]$, seja D_r o disco de raio r que é concêntrico com D. Escolha um lado do disco D e defina $P(r)$ como a pressão do fluido no lado escolhido de D_r. Use (5) para provar que

$$\lim_{r\to 0^+} P(r) = \rho h$$

(b) Explique por que o resultado de (a) pode ser interpretado como significando que *a pressão de um fluido a uma dada profundidade é a mesma em todas as direções*. (Essa afirmação é uma versão de um resultado conhecido como ***Princípio de Pascal***.)

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.8

1. pascal; libras por polegada quadrada (sigla em inglês) **2.** 98.100 Pa; 588.600 N **3.** $\int_a^b \rho h(x)w(x)\,dx$

4. $\int_0^3 9810[(5+x)2]\,dx$; 382,590 N

7.9 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E CABOS PENDENTES

Nesta seção estudaremos certas combinações de e^x e e^{-x} denominadas "funções hiperbólicas". Essas funções, que aparecem em várias aplicações em Engenharia, têm muitas propriedades em comum com as funções trigonométricas. Tais semelhanças são supreendentes, uma vez que há muito pouco no aspecto exterior que sugira qualquer relação entre exponenciais e funções trigonométricas. Isso se deve ao fato de as relações ocorrerem dentro do contexto dos números complexos, um tópico que deixaremos para cursos mais avançados.

■ DEFINIÇÕES DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Para introduzir as funções hiperbólicas, observe que, no Exercício 65 da Seção 1.3, foi mostrado que a função e^x pode ser expressa da seguinte forma, como a soma de uma função par e de uma função ímpar:

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{Par}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{Ímpar}}$$

Essas funções são suficientemente importantes para que haja nomes e notações associados a elas: a função ímpar é chamada de *seno hiperbólico de x* e a par, *cosseno hiperbólico de x*. Elas são denotadas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dessas duas pedras fundamentais podemos criar mais quatro funções e obter o seguinte conjunto de seis ***funções hiperbólicas***:

7.9.1 DEFINIÇÕES

Seno hiperbólico	$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
Cosseno hiperbólico	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
Tangente hiperbólica	$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Cotangente hiperbólica	$\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
Secante hiperbólica	$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
Cossecante hiperbólica	$\operatorname{cossech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os sistemas algébricos computacionais têm recursos para calcular diretamente as funções hiperbólicas, o que algumas calculadoras não têm. Contudo, se o leitor quiser calcular o valor de uma função hiperbólica em uma calculadora, isso pode ser feito expressando-a em termos de funções exponenciais, como no Exemplo 1.

► Exemplo 1

$$\operatorname{senh} 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\operatorname{senh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx 3{,}6269 \blacktriangleleft$$

■ GRÁFICOS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Os gráficos das funções hiperbólicas que aparecem na Figura 7.9.1 podem ser gerados com um recurso computacional, mas vale a pena observar que a forma geral do gráfico de $y = \cosh x$ pode ser obtida esboçando-se separadamente os gráficos de $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ e somando-se as coordenadas y correspondentes [ver a parte (*a*) da figura]. Analogamente, a forma geral do gráfico de $y = \operatorname{senh} x$ pode ser obtida esboçando-se separadamente os gráficos de $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ e somando-se as coordenadas y correspondentes [ver a parte (*b*) da figura].

Observe que senh x tem um domínio de $(-\infty, +\infty)$ e uma imagem de $(-\infty,+\infty)$, enquanto cosh x tem um domínio de $(-\infty,+\infty)$ e uma imagem de $[1, +\infty)$. Observe também que $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ são ***assíntotas curvilíneas*** de $y = \cosh x$, no sentido de que o gráfico dessa função fica cada vez mais próximo do gráfico de $y = \frac{1}{2}e^x$ quando $x \to +\infty$, e cada vez mais próximo de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ quando $x \to -\infty$ (ver Seção 5.3). Da mesma forma, $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ são assíntotas curvílineas para $y = \operatorname{senh} x$, quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, respectivamente. As demais propriedades das funções hiperbólicas serão exploradas nos exercícios.



O projeto do Gateway Arch, em St. Louis, está baseado em uma curva invertida do cosseno hiperbólico.

■ CABOS PENDENTES E OUTRAS APLICAÇÕES

As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios dentro de sólidos elásticos e, mais geralmente, em muitos problemas nos quais a energia mecânica é gradualmente absorvida pelo meio ambiente. Elas também ocorrem quando um cabo flexível e homogêneo é suspenso entre dois pontos, como as linhas telefônicas entre dois postes. Tais cabos formam uma curva denominada ***catenária*** (em latim, *catena* significa "cadeia"). Se, como na Figura 7.9.2, for introduzido um sistema de coordenadas tal que o ponto mais baixo do cabo esteja no eixo y, pode ser mostrado, usando princípios da Física, que o cabo tem uma equação da forma

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

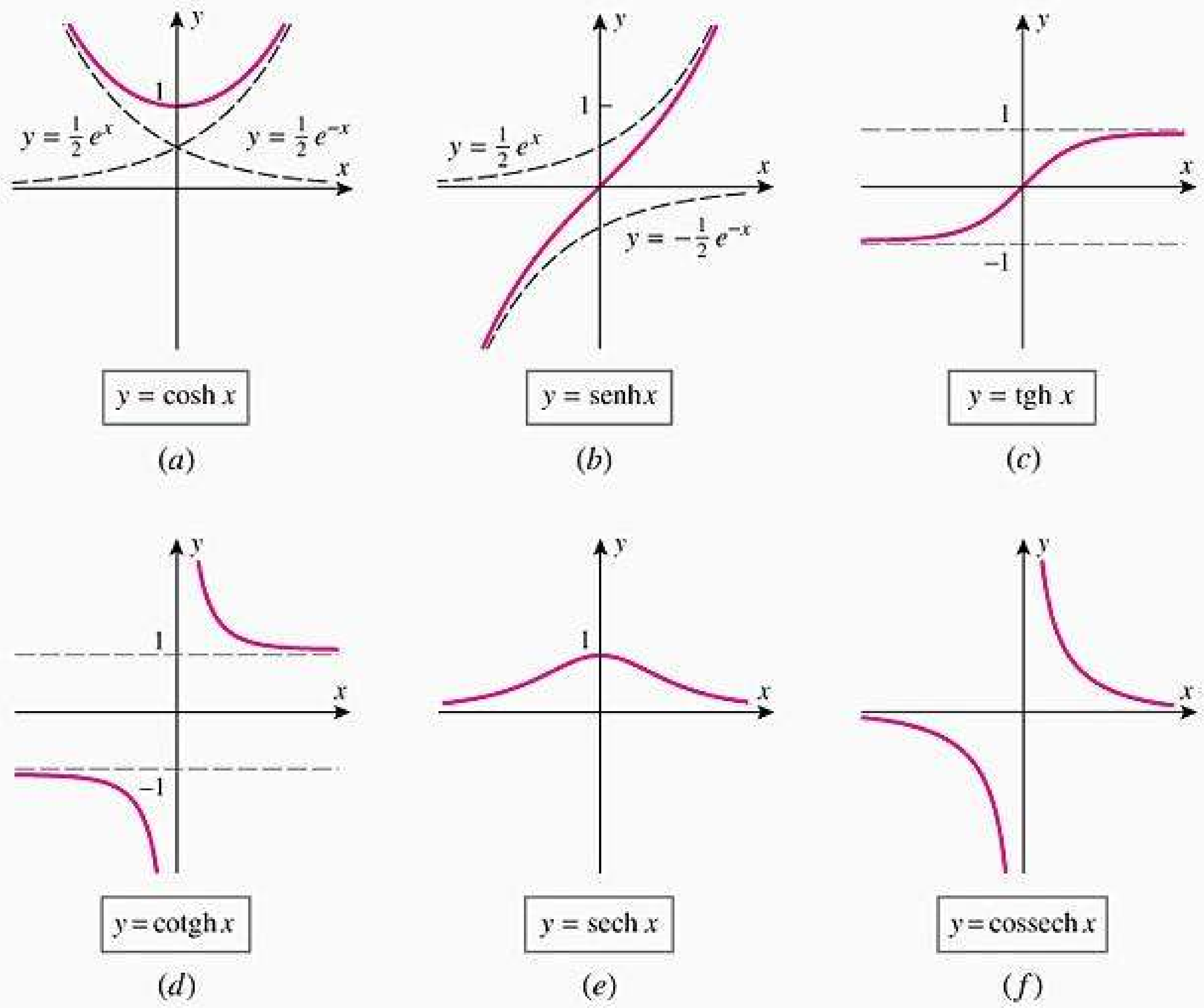


Figura 7.9.1

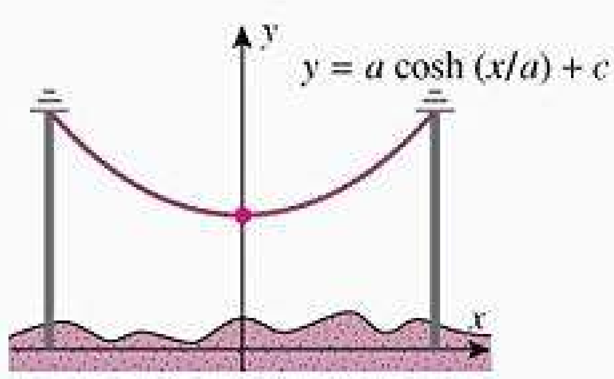


Figura 7.9.2

IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

As funções hiperbólicas satisfazem várias identidades similares àquelas das funções trigonométricas. A mais fundamental delas é

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \tag{1}$$

que pode ser provada escrevendo-se

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= (\cosh x + \operatorname{senh} x)(\cosh x - \operatorname{senh} x)\\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= e^x \cdot e^{-x} = 1\end{aligned}$$

Outras identidades hiperbólicas podem ser deduzidas de modo semelhante ou, alternativamente, executando operações algébricas nas identidades conhecidas. Por exemplo, se dividirmos (1) por $\cosh^2 x$, obteremos

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

e se dividirmos (1) por $\operatorname{senh}^2 x$, obteremos

$$\operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \operatorname{cossech}^2 x$$

O teorema a seguir resume algumas das identidades hiperbólicas mais úteis. As provas que ainda não foram feitas serão deixadas como exercício.

7.9.2 TEOREMA

$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$	$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
$\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$	$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$	$\operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$
$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$	$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
$\operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \operatorname{cossech}^2 x$	$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$	$\cosh 2x = 2\operatorname{senh}^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1$

POR QUE ELAS SÃO CHAMADAS DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Lembre que as equações paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

representam o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ (Figura 7.9.3*a*), como pode ser visto escrevendo-se

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Se $0 \le t \le 2\pi$, então o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo em radianos desde o eixo x positivo até o ponto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ ou, alternativamente, como o dobro da área sombreada na Figura 7.9.3*a* (verifique). Analogamente, as equações paramétricas

$$x = \cosh t, \quad y = \operatorname{senh} t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

representam uma parte da curva $x^2 - y^2 = 1$, como pode ser visto escrevendo-se

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$

e observando-se que $x = \cosh t > 0$. Essa curva, que está na Figura 7.9.3*b*, é a metade direita de uma curva denominada ***hipérbole unitária***; essa é a razão pela qual as funções nesta seção são chamadas de funções *hiperbólicas*. Pode-se mostrar que, se $t \ge 0$, então o parâmetro t pode ser interpretado como o dobro da área sombreada na Figura 7.9.3*b*. (Omitimos os detalhes.)

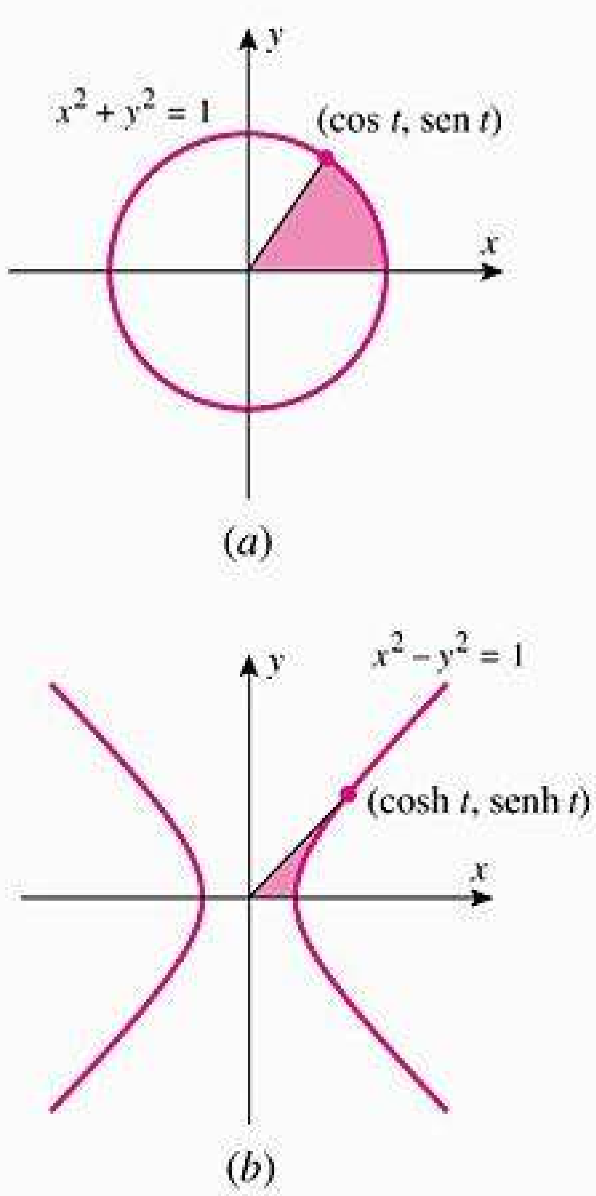


Figura 7.9.3

FÓRMULAS PARA AS DERIVADAS E AS INTEGRAIS

As fórmulas para as derivadas de senh x e cosh x podem ser obtidas expressando-se estas funções em termos de e^x e e^{-x}:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

As derivadas das funções hiperbólicas restantes podem ser obtidas expressando-as em termos de senh e cosh, e aplicando-se as identidades apropriadas. Por exemplo:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tgh} x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right] = \frac{\cosh x \dfrac{d}{dx}[\operatorname{senh} x] - \operatorname{senh} x \dfrac{d}{dx}[\cosh x]}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

O teorema a seguir fornece uma lista completa de fórmulas de derivação e de integração para as funções hiperbólicas.

7.9.3 TEOREMA

$\frac{d}{dx}[\text{senh}\, u] = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\int \cosh u\, du = \text{senh}\, u + C$
$\frac{d}{dx}[\cosh u] = \text{senh}\, u \frac{du}{dx}$	$\int \text{senh}\, u\, du = \cosh u + C$
$\frac{d}{dx}[\text{tgh}\, u] = \text{sech}^2\, u \frac{du}{dx}$	$\int \text{sech}^2\, u\, du = \text{tgh}\, u + C$
$\frac{d}{dx}[\text{cotgh}\, u] = -\text{cossech}^2\, u \frac{du}{dx}$	$\int \text{cossech}^2\, u\, du = -\text{cotgh}\, u + C$
$\frac{d}{dx}[\text{sech}\, u] = -\text{sech}\, u\, \text{tgh}\, u \frac{du}{dx}$	$\int \text{sech}\, u\, \text{tgh}\, u\, du = -\text{sech}\, u + C$
$\frac{d}{dx}[\text{cossech}\, u] = -\text{cossech}\, u\, \text{cotgh}\, u \frac{du}{dx}$	$\int \text{cossech}\, u\, \text{cotgh}\, u\, du = -\text{cossech}\, u + C$

► **Exemplo 2**

$$\frac{d}{dx}[\cosh(x^3)] = \text{senh}(x^3) \cdot \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2\, \text{senh}(x^3)$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(\text{tgh}\, x)] = \frac{1}{\text{tgh}\, x} \cdot \frac{d}{dx}[\text{tgh}\, x] = \frac{\text{sech}^2\, x}{\text{tgh}\, x}$$ ◄

► **Exemplo 3**

$$\int \text{senh}^5\, x \cosh x\, dx = \tfrac{1}{6}\, \text{senh}^6\, x + C$$

$u = \text{senh}\, x$, $du = \cosh x\, dx$

$$\int \text{tgh}\, x\, dx = \int \frac{\text{senh}\, x}{\cosh x}\, dx$$

$$= \ln|\cosh x| + C$$

$u = \cosh x$, $du = \text{senh}\, x\, dx$

$$= \ln(\cosh x) + C$$

Como $\cosh x > 0$ para todo x, estamos autorizados a abolir os sinais de valor absoluto. ◄

► **Exemplo 4** Um cabo de 100 pés está preso pelas pontas no alto de dois postes de 50 pés posicionados a 90 pés de distância (Figura 7.9.4). A que altura acima do solo está o ponto médio do cabo?

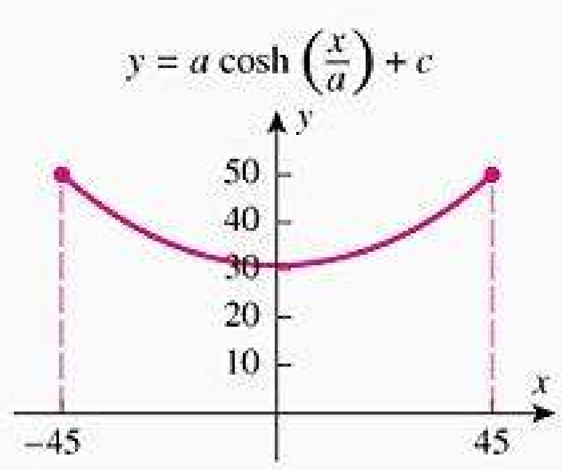


Figura 7.9.4

Solução Pelo que vimos acima, o cabo forma uma catenária de equação

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

onde a origem está no solo a meio caminho entre os dois postes. Usando a Fórmula (4) da Seção 7.4 para o comprimento da catenária, temos

$$100 = \int_{-45}^{45} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\int_0^{45} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Por simetria pelo eixo y

$$= 2\int_0^{45} \sqrt{1 + \text{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx$$

$$= 2\int_0^{45} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \qquad \boxed{\text{Por (1) e por } \cosh x > 0}$$

$$= 2a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg]_0^{45} = 2a \operatorname{senh}\left(\frac{45}{a}\right)$$

Usando o recurso numérico de uma calculadora para resolver

$$100 = 2a \operatorname{senh}\left(\frac{45}{a}\right)$$

em a obtemos $a \approx 56{,}01$. Então

$$50 = y(45) = 56{,}01 \cosh\left(\frac{45}{56{,}01}\right) + c \approx 75{,}08 + c$$

de modo que $c \approx -25{,}08$. Assim, o ponto médio do cabo está a $y(0) \approx 56{,}01 - 25{,}08 = 30{,}93$ pés acima do solo. ◄

■ FUNÇÕES INVERSAS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

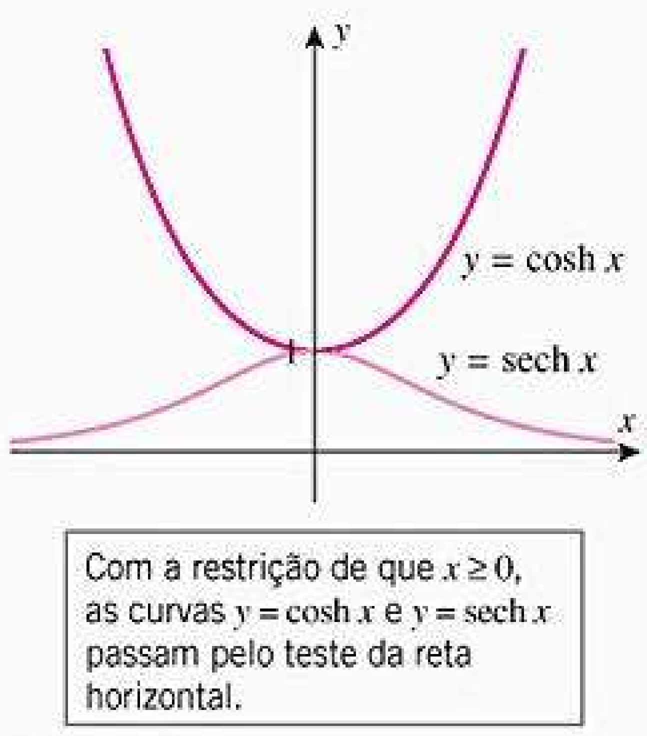


Figura 7.9.5

A partir da Figura 7.9.1, é evidente que os gráficos de senh x, tgh x, cotgh x e cossech x passam pelo teste da reta horizontal, mas os gráficos de cosh x e sech x não. No último caso, restringir x como não-negativo torna as funções invertíveis (Figura 7.9.5). Os gráficos das seis funções hiperbólicas inversas na Figura 7.9.6 foram obtidos por reflexão em torno da reta $y = x$ (com as restrições apropriadas).

A Tabela 7.9.1 resume as propriedades básicas das funções hiperbólicas inversas. O leitor deve confirmar que os domínios e as imagens na tabela estão de acordo com os gráficos na Figura 7.9.6.

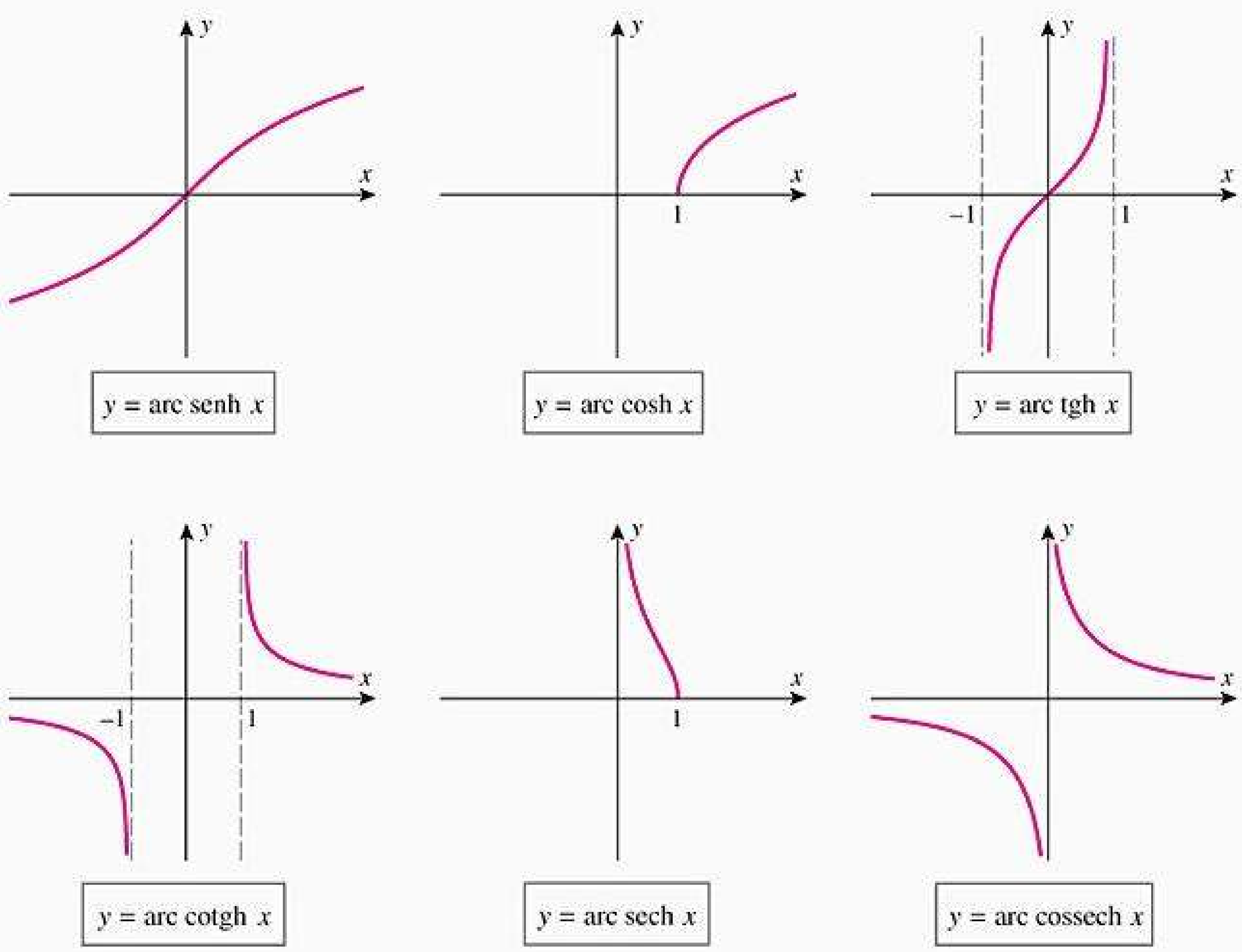


Figura 7.9.6

Tabela 7.9.1

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	RELAÇÕES BÁSICAS
arc senh x	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	arc senh (senh x) = x se $-\infty < x < +\infty$ senh (arc senh x) = x se $-\infty < x < +\infty$
arc cosh x	$[1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	arc cosh (cosh x) = x se $x \geq 0$ cosh (arc cosh x) = x se $x \geq 1$
arc tgh x	$(-1, 1)$	$(-\infty, +\infty)$	arc tgh (tgh x) = x se $-\infty < x < +\infty$ tgh (arc tgh x) = x se $-1 < x < 1$
arc cotgh x	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	arc cotgh (cotgh x) = x se $x < 0$ ou $x > 0$ cotgh (arc cotgh x) = x se $x < -1$ ou $x > 1$
arc sech x	$(0, 1]$	$[0, +\infty)$	arc sech (sech x) = x se $x \geq 0$ sech (arc sech x) = x se $0 < x \leq 1$
arc cossech x	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	arc cossech (cossech x) = x se $x < 0$ ou $x > 0$ cossech (arc cossech x) = x se $x < 0$ ou $x > 0$

FORMAS LOGARÍTMICAS DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Como as funções hiperbólicas podem ser expressas em termos de e^x, não deve constituir uma surpresa que as funções hiperbólicas inversas possam ser expressas em termos dos logaritmos naturais. O próximo teorema mostra isso.

7.9.4 TEOREMA *As seguintes relações valem para todo x do domínio das funções hiperbólicas inversas dadas.*

$$\text{arc senh } x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \text{arc cosh } x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$\text{arc tgh } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \text{arc cotgh } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\text{arc sech } x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad \text{arc cossech } x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$$

Vamos mostrar como deduzir a primeira fórmula desse teorema, deixando as restantes como exercício. A idéia básica é escrever a equação $x = \text{senh } y$ em termos de funções exponenciais, e resolvê-la para y como uma função de x. Isso irá produzir a equação $y = \text{arc senh } x$, em que arc senh x está expressa em termos de logaritmos naturais. Expressando $x = \text{senh } y$ em termos de exponencias, obtemos

$$x = \text{senh } y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

a qual pode ser reescrita como

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

Multiplicando essa equação por e^y, obtemos

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

e aplicando a fórmula quadrática, obtemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Uma vez que $e^y > 0$, a solução envolvendo o sinal menos deve ser descartada. Assim,

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

Tomando o logaritmo natural, obtemos

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{ou} \quad \text{arc senh } x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

► Exemplo 5

$$\text{arc senh } 1 = \ln(1 + \sqrt{1^2+1}) = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}8814$$

$$\text{arc tgh}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0{,}5493 \quad ◄$$

DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

O Teorema 4.3.1 pode ser usado para estabelecer a diferenciabilidade das funções hiperbólicas inversas (omitiremos os detalhes), e as fórmulas para as derivadas podem ser obtidas do Teorema 7.9.4. Por exemplo,

> Mostre que a derivada de arc senh x pode também ser obtida tomando $y = \text{arc senh } x$ e então diferenciando implicitamente a equação $x = \text{senh } y$.

$$\frac{d}{dx}[\text{arc senh } x] = \frac{d}{dx}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Esse cálculo leva a duas fórmulas de integração: a que envolve arc senh x e uma fórmula equivalente envolvendo logaritmos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{arc senh } x + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$

Os dois teoremas a seguir dão uma lista das fórmulas de derivação e das correspondentes fórmulas de integração para as funções hiperbólicas inversas. Algumas das provas aparecem como exercícios.

7.9.5 TEOREMA

$$\frac{d}{dx}(\text{arc senh } u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\text{arc cotgh } u) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cosh } u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad u > 1 \qquad \frac{d}{dx}(\text{arc sech } u) = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad 0 < u < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc tgh } u) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \quad |u| < 1 \qquad \frac{d}{dx}(\text{arc cossech } u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}, \quad u \neq 0$$

7.9.6 TEOREMA *Se $a > 0$, então*

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \text{arc senh}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad ou \quad \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \text{arc cosh}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad ou \quad \ln(u+\sqrt{u^2-a^2}) + C, \quad u > a$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\,\text{arc tgh}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C, & |u| < a \\ \dfrac{1}{a}\,\text{arc cotgh}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C, & |u| > a \end{cases} \quad ou \quad \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C, \quad |u| \neq a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\text{arc sech}\left|\frac{u}{a}\right| + C \quad ou \quad -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{|u|}\right) + C, \quad 0 < |u| < a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\text{arc cossech}\left|\frac{u}{a}\right| + C \quad ou \quad -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{|u|}\right) + C, \quad u \neq 0$$

► **Exemplo 6** Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}, \quad x > \frac{3}{2}$

Solução Seja $u = 2x$. Assim, $du = 2\,dx$ e

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-3^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\text{arc cosh}\left(\frac{u}{3}\right) + C = \frac{1}{2}\text{arc cosh}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

Alternativamente, podemos utilizar o equivalente logarítmico de arc cosh $(2x/3)$,

$$\text{arc cosh}\left(\frac{2x}{3}\right) = \ln(2x+\sqrt{4x^2-9}) - \ln 3$$

(verifique), e expressar a resposta como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2-9}) + C \quad ◄$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.9 (*Ver página 507 para respostas.*)

1. $\cosh x =$ ________ $\text{senh}\, x =$ ________
   $\text{tgh}\, x =$ ________

2. Complete a tabela.

	cosh *x*	senh *x*	tgh *x*	cotgh *x*	sech *x*	cossech *x*
DOMÍNIO						
IMAGEM						

3. As equações paramétricas
   $$x = \cosh t, \quad y = \text{senh}\, t \quad (-\infty < t < +\infty)$$
   representam o lado direito de uma curva chamada ________. Eliminando o parâmetro, a equação dessa curva é dada por ________.

4. $\dfrac{d}{dx}[\cosh x] =$ ________ $\dfrac{d}{dx}[\text{senh}\, x] =$ ________
   $\dfrac{d}{dx}[\text{tgh}\, x] =$ ________

5. $\displaystyle\int \cosh x\, dx =$ ________ $\displaystyle\int \text{senh}\, x\, dx =$ ________
   $\displaystyle\int \text{tgh}\, x\, dx =$ ________

6. $\dfrac{d}{dx}[\text{arc cosh}\, x] =$ ________ $\dfrac{d}{dx}[\text{arc senh}\, x] =$ ________
   $\dfrac{d}{dx}[\text{arc tgh}\, x] =$ ________

EXERCÍCIOS 7.9 Recurso Gráfico C CAS

1-2 Aproxime a expressão até quatro casas decimais.

1. (a) senh 3 (b) cosh (−2) (c) tgh (ln 4)
(d) arc senh (−2) (e) arc cosh 3 (f) arc tgh $\frac{3}{4}$

2. (a) cossech (−1) (b) sech (ln 2) (c) cotgh 1
(d) arc sech $\frac{1}{2}$ (e) arc cotgh 3 (f) arc cossech $(-\sqrt{3})$

3. Encontre o valor numérico exato de cada expressão.
(a) senh (ln 3) (b) cosh (−ln 2)
(c) tgh (2 ln 5) (d) senh (−3 ln 2)

4. Em cada parte, reescreva a expressão como uma razão de polinômios.
(a) cosh (ln x) (b) senh (ln x)
(c) tgh (2 ln x) (d) cosh (−ln x)

5. Em cada parte, um valor para uma das funções hiperbólicas é dado em um ponto não-especificado x_0. Use as identidades apropriadas para encontrar os valores exatos das cinco restantes funções hiperbólicas em x_0.
(a) senh $x_0 = 2$ (b) cosh $x_0 = \frac{5}{4}$ (c) tgh $x_0 = \frac{4}{5}$

6. Obtenha as fórmulas das derivadas para cossech x, sech x e cotgh x das fórmulas de derivação para senh x, cosh x e tgh x.

7. Obtenha as derivadas de arc senh x, arc cosh x e arc tgh x diferenciando implicitamente as equações x = senh y, x = cosh y e x = tgh y.

C **8.** Use um CAS para encontrar as derivadas de arc senh x, arc cosh x, arc tgh x, arc cotgh x, arc sech x e arc cossech x e confirme que seus resultados estão de acordo com os do Teorema 7.9.5.

9-28 Encontre *dy/dx*.

9. y = senh $(4x - 8)$
10. y = cosh (x^4)
11. y = cotgh (ln x)
12. y = ln (tgh $2x$)
13. y = cossech $(1/x)$
14. y = sech (e^{2x})
15. $y = \sqrt{4x + \cosh^2(5x)}$
16. y = senh^3 $(2x)$
17. $y = x^3$ tgh^2 $(\sqrt{x})$
18. y = senh (cos $3x$)
19. y = arc senh $\left(\frac{1}{3}x\right)$
20. y = arc senh $(1/x)$
21. y = ln (arc cosh x)
22. y = arc cosh (arc senh x)
23. $y = \dfrac{1}{\text{arc tgh } x}$
24. y = (arc cotgh $x)^2$
25. y = arc cosh (cosh x)
26. y = arc senh (tgh x)
27. $y = e^x$ arc sech $\sqrt{x}$
28. $y = (1 + x$ arc cossech $x)^{10}$

C **29.** Use um CAS para encontrar as derivadas do Exemplo 2. Se a resposta produzida pelo CAS não estiver de acordo com a do livro, então use identidades apropriadas para mostrar que elas são equivalentes.

C **30.** Para cada uma das derivadas obtidas nos Exercícios 9 a 28, use um CAS para verificar sua resposta. Se a resposta obtida pelo CAS não estiver de acordo com a sua, mostre que elas são equivalentes.

31-46 Calcule as integrais.

31. $\displaystyle\int \text{senh}^6 x \cosh x \, dx$
32. $\displaystyle\int \cosh(2x - 3)\, dx$
33. $\displaystyle\int \sqrt{\text{tgh}\, x}\, \text{sech}^2 x \, dx$
34. $\displaystyle\int \text{cossech}^2(3x)\, dx$
35. $\displaystyle\int \text{tgh}\, x \, dx$
36. $\displaystyle\int \text{cotgh}^2 x \, \text{cossech}^2 x \, dx$
37. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \text{tgh}\, x \, \text{sech}^3 x \, dx$
38. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$
39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 9x^2}}$
40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} \quad (x > \sqrt{2})$
41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \quad (x < 0)$
42. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,\theta\, d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2\theta}}$
43. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x^2}}$
44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 25}} \quad (x > 5/3)$
45. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$
46. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$

C **47.** Para cada uma das integrais obtidas nos Exercícios 31 a 46, use um CAS para verificar sua resposta. Se a resposta produzida pelo CAS não estiver de acordo com a sua, mostre que elas são equivalentes.

48. Use um recurso gráfico computacional para gerar os gráficos de senh x, cosh x e tgh x, expressando essas funções em termos de e^x e e^{-x}. Se o recurso gráfico computacional puder fazer diretamente os gráficos daquelas funções, gere os gráficos também diretamente.

49. Encontre a área delimitada por y = senh $2x$, $y = 0$ e $x = \ln 3$.

50. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por y = sech x, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \ln 2$ gira em torno do eixo x.

51. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por y = cosh $2x$, y = senh $2x$, $x = 0$ e $x = 5$ gira em torno do eixo x.

52. Aproxime o valor positivo da constante a de tal modo que a área englobada por $y = \cosh ax$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$ seja de 2 unidades de área. Expresse sua resposta com pelo menos cinco casas decimais.

53. Encontre o comprimento de arco da catenária $y = \cosh x$ entre $x = 0$ e $x = \ln 2$.

54. Encontre o comprimento de arco da catenária $y = a \cosh(x/a)$ entre $x = 0$ e $x = x_1$ $(x_1 > 0)$.

55. Nas partes (a) a (f), encontre os limites e confirme que estão de acordo com os gráficos nas Figuras 7.9.1 e 7.9.6.
(a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{senh}\, x$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{senh}\, x$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \text{tgh}\, x$ (d) $\lim_{x \to -\infty} \text{tgh}\, x$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \text{arc senh}\, x$ (f) $\lim_{x \to 1^-} \text{arc tgh}\, x$

ENFOCANDO CONCEITOS

56. Explique como podem ser obtidas as assíntotas para $y = \text{tgh}\, x$ a partir das assíntotas curvilíneas de $y = \cosh x$ e $y = \text{senh}\, x$.

57. Prove que senh x é uma função par de x, que cosh x é uma função ímpar de x e verifique que isso é consistente com os gráficos na Figura 7.9.1.

58-59 Prove as identidades.

58. (a) $\cosh x + \text{senh}\, x = e^x$
(b) $\cosh x - \text{senh}\, x = e^{-x}$
(c) $\text{senh}\,(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$
(d) $\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$
(e) $\cosh\,(x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$
(f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x$
(g) $\cosh 2x = 2\, \text{senh}^2 x + 1$
(h) $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$

59. (a) $1 - \text{tgh}^2 x = \text{sech}^2 x$
(b) $\text{tgh}(x + y) = \dfrac{\text{tgh}\, x + \text{tgh}\, y}{1 + \text{tgh}\, x\, \text{tgh}\, y}$
(c) $\text{tgh}\, 2x = \dfrac{2\, \text{tgh}\, x}{1 + \text{tgh}^2 x}$

60. Prove:
(a) $\text{arc cosh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$
(b) $\text{arc tgh}\, x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right), \quad -1 < x < 1$

61. Use o Exercício 60 para obter as fórmulas de derivação para arc cosh x e arc tgh x.

62. Prove:

$\text{arc sech}\, x = \text{arc cosh}\,(1/x), \quad 0 < x \leq 1$
$\text{arc cotgh}\, x = \text{arc tgh}\,(1/x), \quad |x| > 1$
$\text{arc cossech}\, x = \text{arc senh}\,(1/x), \quad x \neq 0$

63. Use o Exercício 62 para expressar a integral

$$\int \frac{du}{1 - u^2}$$

totalmente em termos de arc tgh.

64. Mostre que
(a) $\dfrac{d}{dx}[\text{arc sech}\,|x|] = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$
(b) $\dfrac{d}{dx}[\text{arc cossech}\,|x|] = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}$.

65. Em cada parte, encontre o limite
(a) $\lim_{x \to +\infty} (\text{arc cosh}\, x - \ln x)$ (b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\cosh x}{e^x}$

66. Use as derivadas primeira e segunda para mostrar que o gráfico de $y = \text{arc tgh}\, x$ é sempre crescente e tem um ponto de inflexão na origem.

67. As fórmulas de integração para $1/\sqrt{u^2 - a^2}$ no Teorema 7.9.6 são válidas para $u > a$. Mostre que a fórmula a seguir é válida para $u < -a$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\text{arc cosh}\left(-\frac{u}{a}\right) + C \quad \text{ou} \quad \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

68. Mostre que $(\text{senh}\, x + \cosh x)^n = \text{senh}\, nx + \cosh nx$.

69. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} e^{tx}\, dx = \frac{2\, \text{senh}\, at}{t}$$

70. Um cabo está suspenso entre dois postes conforme a Figura 7.9.2. Suponha que a equação da curva formada pelo cabo seja $y = a \cosh(x/a)$, onde a é uma constante positiva. Suponha que as coordenadas x dos pontos de suporte são $x = -b$ e $x = b$, sendo $b > 0$.

(a) Mostre que o comprimento de arco L do cabo é dado por

$$L = 2a\, \text{senh}\, \frac{b}{a}$$

(b) Mostre que a flexa S (distância vertical entre o ponto mais alto e o mais baixo ao longo do cabo) é dada por

$$S = a \cosh \frac{b}{a} - a$$

71-72 Estes exercícios referem-se ao cabo suspenso descrito no Exercício 70.

71. Supondo que os postes estejam a 400 pés de distância e que a flecha no cabo seja de 30 pés, aproxime o comprimento do cabo aproximando a. Expresse sua resposta final até o décimo de pé mais próximo. [*Sugestão:* Faça primeiro $u = 200/a$.]

72. Supondo que o cabo tenha 120 pés de comprimento e que os postes estejam a 100 pés de distância, aproxime a flecha no cabo aproximando a. Expresse sua resposta final até o décimo de pé mais próximo. [*Sugestão:* Faça primeiro $u = 50/a$.]

73. O projeto do Gateway Arch em St. Louis, Missouri, foi elaborado pelo arquiteto Eero Saarinan e implementado usando as equações fornecidas pelo Dr. Hannskarl Badel. As equações usadas para curva central do arco foram

$$y = 693{,}8597 - 68{,}7672 \cosh\,(0{,}0100333x) \text{ pés}$$

para x entre $-299{,}2239$ e $299{,}2239$.

(a) Use um recurso computacional para fazer o gráfico da curva central do arco.
(b) Encontre o comprimento da curva central com quatro casas decimais.
(c) Para quais valores de x a altura do arco é 100 pés? Arredonde sua resposta para quatro casas decimais.
(d) Aproxime até o grau mais próximo o ângulo agudo que a reta tangente à curva central faz com o solo no final do arco.

74. Suponha que um tubo oco gire com uma velocidade angular constante de ω rad/s em torno de um eixo horizontal em um extremo do tubo, conforme a figura a seguir. Suponha que um objeto deslize sem atrito dentro do tubo, enquanto o tubo

estiver girando. Seja r a distância do objeto ao ponto pivô no instante $t \geq 0$ e suponha que, quando $t = 0$, o objeto esteja em repouso e $r = 0$. Pode-se mostrar que, se o tubo estiver na horizontal em $t = 0$ e girando conforme a figura, então

$$r = \frac{g}{2\omega^2}[\text{senh}(\omega t) - \text{sen}(\omega t)]$$

durante o período em que o objeto estiver no tubo. Suponha que t esteja em segundos, r em metros, $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ e $\omega = 2$ rad/s.

(a) Faça o gráfico de r *versus* t para $0 \leq t \leq 1$.

(b) Supondo que o tubo tenha um comprimento de 1 m, aproximadamente quanto tempo o objeto levará para atingir o final do tubo?

(c) Use o resultado de (*b*) para aproximar dr/dt, no momento em que o objeto atingir o fim do tubo.

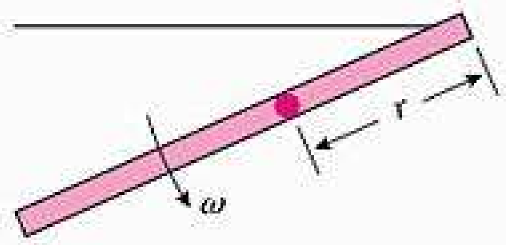


Figura Ex-74

75. A figura ao lado mostra uma pessoa puxando um barco por uma corda de comprimento a amarrada na proa e andando na beirada de um cais. Supondo que a corda esteja sempre tangente à curva traçada pela proa, então essa curva, que é chamada de ***tractriz***, tem a propriedade de que o segmento da reta tangente entre ela e o eixo y tem comprimento constante a. Pode-se provar que a equação dessa tractriz é

$$y = a \text{ arc sech } \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

(a) Mostre que, para mover a proa do barco até um ponto (x, y), a pessoa precisa andar uma distância de

$$D = a \text{ arc sech } \frac{x}{a}$$

da origem.

(b) Se a corda tiver um comprimento de 15 m, quanto a pessoa precisará andar a partir da origem, para trazer o barco a 10 m do cais? Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

(c) Encontre a distância percorrida pela proa ao longo da tractriz, quando ela se move de sua posição inicial para um ponto que está a 5 m do cais.

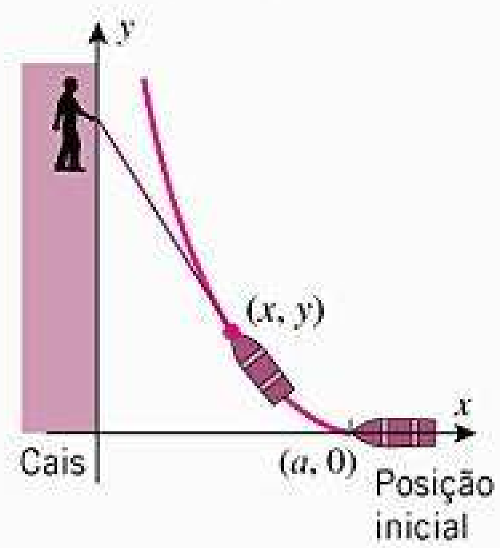


Figura Ex-75

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 7.9

1. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2.

	cosh x	senh x	tgh x	cotgh x	sech x	cossech x
DOMÍNIO	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
IMAGEM	$[1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$(0, 1]$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. hipérbole unitária; $x^2 - y^2 = 1$ **4.** senh x; cosh x; $\text{sech}^2 x$ **5.** senh $x + C$; cosh $x + C$; ln (cosh x) + C

6. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\dfrac{1}{1 - x^2}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

1. Descreva o método do fatiamento para encontrar volumes e use-o para deduzir uma fórmula integral para obter volumes pelo método dos discos.

2. Enuncie uma fórmula integral para encontrar um volume pelo método das camadas cilíndricas e use somas de Riemann para derivar a fórmula dada.

3. Enuncie uma fórmula integral para encontrar o comprimento de arco de uma curva lisa $y = f(x)$ acima de um intervalo $[a, b]$ e use somas de Riemann para derivar a fórmula dada.

4. Enuncie uma fórmula integral para o trabalho W realizado por uma força variável $F(x)$ aplicada na direção e no sentido de movimento de um objeto que se desloca de $x = a$ para $x = b$ e use somas de Riemann para derivar a fórmula dada.

5. Enuncie uma fórmula integral para a força fluida F exercida sobre uma superfície plana verticalmente submersa em um fluido de peso específico ρ e use somas de Riemann para derivar a fórmula dada.

6. Seja R a região no primeiro quadrante delimitada por $y = x^2$, $y = 2 + x$ e $x = 0$. Em cada parte, monte, *mas não calcule*,

uma integral ou uma soma de integrais que resolva o problema.

(a) Encontre a área de R por integração em relação a x.

(b) Encontre a área de R por integração em relação a y.

(c) Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno do eixo x, por integração em relação a x.

(d) Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno do eixo x, por integração em relação a y.

(e) Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno do eixo y, por integração em relação a x.

(f) Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno do eixo y, por integração em relação a y.

(g) Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno da reta $y = -3$, por integração em relação a x.

(h) Encontre o volume do sólido gerado quando R gira em torno da reta $x = 5$, por integração em relação a x.

7. (a) Estabeleça uma soma de integrais definidas que represente a área total entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ na figura abaixo.

(b) Encontre a área total delimitada por $y = x^3$ e $y = x$ no intervalo $[-1, 2]$.

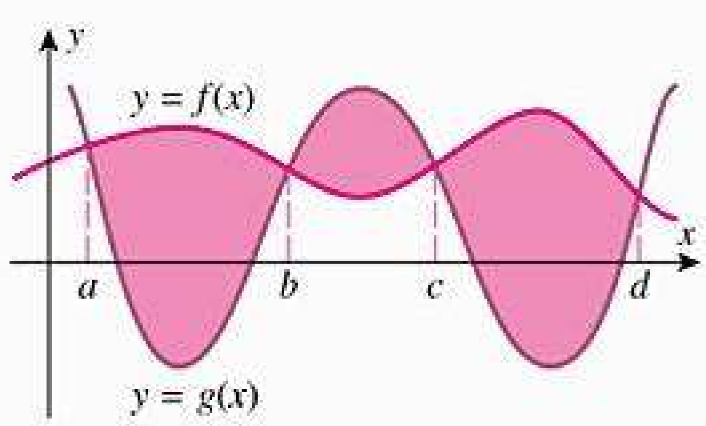


Figura Ex-7

8. A figura abaixo mostra as curvas velocidade *versus* tempo para dois carros movendo-se ao longo de uma pista reta, começando no mesmo ponto e acelerando a partir do repouso.

(a) Qual é a distância entre os carros após 60 s?

(b) Qual é a distância entre os carros após T segundos, sendo $0 \le T \le 60$?

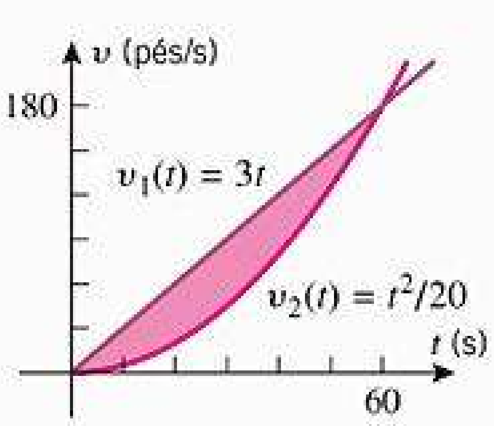


Figura Ex-8

9. Seja R a região englobada pelas curvas $y = x^2 + 4$, $y = x^3$ e o eixo y. Encontre e calcule uma integral definida que represente o volume do sólido obtido quando R gira em torno do eixo x.

10. Uma bola de futebol americano tem o formato do sólido gerado pela revolução da região delimitada entre o eixo x e a parábola $y = 4R(x^2 - \frac{1}{4}L^2)/L^2$, em torno do eixo x. Encontre seu volume.

11. Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/\sqrt{x}$ para $1 \le x \le 4$ e cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

12. Considere a região englobada por $y = \text{arc sen } x$, $y = 0$ e $x = 1$. Monte, *mas não calcule*, uma integral que represente o volume do sólido obtido quando a região gira em torno do eixo x usando

(a) discos; (b) camadas cilíndricas.

13. Encontre o comprimento de arco no segundo quadrante da curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ de $x = -8$ a $x = -1$.

14. Seja C a curva $y = e^x$ entre $x = 0$ e $x = \ln 10$. Em cada parte, monte, *mas não calcule*, uma integral que resolva o problema.

(a) Encontre o comprimento de arco de C integrando em relação a x.

(b) Encontre o comprimento de arco de C integrando em relação a y.

15. Encontre a área da superfície obtida quando a curva $y = \sqrt{25 - x}$, $9 \le x \le 16$ gira em torno do eixo x.

16. Seja C a curva $27x - y^3 = 0$ entre $y = 0$ e $y = 2$. Em cada parte, monte, *mas não calcule*, uma integral ou somas de integrais que resolvam o problema.

(a) Encontre a área da superfície gerada quando C gira em torno do eixo x por integração em relação x.

(b) Encontre a área da superfície gerada quando C gira em torno do eixo y por integração em relação a y.

(c) Encontre a área da superfície gerada quando C gira em torno da reta $y = -2$ por integração em relação a y.

17. Use o gráfico de f abaixo para encontrar o valor médio de f no intervalo $[0, 10]$.

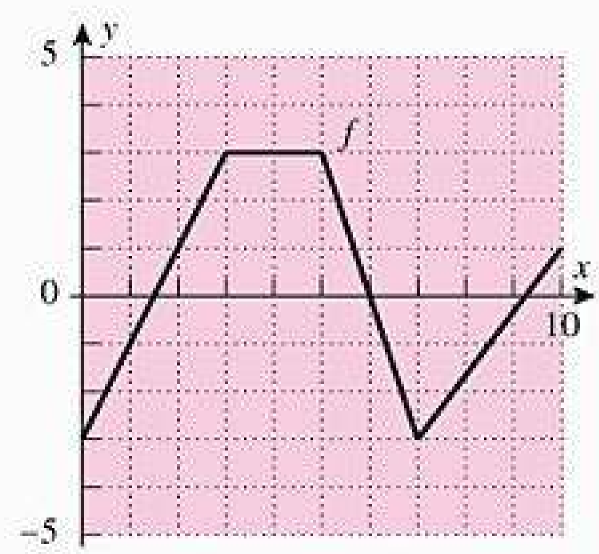


Figura Ex-17

18. Encontre o valor médio de $f(x) = e^x + e^{-x}$ acima do intervalo $\left[\ln \frac{1}{2}, \ln 2\right]$.

19. Considere o sólido obtido quando a região englobada por $y = \sec x$, $x = 0$, $x = \pi/3$ e $y = 0$ gira em torno do eixo x. Encontre o valor médio da área de uma seção transversal desse sólido tomada perpendicularmente ao eixo x.

20. Seja f uma função lisa no intervalo $[a, b]$. Mostre que a taxa de variação média de f sobre $[a, b]$ é igual ao valor médio de f' sobre $[a, b]$.

21. (a) Uma mola exerce uma força de 0,5 N quando esticada 0,25 m além de seu comprimento natural. Supondo aplicável a lei de Hooke, qual foi o trabalho realizado para esticar a mola até esse comprimento?

(b) Com 25 J de trabalho, qual é a distância que podemos esticar a mola além de seu comprimento natural?

22. Um barco está ancorado de tal forma que a âncora está 150 pés abaixo da superfície da água. O peso da âncora na água é de

2000 lb e a corrente pesa 30 lb/pé. Qual é o trabalho necessário para levantar a âncora até a superfície?

23. Em cada parte, monte, *mas não calcule*, uma integral que resolva o problema.

(a) Encontre a força que um fluido exerce sobre o lado de uma caixa que tem base quadrada com 3 m de lado e está cheia até uma profundidade de 1 m com líquido de peso específico ρ N/m^3.

(b) Encontre a força exercida por um líquido de peso específico ρ lb/pé^3 sobre a superfície da placa vertical mostrada na parte (*a*) da Figura Ex-23.

(c) Encontre a força exercida sobre um dique parabólico na parte (*b*) da Figura Ex-23, quando a água se estende até o topo do dique.

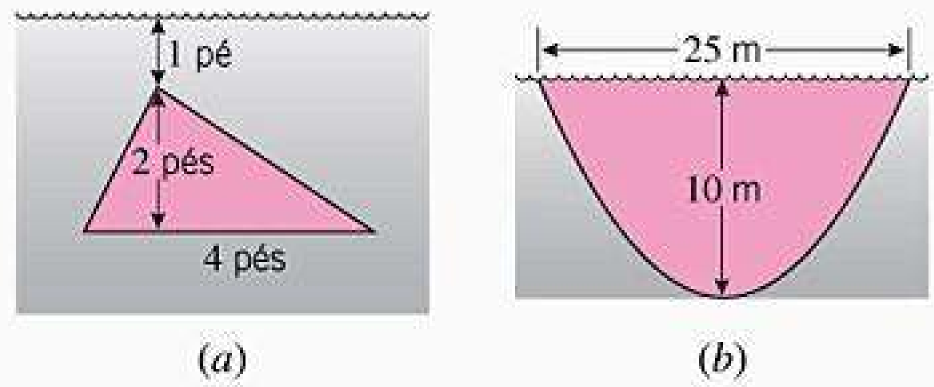


Figura Ex-23

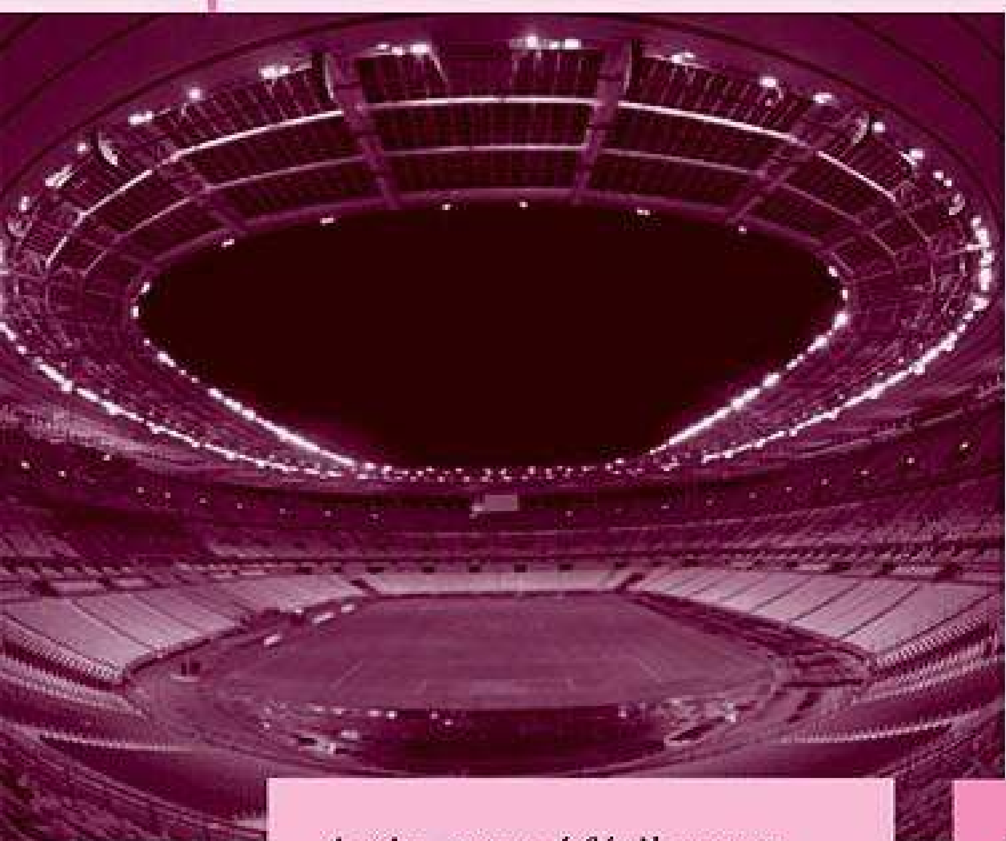
24. Mostre que, para qualquer valor da constante a, a função $y = \text{senh}\,(ax)$ satisfaz a equação $y'' = a^2y$.

25. Em cada parte, prove a identidade

(a) $\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$

(b) $\cosh \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$

(c) $\text{senh}\, \frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}$



PRINCÍPIOS DO CÁLCULO DE INTEGRAIS

Assim como é fácil encontrar a diferencial de uma certa quantidade, é difícil encontrar a integral de uma diferencial. Mais do que isso, às vezes nem podemos dizer com certeza se a integral de uma quantidade pode ou não ser encontrada.

—**Johann Bernoulli**
Matemático

Em capítulos anteriores, obtivemos muitas fórmulas básicas de integração imediatamente a partir das correspondentes fórmulas de diferenciação. Por exemplo, sabendo que a derivada de sen x é cos x, fomos capazes de deduzir que a integral de cos x é sen x. Subseqüentemente, expandimos nosso repertório de integração através da introdução do método de substituição u. Esse método possibilitou integrar muitas funções, através da transformação de integrandos não-conhecidos em conhecidos. Porém, só a substituição u não é suficiente para dar conta da grande variedade de integrais que surgem nas aplicações. Logo, técnicas de integração adicionais são ainda necessárias. Neste capítulo, discutiremos algumas dessas técnicas e forneceremos um procedimento mais sistemático de abordagem de integrais não-conhecidas. Abordaremos mais aproximações numéricas de integrais definidas e exploraremos a idéia de integração em intervalos infinitos.

Foto: ***O contorno de alguns estádios é elíptico. Veja-se, por exemplo, o teto aparentemente flutuante do complexo esportivo Stade de France (ao norte de Paris, França, onde o Brasil perdeu a final da Copa do Mundo de 1998). Encontrar o comprimento de uma elipse envolve técnicas de integração numérica introduzidas neste capítulo.***

8.1 UMA VISÃO GERAL DOS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

Nesta seção daremos uma visão geral dos métodos para o cálculo de integrais e faremos uma revisão das fórmulas de integração discutidas em seções anteriores.

MÉTODOS DE ABORDAGEM DOS PROBLEMAS DE INTEGRAÇÃO

Há três abordagens básicas para o cálculo de integrais desconhecidas:

- **Tecnologia** – Os programas CAS, tais como *Mathematica, Maple* e *Derive,* são capazes de calcular integrais extremamente complicadas, e cada vez mais as calculadoras e os computadores estão sendo equipados com eles.
- **Tabelas** – Antes do desenvolvimento dos programas CAS, os cientistas dependiam muito de tabelas para o cálculo das difíceis integrais que surgem nas aplicações. Tais tabelas foram compiladas por muitos anos, incorporando habilidade e experiência de muita gente. Uma delas é mostrada nas páginas iniciais e finais deste livro, porém, tabelas mais completas aparecem em vários livros de referência, como o *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae,* CRC Press, Inc., 2002.

- **Métodos de transformação** – São métodos para converter integrais não-conhecidas em conhecidas. Eles incluem substituição u, manipulação algébrica do integrando e outros métodos que discutiremos neste capítulo.

Nenhum desses três métodos é perfeito; por exemplo, os programas CAS freqüentemente encontram integrais que não são capazes de integrar e produzem respostas que são, às vezes, excessivamente complicadas; tabelas não são exaustivas e podem não incluir uma integral de interesse; e os métodos de transformação dependem da engenhosidade humana, que pode não ser adequada a problemas difíceis.

Neste capítulo focalizaremos os métodos de transformação e as tabelas; assim, *não será necessário* ter um CAS. Porém, se o leitor dispuser de um, poderá usá-lo para confirmar os resultados dos exemplos, e há exercícios que são elaborados para ser resolvidos com um CAS. Portanto, se o leitor dispuser de um CAS, deve lembrar que muitos dos algoritmos que ele usa estão baseados nos métodos que discutiremos aqui, e uma compreensão desses métodos irá ajudá-lo a usar seu recurso tecnológico de uma maneira mais informada.

UMA REVISÃO DAS FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

A seguir, uma lista das integrais básicas que encontramos até aqui:

CONSTANTES, POTÊNCIAS E EXPONENCIAIS

1. $\int du = u + C$

2. $\int a\,du = a\int du = au + C$

3. $\int u^r\,du = \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C,\ r \neq -1$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

5. $\int e^u\,du = e^u + C$

6. $\int b^u\,du = \dfrac{b^u}{\ln b} + C,\ b > 0, b \neq 1$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

7. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

8. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

9. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

10. $\int \operatorname{cossec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$

11. $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

12. $\int \operatorname{cossec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cossec} u + C$

13. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C$

14. $\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

15. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

16. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

17. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \operatorname{tgh} u + C$

18. $\int \operatorname{cossech}^2 u\,du = -\operatorname{cotgh} u + C$

19. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

20. $\int \operatorname{cossech} u \operatorname{cotgh} u\,du = -\operatorname{cossech} u + C$

FUNÇÕES ALGÉBRICAS ($a > 0$)

21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{u}{a} + C \qquad (|u| < a)$

22. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{u}{a} + C$

23. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arc sec}\left|\frac{u}{a}\right| + C \qquad (0 < a < |u|)$

24. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C$

25. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C \qquad (0 < a < |u|)$

26. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

27. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C \qquad (0 < |u| < a)$

28. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

A Fórmula 25 é uma generalização de um resultado do Teorema 7.9.6. Os leitores que não estudaram a Seção 7.9 podem, por enquanto, ignorar as Fórmulas 24-28, já que neste capítulo desenvolveremos outros métodos para sua obtenção.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.1 (*Ver página 513 para respostas.*)

1. Use manipulações algébricas e (se necessário) uma substituição *u* para integrar a função.
   (a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x}\,dx =$ ______
   (b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}\,dx =$ ______
   (c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx =$ ______
   (d) $\displaystyle\int xe^{3\ln x}\,dx =$ ______

2. Use identidades trigonométricas e (se necessário) uma substituição *u* para integrar a função.
   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\text{cossec}\,x}\,dx =$ ______
   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$ ______
   (c) $\displaystyle\int (\text{cotg}^2 x + 1)\,dx =$ ______
   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sec x + \text{tg}\,x}\,dx =$ ______

3. Integre a função.
   (a) $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,dx =$ ______
   (b) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,dx =$ ______
   (c) $\displaystyle\int (\text{sen}^3 x\cos x + \text{sen}\,x\cos^3 x)\,dx =$ ______
   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx =$ ______

EXERCÍCIOS 8.1

1-30 Calcule as integrais fazendo a substituição *u* apropriada e aplicando as fórmulas revisadas nesta seção.

1. $\displaystyle\int (4-2x)^3\,dx$

2. $\displaystyle\int 3\sqrt{4+2x}\,dx$

3. $\displaystyle\int x\sec^2(x^2)\,dx$

4. $\displaystyle\int 4x\,\text{tg}(x^2)\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,3x}{2+\cos 3x}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{9+4x^2}\,dx$

7. $\displaystyle\int e^x\,\text{senh}(e^x)\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\sec(\ln x)\,\text{tg}(\ln x)}{x}\,dx$

9. $\displaystyle\int e^{\text{tg}\,x}\sec^2 x\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

11. $\displaystyle\int \cos^5 5x\,\text{sen}\,5x\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\text{sen}\,x\sqrt{\text{sen}^2 x+1}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4+e^{2x}}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{e^{\text{arc tg}\,x}}{1+x^2}\,dx$

15. $\int \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,dx$ **16.** $\int (x+1)\operatorname{cotg}(x^2+2x)\,dx$

17. $\int \frac{\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **18.** $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,3^{\sqrt{x}}}$

20. $\int \sec(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{tg}(\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\,d\theta$

21. $\int \frac{\operatorname{cossech}^2(2/x)}{x^2}\,dx$ **22.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

23. $\int \frac{e^{-x}}{4-e^{-2x}}\,dx$ **24.** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

25. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ **26.** $\int \frac{\operatorname{senh}(x^{-1/2})}{x^{3/2}}\,dx$

27. $\int \frac{x}{\operatorname{cossec}(x^2)}\,dx$ **28.** $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

29. $\int x4^{-x^2}\,dx$ **30.** $\int 2^{\pi x}\,dx$

ENFOCANDO CONCEITOS

31. (a) Calcule a integral $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$ usando a substituição $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Calcule a integral $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$ usando a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$.

(c) Explique por que as respostas de (a) e (b) são consistentes.

32. (a) Deduza a identidade

$$\frac{\operatorname{sech}^2 x}{1+\operatorname{tgh}^2 x} = \operatorname{sech} 2x$$

(b) Use o resultado de (a) para calcular $\int \operatorname{sech} x\,dx$.

(c) Deduza a identidade

$$\operatorname{sech} x = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$$

(d) Use o resultado de (c) para calcular $\int \operatorname{sech} x\,dx$.

(e) Explique por que as respostas de (b) e (d) são consistentes.

33. (a) Deduza a identidade

$$\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}$$

(b) Use a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ junto com o resultado de (a) para calcular $\int \operatorname{cossec} x\,dx$.

(c) Use a identidade $\cos x = \operatorname{sen}[(\pi/2)-x]$ junto com o resultado de (a) para calcular $\int \sec x\,dx$.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.1

1. (a) $x+\ln|x|+C$ (b) $x+\ln|x+1|+C$ (c) $\ln(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg} x+C$ (d) $\frac{x^5}{5}+C$ **2.** (a) $-\cos x+C$ (b) $\operatorname{tg} x+C$ (c) $-\operatorname{cotg} x+C$ (d) $\ln(1+\operatorname{sen} x)+C$ **3.** (a) $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$ (b) $\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$ (c) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C$ (d) $\frac{1}{4}\operatorname{tgh} x+C$

8.2 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Nesta seção discutiremos uma técnica de integração que é, essencialmente, a formulação para antiderivadas da fórmula para derivação do produto de duas funções.

A REGRA DO PRODUTO E A INTEGRAÇÃO POR PARTES

Nosso objetivo principal nesta seção é desenvolver um método geral para atacar integrais do tipo

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

Como um primeiro passo, seja $G(x)$ uma antiderivada *qualquer* de $g(x)$. Nesse caso, temos $G'(x) = g(x)$ e, portanto, a regra do produto para derivar $f(x)G(x)$ pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}[f(x)G(x)] = f(x)g(x) + f'(x)G(x) \tag{1}$$

Isso implica que $f(x)G(x)$ é uma antiderivada da função do lado direito de (1), de modo que podemos expressar (1) em forma integral por

$$\int [f(x)g(x) + f'(x)G(x)]\,dx = f(x)G(x)$$

ou, equivalentemente, por

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx \tag{2}$$

Essa fórmula nos permite integrar $f(x)g(x)$ integrando, em vez disso, $f'(x)G(x)$, e em muitos casos o resultado líquido é substituir uma integral difícil por outra mais fácil. A aplicação dessa fórmula é denominada ***integração por partes***.

Na prática, costumamos reescrever (2) tomando

$$u = f(x), \quad du = f'(x)\,dx$$
$$v = G(x), \quad dv = G'(x)\,dx = g(x)\,dx$$

Isso dá a formulação alternativa seguinte de (2):

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{3}$$

Observe que, no Exemplo 1, omitimos a constante de integração quando calculamos v a partir de dv. Se tivéssemos incluído uma constante de integração, ela acabaria sendo jogada fora. Isso sempre ocorre com a integração por partes [Exercício 62(b)], de modo que é comum omitir a constante nessa etapa das contas. Contudo, existem certos casos em que a escolha inteligente de uma constante de integração para juntar a v pode simplificar o cálculo de $\int v\,du$ (Exercícios 63 a 65).

Efetue a integração no Exemplo 1 usando a Fórmula (2).

Exemplo 1 Use integração por partes para calcular $\int x \cos x\,dx$.

Solução Aplicaremos a Fórmula (3). O primeiro passo é escolher u e dv para colocar a integral no formato $\int u\,dv$. Tomamos

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = \cos x\,dx$$

(Outras possibilidades serão consideradas mais adiante.) O segundo passo é calcular du a partir de u e v a partir de dv. Obtemos

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = \int dv = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

O terceiro passo é aplicar a Fórmula (3). Obtemos

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}$$
$$= x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$ ◀

GUIA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

O objetivo principal da integração por partes é escolher u e dv para obter uma nova integral que é mais fácil de calcular do que a original. Em geral, não há regras imediatas e precisas para isso; é uma questão de experiência, que provém de muita prática. Uma estratégia que geralmente funciona é escolher u e dv de tal modo que u fique "mais simples" ao derivar, enquanto dv seja fácil de integrar para obter v. Assim, para a integral $\int x \cos x\,dx$ do Exemplo 1, ambos os objetivos foram alcançados tomando $u = x$ e $dv = \cos x\,dx$. No entanto, $u = \cos x$ não teria sido uma boa escolha naquele exemplo, pois $du/dx = -\operatorname{sen} x$ não é mais simples do que u. De fato, se tivéssemos escolhido

$$u = \cos x \qquad dv = x\,dx$$
$$du = -\operatorname{sen} x\,dx \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

então teríamos obtido

$$\int x \cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\cos x - \int \frac{x^2}{2}(-\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$$

Para essa escolha de u e de dv, a integral nova é, na verdade, até mais complicada do que a integral original.

O método LIATE foi discutido no artigo "A Technique for Integration by Parts", de Herbert Kasube, publicado na *American Mathematical Monthly*, Vol 90, 1983, p. 210-211.

Existe uma outra estratégia útil para escolher u e dv, que pode ser aplicada quando o integrando é um produto de duas funções de categorias *distintas* da lista

Logarítmica, trigonométrica **I**nversa, **A**lgébrica, **T**rigonométrica, **E**xponencial

Nesse caso, costumamos ter sucesso tomando u como uma função cuja categoria ocorre antes na lista e dv como o resto do integrando. O acrônimo LIATE ajuda a lembrar essa ordem. O método não funciona sempre, mas o bastante para ser útil.

Observe, por exemplo, que o integrando no Exemplo 1 consiste no produto da função *algébrica* x e da função *trigonométrica* $\cos x$. Assim, o método LIATE sugere que deveríamos tomar $u = x$ e $dv = \cos x\,dx$, que já vimos ter sido uma escolha correta.

► Exemplo 2 Calcule $\int xe^x\,dx$.

Solução Nesse caso, o integrando é o produto da função algébrica x com a função exponencial e^x. De acordo com LIATE, deveríamos tomar

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = e^x\,dx$$

de modo que

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = \int e^x\,dx = e^x$$

Assim, por (3),

$$\int xe^x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C \blacktriangleleft$$

► Exemplo 3 Calcule $\int \ln x\,dx$.

Solução Uma escolha é tomar $u = 1$ e $dv = \ln x\,dx$. Mas, com tal escolha, encontrar v é equivalente a calcular $\int \ln x\,dx$, e nada foi conseguido. Portanto, a única escolha razoável é tomar

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \int dx = x$$

Com essa escolha, segue por (3) que

$$\int \ln x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C \blacktriangleleft$$

■ INTEGRAÇÃO POR PARTES REPETIDA

Às vezes é necessário usar a integração por partes mais de uma vez no mesmo problema.

► Exemplo 4 Calcule $\int x^2e^{-x}\,dx$.

Solução Sejam

$$u = x^2, \quad dv = e^{-x}\,dx, \quad du = 2x\,dx, \quad v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$

de modo que, por (3),

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x}\,dx &= \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ &= x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(2x)\,dx \\ &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx \qquad (4)\end{aligned}$$

A última integral é parecida com a original, exceto que trocamos x^2 por x. Mais uma integração por partes aplicada a $\int xe^{-x}\,dx$ completará o problema. Sejam

$$u = x, \quad dv = e^{-x}\,dx, \quad du = dx, \quad v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$

de modo que

$$\int xe^{-x}\,dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Finalmente, substituindo isso na última linha de (4), obtemos

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,dx &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + C \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C \ ◀\end{aligned}$$

O método LIATE sugere que as integrais do tipo

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx \quad \text{e} \quad \int e^{ax}\cos bx\,dx$$

possam ser calculadas tomando $u = \mathrm{sen}\,bx$ ou $u = \cos bx$ e $dv = e^{ax}\,dx$. Contudo, isso requer uma técnica que merece atenção especial.

► Exemplo 5 Calcule $\int e^x \cos x\,dx$.

Solução Sejam

$$u = \cos x, \quad dv = e^x\,dx, \quad du = -\mathrm{sen}\,x\,dx, \quad v = \int e^x\,dx = e^x$$

Assim,

$$\int e^x\cos x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = e^x\cos x + \int e^x\,\mathrm{sen}\,x\,dx \qquad (5)$$

Como o integrando $\int e^x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ é de um tipo parecido com a integral original $\int e^x\cos x\,dx$, parece que nada foi alcançado. Contudo, integremos essa nova integral por partes. Sejam

$$u = \mathrm{sen}\,x, \quad dv = e^x\,dx, \quad du = \cos x\,dx, \quad v = \int e^x\,dx = e^x$$

Assim,

$$\int e^x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = e^x\,\mathrm{sen}\,x - \int e^x\cos x\,dx$$

Junto com a Equação (5), isso dá

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + e^x\,\mathrm{sen}\,x - \int e^x\cos x\,dx \qquad (6)$$

que é uma equação que pode ser resolvida para a integral desconhecida. Obtemos

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

e, portanto,

$$\int e^x \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}e^x \cos x + \tfrac{1}{2}e^x \operatorname{sen} x + C \quad ◄$$

UM MÉTODO TABULADO PARA INTEGRAÇÃO POR PARTES REPETIDA

As integrais do tipo

$$\int p(x) f(x)\, dx$$

em que $p(x)$ é um polinômio, podem, às vezes, ser calculadas usando integração por partes repetida, em que u é tomado, em cada etapa, como sendo $p(x)$ ou uma de suas derivadas. Como du é calculada derivando u, a derivação repetida de $p(x)$ vai acabar resultando em 0, quando alcançamos um problema de integração simplificado. Um método conveniente para organizar as contas em duas colunas é chamado ***integração por partes tabulada***.

Outras informações sobre integração tabulada podem ser encontradas nos artigos "Tabular Integration by Parts", de David Horowitz, publicado no *College Mathematical Journal*, Vol. 21, 1990, p. 307-311, e "More on Tabular Integration by Parts", de Leonard Gillman, publicado no *College Mathematical Journal*, Vol. 22, 1991, p. 407-410.

Integração por Partes Tabulada

Passo 1 Derive $p(x)$ repetidamente até obter 0 e liste os resultados na primeira coluna.

Passo 2 Integre $f(x)$ repetidamente e liste os resultados na segunda coluna.

Passo 3 Trace uma seta desde cada entrada da primeira coluna para a entrada uma linha abaixo na segunda coluna.

Passo 4 Identifique as setas com sinais + e − alternadamente, começando com +.

Passo 5 Para cada seta, forme o produto das expressões nos extremos inicial e final da seta e multiplique-o por +1 ou −1, de acordo com o sinal na seta. Somando esses resultados, obtemos o valor da integral.

Esse processo está ilustrado na Figura 8.2.1 para a integral $\int (x^2 - x)\cos x\, dx$.

DERIVAÇÃO REPETIDA		INTEGRAÇÃO REPETIDA
$x^2 - x$	+	$\cos x$
$2x - 1$	−	$\operatorname{sen} x$
2	+	$-\cos x$
0		$-\operatorname{sen} x$

$$\int (x^2 - x)\cos x\, dx = (x^2 - x)\operatorname{sen} x + (2x-1)\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$$
$$= (x^2 - x - 2)\operatorname{sen} x + (2x-1)\cos x + C$$

Figura 8.2.1

▶ Exemplo 6 No Exemplo 11 da Seção 6.3 calculamos $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$ usando uma substituição u. Calcule essa integral usando integração por partes tabulada.

Solução

DERIVAÇÃO REPETIDA		INTEGRAÇÃO REPETIDA
x^2	+	$(x-1)^{1/2}$
$2x$	−	$\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$
2	+	$\frac{4}{15}(x-1)^{5/2}$
0		$\frac{8}{105}(x-1)^{7/2}$

Assim, segue que

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \tfrac{2}{3}x^2(x-1)^{3/2} - \tfrac{8}{15}x(x-1)^{5/2} + \tfrac{16}{105}(x-1)^{7/2} + C \quad ◀$$

O resultado obtido no Exemplo 6 parece bem diferente do obtido no Exemplo 11 da Seção 6.3. Mostre que as duas respostas são equivalentes.

■ INTEGRAÇÃO POR PARTES PARA INTEGRAIS DEFINIDAS

Para integrais definidas, a fórmula correspondente a (3) é

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du \tag{7}$$

É importante não esquecer que as variáveis u e v nessa fórmula são funções de x e que os limites de integração em (7) são limites sobre as variáveis x. Às vezes, é útil enfatizar isso escrevendo (7) como

$$\int_{x=a}^b u\,dv = uv\Big]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b v\,du \tag{8}$$

O próximo exemplo ilustra como a integração por partes pode ser usada para integrar as funções trigonométricas inversas.

▶ Exemplo 7 Calcule $\displaystyle\int_0^1 \text{arc tg}\, x\,dx$.

Solução Sejam

$$u = \text{arc tg}\, x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad v = x$$

Assim,

$$\int_0^1 \text{arc tg}\, x\,dx = \int_0^1 u\,dv = uv\Big]_0^1 - \int_0^1 v\,du$$

$$= x\,\text{arc tg}\, x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Os limites de integração referem-se a x, isto é, $x = 0$ e $x = 1$

Mas

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

logo

$$\int_0^1 \text{arc tg}\, x\,dx = x\,\text{arc tg}\, x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} \quad ◀$$

FÓRMULAS DE REDUÇÃO

A integração por partes pode ser usada para obter ***fórmulas de redução*** para integrais. Essas fórmulas expressam uma integral com uma potência de uma função em termos de uma integral que envolve uma potência *mais baixa* daquela função. Por exemplo, se n for um inteiro positivo e $n \geq 2$, então a integração por partes pode ser usada para obter as fórmulas de redução

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \qquad (9)$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad (10)$$

Para ilustrar como essas fórmulas são obtidas, vamos deduzir (10). Começamos por escrever $\cos^n x$ como $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$ e fazer

$$\begin{aligned} u &= \cos^{n-1} x & dv &= \cos x\,dx \\ du &= (n-1)\cos^{n-2} x(-\operatorname{sen} x)\,dx & v &= \operatorname{sen} x \\ &= -(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x\,dx \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int \cos^n x\,dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx \end{aligned}$$

Transpondo o último termo para o lado esquerdo, obtemos

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$$

da qual segue (10). A dedução da fórmula de redução (9) é análoga (Exercício 57).

As fórmulas de redução (9) e (10) diminuem o expoente de seno (ou cosseno) em 2. Assim, se as fórmulas forem aplicadas repetidamente, o expoente pode finalmente ficar igual a 0 se n for par ou 1 se n for ímpar, e nesse ponto a integração pode ser completada. Vamos discutir esse método com mais detalhes na próxima seção. Por ora, daremos um exemplo de como funcionam as fórmulas de redução.

► Exemplo 8 Calcule $\int \cos^4 x\,dx$.

Solução A partir de (10), com $n = 4$,

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x\,dx &= \tfrac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \tfrac{3}{4}\textstyle\int \cos^2 x\,dx \qquad \boxed{\text{Agora aplicando (10) com } n = 2} \\ &= \tfrac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2}\cos x \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2}\textstyle\int dx\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \tfrac{3}{8}\cos x \operatorname{sen} x + \tfrac{3}{8}x + C \quad ◄ \end{aligned}$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.2 (*Ver página 522 para respostas.*)

1. (a) Se $G'(x) = g(x)$, então

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - ______$$

(b) Se $u = f(x)$ e $v = G(x)$, então a fórmula de (a) pode ser escrita na forma $\int u\,dv = ______$.

2. Encontre escolhas apropriadas de u e de dv para a integração por partes de cada integral. Não calcule a integral.

(a) $\int x \ln x\,dx$; $u = ______$, $dv = ______$

(b) $\int (x-2)\,\text{sen}\,x\,dx$; $u = ______$, $dv = ______$

(c) $\int \text{arc sen}\,x\,dx$; $u = ______$, $dv = ______$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$; $u = ______$, $dv = ______$

3. Use integração por partes para calcular a integral.

(a) $\int xe^{2x}\,dx$ (b) $\int \ln(x-1)\,dx$

(c) $\int_0^{\pi/6} x\,\text{sen}\,3x\,dx$

4. Use a fórmula de redução para calcular $\int \text{sen}^3 x\,dx$.

EXERCÍCIOS 8.2

1-40 Calcule a integral.

1. $\int xe^{-2x}\,dx$

2. $\int xe^{3x}\,dx$

3. $\int x^2e^x\,dx$

4. $\int x^2e^{-2x}\,dx$

5. $\int x\,\text{sen}\,3x\,dx$

6. $\int x\cos 2x\,dx$

7. $\int x^2\cos x\,dx$

8. $\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx$

9. $\int x\ln x\,dx$

10. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

11. $\int (\ln x)^2\,dx$

12. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

13. $\int \ln(3x-2)\,dx$

14. $\int \ln(x^2+4)\,dx$

15. $\int \text{arc sen}\,x\,dx$

16. $\int \text{arc cos}\,(2x)\,dx$

17. $\int \text{arc tg}\,(3x)\,dx$

18. $\int x\,\text{arc tg}\,x\,dx$

19. $\int e^x\,\text{sen}\,x\,dx$

20. $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

21. $\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx$

22. $\int e^{-3\theta}\,\text{sen}\,5\theta\,d\theta$

23. $\int \text{sen}(\ln x)\,dx$

24. $\int \cos(\ln x)\,dx$

25. $\int x\sec^2 x\,dx$

26. $\int x\,\text{tg}^2 x\,dx$

27. $\int x^3e^{x^2}\,dx$

28. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

29. $\int_0^2 xe^{2x}\,dx$

30. $\int_0^1 xe^{-5x}\,dx$

31. $\int_1^e x^2\ln x\,dx$

32. $\int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

33. $\int_{-1}^1 \ln(x+2)\,dx$

34. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \text{arc sen}\,x\,dx$

35. $\int_2^4 \text{arc sec}\,\sqrt{\theta}\,d\theta$

36. $\int_1^2 x\,\text{arc sec}\,x\,dx$

37. $\int_0^\pi x\,\text{sen}\,2x\,dx$

38. $\int_0^\pi (x + x\cos x)\,dx$

39. $\int_1^3 \sqrt{x}\,\text{arc tg}\,\sqrt{x}\,dx$

40. $\int_0^2 \ln(x^2+1)\,dx$

41. Em cada item, calcule a integral fazendo uma substituição u e, depois, integrando por partes.

(a) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

42. Prove que a integração por partes tabulada dá a resposta correta para

$$\int p(x)q(x)\,dx$$

quando $p(x)$ é um *polinômio quadrático* qualquer e $q(x)$ é qualquer função que possa ser integrada repetidamente.

43-46 Calcule a integral usando integração por partes tabulada.

43. $\int (3x^2 - x + 2)e^{-x}\,dx$

44. $\int (x^2 + x + 1)\,\text{sen}\,x\,dx$

45. $\int 4x^4\,\text{sen}\,2x\,dx$

46. $\int x^3\sqrt{2x+1}\,dx$

47. Calcule a integral $\int \text{sen}\,x\cos x\,dx$ usando

(a) integração por partes (b) a substituição $u = \text{sen}\,x$

48. Calcule a integral

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

usando

(a) integração por partes

(b) a substituição $u = \sqrt{x^2+1}$

49. (a) Encontre a área da região delimitada por $y = \ln x$, a reta $x = e$ e o eixo x.

(b) Encontre o volume do sólido gerado quando a região do item (a) gira em torno do eixo x.

50. Encontre a área da região entre $y = x$ sen x e $y = x$ para $0 \le x \le \pi/2$.

51. Encontre o volume do sólido gerado quando a região entre $y =$ sen x e $y = 0$ para $0 \le x \le \pi$ gira em torno do eixo y.

52. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \cos x$ e $y = 0$ para $0 \le x \le \pi/2$ gira em torno do eixo y.

53. Uma partícula se move ao longo do eixo x com uma função velocidade $v(t) = t^3$sen t. Quão longe viaja a partícula do tempo $t = 0$ a $t = \pi$?

54. O estudo das ondas de dentes de serra em Engenharia elétrica leva a integrais da forma

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} t \operatorname{sen}(k\omega t)\,dt$$

onde k é um inteiro e ω é uma constante não-nula. Calcule a integral.

55. Use a fórmula de redução (9) para calcular

(a) $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$

56. Use a fórmula de redução (10) para calcular

(a) $\int \cos^5 x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx$

57. Deduza a fórmula de redução (9).

58. Em cada item, use a integração por partes ou outros métodos para deduzir a fórmula de redução.

(a) $\int \sec^n x\,dx = \dfrac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$

(b) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$

(c) $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

59-60 Use as fórmulas de redução do Exercício 58 para calcular as integrais.

59. (a) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$ (b) $\int \sec^4 x\,dx$ (c) $\int x^3 e^x\,dx$

60. (a) $\int x^2 e^{3x}\,dx$ (b) $\int_0^1 x e^{-\sqrt{x}}\,dx$

[*Sugestão*: Faça primeiro uma substituição.]

61. Seja f uma função cuja derivada segunda é contínua em $[-1, 1]$. Mostre que

$$\int_{-1}^1 x f''(x)\,dx = f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1)$$

ENFOCANDO CONCEITOS

62. (a) Na integral $\int x\cos x\,dx$, sejam

$$u = x, \quad dv = \cos x\,dx,$$
$$du = dx, \quad v = \operatorname{sen} x + C_1$$

Mostre que a constante C_1 é cancelada, de modo que obtemos a mesma solução se omitirmos C_1.

(b) Mostre que em geral vale

$$uv - \int v\,du = u(v + C_1) - \int (v + C_1)\,du$$

de modo que é justificável a omissão da constante de integração ao calcular v na integração por partes.

63. Calcule $\int \ln(x+1)\,dx$ usando integração por partes. Simplifique o cálculo de $\int v\,du$ introduzindo a constante de integração $C_1 = 1$ quando passar de dv para v.

64. Calcule $\int \ln(3x-2)\,dx$ usando integração por partes. Simplifique o cálculo de $\int v\,du$ introduzindo a constante de integração $C_1 = -\frac{2}{3}$ quando passar de dv para v. Compare a solução obtida com a resposta do Exercício 13.

65. Calcule $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ usando integração por partes. Simplifique o cálculo de $\int v\,du$ introduzindo a constante de integração $C_1 = \frac{1}{2}$ quando passar de dv para v.

66. Qual é a equação que resulta se aplicarmos integração por partes à integral

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

com as escolhas

$$u = \frac{1}{\ln x} \quad \text{e} \quad dv = \frac{1}{x}\,dx?$$

Em que sentido essa equação é válida? Em que sentido é falsa?

67. Lembre, do Teorema 4.3.2 e da discussão que o precede, que, se $f'(x) > 0$, então a função f é crescente e tem uma inversa. O propósito das partes (a), (b) e (c) deste problema é mostrar que, se essa condição estiver satisfeita e se f' for contínua, então a integral definida de f^{-1} pode ser expressa em termos de uma integral definida de f.

(a) Use a integração por partes para mostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b x f'(x)\,dx$$

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que, se $y = f(x)$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy$$

(c) Mostre que, se fizermos $\alpha = f(a)$ e $\beta = f(b)$, então o resultado de (b) poderá ser escrito como

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)\,dx = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(x)\,dx$$

68. Em cada parte, use o resultado do Exercício 67 para obter a equação e confirme que ela está correta fazendo as integrações.

(a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \text{arc sen}\, x\,dx = \tfrac{1}{2}\,\text{arc sen}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \int_0^{\pi/6} \text{sen}\, x\,dx$

(b) $\displaystyle\int_e^{e^2} \ln x\,dx = (2e^2 - e) - \int_1^2 e^x\,dx$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.2

1. (a) $\int f'(x)G(x)\,dx$ (b) $uv - \int v\,du$ **2.** (a) $\ln x$; $x\,dx$ (b) $x-2$; $\text{sen}\, x\,dx$ (c) $\text{arc sen}\, x$; dx (d) x; $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

3. (a) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right)e^{2x} + C$ (b) $(x-1)\ln(x-1) - x + C$ (c) $\frac{1}{9}$ **4.** $-\frac{1}{3}\,\text{sen}^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$

8.3 INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

Na seção anterior, obtivemos fórmulas de redução para integrar potências inteiras positivas de seno, cosseno, tangente e secante. Nesta seção mostraremos como trabalhar com essas fórmulas de redução e discutiremos métodos para integrar outros tipos de integrais envolvendo funções trigonométricas.

■ INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENO E COSSENO

Começamos recordando as fórmulas de redução que obtivemos na seção anterior.

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\,\text{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\,dx \qquad (1)$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\,\text{sen}\, x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad (2)$$

No caso em que $n = 2$, essas fórmulas são

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = -\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, x\cos x + \tfrac{1}{2}\int dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, x \cos x + C \qquad (3)$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\cos x\,\text{sen}\, x + \tfrac{1}{2}\int dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, x\cos x + C \qquad (4)$$

Podemos obter formas alternativas para essas fórmulas de integração usando as identidades trigonométricas.

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad (5\text{-}6)$$

que provêm das fórmulas para o ângulo duplo

$$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \quad \text{e} \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Essas identidades dão lugar a

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\, 2x + C \qquad (7)$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\, 2x + C \qquad (8)$$

Observe que as antiderivadas nas Fórmulas (3) e (4) envolvem ambos os senos e cossenos, enquanto aquelas em (7) e (8) só envolvem senos. Porém, a aparente discrepância é fácil de ser resolvida pela identidade

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

para reescrever (7) e (8) nas formas (3) e (4), ou reciprocamente.

No caso em que $n = 3$, as fórmulas de redução para integração de $\operatorname{sen}^3 x$ e $\cos^3 x$ são

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\cos x + \tfrac{2}{3}\int \operatorname{sen} x\,dx = -\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \tfrac{2}{3}\cos x + C \quad (9)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \tfrac{1}{3}\cos^2 x\operatorname{sen} x + \tfrac{2}{3}\int \cos x\,dx = \tfrac{1}{3}\cos^2 x\operatorname{sen} x + \tfrac{2}{3}\operatorname{sen} x + C \quad (10)$$

Se quisermos, a Fórmula (9) pode ser expressa só em termos de cossenos, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, e a Fórmula (10) pode ser expressa só em termos de senos, usando a identidade $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Deixamos a cargo do leitor confirmar que

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C \quad (11)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C \quad (12)$$

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Na integração de $\operatorname{sen}^3 x$ e $\cos^3 x$, o *Maple* produz as Fórmulas (11) e (12), mas o *Mathematica* produz

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\tfrac{3}{4}\cos x + \tfrac{1}{12}\cos 3x + C$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \tfrac{3}{4}\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{12}\operatorname{sen} 3x + C$$

Use identidades trigonométricas para conciliar os resultados dos dois programas.

Deixaremos como exercício as fórmulas a seguir, que podem ser obtidas aplicando as fórmulas de redução e, em seguida, usando identidades trigonométricas apropriadas.

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C \quad (13)$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C \quad (14)$$

► Exemplo 1 Encontre o volume V do sólido obtido quando a região sob a curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ no intervalo $[0, \pi]$ gira em torno do eixo x (Figura 8.3.1).

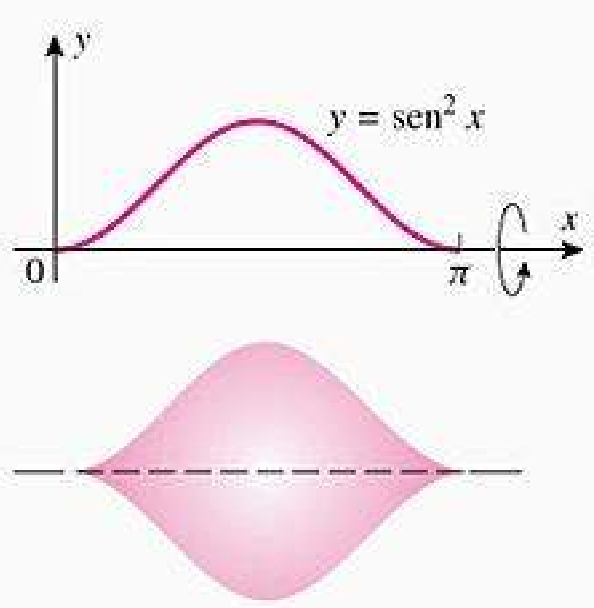


Figura 8.3.1

Solução Usando o método dos discos, a Fórmula (5) da Seção 7.2 e a Fórmula (13) acima, obtemos

$$V = \int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}^4 x\,dx = \pi\left[\tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x\right]_0^{\pi} = \tfrac{3}{8}\pi^2 \quad ◄$$

■ INTEGRAÇÃO DE PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS

Se m e n são inteiros positivos, então a integral

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$$

pode ser calculada por um dos três procedimentos dados na Tabela 8.3.1, dependendo de m e n serem par ou ímpar.

► Exemplo 2 Calcule

$$\text{(a)} \int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x\,dx \qquad \text{(b)} \int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\,dx$$

Tabela 8.3.1

$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n ímpar	• Separe um fator de $\cos x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \operatorname{sen} x$	$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
m ímpar	• Separe um fator de $\operatorname{sen} x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \cos x$	$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ par} \end{cases}$	• Use a identidade relevante para reduzir as potências de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$	$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{cases}$

Solução (a) Como $n = 5$ é ímpar, utilizamos o primeiro procedimento na Tabela 8.3.1:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \cos x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx \\
&= \int u^4 (1 - u^2)^2\, du \\
&= \int (u^4 - 2u^6 + u^8)\, du \\
&= \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{2}{7}u^7 + \tfrac{1}{9}u^9 + C \\
&= \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \tfrac{2}{7}\operatorname{sen}^7 x + \tfrac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x + C
\end{aligned}$$

Solução (b) Como $m = n = 4$ são expoentes pares, utilizamos o terceiro procedimento na Tabela 8.3.1:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 (\cos^2 x)^2\, dx \\
&= \int \left(\tfrac{1}{2}[1 - \cos 2x]\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}[1 + \cos 2x]\right)^2 dx \\
&= \tfrac{1}{16} \int (1 - \cos^2 2x)^2\, dx \\
&= \tfrac{1}{16} \int \operatorname{sen}^4 2x\, dx \\
&= \tfrac{1}{32} \int \operatorname{sen}^4 u\, du \\
&= \tfrac{1}{32}\left(\tfrac{3}{8}u - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4u\right) + C \\
&= \tfrac{3}{128}x - \tfrac{1}{128}\operatorname{sen} 4x + \tfrac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x + C
\end{aligned}$$

Note que isso pode ser obtido mais diretamente da integral original, usando a identidade $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

$u = 2x$
$du = 2\,dx$ ou $dx = \frac{1}{2}\,du$

Fórmula (13)

Integrais da forma

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx, \quad \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx, \quad \int \cos mx \cos nx \, dx \tag{15}$$

podem ser encontradas usando as identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)] \tag{16}$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \tag{17}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \tag{18}$$

para expressar o integrando como uma soma ou uma diferença de senos e cossenos.

► Exemplo 3 Calcule $\int \operatorname{sen} 7x \cos 3x \, dx$.

Solução Usando (16), obtemos

$$\int \operatorname{sen} 7x \cos 3x \, dx = \tfrac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 10x) \, dx = -\tfrac{1}{8} \cos 4x - \tfrac{1}{20} \cos 10x + C$$ ◄

■ INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE TANGENTE E DE SECANTE

Os procedimentos para integração de potências de tangente e secante seguem paralelamente os de seno e cosseno. A idéia é usar as seguintes fórmulas de redução (as quais foram deduzidas no Exercício 58 da Seção 8.2) para reduzir o expoente do integrando até que a integral resultante possa ser calculada:

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx \tag{19}$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx \tag{20}$$

No caso em que n for ímpar, o expoente pode ser reduzido a 1, nos deixando com o problema de integrar $\operatorname{tg} x$ ou $\sec x$. Essas integrais são dadas por

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln|\sec x| + C \tag{21}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \tag{22}$$

A Fórmula (21) pode ser obtida escrevendo-se

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\ln|\cos x| + C \qquad \boxed{u = \cos x,\ du = -\operatorname{sen} x \, dx}$$

$$= \ln|\sec x| + C \qquad \boxed{\ln|\cos x| = -\ln \frac{1}{|\cos x|}}$$

Para obter a Fórmula (22), escrevemos

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\right) dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx$$

$$= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \qquad \boxed{u = \sec x + \operatorname{tg} x,\ du = (\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x)\, dx}$$

As seguintes integrais básicas ocorrem freqüentemente, e valem a pena destacar:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x + C \tag{23}$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C \tag{24}$$

A Fórmula (24) já é nossa conhecida, uma vez que a derivada de tg x é $\sec^2 x$. A Fórmula (23) pode ser obtida aplicando-se a fórmula de redução (19), com $n = 2$ (verifique), ou, alternativamente, usando-se a identidade

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

para escrever

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

As fórmulas

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\sec x| + C \tag{25}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \tag{26}$$

podem ser deduzidas de (21) e (22) e das fórmulas de redução (19) e (20), da seguinte maneira:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \int \operatorname{tg} x\, dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\sec x| + C$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\int \sec x\, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

INTEGRAÇÃO DE PRODUTOS DE TANGENTES E DE SECANTES

Se m e n são inteiros positivos, então a integral

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\, dx$$

pode ser calculada por um dos três procedimentos dados na Tabela 8.3.2, dependendo de m e n serem pares ou ímpares.

Tabela 8.3.2

$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\, dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n par	• Separe um fator de $\sec^2 x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \operatorname{tg} x$	$\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$
m ímpar	• Separe um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \sec x$	$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ ímpar} \end{cases}$	• Use a identidade relevante para reduzir o integrando a potências somente de $\sec x$ • Agora use a fórmula de redução para potências de $\sec x$	$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

▶ Exemplo 4 Calcule

(a) $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x\,dx$ (b) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\,dx$ (c) $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\,dx$

Solução (a) Como $n = 4$ é par, utilizaremos o primeiro procedimento na Tabela 8.3.2:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x\,dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx\\ &= \int \operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x + 1)\sec^2 x\,dx\\ &= \int u^2(u^2+1)\,du\\ &= \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C\end{aligned}$$

Solução (b) Como $m = 3$ é ímpar, utilizaremos o segundo procedimento na Tabela 8.3.2.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\,dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x(\sec x \operatorname{tg} x)\,dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)\sec^2 x(\sec x \operatorname{tg} x)\,dx\\ &= \int (u^2-1)u^2\,du\\ &= \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{5}\sec^5 x - \tfrac{1}{3}\sec^3 x + C\end{aligned}$$

Solução (c) Como $m = 2$ é par e $n = 1$ é ímpar, utilizaremos o terceiro procedimento na Tabela 8.3.2:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx\\ &= \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx \qquad \boxed{\text{Ver (26) e (22)}}\\ &= \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\\ &= \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x - \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}$$ ◀

■ UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA A INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENO, COSSENO, TANGENTE E SECANTE

Os métodos nas Tabelas 8.3.1 e 8.3.2 podem ser aplicados, às vezes, se $m = 0$ ou $n = 0$ para integrar potências inteiras positivas de seno, cosseno, tangente e secante, sem fórmulas de redução. Por exemplo, em vez de usar a fórmula de redução para integrar $\operatorname{sen}^3 x$, podemos aplicar o segundo procedimento na Tabela 8.3.1:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx \qquad \boxed{\begin{aligned}u &= \cos x\\ du &= -\operatorname{sen} x\,dx\end{aligned}}\\ &= -\int (1-u^2)\,du\\ &= \tfrac{1}{3}u^3 - u + C = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C\end{aligned}$$

que confere com (11).

Com a ajuda da identidade

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$$

as técnicas da Tabela 8.3.2 podem ser adaptadas para calcular integrais da forma

$$\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cossec}^n x\,dx$$

Também é possível deduzir fórmulas de redução para potências de cotangentes e cossecantes que são análogas às Fórmulas (19) e (20).

O MAPA-MÚNDI DE MERCATOR

A integral da sec x desempenha um papel importante nos projetos de mapas de navegação para traçar cursos náuticos e aeronáuticos. Marinheiros e pilotos geralmente mapeiam seus cursos ao longo de caminhos com uma leitura de bússola constante; por exemplo, o curso pode ser 30° a noroeste ou 135° a sudeste. Exceto para cursos paralelos ao Equador ou diretos para Norte ou Sul, um curso com leitura de bússola constante leva a uma espiral em torno da Terra em direção a um dos pólos (conforme a parte superior da Figura 8.3.2). Em 1569, o matemático e geógrafo flamengo Gerhard Kramer (1512-1594) (mais conhecido pelo nome latino de Mercator) inventou um mapa-múndi chamado de *projeção de Mercator*, no qual as espirais produzidas pela leitura constante da bússola aparecem como linhas retas. Isso foi extremamente importante, pois possibilitou aos marinheiros determinar uma leitura constante da bússola entre dois pontos simplesmente conectando-os por uma linha reta sobre um mapa (como na parte inferior da Figura 8.3.2).

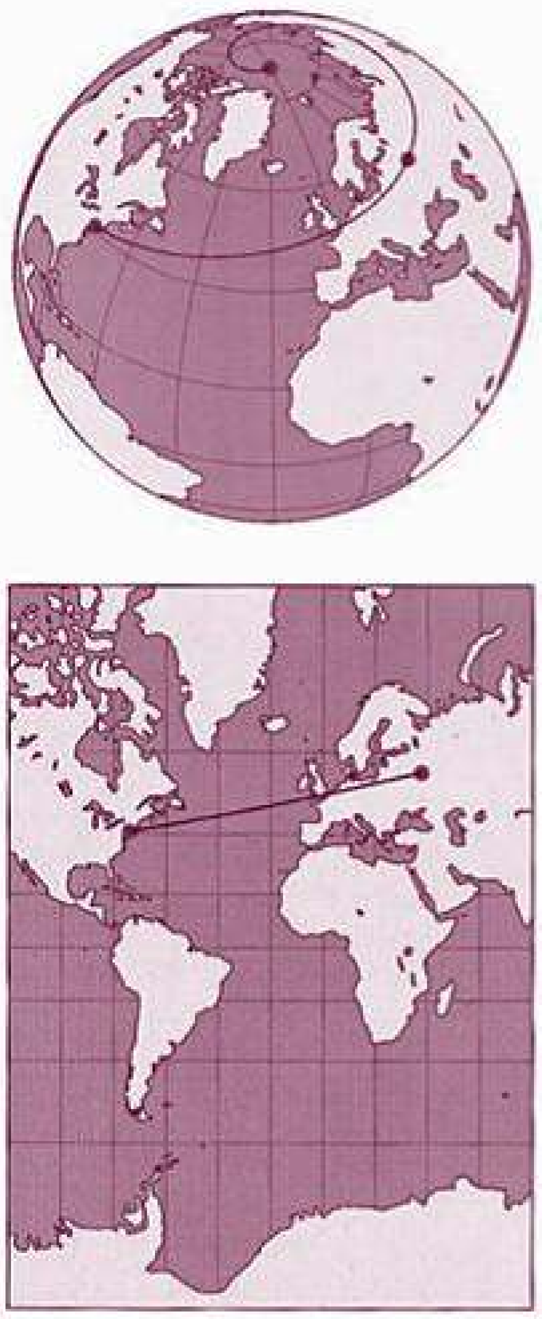


Figura 8.3.2 Um vôo com leitura constante na bússola de Nova York para Moscou como aparece em um globo e em uma projeção de Mercator.

Supondo que a Terra seja uma esfera com raio de 6.500 km, então as curvas de latitude obtidas com um incremento de 1° são eqüidistantes umas das outras em cerca de 114 km (por quê?). Porém, na projeção de Mercator, as curvas de latitude tornam-se mais separadas em direção aos pólos, de forma que duas curvas de latitude amplamente espaçadas nas proximidades do pólo podem estar, na verdade, à mesma distância sobre a Terra do que duas curvas de latitude a pequena distância próximas ao Equador. Pode-se provar que, em um mapa de Mercator, no qual a curva equatorial tem comprimento L, a distância vertical D_β sobre o mapa entre o Equador (latitude 0°) e a curva de latitude $\beta°$ é

$$D_\beta = \frac{L}{2\pi}\int_0^{\beta\pi/180} \sec x\, dx \tag{27}$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.3 (*Ver página 530 para respostas.*)

1. Complete cada identidade trigonométrica com uma expressão que envolva cos $2x$.

(a) $\operatorname{sen}^2 x =$ ________

(b) $\cos^2 x =$ ________

(c) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x =$ ________

2. Calcule a integral.

(a) $\int \sec^2 x\, dx =$ ________

(b) $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx =$ ________

(c) $\int \sec x\, dx =$ ________

(d) $\int \operatorname{tg} x\, dx =$ ________

3. Use a substituição indicada para reescrever a integral em termos de u. Não calcule a integral.

(a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx;\ u = \operatorname{sen} x$

(b) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx;\ u = \cos x$

(c) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x\, dx;\ u = \operatorname{tg} x$

(d) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x\, dx;\ u = \sec x$

4. Calcule a integral.

(a) $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\, dx =$ ________

(b) $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\, dx =$ ________

(c) $\int_0^{\pi/6} \sec 2x\, dx =$ ________

(d) $\int_0^{\pi/8} \operatorname{tg} 2x\, dx =$ ________

EXERCÍCIOS 8.3

1-52 Calcule a integral

1. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x \, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^5 3x \cos 3x \, dx$
3. $\int \operatorname{sen}^2 5\theta \, d\theta$
4. $\int \cos^2 3x \, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^3 a\theta \, d\theta$
6. $\int \cos^3 at \, dt$
7. $\int \operatorname{sen} ax \cos ax \, dx$
8. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$
9. $\int \operatorname{sen}^2 t \cos^3 t \, dt$
10. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$
11. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$
12. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$
13. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx$
14. $\int \operatorname{sen} 3\theta \cos 2\theta \, d\theta$
15. $\int \operatorname{sen} x \cos(x/2) \, dx$
16. $\int \cos^{1/3} x \operatorname{sen} x \, dx$
17. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$
18. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$
19. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^4 3x \cos^3 3x \, dx$
20. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 5\theta \, d\theta$
21. $\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 4x \cos 2x \, dx$
22. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 kx \, dx$
23. $\int \sec^2(2x-1) \, dx$
24. $\int \operatorname{tg} 5x \, dx$
25. $\int e^{-x} \operatorname{tg}(e^{-x}) \, dx$
26. $\int \operatorname{cotg} 3x \, dx$
27. $\int \sec 4x \, dx$
28. $\int \frac{\sec(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$
29. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx$
30. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x \, dx$
31. $\int \operatorname{tg} 4x \sec^4 4x \, dx$
32. $\int \operatorname{tg}^4 \theta \sec^4 \theta \, d\theta$
33. $\int \sec^5 x \operatorname{tg}^3 x \, dx$
34. $\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec \theta \, d\theta$
35. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec x \, dx$
36. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x \, dx$
37. $\int \operatorname{tg} t \sec^3 t \, dt$
38. $\int \operatorname{tg} x \sec^5 x \, dx$
39. $\int \sec^4 x \, dx$
40. $\int \sec^5 x \, dx$
41. $\int \operatorname{tg}^3 4x \, dx$
42. $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$
43. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x} \sec^4 x \, dx$
44. $\int \operatorname{tg} x \sec^{3/2} x \, dx$
45. $\int_0^{\pi/8} \operatorname{tg}^2 2x \, dx$
46. $\int_0^{\pi/6} \sec^3 2\theta \operatorname{tg} 2\theta \, d\theta$
47. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2} \, dx$
48. $\int_0^{1/4} \sec \pi x \operatorname{tg} \pi x \, dx$
49. $\int \operatorname{cotg}^3 x \operatorname{cossec}^3 x \, dx$
50. $\int \operatorname{cotg}^2 3t \sec 3t \, dt$
51. $\int \operatorname{cotg}^3 x \, dx$
52. $\int \operatorname{cossec}^4 x \, dx$

53. Sejam m e n inteiros não-negativos e distintos. Use as Fórmulas (16) a (18) para provar:

(a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0$

(b) $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$

(c) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0$

54. Calcule as integrais no Exercício 53 quando m e n denotam o *mesmo* inteiro não-negativo.

55. Encontre o comprimento de arco da curva $y = \ln(\cos x)$ acima do intervalo $[0, \pi/4]$.

56. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = \operatorname{tg} x$, $y = 1$ e $x = 0$ gira em torno do eixo x.

57. Encontre o volume do sólido que resulta quando a região limitada por $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$ e $x = \pi/4$ gira em torno do eixo x.

58. A região limitada abaixo pelo eixo x e acima pela parte de $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$ gira em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

59. Use a Fórmula (27) para mostrar que, se o comprimento da curva equatorial em uma projeção de Mercator for L, então a distância vertical D entre as curvas de latitude $\alpha°$ e $\beta°$ do mesmo lado do Equador (onde $\alpha < \beta$) é

$$D = \frac{L}{2\pi} \ln \left| \frac{\sec \beta° + \operatorname{tg} \beta°}{\sec \alpha° + \operatorname{tg} \alpha°} \right|$$

60. Suponha que o Equador tenha um comprimento de 100 cm em uma projeção de Mercator. Em cada parte, use o resultado do Exercício 59 para responder a questão.

(a) Qual é a distância vertical no mapa entre o Equador e a curva de latitude 25° Norte?

(b) Qual é a distância vertical no mapa entre New Orleans, Louisiana, a 30° de latitude Norte, e Winnepeg, Canadá, a 50° de latitude Norte?

ENFOCANDO CONCEITOS

61. (a) Mostre que

$$\int \operatorname{cossec} x \, dx = -\ln|\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x| + C$$

(b) Mostre que o resultado de (a) também pode ser escrito como

$$\int \operatorname{cossec} x \, dx = \ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + C$$

e

$$\int \operatorname{cossec} x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right| + C$$

62. Reescreva sen x + cos x na forma

$$A \operatorname{sen}(x + \phi)$$

e use seu resultado junto com o Exercício 61 para calcular

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

63. Use o método do Exercício 62 para calcular

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} \quad (a,\ b \text{ não ambos nulos})$$

64. (a) Use a Fórmula (9) da Seção 8.2 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \quad (n \geq 2)$$

(b) Use esse resultado para deduzir as ***fórmulas de Wallis para o seno***:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} \quad \begin{pmatrix} n \text{ par} \\ \text{e} \geq 2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n} \quad \begin{pmatrix} n \text{ ímpar} \\ \text{e} \geq 3 \end{pmatrix}$$

65. Use as fórmulas de Wallis do Exercício 64 para calcular

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\,dx$

66. Use a Fórmula (10) da Seção 8.2 e o método do Exercício 64 para deduzir as ***fórmulas de Wallis para cosseno***:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} \quad \begin{pmatrix} n \text{ par} \\ \text{e} \geq 2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n} \quad \begin{pmatrix} n \text{ ímpar} \\ \text{e} \geq 3 \end{pmatrix}$$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.3

1. (a) $\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ (b) $\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (c) $\cos 2x$ **2.** (a) $\operatorname{tg} x + C$ (b) $\operatorname{tg} x - x + C$ (c) $\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$ (d) $\ln|\sec x| + C$
3. (a) $\int u^2\,du$ (b) $\int (u^2-1)u^2\,du$ (c) $\int u^3\,du$ (d) $\int (u^2-1)\,du$ **4.** (a) $\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C$ (b) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$ (c) $\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$
(d) $\frac{1}{4}\ln 2$

8.4 SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção discutiremos um método para calcular integrais contendo radicais, através de substituições envolvendo funções trigonométricas. Mostraremos também como integrais contendo polinômios quadráticos podem, às vezes, ser calculadas completando o quadrado.

■ O MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Para começar, iremos nos ocupar com integrais que contêm expressões da forma

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 + a^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

nas quais a é uma constante positiva. A idéia básica para o cálculo dessas integrais é fazer uma substituição para x que elimine o radical. Por exemplo, para eliminar o radical da expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$, podemos fazer a substituição

$$x = a \operatorname{sen}\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \tag{1}$$

e observar que

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)} \\ &= a\sqrt{\cos^2\theta} = a|\cos\theta| = a\cos\theta \end{aligned}$$

$\cos\theta \geq 0$ quando $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

A restrição sobre θ em (1) serve a dois propósitos: possibilita-nos substituir $|\cos\theta|$ por $\cos\theta$ para simplificar os cálculos e também proporciona que a substituição possa ser reescrita como $\theta = \operatorname{arc\,sen}(x/a)$, se necessário.

► Exemplo 1 Calcule $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Solução Para eliminar o radical, fazemos a substituição

$$x = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad dx = 2 \cos \theta \, d\theta$$

Obtemos, então:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta \, d\theta}{(2 \operatorname{sen} \theta)^2\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$= \int \frac{2\cos\theta \, d\theta}{(2 \operatorname{sen} \theta)^2(2\cos\theta)} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{cossec}^2\theta \, d\theta = -\frac{1}{4}\operatorname{cotg}\theta + C \qquad (2)$$

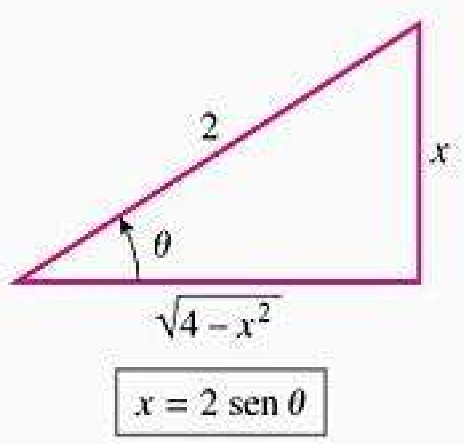


Figura 8.4.1

Nesse ponto, completamos a integração; porém, como a integral original estava expressa em termos de x, é desejável também expressar cotg θ em termos de x. Isso pode ser feito usando-se identidades trigonométricas, mas a expressão também pode ser obtida fazendo-se a substituição $x = 2 \operatorname{sen} \theta$ como $\operatorname{sen} \theta = x/2$ e representando-a geometricamente, como na Figura 8.4.1, da qual obtemos:

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Substituindo em (2), temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C \quad ◄$$

► Exemplo 2 Calcule $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Solução Há duas abordagens possíveis: podemos fazer a substituição na integral indefinida (como no Exemplo 1) e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em x; ou podemos fazer a substituição na integral definida e converter os limites em x nos correspondentes limites em θ.

Método 1

Usando o resultado do Exemplo 1, com os limites de integração em x, obtemos

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right]_1^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}[1-\sqrt{3}] = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

Método 2

A substituição $x = 2 \operatorname{sen} \theta$ pode ser expressa como $x/2 = \operatorname{sen} \theta$ ou $\theta = \operatorname{arc\,sen}(x/2)$; logo, os limites em θ correspondentes a $x = 1$ e $x = \sqrt{2}$ são

$$x = 1: \qquad \theta = \operatorname{arc\,sen}(1/2) = \pi/6$$

$$x = \sqrt{2}: \quad \theta = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4$$

Assim, a partir de (2) no Exemplo 1, obtemos

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\left[\operatorname{cotg}\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = -\frac{1}{4}[1-\sqrt{3}] = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad ◄$$

► Exemplo 3 Encontre a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

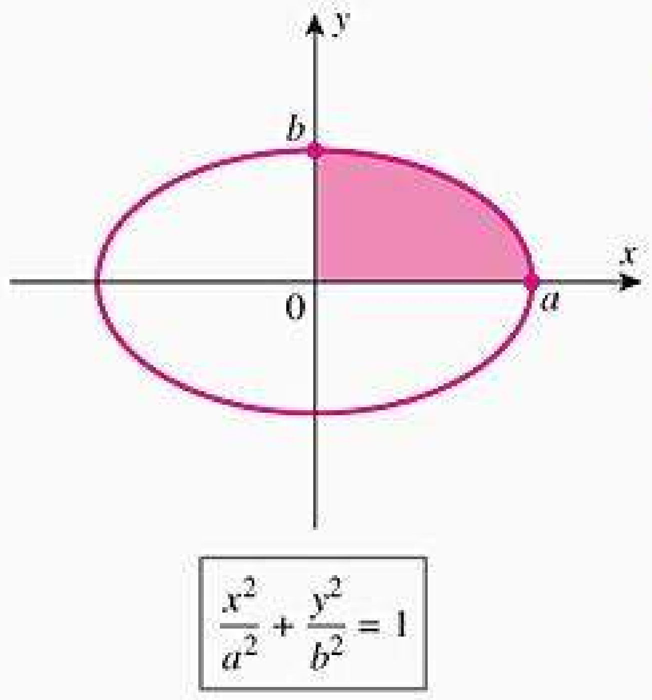


Figura 8.4.2

Solução Como a elipse é simétrica em torno dos eixos, sua área A é 4 vezes a área no primeiro quadrante (Figura 8.4.2). Se resolvermos a equação da elipse para y em termos de x, obtemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

onde a raiz quadrada positiva dá a equação da metade superior. Assim, a área é dada por

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Para calcular essa integral, vamos fazer a substituição $x = a$ sen θ ($dx = a\cos\theta\,d\theta$) e converter os limites de integração em x para os limites em θ. Uma vez que a substituição pode ser expressa como θ = arc sen (x/a), os limites de integração em θ são

$$x = 0: \quad \theta = \text{arc sen}\,(0) = 0$$

$$x = a: \quad \theta = \text{arc sen}\,(1) = \pi/2$$

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\ &= 2ab\left[\theta + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi ab \end{aligned}$$ ◄

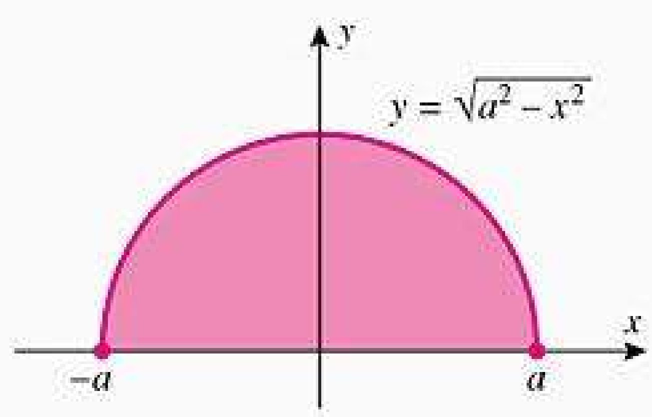


Figura 8.4.3

No caso especial em que $a = b$, a elipse torna-se um círculo de raio a, e a fórmula da área fica $A = \pi a^2$, conforme esperado. Vale a pena notar que

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \qquad (3)$$

uma vez que essa integral representa a área do semicírculo superior (Figura 8.4.3).

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Se o leitor dispuser de um recurso computacional com integração numérica, use-o, bem como a Fórmula (3), para aproximar π com três casas decimais.

Até agora, focalizamos o uso da substituição $x = a$ sen θ para calcular integrais envolvendo radicais da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$. A Tabela 8.4.1 resume esse método e descreve outras substituições desse tipo.

Tabela 8.4.1

EXPRESSÃO NO INTEGRANDO	SUBSTITUIÇÃO	RESTRIÇÃO SOBRE θ	SIMPLIFICAÇÃO
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a$ sen θ	$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$	$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\,\text{sen}^2\,\theta = a^2\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a$ tg θ	$-\pi/2 < \theta < \pi/2$	$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\,\text{tg}^2\,\theta = a^2\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\begin{cases} 0 \le \theta < \pi/2 & (\text{se } x \ge a) \\ \pi/2 < \theta \le \pi & (\text{se } x \le -a) \end{cases}$	$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2\,\text{tg}^2\,\theta$

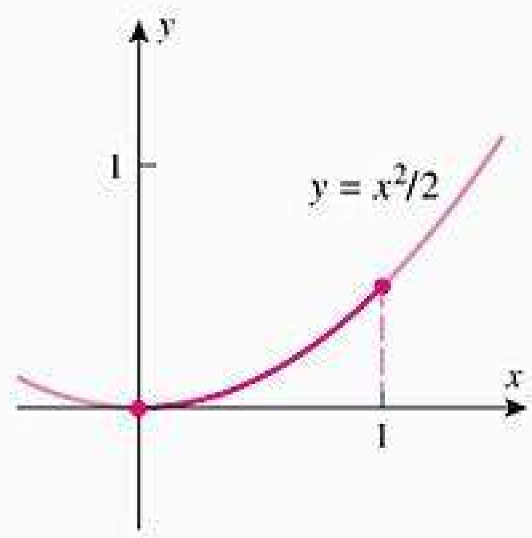


Figura 8.4.4

▶ Exemplo 4 Encontre o comprimento de arco da curva $y = x^2/2$ de $x = 0$ a $x = 1$ (Figura 8.4.4).

Solução A partir da Fórmula (4) da Seção 7.4, o comprimento de arco L da curva é

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

O integrando envolve um radical da forma $\sqrt{a^2 + x^2}$ com $a = 1$. Assim, da Tabela 8.4.1, fazemos a substituição

$$x = \operatorname{tg}\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\theta \quad \text{ou} \quad dx = \sec^2\theta\, d\theta$$

Uma vez que essa substituição pode ser expressa como $\theta = \operatorname{arc\,tg} x$, os limites de integração em θ que correspondem aos limites em x, $x = 0$ e $x = 1$ são

$$x = 0: \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0$$

$$x = 1: \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} 1 = \pi/4$$

Logo,

$$\begin{aligned}
L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\, \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2\theta}\, \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} |\sec\theta| \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta \qquad \boxed{\sec\theta > 0 \text{ pois } -\pi/2 < \theta < \pi/2} \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \tfrac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right]_0^{\pi/4} \qquad \boxed{\text{Fórmula (26) da Seção 8.3}} \\
&= \tfrac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] \approx 1{,}148 \; ◀
\end{aligned}$$

▶ Exemplo 5 Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx$, supondo que $x \geq 5$.

Solução O integrando envolve um radical da forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ com $a = 5$; portanto, usando a Tabela 8.4.1, fazemos a substituição

$$x = 5\sec\theta, \quad 0 \leq \theta < \pi/2$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 5\sec\theta\operatorname{tg}\theta \quad \text{ou} \quad dx = 5\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx &= \int \frac{\sqrt{25\sec^2\theta - 25}}{5\sec\theta}(5\sec\theta\operatorname{tg}\theta)\, d\theta \\
&= \int \frac{5|\operatorname{tg}\theta|}{5\sec\theta}(5\sec\theta\operatorname{tg}\theta)\, d\theta \\
&= 5\int \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta \qquad \boxed{\operatorname{tg}\theta \geq 0 \text{ pois } 0 \leq \theta < \pi/2} \\
&= 5\int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta = 5\operatorname{tg}\theta - 5\theta + C
\end{aligned}$$

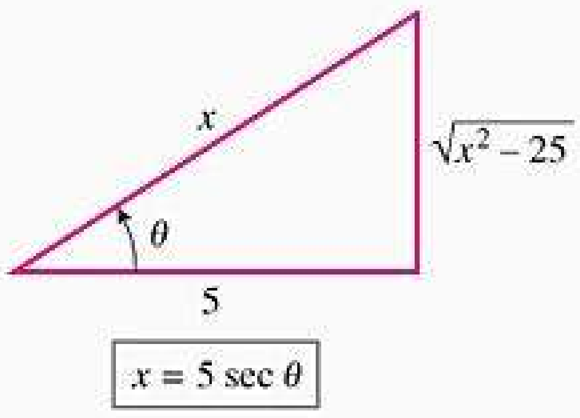


Figura 8.4.5

Para expressar a solução em termos de x, vamos representar a substituição $x = 5 \sec \theta$, geometricamente, pelo triângulo na Figura 8.4.5, do qual obtemos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}$$

Disso e do fato de que a substituição pode ser expressa como $\theta = \operatorname{arc\,sec}(x/5)$, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 - 25} - 5 \operatorname{arc\,sec}\left(\frac{x}{5}\right) + C \quad ◄$$

■ INTEGRAIS ENVOLVENDO $ax^2 + bx + c$

As integrais que envolvem a expressão quadrática ax^2+bx+c, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$, podem ser freqüentemente calculadas, primeiro completando o quadrado e, depois, fazendo uma substituição apropriada. Os exemplos a seguir ilustram essa idéia.

► Exemplo 6 Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}\, dx$.

Solução Completando o quadrado, obtemos

$$x^2 - 4x + 8 = (x^2 - 4x + 4) + 8 - 4 = (x - 2)^2 + 4$$

Assim, a substituição

$$u = x - 2, \quad du = dx$$

fornece

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}\, dx &= \int \frac{x}{(x-2)^2 + 4}\, dx = \int \frac{u + 2}{u^2 + 4}\, du \\
&= \int \frac{u}{u^2 + 4}\, du + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 4}\, du + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4} \\
&= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 4) + 2\left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{2} + C \\
&= \frac{1}{2} \ln[(x-2)^2 + 4] + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x - 2}{2}\right) + C \quad ◄
\end{aligned}$$

► Exemplo 7 Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}}$.

Solução Completando o quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}
5 - 4x - 2x^2 &= 5 - 2(x^2 + 2x) = 5 - 2(x^2 + 2x + 1) + 2 \\
&= 5 - 2(x + 1)^2 + 2 = 7 - 2(x + 1)^2
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7-2(x+1)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{7-2u^2}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = x+1 \\ du = dx \end{array}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{(7/2)-u^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sen} \left(\frac{u}{\sqrt{7/2}} \right) + C \qquad \boxed{\begin{array}{l} \text{Fórmula 21, Seção 8.1} \\ \text{com } a = \sqrt{7/2} \end{array}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc sen} \left[\sqrt{2/7}(x+1) \right] + C \blacktriangleleft$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.4 (*Ver página 536 para respostas.*)

1. Para cada expressão, dê uma substituição trigonométrica que elimine o radical.
   (a) $\sqrt{a^2-x^2}$ ________ (b) $\sqrt{a^2+x^2}$ ________
   (c) $\sqrt{x^2-a^2}$ ________

2. Se $x = 2\sec\theta$ e $0 < \theta < \pi/2$, então
   (a) $\text{sen}\,\theta =$ ________ (b) $\cos\theta =$ ________
   (c) $\text{tg}\,\theta =$ ________.

3. Em cada parte, explicite a substituição trigonométrica que tentaríamos em primeiro lugar para calcular a integral. Não calcule a integral.
   (a) $\int \sqrt{9+x^2}\,dx$ ________
   (b) $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ ________
   (c) $\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$ ________
   (d) $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ ________
   (e) $\int \sqrt{9+3x^2}\,dx$ ________
   (f) $\int \sqrt{1+(9x)^2}\,dx$ ________

4. Em cada parte, determine a substituição u.
   (a) $\int \frac{1}{x^2-2x+10}\,dx = \int \frac{1}{u^2+3^2}\,du$;
   $u =$ ________
   (b) $\int \sqrt{x^2-6x+8}\,dx = \int \sqrt{u^2-1}\,du$;
   $u =$ ________
   (c) $\int \sqrt{12-4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4^2-u^2}\,du$;
   $u =$ ________

EXERCÍCIOS 8.4 [C] CAS

1-26 Calcule a integral.

1. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$
2. $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$
3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$
5. $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$
6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{5+x^2}}\,dx$
7. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$
8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$
9. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
10. $\int x^3\sqrt{5-x^2}\,dx$
11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9x^2-4}}$
12. $\int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$
13. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$
14. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$
16. $\int \frac{dx}{1+2x^2+x^4}$
17. $\int \frac{dx}{(4x^2-9)^{3/2}}$
18. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$
19. $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$
20. $\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\text{sen}^2\,\theta}}\,d\theta$
21. $\int_0^1 5x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$
22. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^2}$

23. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

24. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sqrt{2x^2-4}}{x}\,dx$

25. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$

26. $\int_{0}^{3} \frac{x^3}{(3+x^2)^{5/2}}\,dx$

ENFOCANDO CONCEITOS

27. A integral

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

pode ser calculada ou por substituição trigonométrica ou pela substituição $u = x^2 + 4$. Calcule-a das duas maneiras e mostre que os resultados são equivalentes.

28. A integral

$$\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$$

pode ser calculada tanto por substituição trigonométrica quanto por manipulação algébrica, reescrevendo o numerador do integrando como $(x^2 + 4) - 4$. Calcule a integral de ambas as maneiras e mostre que os resultados obtidos são equivalentes.

29. Encontre o comprimento da curva $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

30. Encontre o comprimento da curva $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 1$.

31. Encontre a área da superfície gerada quando a curva do Exercício 30 gira em torno do eixo x.

32. Encontre o volume do sólido gerado quando a região limitada por $x = y(1 - y^2)^{1/4}$, $y = 0$, $y = 1$ e $x = 0$ gira em torno do eixo y.

33-44 Calcule a integral.

33. $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

36. $\int \frac{dx}{16x^2+16x+5}$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

38. $\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx$

39. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

40. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}\,dx$

41. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+7}$

42. $\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5}\,dx$

43. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

44. $\int_{0}^{4} \sqrt{x(4-x)}\,dx$

45-46 Há uma boa chance de que um CAS não seja capaz de calcular a integral dada. Se for esse o caso, faça uma substituição de forma a obter uma integral que seu CAS possa calcular.

C **45.** $\int \cos x \operatorname{sen} x \sqrt{1 - \operatorname{sen}^4 x}\,dx$

C **46.** $\int (x\cos x + \operatorname{sen} x)\sqrt{1 + x^2 \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

ENFOCANDO CONCEITOS

47. (a) Use a ***substituição hiperbólica*** $x = 3 \operatorname{senh} u$, a identidade $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$ e o Teorema 7.9.4 para calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

(b) Calcule a integral em (a) usando uma substituição trigonométrica e mostre que o resultado confere com o obtido em (a).

48. Use a substituição hiperbólica $x = \cosh u$, a identidade $\operatorname{senh}^2 u = \frac{1}{2}(\cosh 2u - 1)$ e os resultados indicados no Exercício 47 para calcular

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx, \quad x \geq 1$$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.4

1. (a) $x = a \operatorname{sen}\theta$ (b) $x = a \operatorname{tg}\theta$ (c) $x = a \sec\theta$ **2.** (a) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$ (b) $\frac{2}{x}$ (c) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ **3.** (a) $x = 3\operatorname{tg}\theta$ (b) $x = 3\operatorname{sen}\theta$ (c) $x = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta$ (d) $x = 3\sec\theta$ (e) $x = \sqrt{3}\operatorname{tg}\theta$ (f) $x = \frac{1}{9}\operatorname{tg}\theta$ **4.** (a) $x - 1$ (b) $x - 3$ (c) $x + 2$

8.5 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Lembre que uma função racional é uma razão de dois polinômios. Nesta seção vamos fornecer um método geral para a integração de funções racionais, baseado na idéia de decompor uma função racional em uma soma de funções racionais mais simples, que possam ser integradas pelos métodos estudados nas seções anteriores.

FRAÇÕES PARCIAIS

Em Álgebra, aprende-se como combinar duas ou mais frações em uma única, usando um denominador comum. Por exemplo,

$$\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)+3(x-4)}{(x-4)(x+1)}=\frac{5x-10}{x^2-3x-4} \tag{1}$$

Porém, para os propósitos de integração, o lado esquerdo de (1) é preferível ao lado direito, uma vez que cada um de seus termos é de fácil integração:

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4}\,dx=\int \frac{2}{x-4}\,dx+\int \frac{3}{x+1}\,dx=2\ln|x-4|+3\ln|x+1|+C$$

Assim, é desejável ter algum método que nos possibilite obter o lado esquerdo de (1) a partir do lado direito. Para ilustrar como isso pode ser feito, começamos por notar que, no lado esquerdo, os numeradores são constantes, e os denominadores são os fatores do denominador do lado direito. Dessa forma, para encontrar o lado esquerdo de (1) a partir do lado direito, devemos fatorar o denominador do lado direito e procurar constantes A e B tais que

$$\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1} \tag{2}$$

Uma maneira de encontrar as constantes A e B é multiplicar ambos os membros de (2) por $(x-4)\,(x+1)$, para eliminar a fração. Isso dá lugar a

$$5x-10=A(x+1)+B(x-4) \tag{3}$$

Tal relação é válida para todo x; assim, em particular, é válida para $x=4$ e $x=-1$. Substituindo $x=4$ em (3), vemos que o segundo termo desaparece, dando lugar à equação $10=5A$ ou $A=2$; substituindo $x=-1$ em (3), vemos que desaparece o primeiro termo da direita e resulta a equação $-15=-5B$ ou $B=3$. Substituindo esses valores em (2), obtemos

$$\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)}=\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x+1} \tag{4}$$

o que está de acordo com (1).

Um segundo método para encontrar as constantes A e B é multiplicar o lado direito de (3) e juntar as potências iguais de x para obter

$$5x-10=(A+B)\,x+(A-4B)$$

Uma vez que os polinômios de ambos os lados são idênticos, seus coeficientes correspondentes devem ser os mesmos. Equacionando os coeficientes correspondentes nos dois lados, obtemos o seguinte sistema de equações nas incógnitas A e B:

$$\begin{aligned}A+B&=5\\A-4B&=-10\end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, temos $A=2$ e $B=3$, como anteriormente (verifique).

Os termos à direita de (4) são denominados ***frações parciais*** das expressões do lado esquerdo, pois cada um constitui uma *parte* daquela expressão. Para encontrar as frações parciais, primeiro tivemos de fazer uma suposição sobre sua forma para, então, encontrar as constantes desconhecidas. Nosso próximo objetivo é estender essa idéia a funções racionais em geral. Para isso, vamos supor que $P(x)/Q(x)$ seja uma ***função racional própria***, o que significa que o grau

do numerador é menor do que o do denominador. Há um teorema em Álgebra avançada que afirma que toda função racional própria pode ser expressa como uma soma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x)$$

onde $F_1(x), F_2(x),..., F_n(x)$ são funções racionais da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

nas quais os denominadores são fatores de $Q(x)$. A soma é denominada ***decomposição em frações parciais*** de $P(x)/Q(x)$, e as parcelas são chamadas de ***frações parciais***. Como em nosso exemplo de abertura, há duas etapas para se encontrar uma decomposição em frações parcias: determinar a forma exata da decomposição e encontrar as constantes desconhecidas.

■ ENCONTRANDO A FORMA DE UMA DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

O primeiro passo para encontrar a forma de uma decomposição em frações parciais de uma função racional própria $P(x)/Q(x)$ é fatorar completamente $Q(x)$ em fatores lineares, quadráticos e irredutíveis e, então, juntar todos os fatores repetidos, de modo que $Q(x)$ seja expresso como um produto de fatores *distintos* da forma

$$(ax+b)^m \quad \text{e} \quad (ax^2+bx+c)^m$$

A partir desses fatores, podemos determinar a forma da decomposição das frações parciais usando duas regras, que passamos a discutir.

■ FATORES LINEARES

Se todos os fatores de $Q(x)$ são lineares, então a decomposição em frações parciais de $P(x)/Q(x)$ pode ser determinada usando-se a seguinte regra:

REGRA DO FATOR LINEAR Para cada fator da forma $(ax+b)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

onde $A_1, A_2,..., A_m$ são constantes a serem determinadas. No caso em que $m = 1$, aparece somente a primeira parcela da soma.

► Exemplo 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Solução O integrando é uma função racional própria, que pode ser escrita como

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

Os fatores $x - 1$ e $x + 2$ são lineares e aparecem na primeira potência; assim, cada fator contribui com um termo na decomposição em frações parciais pela regra do fator linear. Desse modo, a decomposição tem a forma

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \tag{5}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Multiplicando ambos os membros de (5) por $(x - 1)(x + 2)$, obtemos

$$1 = A(x+2) + B(x-1) \tag{6}$$

Conforme discutido anteriormente, existem dois métodos para se encontrar A e B: podemos substituir valores de x escolhidos, de forma a anular termos à direita, ou podemos multiplicar o lado direito e equacionar coeficientes correspondentes nos dois lados para obter um sistema de equações que possa ser resolvido para A e B. Vamos usar a primeira abordagem.

Fazendo $x = 1$, o segundo termo em (6) desaparece e obtemos $1 = 3A$ ou $A = \frac{1}{3}$; fazendo $x = -2$, o primeiro termo em (6) desaparece e obtemos $1 = -3B$ ou $B = -\frac{1}{3}$. Substituindo esses valores em (5), obtemos a decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}$$

A integração pode ser completada da seguinte forma:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C \quad ◄$$

Se os fatores de $Q(x)$ são lineares e nenhum é repetido, como no último exemplo, então o método recomendado para encontrar as constantes na decomposição em frações parciais é a substituição de valores apropriados de x para fazer desaparecer termos. Entretanto, se alguns dos fatores lineares são repetidos, então não será mais possível encontrar todas as constantes dessa forma. Nesse caso, o procedimento recomendado é encontrar tantas constantes quanto possível por substituição e, então, encontrar as demais equacionando os coeficientes. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

► Exemplo 2 Calcule $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}\,dx$.

Solução O integrando pode ser reescrito como

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \frac{2x+4}{x^2(x-2)}$$

Embora x^2 seja um fator quadrático, não é irredutível, pois $x^2 = xx$. Assim, pela regra do fator linear, x^2 introduz dois termos (uma vez que $m = 2$) da forma

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

e o fator $x - 2$ introduz um termo (uma vez que $m = 1$) da forma

$$\frac{C}{x-2}$$

de modo que a decomposição em frações parciais é

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} \tag{7}$$

Multiplicando por $x^2(x-2)$, obtemos

$$2x + 4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 \tag{8}$$

a qual, após a multiplicação e juntando-se as mesmas potências de x, fica

$$2x + 4 = (A + C)x^2 + (-2A + B)x - 2B \tag{9}$$

Fazendo $x = 0$ em (8), desaparecem o primeiro e o terceiro termos; obtendo $B = -2$ e fazendo $x = 2$ em (8), o primeiro e o segundo termos desaparecem, resultando em $C = 2$ (verifique). Porém, não há substituição em (8) que produza A diretamente; portanto, fazemos uso da equação (9) para encontrar esse valor. Isso pode ser feito equacionando-se os coeficientes de x^2 em ambos os lados para obter

$$A + C = 0 \quad \text{ou} \quad A = -C = -2$$

Substituindo os valores $A = -2$, $B = -2$ e $C = 2$ em (7), obtemos a decomposição em frações parciais

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x-2}$$

Assim,

$$\int \frac{2x+4}{x^2(x-2)}\,dx = -2\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -2\ln|x| + \frac{2}{x} + 2\ln|x-2| + C = 2\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + \frac{2}{x} + C \blacktriangleleft$$

FATORES QUADRÁTICOS

Se alguns dos fatores de $Q(x)$ são quadráticos irredutíveis, então sua contribuição para a decomposição em frações parciais de $P(x)/Q(x)$ pode ser determinada a partir da seguinte regra:

REGRA DO FATOR QUADRÁTICO Para cada fator da forma $(ax^2 + bx + c)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$ são constantes a serem determinadas. No caso em que $m = 1$, aparece somente a primeira parcela da soma.

► Exemplo 3 Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}\,dx.$

Solução O denominador do integrando pode ser fatorado por agrupamento:

$$3x^3 - x^2 + 3x - 1 = x^2(3x-1) + (3x-1) = (3x-1)(x^2+1)$$

Pela regra do fator linear, o fator $3x - 1$ introduz um termo, a saber,

$$\frac{A}{3x-1}$$

e, pela regra do fator quadrático, o fator $x^2 + 1$ introduz um termo, a saber,

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Assim, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \tag{10}$$

Multiplicando ambos os membros de (10) por $(3x-1)(x^2+1)$, obtemos

$$x^2 + x - 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(3x-1) \tag{11}$$

Poderíamos encontrar A substituindo $x = \frac{1}{3}$, o que faz desaparecer o último termo, e, então, determinar as constantes, equacionando os coeficientes correspondentes. Contudo, nesse caso é mais fácil encontrar *todas* as constantes, equacionando os coeficientes e resolvendo o sistema resultante. Com essa finalidade, multiplicamos o lado direito de (11) e juntamos as mesmas potências:

$$x^2 + x - 2 = (A+3B)x^2 + (-B+3C)x + (A-C)$$

Equacionando os coeficientes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} A + 3B \quad\quad &= 1 \\ - B + 3C &= 1 \\ A \quad\quad - C &= -2 \end{aligned}$$

Para resolver esse sistema, subtraímos a terceira equação da primeira para eliminar A. Então, usamos a equação resultante junto com a segunda equação para obter B e C. Por fim, determinamos A a partir da primeira ou da terceira equação. Isso dá lugar a (verifique)

$$A = -\frac{7}{5}, \quad B = \frac{4}{5}, \quad C = \frac{3}{5}$$

Assim, (10) se torna

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{-\frac{7}{5}}{3x-1} + \frac{\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}}{x^2+1}$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x - 2}{(3x-1)(x^2+1)}\,dx &= -\frac{7}{5}\int \frac{dx}{3x-1} + \frac{4}{5}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\frac{7}{15}\ln|3x-1| + \frac{2}{5}\ln(x^2+1) + \frac{3}{5}\operatorname{arc\,tg} x + C \end{aligned}$$ ◄

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Os CAS são programados para encontrar decomposições em frações parciais. Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para encontrar as decomposições nos Exemplos 1, 2 e 3.

► Exemplo 4 Calcule $\displaystyle\int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx.$

Solução Observe que o integrando é uma função racional própria, uma vez que o numerador tem grau 4 e o denominador tem grau 5. Assim, o método das frações parciais é aplicável. Pela regra do fator linear, o fator $x + 2$ introduz o único termo

$$\frac{A}{x+2}$$

e, pela regra do fator quadrático, o fator $(x^2 + 3)^2$ introduz dois termos (uma vez que $m = 2$):

$$\frac{Bx + C}{x^2+3} + \frac{Dx + E}{(x^2+3)^2}$$

Assim, a decomposição em frações parciais do integrando é

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2+3} + \frac{Dx + E}{(x^2+3)^2} \tag{12}$$

Multiplicando por $(x + 2)\,(x^2 + 3)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} &3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 \\ &\quad = A(x^2+3)^2 + (Bx + C)\,(x^2+3)\,(x+2) + (Dx + E)\,(x+2) \end{aligned} \tag{13}$$

a qual, após a multiplicação e juntando-se as mesmas potências de x, fica:

$$\begin{aligned} &3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 \\ &\quad = (A + B)\,x^4 + (2B + C)\,x^3 + (6A + 3B + 2C + D)\,x^2 \\ &\quad\quad + (6B + 3C + 2D + E)\,x + (9A + 6C + 2E) \end{aligned} \tag{14}$$

Equacionando os coeficientes correspondentes em (14), obtemos o seguinte sistema de 5 equações lineares em 5 incógnitas:

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ 2B + C &= 4 \\ 6A + 3B + 2C + D &= 16 \\ 6B + 3C + 2D + E &= 20 \\ 9A + 6C + 2E &= 9 \end{aligned} \tag{15}$$

Métodos eficientes para a resolução de sistemas lineares como esse são estudados em uma área da Matemática denominada ***Álgebra Linear***; tais métodos, no entanto, estão além do escopo deste livro. Porém, sistemas lineares de praticamente qualquer tamanho são resolvidos por computador, e a maioria dos CAS tem comandos que, em muitos casos, resolvem sistemas lineares com exatidão. Neste caso em particular, podemos simplificar o trabalho efetuando primeiro a substituição $x = -2$ em (13), da qual resulta que $A = 1$. Substituindo esse valor de A em (15), teremos o sistema mais simples

$$\begin{aligned} B &= 2 \\ 2B + C &= 4 \\ 3B + 2C + D &= 10 \\ 6B + 3C + 2D + E &= 20 \\ 6C + 2E &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Esse sistema pode ser resolvido de cima para baixo, primeiro substituindo $B = 2$ na segunda equação para obter $C = 0$, depois substituindo os valores conhecidos de B e C na terceira equação para obter $D = 4$, e assim por diante. Dessa forma, obtemos

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 4, \quad E = 0$$

Portanto, (12) se torna

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+3} + \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

e assim

$$\begin{aligned} &\int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2}\, dx \\ &\qquad = \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{2x}{x^2+3}\, dx + 4\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\, dx \\ &\qquad = \ln|x+2| + \ln(x^2+3) - \frac{2}{x^2+3} + C \end{aligned}$$ ◄

■ INTEGRANDO FUNÇÕES RACIONAIS IMPRÓPRIAS

Embora o método das frações parciais se aplique somente a funções racionais próprias, uma função racional imprópria pode ser integrada efetuando-se uma divisão e expressando-se a função como o quociente mais o resto sobre o divisor. O resto sobre o divisor será uma função racional própria, a qual pode, então, ser decomposta em frações parciais. Essa idéia está ilustrada no exemplo a seguir:

► Exemplo 5 Calcule $\displaystyle\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}\, dx$.

Solução O integrando é uma função racional imprópria, uma vez que o numerador tem grau 4 e o denominador tem grau 2. Assim, vamos primeiro efetuar a divisão:

$$\begin{array}{l|l} 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1 & x^2 + x - 2 \\ \hline \underline{3x^4 + 3x^3 - 6x^2} & 3x^2 + 1 \\ \qquad\qquad\quad x^2 + x - 1 & \\ \qquad\qquad\quad \underline{x^2 + x - 2} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 & \end{array}$$

Segue que o integrando pode ser expresso como

$$\frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = (3x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

e, portanto,

$$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}\,dx = \int (3x^2 + 1)\,dx + \int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

A segunda integral à direita envolve uma função racional própria e pode ser calculada por uma decomposição em frações parciais. Usando o resultado do Exemplo 1, obtemos

$$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}\,dx = x^3 + x + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C \blacktriangleleft$$

OBSERVAÇÕES FINAIS

Há alguns casos em que é inapropriado o método das frações parciais. Por exemplo, seria ineficiente usar frações parciais para efetuar a integração

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 8}\,dx = \ln|x^3 + 2x - 8| + C$$

já que é mais direta a substituição $u = x^3 + 2x - 8$. Analogamente, a integração

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 + 1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1) - \text{arc tg } x + C$$

requer somente um pouco de Álgebra, uma vez que o integrando já está na forma de frações parciais.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.5 (*Ver página 544 para respostas.*)

1. Uma fração parcial é uma função racional do tipo __________ ou do tipo __________.

2. (a) O que é uma função racional própria?
   (b) Qual é a condição que o grau do numerador e o grau do denominador de uma função racional devem satisfazer para que o método das frações parciais seja diretamente aplicável?
   (c) Se a condição de (b) não for satisfeita, o que deve ser feito para podermos utilizar as frações parciais?

3. Suponha que a função $f(x) = P(x) / Q(x)$ seja uma função racional própria.
   (a) Para cada fator de $Q(x)$ da forma $(ax + b)^m$, a decomposição em frações parciais de f contém a soma a seguir de m frações parciais: __________.
   (b) Para cada fator de $Q(x)$ da forma $(ax^2 + bx + c)^m$, onde $ax^2 + bx + c$ é um polinômio quadrático irredutível, a decomposição em frações parciais de f contém a soma a seguir de m frações parciais: __________.

4. Encontre a decomposição em frações parciais.
   (a) $\dfrac{3}{(x+1)(1-2x)}$ (b) $\dfrac{2x^2 - 3x}{(x^2+1)(3x+2)}$

5. Calcule a integral.
   (a) $\displaystyle\int \frac{3}{(x+1)(1-2x)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 3x}{(x^2+1)(3x+2)}\,dx$

EXERCÍCIOS 8.5 [C] CAS

1-8 Escreva a forma da decomposição em frações parciais. (Não calcule os valores numéricos dos coeficientes.)

1. $\dfrac{3x - 1}{(x-3)(x+4)}$
2. $\dfrac{5}{x(x^2 - 4)}$
3. $\dfrac{2x - 3}{x^3 - x^2}$
4. $\dfrac{x^2}{(x+2)^3}$
5. $\dfrac{1 - x^2}{x^3(x^2+2)}$
6. $\dfrac{3x}{(x-1)(x^2+6)}$
7. $\dfrac{4x^3 - x}{(x^2+5)^2}$
8. $\dfrac{1 - 3x^4}{(x-2)(x^2+1)^2}$

9-32 Calcule a integral.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 3x - 4}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 6x - 7}$
11. $\displaystyle\int \frac{11x + 17}{2x^2 + 7x - 4}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{5x - 5}{3x^2 - 8x - 3}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2 - 1)}$

15. $\int \frac{x^2-8}{x+3}\,dx$

16. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$

17. $\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}\,dx$

18. $\int \frac{x^2}{x^2-3x+2}\,dx$

19. $\int \frac{x^5+x^2+2}{x^3-x}\,dx$

20. $\int \frac{x^5-4x^3+1}{x^3-4x}\,dx$

21. $\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}\,dx$

22. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx$

23. $\int \frac{2x^2-10x+4}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$

24. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2}\,dx$

25. $\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx$

26. $\int \frac{2x^2+3x+3}{(x+1)^3}\,dx$

27. $\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)}\,dx$

28. $\int \frac{dx}{x^3+2x}$

29. $\int \frac{x^3+3x^2+x+9}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx$

30. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

31. $\int \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x^2+1}\,dx$

32. $\int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10}\,dx$

33-34 Calcule a integral fazendo a substituição que converte o integrando em uma função racional.

33. $\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+4\operatorname{sen}\theta-5}\,d\theta$

34. $\int \frac{e^t}{e^{2t}-4}\,dt$

35. Encontre o volume do sólido gerado quando a região delimitada por $y = x^2/(9-x^2)$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$ gira em torno do eixo x.

36. Encontre a área da região sob a curva $y = 1/(1+e^x)$ acima do intervalo $[-\ln 5, \ln 5]$. [*Sugestão*: Faça uma substituição que converta o integrando em uma função racional.]

37-38 Use um CAS para calcular a integral de duas maneiras: (i) integrando diretamente e (ii) encontrando a decomposição. Integre à mão para verificar os resultados.

C **37.** $\int \frac{x^2+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

C **38.** $\int \frac{x^5+x^4+4x^3+4x^2+4x+4}{(x^2+2)^3}\,dx$

39-40 Integre à mão e verifique sua resposta usando um CAS.

C **39.** $\int \frac{dx}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$

C **40.** $\int \frac{dx}{16x^3-4x^2+4x-1}$

ENFOCANDO CONCEITOS

41. Mostre que

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{8}$$

42. Use frações parciais para deduzir a fórmula de integração

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

43. Suponha que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrático e que a integração de

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

produza uma função sem termos trigonométricos inversos. O que isso nos diz sobre as raízes do polinômio?

44. Suponha que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrático e que a integração de

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

produza uma função sem termos logarítmicos e sem termos com arco tangente. O que isso nos diz sobre as raízes do polinômio?

45. Existe algum polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$ tal que a integração de

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx$$

produza uma função sem termos logarítmicos? Se existir, dê um exemplo; se não, explique por que não pode existir um tal polinômio.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.5

1. $\frac{A}{(ax+b)^k}$; $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ **2.** (a) Uma função racional própria é uma função racional cujo denominador tem grau maior do que o grau do numerador. (b) O grau do numerador deve ser menor do que o do denominador. (c) Divida o numerador pelo denominador, o que resulta na soma de um polinômio com uma função racional própria.

3. (a) $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$ (b) $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$

4. (a) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x-1}$ (b) $\frac{2}{3x+2} - \frac{1}{x^2+1}$ **5.** (a) $\int \frac{3}{(x+1)(1-2x)}\,dx = \ln\left|\frac{x+1}{1-2x}\right| + C$

(b) $\int \frac{2x^2-3x}{(x^2+1)(3x+2)}\,dx = \frac{2}{3}\ln|3x+2| - \operatorname{arc\,tg} x + C$

8.6 O USO DE SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS E DE TABELAS DE INTEGRAIS

Nesta seção discutiremos como integrar usando tabelas e trataremos de alguns assuntos relacionados ao uso de sistemas algébricos de computação para integração. Os leitores que não estão usando sistemas algébricos computacionais podem ignorar aquele material.

TABELAS DE INTEGRAIS

As tabelas de integrais são úteis para eliminar a necessidade de fazer longos cálculos à mão. As primeiras e últimas páginas deste livro contêm uma tabela de integrais relativamente breve, à qual nos iremos referir como ***Tabela de Integrais das Capas***; tabelas mais abrangentes estão publicadas em muitos livros de referência, como o *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae,* CRC Press, Inc., 2002.

Todas as tabelas de integrais têm seu próprio sistema de classificação, de acordo com a forma do integrando. Por exemplo, a Tabela de Integrais das Capas classifica as integrais em 15 categorias; *Funções Básicas, Recíprocos das Funções Básicas, Potências de Funções Trigonométricas, Produtos de Funções Trigonométricas*, e assim por diante. O primeiro passo ao trabalhar com tabelas é ler toda a classificação, de forma a compreender o esquema de classificação e saber onde buscar diferentes tipos de integrais.

ACERTOS TOTAIS

Se tivermos sorte, a integral que estamos tentando calcular será exatamente igual a uma das formas na tabela. Porém, ao procurar acertos, podemos ter de fazer algum ajuste na variável de integração. Por exemplo, a integral

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

é um acerto total com a Fórmula (46) da Tabela de Integrais das Capas, exceto pela letra usada na variável de integração. Assim, para aplicar a Fórmula (46) à integral dada, é necessário mudar a variável de integração na fórmula de u para x. Com essa modificação mínima, obtemos

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = 2x \operatorname{sen} x + (2 - x^2)\cos x + C$$

Aqui estão alguns exemplos de acertos totais.

▶ Exemplo 1 Use a Tabela de Integrais das Capas para calcular

(a) $\int \operatorname{sen} 7x \cos 2x\, dx$ (b) $\int x^2\sqrt{7+3x}\, dx$

(c) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}\, dx$ (d) $\int (x^3 + 7x + 1)\operatorname{sen} \pi x\, dx$

Solução (a) O integrando pode ser classificado como um produto de funções trigonométricas. Assim, a partir da Fórmula (40), com $m = 7$ e $n = 2$, obtemos

$$\int \operatorname{sen} 7x \cos 2x\, dx = -\frac{\cos 9x}{18} - \frac{\cos 5x}{10} + C$$

Solução (b) O integrando pode ser classificado como uma potência de x multiplicando $\sqrt{a+bx}$. Assim, a partir da Fórmula (103), com $a = 7$ e $b = 3$, obtemos

$$\int x^2\sqrt{7+3x}\, dx = \frac{2}{2835}(135x^2 - 252x + 392)(7+3x)^{3/2} + C$$

Solução (c) O integrando pode ser classificado como uma potência de x dividindo $\sqrt{a^2-x^2}$. Assim, a partir da Fórmula (79), com $a=\sqrt{2}$, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2-x^2} - \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-x^2}}{x}\right| + C$$

Solução (d) O integrando pode ser classificado como um polinômio multiplicando uma função trigonométrica. Assim, aplicamos a Fórmula (58) com $p(x) = x^3 + 7x+1$ e $a = \pi$. As derivadas sucessivas não-nulas de $p(x)$ são

$$p'(x) = 3x^2+7, \quad p''(x) = 6x, \quad p'''(x) = 6$$

e, portanto,

$$\int (x^3+7x+1)\,\text{sen}\,\pi x\,dx$$
$$= -\frac{x^3+7x+1}{\pi}\cos\pi x + \frac{3x^2+7}{\pi^2}\,\text{sen}\,\pi x + \frac{6x}{\pi^3}\cos\pi x - \frac{6}{\pi^4}\,\text{sen}\,\pi x + C \blacktriangleleft$$

■ ACERTOS QUE REQUEREM SUBSTITUIÇÕES

Às vezes, uma integral não encontrada na tabela pode tornar-se um acerto total através de uma substituição apropriada. Aqui estão alguns exemplos.

► Exemplo 2 Use a Tabela de Integrais das Capas para calcular $\int \sqrt{x-4x^2}\,dx$.

Solução O integrando não coincide com nenhuma das formas na tabela. A Fórmula (112) é a que está mais próxima da integral dada, mas falha por causa do fator 4 multiplicando x^2 dentro do radical. Porém, se fizermos a substituição

$$u = 2x, \quad du = 2dx$$

então $4x^2$ irá tornar-se u^2, e a integral transformada será

$$\int \sqrt{x-4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{\tfrac{1}{2}u - u^2}\,du$$

que coincide com a Fórmula (112) com $a = \frac{1}{4}$. Assim, obtemos

$$\int \sqrt{x-4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{u-\frac{1}{4}}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}u-u^2} + \frac{1}{32}\,\text{arc sen}\left(\frac{u-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\right] + C$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x-\frac{1}{4}}{2}\sqrt{x-4x^2} + \frac{1}{32}\,\text{arc sen}\left(\frac{2x-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\right] + C$$
$$= \frac{8x-1}{16}\sqrt{x-4x^2} + \frac{1}{64}\,\text{arc sen}\,(8x-1) + C \blacktriangleleft$$

► Exemplo 3 Use a Tabela de Integrais das Capas para calcular

$$\text{(a)} \int e^{\pi x}\,\text{arc sen}\,(e^{\pi x})\,dx \qquad \text{(b)} \int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx$$

Solução (a) O integrando não está nem perto de qualquer uma das formas na tabela. Porém, pensando um pouco, chegamos à substituição

$$u = e^{\pi x}, \quad du = \pi\, e^{\pi x}\,dx$$

da qual obtemos

$$\int e^{\pi x} \operatorname{arc\,sen}(e^{\pi x})\,dx = \frac{1}{\pi}\int \operatorname{arc\,sen} u\,du$$

O integrando é, agora, uma função básica, e a Fórmula (7) dá lugar a

$$\begin{aligned}\int e^{\pi x} \operatorname{arc\,sen}(e^{\pi x})\,dx &= \frac{1}{\pi}[u \operatorname{arc\,sen} u + \sqrt{1-u^2}] + C \\ &= \frac{1}{\pi}[e^{\pi x} \operatorname{arc\,sen}(e^{\pi x}) + \sqrt{1-e^{2\pi x}}] + C\end{aligned}$$

Solução (b) Novamente, o integrando não está nem perto de qualquer uma das formas na tabela. No entanto, pensando um pouco, podemos concluir que é possível trazê-lo perto da forma $x\sqrt{x^2+a^2}$ completando o quadrado para eliminar o termo que envolve o x dentro do radical. Fazendo isso, temos

$$\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx = \int x\sqrt{(x^2-4x+4)+1}\,dx = \int x\sqrt{(x-2)^2+1}\,dx \qquad (1)$$

Neste ponto, estamos mais próximos da forma $x\sqrt{x^2+a^2}$, mas não temos um acerto, pois temos $(x-2)^2$ em vez de x^2 dentro do radical. Contudo, podemos resolver esse problema com a substituição

$$u = x - 2, \quad du = dx$$

Com essa substituição, temos que $x = u + 2$, logo (1) pode ser expressa em termos de u como

$$\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx = \int (u+2)\sqrt{u^2+1}\,du = \int u\sqrt{u^2+1}\,du + 2\int \sqrt{u^2+1}\,du$$

A primeira integral à direita é um acerto total com a Fórmula (84) com $a = 1$, e a segunda é um acerto total com a Fórmula (72) com $a = 1$. Assim, aplicando essas fórmulas, obtemos

$$\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx = \left[\tfrac{1}{3}(u^2+1)^{3/2}\right] + 2\left[\tfrac{1}{2}u\sqrt{u^2+1} + \tfrac{1}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+1})\right] + C$$

Se agora substituirmos u por $x - 2$ (neste caso, $u^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$), obtemos

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2-4x+5)^{3/2} &+ (x-2)\sqrt{x^2-4x+5} \\ &+ \ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+5}) + C\end{aligned}$$

Embora correta, essa forma de resposta tem uma mistura desnecessária de radicais e expoentes fracionários. Caso desejado, podemos "limpar" a resposta escrevendo

$$(x^2-4x+5)^{3/2} = (x^2-4x+5)\sqrt{x^2-4x+5}$$

do que segue (verifique)

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2-x-1)&\sqrt{x^2-4x+5} \\ &+ \ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+5}) + C\end{aligned}$$ ◄

■ ACERTOS QUE REQUEREM FÓRMULAS DE REDUÇÃO

Nos casos em que a entrada em uma tabela de integral é uma fórmula de redução, devemos primeiro aplicar a fórmula, para reduzir a integral dada a uma forma na qual possa ser calculada.

▶ Exemplo 4 Use a Tabela de Integrais das Capas para calcular $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

Solução O integrando pode ser classificado como uma potência de x multiplicando o recíproco de $\sqrt{a+bx}$. Assim, a partir da Fórmula (107), com $a = 1$, $b = 1$ e $n = 3$, seguida pela Fórmula (106), obtemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}\,dx &= \frac{2x^3\sqrt{1+x}}{7} - \frac{6}{7}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx \\ &= \frac{2x^3\sqrt{1+x}}{7} - \frac{6}{7}\left[\frac{2}{15}(3x^2-4x+8)\sqrt{1+x}\right] + C \\ &= \left(\frac{2x^3}{7} - \frac{12x^2}{35} + \frac{16x}{35} - \frac{32}{35}\right)\sqrt{1+x} + C \quad ◀\end{aligned}$$

■ ACERTOS QUE REQUEREM SUBSTITUIÇÕES ESPECIAIS

A Tabela de Integrais das Capas tem várias entradas envolvendo um expoente de 3/2 ou raízes quadradas (expoente 1/2), mas não entradas com outros expoentes fracionários. Porém, integrais envolvendo potências fracionárias de x podem, freqüentemente, ser simplificadas fazendo-se a substituição $u = x^{1/n}$, na qual n é o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos expoentes. A integral resultante, então, envolve potências inteiras de u. Aqui estão alguns exemplos.

▶ Exemplo 5 Calcule

(a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (b) $\int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}}$ (c) $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

Solução (a) O integrando contém $x^{1/2}$ e $x^{1/3}$; portanto, fazemos a substituição $u = x^{1/6}$, da qual obtemos

$$x = u^6, \quad dx = 6u^5\,du$$

Assim,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{(u^6)^{1/2}}{1+(u^6)^{1/3}}(6u^5)\,du = 6\int \frac{u^8}{1+u^2}\,du$$

Dividindo, obtemos

$$\frac{u^8}{1+u^2} = u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}$$

do que segue

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx &= 6\int \left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}\right) du \\ &= \tfrac{6}{7}u^7 - \tfrac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + 6\,\text{arc tg}\,u + C \\ &= \tfrac{6}{7}x^{7/6} - \tfrac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\,\text{arc tg}\,(x^{1/6}) + C\end{aligned}$$

Solução (b) O integrando contém $x^{1/2}$, mas não acerta nenhuma das formas da Tabela de Integrais das Capas. Logo, fazemos a substituição $u = x^{1/2}$, da qual obtemos

$$x = u^2, \quad dx = 2u\,du$$

Fazendo essa substituição, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}} &= \int \frac{2u}{2+2u}\,du \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du \qquad \boxed{\text{Por divisão}} \\ &= u - \ln|1+u| + C \\ &= \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C \qquad \boxed{\text{Não é necessário valor absoluto}}\end{aligned}$$

Solução (c) Novamente, a integral não acerta nenhuma das formas da Tabela de Integrais das Capas. Porém, o integrando contém $(1 + e^x)^{1/2}$, o que é análogo à situação em (b), exceto que aqui é $1 + e^x$, em vez de x, que está elevado à potência 1/2. Isso sugere a substituição $u = (1 + e^x)^{1/2}$, da qual obtemos (verifique)

$$x = \ln(u^2 - 1), \quad dx = \frac{2u}{u^2 - 1}\,du$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + e^x}\,dx &= \int u\left(\frac{2u}{u^2 - 1}\right) du \\
&= \int \frac{2u^2}{u^2 - 1}\,du \\
&= \int \left(2 + \frac{2}{u^2 - 1}\right) du && \boxed{\text{Por divisão}} \\
&= 2u + \int \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right) du && \boxed{\text{Frações parciais}} \\
&= 2u + \ln|u - 1| - \ln|u + 1| + C \\
&= 2u + \ln\left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| + C \\
&= 2\sqrt{1 + e^x} + \ln\left[\frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}\right] + C && \boxed{\text{Não é necessário valor absoluto}}
\end{aligned}$$

◄

As funções que consistem em um número finito de somas, diferenças, quocientes e produtos de sen x e cos x são chamadas de ***funções racionais de seno e cosseno***. Alguns exemplos são:

$$\frac{\operatorname{sen} x + 3\cos^2 x}{\cos x + 4\operatorname{sen} x}, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x - \cos^2 x}, \quad \frac{3\operatorname{sen}^5 x}{1 + 4\operatorname{sen} x}$$

A Tabela de Integrais das Capas oferece algumas fórmulas para integrar funções racionais de seno e cosseno com o título *Recíprocos de Funções Básicas*. Por exemplo, tem-se, a partir da Fórmula (18), que

$$\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}\,dx = \operatorname{tg} x - \sec x + C \tag{2}$$

Porém, uma vez que o integrando é uma função racional de seno, pode ser desejável, em uma dada aplicação, expressar o valor da integral em termos de seno e cosseno e reescrever (2) como

$$\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}\,dx = \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x} + C$$

Muitas funções racionais de seno e cosseno podem ser calculadas através de um engenhoso método, descoberto pelo matemático Karl Weierstrass (ver página 136 para uma biografia). A idéia é fazer a substituição

$$u = \operatorname{tg}(x/2), \quad -\pi/2 < x/2 < \pi/2$$

da qual tem-se que

$$x = 2\operatorname{arc\,tg} u, \quad dx = \frac{2}{1 + u^2}\,du$$

Para implementar essa substituição, precisamos expressar sen x e cos x em termos de u. Para isso, usaremos as identidades

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) \tag{3}$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) \tag{4}$$

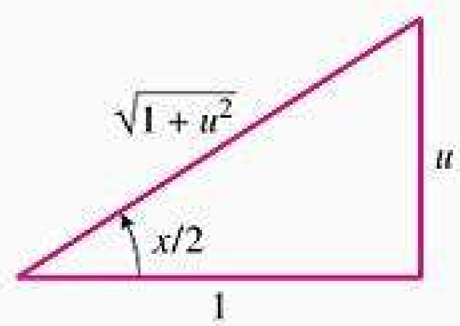


Figura 8.6.1

e a seguinte relação sugerida pela Figura 8.6.1:

$$\operatorname{sen}(x/2) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{e} \quad \cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

Substituindo essas expressões em (3) e (4), obtemos

$$\operatorname{sen} x = 2\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Em suma, mostramos que a substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ pode ser implementada em uma função racional de sen x e cos x, fazendo

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du \tag{5}$$

Exemplo 6 Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}$.

Solução O integrando é uma função racional de sen x e cos x, que não acerta qualquer fórmula da Tabela de Integrais das Capas, de modo que fazemos a substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$. Assim, a partir de (5), obtemos

> A substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ irá converter qualquer função racional de sen x e cos x em uma função racional ordinária de u. No entanto, o método pode levar a decomposições em frações parciais complicadas, de modo que pode valer a pena considerar outras alternativas mais simples quando se estiver calculando à mão.

$$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,du}{1+u^2}}{1 - \left(\dfrac{2u}{1+u^2}\right) + \left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)}$$

$$= \int \frac{2\,du}{(1+u^2) - 2u + (1-u^2)}$$

$$= \int \frac{du}{1-u} = -\ln|1-u| + C = -\ln|1 - \operatorname{tg}(x/2)| + C \blacktriangleleft$$

INTEGRANDO COM SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

As tabelas de integrais estão dando lugar, rapidamente, à integração computadorizada de sistemas algébricos computacionais. Contudo, como ocorre com muitas ferramentas poderosas, um componente importante do sistema é um operador que conheça esse sistema.

Algumas vezes, os sistemas algébricos computacionais não fornecem a forma mais geral da integral indefinida. Por exemplo, a fórmula integral

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$$

que pode ser obtida facilmente à mão ou, no máximo, usando a substituição $u = x - 1$, é válida para $x > 1$ ou $x < 1$. Contudo, nem todos os sistemas algébricos computacionais produzem a resposta nessa forma. Algumas respostas típicas produzidas por várias versões de *Mathematica*, *Maple* e *Derive* são

$$\ln(-1+x), \quad \ln(x-1), \quad \ln(|x-1|)$$

Observe que nenhum dos sistemas inclui a constante de integração, de modo que a resposta produzida é uma antiderivada particular e não a antiderivada mais geral (integral indefinida).

Observe também que somente uma dessas respostas inclui os sinais de valor absoluto; as antiderivadas produzidas pelos outros sistemas são válidas somente para $x > 1$. Entretanto, todos os sistemas são capazes de calcular corretamente a integral definida

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x-1} = -\ln 2$$

Vejamos, agora, como esses sistemas tratam a integral

$$\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2-x-1)\sqrt{x^2-4x+5} + \ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right) \qquad (6)$$

que obtivemos no Exemplo 3(b) com a constante de integração. Algumas versões de CAS produzem esse resultado em formas algébricas ligeiramente diferentes, mas uma versão do *Maple* dá o resultado

$$\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2-4x+5)^{3/2} + \tfrac{1}{2}(2x-4)\sqrt{x^2-4x+5} + \text{arc senh}\,(x-2)$$

Expressando o expoente fracionário em formato de raiz e o arc senh $(x-2)$ em forma logarítmica usando o Teorema 7.9.4, podemos reescrever isso como (6) (verifique). Uma versão do *Mathematica* produz o resultado

$$\int x\sqrt{x^2-4x+5}\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2-x-1)\sqrt{x^2-4x+5} - \text{arc senh}\,(2-x)$$

que pode ser reescrito na forma (6) usando o Teorema 7.9.4 junto com a identidade arc senh $(-x) = -$arc senh x (verifique).

Às vezes, os sistemas algébricos computacionais produzem respostas inconvenientes ou que não são naturais em problemas de integração. Por exemplo, vários sistemas algébricos computacionais forneceram as respostas a seguir quando solicitados a integrar $(x+1)^7$:

$$\frac{(x+1)^8}{8}, \quad \frac{1}{8}x^8 + x^7 + \frac{7}{2}x^6 + 7x^5 + \frac{35}{4}x^4 + 7x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x \qquad (7)$$

Expandindo a expressão

$$\frac{(x+1)^8}{8}$$

obtemos um termo constante de $\frac{1}{8}$, mas a segunda expressão em (7) não tem termo constante. Qual é a explicação?

A primeira resposta está de acordo com o resultado calculado à mão

$$\int (x+1)^7\,dx = \frac{(x+1)^8}{8} + C$$

que usa a substituição $u = x+1$, enquanto a segunda forma provém da expansão de $(x+1)^7$ e da integração termo a termo.

No Exemplo 2(a) da Seção 8.3, mostramos que

$$\int \text{sen}^4 x \cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{5}\,\text{sen}^5 x - \tfrac{2}{7}\,\text{sen}^7 x + \tfrac{1}{9}\,\text{sen}^9 x + C$$

Contudo, uma versão do *Mathematica* integra isso como

$$\tfrac{3}{128}\,\text{sen}\,x - \tfrac{1}{192}\,\text{sen}\,3x - \tfrac{1}{320}\,\text{sen}\,5x + \tfrac{1}{1792}\,\text{sen}\,7x + \tfrac{1}{2304}\,\text{sen}\,9x$$

enquanto outros sistemas algébricos computacionais integram isso, essencialmente, como

$$-\tfrac{1}{9}\,\text{sen}^3 x\cos^6 x - \tfrac{1}{21}\,\text{sen}\,x\cos^6 x + \tfrac{1}{105}\cos^4 x\,\text{sen}\,x + \tfrac{4}{315}\cos^2 x\,\text{sen}\,x + \tfrac{8}{315}\,\text{sen}\,x$$

Embora esses três resultados pareçam bem diferentes, eles realmente podem ser obtidos um do outro utilizando identidades trigonométricas apropriadas.

■ OS SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS TÊM LIMITAÇÕES

Um sistema algébrico computacional combina uma coleção de regras de integração (como a substituição) com uma biblioteca de funções que podem ser utilizadas para construir antiderivadas. Essas bibliotecas contêm funções elementares tais como polinômios, funções

racionais e funções trigonométricas, bem como várias funções não-elementares que surgem na Engenharia, na Física e em outras áreas aplicadas. Assim como nossa Tabela de Integrais no verso da capa tem apenas 121 integrais indefinidas, essas bibliotecas de CAS não cobrem todas as integrais possíveis. Se o sistema não conseguir manipular o integrando para torná-lo igual a um de sua biblioteca, o programa dará alguma indicação de que é incapaz de calcular a integral. Por exemplo, quando solicitamos calcular a integral

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2}\, dx \tag{8}$$

todos os sistemas mencionados anteriormente respondem exibindo alguma forma não-calculada dessa integral como resposta, indicando que não conseguiram efetuar a integração.

Alguns sistemas algébricos computacionais respondem a uma integração com outra integral. Por exemplo, se tentarmos integrar e^{x^2} com o *Mathematica*, o *Maple* ou o *Derive*, obteremos alguma expressão envolvendo erf (a sigla da ***função erro***, em inglês). A função erf(x) é definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

e, portanto, os três programas essencialmente só reescrevem a integral em termos de uma outra integral relacionada. De certa forma, é exatamente isso que fizemos para integrar $1/x$, pois a função logaritmo natural é (formalmente) definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

(ver Seção 6.9).

DOMÍNIO DA TECNOLOGIA

Às vezes, uma integral que não pode ser calculada por um CAS na forma em que foi dada pode ser calculada depois de reescrita em um formato diferente ou depois de uma substituição. Se o leitor dispuser de um CAS, faça uma substituição u em (8) que permita ao CAS calcular a integral. Então, proceda ao cálculo dela.

▶ Exemplo 7 Uma partícula se move ao longo do eixo x de tal forma que sua velocidade $v(t)$ no instante t é

$$v(t) = 30 \cos^7 t \operatorname{sen}^4 t \quad (t \geq 0)$$

Faça o gráfico da curva posição *versus* tempo para a partícula, sabendo que ela está em $x = 1$ quando $t = 0$.

Solução Como $dx/dt = v(t)$ e $x = 1$ quando $t = 0$, a função posição $x(t)$ é dada por

$$x(t) = 1 + \int_0^t v(s)\, ds$$

Alguns sistemas algébricos computacionais permitem que se obtenha um gráfico digitando diretamente essa expressão, mas em geral é mais eficiente efetuar antes a integração. Uma calculadora fornece

$$\begin{aligned} x &= \int 30 \cos^7 t \operatorname{sen}^4 t\, dt \\ &= -\tfrac{30}{11} \operatorname{sen}^{11} t + 10 \operatorname{sen}^9 t - \tfrac{90}{7} \operatorname{sen}^7 t + 6 \operatorname{sen}^5 t + C \end{aligned}$$

onde somamos a constante de integração requerida. Usando a condição inicial $x(0) = 1$, substituímos os valores $x = 1$ e $t = 0$ nessa equação para encontrar $C = 1$, de modo que

$$x(t) = -\tfrac{30}{11} \operatorname{sen}^{11} t + 10 \operatorname{sen}^9 t - \tfrac{90}{7} \operatorname{sen}^7 t + 6 \operatorname{sen}^5 t + 1 \quad (t \geq 0)$$

O gráfico de x *versus* t aparece na Figura 8.6.2. ◀

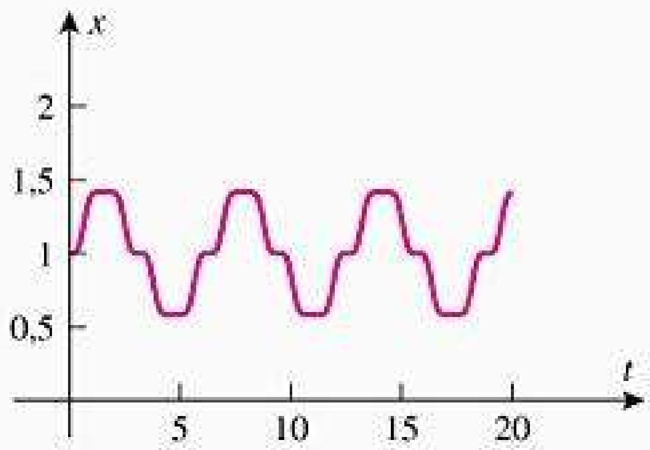


Figura 8.6.2

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.6 (*Ver página 555 para respostas.*)

1. Encontre uma fórmula integral na Tabela de Integrais no verso da capa que possa ser usada para calcular a integral. Não calcule a integral.

   (a) $\int \frac{2x}{3x+4}\,dx$ ________

   (b) $\int \frac{1}{x\sqrt{5x-4}}\,dx$ ________

   (c) $\int x\sqrt{3x+2}\,dx$ ________

   (d) $\int x^2 \ln x\,dx$ ________

2. Em cada parte, faça uma substituição u e então encontre uma fórmula integral na Tabela de Integrais no verso da capa que possa ser usada para calcular a integral. Não calcule a integral.

   (a) $\int \frac{x}{1+e^{x^2}}\,dx;\ u = x^2$ ________

   (b) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx;\ u = \sqrt{x}$ ________

   (c) $\int \frac{e^x}{1+\operatorname{sen}(e^x)}\,dx;\ u = e^x$ ________

   (d) $\int \frac{1}{(1-4x^2)^{3/2}}\,dx;\ u = 2x$ ________

3. Em cada parte, use a Tabela de Integrais no verso da capa para calcular a integral. (Se necessário, faça primeiro uma substituição apropriada ou complete o quadrado.)

   (a) $\int \frac{1}{4-x^2}\,dx =$ ________

   (b) $\int \cos 2x \cos x\,dx =$ ________

   (c) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx =$ ________

   (d) $\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx =$ ________

EXERCÍCIOS 8.6 [C] CAS

1-24 (a) Use a Tabela de Integrais no verso da capa para calcular a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral e, então, confirme que o resultado é equivalente ao que foi obtido em (a).

1. $\int \frac{4x}{3x-1}\,dx$
2. $\int \frac{x}{(4-5x)^2}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x(2x+5)}\,dx$
4. $\int \frac{1}{x^2(1-5x)}\,dx$
5. $\int x\sqrt{2x+3}\,dx$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{4-3x}}\,dx$
8. $\int \frac{1}{x\sqrt{3x-4}}\,dx$
9. $\int \frac{1}{16-x^2}\,dx$
10. $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$
11. $\int \sqrt{x^2-3}\,dx$
12. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}\,dx$
13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$
14. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-2}}\,dx$
15. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$
16. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$
17. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$
18. $\int \frac{1}{x\sqrt{6x-x^2}}\,dx$
19. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 4x\,dx$
20. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 5x\,dx$
21. $\int x^3 \ln x\,dx$
22. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx$
23. $\int e^{-2x} \operatorname{sen} 3x\,dx$
24. $\int e^x \cos 2x\,dx$

25-36 (a) Faça a substituição u indicada e, então, use a Tabela de Integrais no verso da capa para calcular a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral e, então, prove que o resultado é equivalente ao encontrado em (a).

25. $\int \frac{e^{4x}}{(4-3e^{2x})^2}\,dx,\ u = e^{2x}$
26. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{(\cos 2x)(3-\cos 2x)}\,dx,\ u = \cos 2x$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(9x+4)}\,dx,\ u = 3\sqrt{x}$
28. $\int \frac{\cos 4x}{9+\operatorname{sen}^2 4x}\,dx,\ u = \operatorname{sen} 4x$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx,\ u = 2x$

30. $\int x\sqrt{2x^4+3}\,dx,\ u = \sqrt{2}x^2$

31. $\int \frac{4x^5}{\sqrt{2-4x^4}}\,dx,\ u = 2x^2$

32. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{3-4x^2}}\,dx,\ u = 2x$

33. $\int \frac{\operatorname{sen}^2(\ln x)}{x}\,dx,\ u = \ln x$

34. $\int e^{-2x}\cos^2(e^{-2x})\,dx,\ u = e^{-2x}$

35. $\int xe^{-2x}\,dx,\ u = -2x$

36. $\int \ln(3x+1)\,dx,\ u = 3x+1$

37-48 (a) Faça uma substituição u apropriada e, então, use a Tabela de Integrais no verso da capa para calcular a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral (sem substituições) e, então, confirme que o resultado é equivalente ao de (a).

37. $\int \frac{\cos 3x}{(\operatorname{sen} 3x)(\operatorname{sen} 3x+1)^2}\,dx$

38. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{4\ln x-1}}\,dx$

39. $\int \frac{x}{16x^4-1}\,dx$

40. $\int \frac{e^x}{3-4e^{2x}}\,dx$

41. $\int e^x\sqrt{3-4e^{2x}}\,dx$

42. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x^2}\,dx$

43. $\int \sqrt{5x-9x^2}\,dx$

44. $\int \frac{1}{x\sqrt{x-5x^2}}\,dx$

45. $\int 4x\operatorname{sen} 2x\,dx$

46. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

47. $\int e^{-\sqrt{x}}\,dx$

48. $\int x\ln(2+x^2)\,dx$

49-52 (a) Complete o quadrado, faça uma substituição u adequada e, então, use a Tabela de Integrais no verso da capa para calcular a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral (sem completar quadrados e sem substituições) e, então, confirme que o resultado é equivalente ao de (a).

49. $\int \frac{1}{x^2+6x-7}\,dx$

50. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

51. $\int \frac{x}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$

52. $\int \frac{x}{x^2+6x+13}\,dx$

53-64 (a) Faça uma substituição u apropriada da forma $u = x^{1/n}$ ou $u = (x+a)^{1/n}$ e, então, calcule a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral e, então, confirme que o resultado é equivalente ao de (a).

53. $\int x\sqrt{x-2}\,dx$

54. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

55. $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

56. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^3-1}}\,dx$

57. $\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

59. $\int \frac{dx}{x(1-x^{1/4})}$

60. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

61. $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/3}}$

62. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$

63. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

64. $\int \frac{x}{(x+3)^{1/5}}\,dx$

65-70 (a) Faça a substituição u dada por (5) para converter o integrando em uma função racional de u e, então, calcule a integral. (b) Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular a integral (sem usar substituições) e, então, confirme que o resultado é equivalente ao de (a).

65. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$

66. $\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen} x}$

67. $\int \frac{d\theta}{1-\cos\theta}$

68. $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x-3\cos x}$

69. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x}$

70. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x}\,dx$

71-72 Use qualquer método para resolver para x.

71. $\int_2^x \frac{1}{t(4-t)}\,dt = 0{,}5;\ 2 < x < 4$

72. $\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{2t-1}}\,dt = 1,\ x > \frac{1}{2}$

73-76 Use qualquer método para encontrar a área da região delimitada pelas curvas.

73. $y = \sqrt{25-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$

74. $y = \sqrt{9x^2-4},\ y = 0,\ x = 2$

75. $y = \frac{1}{25-16x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

76. $y = \sqrt{x}\ln x,\ y = 0,\ x = 4$

77-80 Use qualquer método para encontrar o volume do sólido gerado quando a região delimitada pelas curvas gira em torno do eixo y.

77. $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi/2$

78. $y = \sqrt{x-4}, \quad y = 0, \quad x = 8$

79. $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 3$

80. $y = \ln x, y = 0, x = 5$

81-82 Use qualquer método para encontrar o comprimento de arco da curva.

81. $y = 2x^2, 0 \leq x \leq 2$

82. $y = 3 \ln x, 1 \leq x \leq 3$

83-84 Use qualquer método para encontrar a área da superfície gerada fazendo a curva girar em torno do eixo x.

83. $y = \text{sen } x, 0 \leq x \leq \pi$

84. $y = 1/x, 1 \leq x \leq 4$

85-86 É dada informação sobre o movimento de uma partícula ao longo de um eixo.

(a) Use um CAS para encontrar a função posição da partícula para $t \geq 0$.

(b) Faça o gráfico da curva posição *versus* tempo.

C **85.** $v(t) = 20 \cos^6 t \text{ sen}^3 t, s(0) = 2$

C **86.** $a(t) = e^{-t} \text{ sen } 2t \text{ sen } 4t, v(0) = 0, s(0) = 10$

ENFOCANDO CONCEITOS

87. (a) Use a substituição $u = \text{tg}(x/2)$ para mostrar que

$$\int \sec x\, dx = \ln \left| \frac{1 + \text{tg}(x/2)}{1 - \text{tg}(x/2)} \right| + C$$

e confirme que isso é consistente com a Fórmula (22) da Seção 8.3.

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que

$$\int \sec x\, dx = \ln \left| \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| + C$$

88. Use a substituição $u = \text{tg}(x/2)$ para mostrar que

$$\text{cossec}\, x\, dx = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right] + C$$

e confirme que isso é consistente com o resultado do Exercício 61 (a) da Seção 8.3.

89. Encontre uma substituição que possa ser usada para integrar uma função racional de senh x e cosh x e a use para calcular

$$\int \frac{dx}{2 \cosh x + \text{senh } x}$$

sem expressar a integral em termos de e^x e e^{-x}.

90-93 Algumas integrais que podem ser calculadas à mão não podem ser calculadas por todos os sistemas algébricos computacionais. Calcule a integral à mão e verifique se pode ser calculada com um CAS.

C **90.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}} dx$

C **91.** $\int (\cos^{32} x \text{ sen}^{30} x - \cos^{30} x \text{ sen}^{32} x)\, dx$

C **92.** $\int \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}}\, dx$ [*Sugestão*: $\frac{1}{2}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})^2 = ?$]

C **93.** $\int \frac{1}{x^{10} + x} dx$

[*Sugestão*: Reescreva o denominador como $x^{10}(1 + x^{-9})$.]

C **94.** Seja

$$f(x) = \frac{-2x^5 + 26x^4 + 15x^3 + 6x^2 + 20x + 43}{x^6 - x^5 - 18x^4 - 2x^3 - 39x^2 - x - 20}$$

(a) Use um CAS para fatorar o denominador e, então, escreva a forma da decomposição em frações parciais. Não é necessário encontrar o valor das constantes.

(b) Confira sua resposta em (a) usando um CAS para encontrar a decomposição em frações parciais de f.

(c) Integre f à mão e então confira sua resposta integrando f com um CAS.

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.6

1. (a) Fórmula (60) (b) Fórmula (108) (c) Fórmula (102) (d) Fórmula (50) **2.** (a) Fórmula (25) (b) Fórmula (51) (c) Fórmula (18) (d) Fórmula (97) **3.** (a) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$ (b) $\frac{1}{6} \text{sen } 3x + \frac{1}{2} \text{sen } x + C$ (c) $-\frac{e^x}{2}\sqrt{1 - e^{2x}} + \frac{1}{2} \text{arc sen } e^x + C$ (d) $\frac{1}{2} \ln \left(x^2 - 4x + 8\right) + \text{arc tg } \frac{x-2}{2} + C$

8.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA; REGRA DE SIMPSON

Quando for necessário calcular uma integral definida de uma função para a qual não pudermos encontrar uma antiderivada, precisamos nos contentar com algum tipo de aproximação numérica dessa integral. Na Seção 6.4 consideramos três dessas aproximações no contexto de áreas: as aproximações pelo extremo esquerdo, pelo extremo direito e pelo ponto médio. Nesta seção, estenderemos esses métodos para integrais definidas em geral e desenvolveremos alguns métodos novos que, freqüentemente, fornecem uma maior precisão com menos cálculo. Também discutiremos os erros que surgem em aproximações de integrais.

UMA REVISÃO DA APROXIMAÇÃO POR SOMAS DE RIEMANN

Lembre que na Seção 6.5 foi visto que a integral definida de uma função contínua f sobre um intervalo $[a, b]$ pode ser calculada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

onde a soma que aparece do lado direito é chamada de soma de Riemann. Nessa fórmula, Δx_k é o comprimento do k-ésimo subintervalo de uma partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ em n subintervalos e x_k^* denota um ponto arbitrário do k-ésimo intervalo. Se tomarmos todos os subintervalos com o mesmo comprimento, ou seja, com $\Delta x_k = (b-a)/n$, então, quando n cresce, as somas de Riemann acabam sendo boas aproximações da integral definida. Denotamos isso escrevendo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)] \tag{1}$$

Se os valores de f nos extremos dos subintervalos forem denotados por

$$y_0 = f(a), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \ldots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), \quad y_n = f(x_n)$$

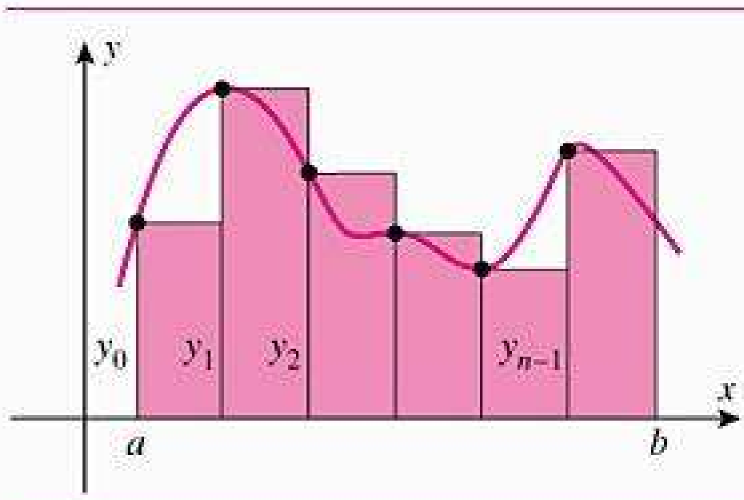
e os valores de f nos pontos médios dos subintervalos por

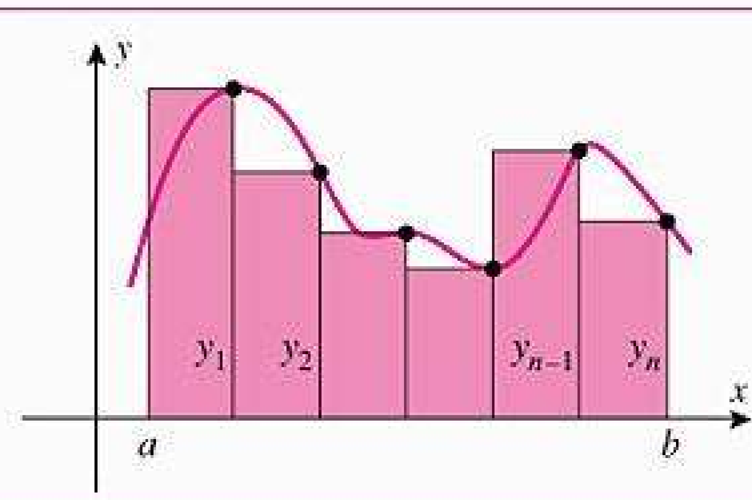
$$y_{m_1}, y_{m_2}, \ldots, y_{m_n}$$

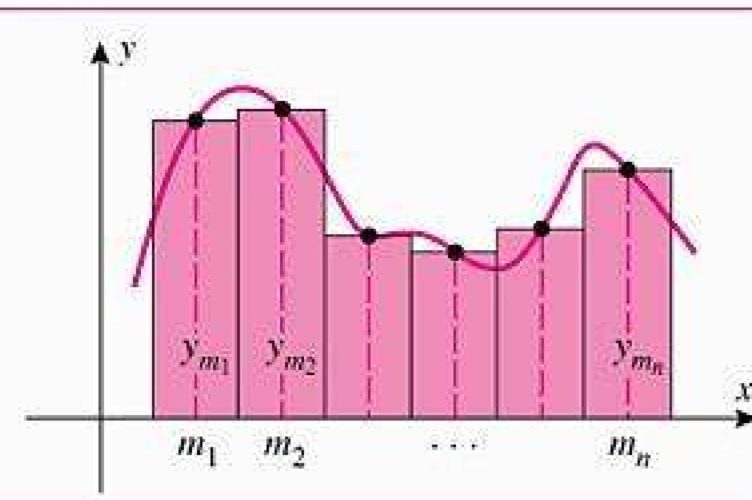
então segue de (1) que as aproximações pelo extremo esquerdo, pelo extremo direito e pelo ponto médio, discutidas na Seção 6.4, podem ser expressas conforme indicado na Tabela 8.7.1. Embora tenhamos obtido esses resultados para funções não-negativas no contexto de aproximação de áreas, elas são aplicáveis a qualquer função que seja contínua em $[a, b]$.

Tabela 8.7.1

APROXIMAÇÃO PELO EXTREMO ESQUERDO	APROXIMAÇÃO PELO EXTREMO DIREITO	APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO
$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$	$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)[y_1 + y_2 + \cdots + y_n]$	$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{n}\right)[y_{m_1} + y_{m_2} + \cdots + y_{m_n}]$





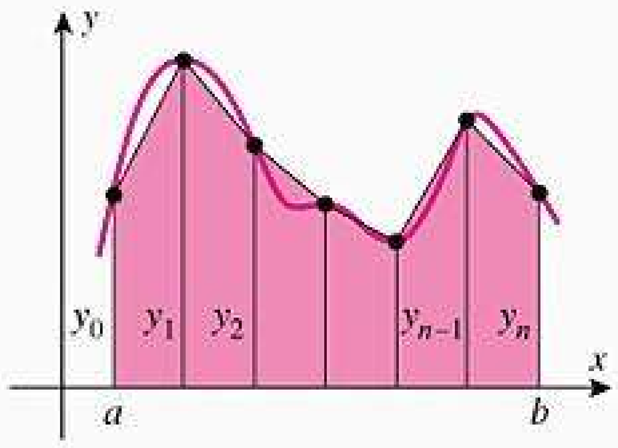


APROXIMAÇÃO TRAPEZOIDAL

Nesta seção convém denotar as aproximações com n subintervalos pelo extremo esquerdo, pelo extremo direito e pelo ponto médio, respectivamente, por L_n, R_n e M_n. Dessas três, a aproximação pelo ponto médio é a mais utilizada em aplicações. Se tomarmos a média de L_n e R_n, obteremos uma outra aproximação importante, denotada por

$$T_n = \tfrac{1}{2}(L_n + R_n)$$

e denominada ***aproximação trapezoidal***:



Aproximação trapezoidal

Figura 8.7.1

Aproximação Trapezoidal

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n] \qquad (2)$$

O nome "aproximação trapezoidal" deriva do fato de que, quando f for não-negativa no intervalo de integração, essa aproximação T_n é a soma das áreas dos trapézios mostrados na Figura 8.7.1 (ver Exercício 47).

► Exemplo 1 Na Tabela 8.7.2 aproximamos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

usando as aproximações pelo ponto médio e trapezoidal.* Em cada caso, utilizamos $n = 10$ subdivisões do intervalo [1, 2], de modo que

$$\underbrace{\frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0{,}1}_{\text{Ponto médio}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{b-a}{2n} = \frac{2-1}{20} = 0{,}05}_{\text{Trapezoidal}}$$ ◄

Tabela 8.7.2

APROXIMAÇÃO PELO PONTO MÉDIO

i	PONTO MÉDIO m_i	$y_{m_i} = f(m_i) = 1/m_i$
1	1,05	0,952380952
2	1,15	0,869565217
3	1,25	0,800000000
4	1,35	0,740740741
5	1,45	0,689655172
6	1,55	0,645161290
7	1,65	0,606060606
8	1,75	0,571428571
9	1,85	0,540540541
10	1,95	0,512820513
		6,928353603

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx (0{,}1)(6{,}928353603) \approx 0{,}692835360$$

APROXIMAÇÃO TRAPEZOIDAL

i	EXTREMO x_i	$y_i = f(x_i) = 1/x_i$	MULTIPLICADOR w_i	$w_i y_i$
0	1,0	1,000000000	1	1,000000000
1	1,1	0,909090909	2	1,818181818
2	1,2	0,833333333	2	1,666666667
3	1,3	0,769230769	2	1,538461538
4	1,4	0,714285714	2	1,428571429
5	1,5	0,666666667	2	1,333333333
6	1,6	0,625000000	2	1,250000000
7	1,7	0,588235294	2	1,176470588
8	1,8	0,555555556	2	1,111111111
9	1,9	0,526315789	2	1,052631579
10	2,0	0,500000000	1	0,500000000
				13,875428063

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx (0{,}05)(13{,}875428063) \approx 0{,}693771403$$

* Em toda esta seção daremos os valores numéricos com nove casas decimais à direita da vírgula. Se seu recurso computacional não mostrar tantas casas, será preciso fazer os ajustes necessários. O importante aqui é entender os princípios em discussão.

Reescrevendo (3) e (4) no formato

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aproximação} + \text{erro}$$

vemos que os valores positivos de E_M e E_T correspondem a subestimar e os valores negativos, a superestimar o valor da integral.

■ COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES PELO PONTO MÉDIO E TRAPEZOIDAL

Definimos os ***erros*** nas aproximações pelo ponto médio e trapezoidal, respectivamente, por

$$E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n \quad \text{e} \quad E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \tag{3-4}$$

e definimos $|E_M|$ e $|E_T|$ como sendo os ***erros absolutos*** dessas aproximações. Os erros absolutos são não-negativos e não distinguem entre subestimar e superestimar.

► Exemplo 2 O valor de ln 2 com nove casas decimais é

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0{,}693147181 \tag{5}$$

de modo que, pelas Tabelas 8.7.2 e 8.7.3, podemos ver que os erros absolutos na aproximação de ln 2 por M_{10} e T_{10} são

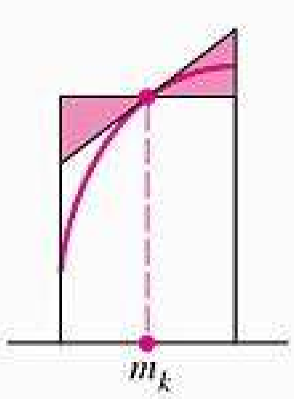
$$|E_M| = |\ln 2 - M_{10}| \approx 0{,}000311821$$
$$|E_T| = |\ln 2 - T_{10}| \approx 0{,}000624222$$

Assim, nesse caso, a aproximação pelo ponto médio é mais precisa do que a aproximação trapezoidal. ◄

Tabela 8.7.3

ln 2 (NOVE CASAS DECIMAIS)	APROXIMAÇÃO	ERRO
0,693147181	$M_{10} \approx 0{,}692835360$	$E_M = \ln 2 - M_{10} \approx 0{,}000311821$
0,693147181	$T_{10} \approx 0{,}693771403$	$E_T = \ln 2 - T_{10} \approx -0{,}000624222$

No Exemplo 2, não foi por acaso que a aproximação de ln 2 pelo ponto médio resultou mais precisa do que a aproximação trapezoidal. Para ver isso, começamos olhando para a aproximação pelo ponto médio de um outro ponto de vista. Para simplificar nossa explicação, suporemos que f seja não-negativa em $[a, b]$, embora nossas conclusões sejam válidas sem essa hipótese.



Os triângulos sombreados têm áreas iguais.

Figura 8.7.2

Se f for uma função diferenciável, também chamamos a aproximação pelo ponto médio de ***aproximação pela reta tangente***, pois para cada subintervalo a área do retângulo utilizado na aproximação pelo ponto médio é igual à área do trapézio cuja aresta superior é a reta tangente a $y = f(x)$ pelo ponto médio do subintervalo (Figura 8.7.2). A igualdade dessas áreas segue do fato de que as áreas sombreadas na figura são congruentes. Mostraremos, agora, como esse ponto de vista da aproximação pelo ponto médio pode ser usado para estabelecer critérios úteis para determinar se M_n ou T_n é a aproximação que produz a melhor aproximação em um dado intervalo.

Na Figura 8.7.3*a,* isolamos um subintervalo de $[a, b]$ no qual o gráfico de uma função f é côncavo para baixo e sombreamos as áreas que representam os erros nas aproximações pelo ponto médio trapezoidal no subintervalo. Na Figura 8.7.3*b,* mostramos uma sucessão de quatro ilustrações, que tornam evidente que o erro na aproximação pelo ponto médio é menor do que aquele na aproximação trapezoidal. Se o gráfico de f fosse côncavo para cima, figuras análogas levariam à mesma conclusão. (Esse argumento, devido a Frank Buck, apareceu no *The College Mathematics Journal*, Vol. 16, nº 1, 1985.)

A Figura 8.7.3*a* também sugere que, em um subintervalo no qual o gráfico é côncavo para baixo, a aproximação pelo ponto médio será maior do que o valor da integral, enquanto a aproximação trapezoidal será menor. Em um intervalo onde o gráfico é côncavo

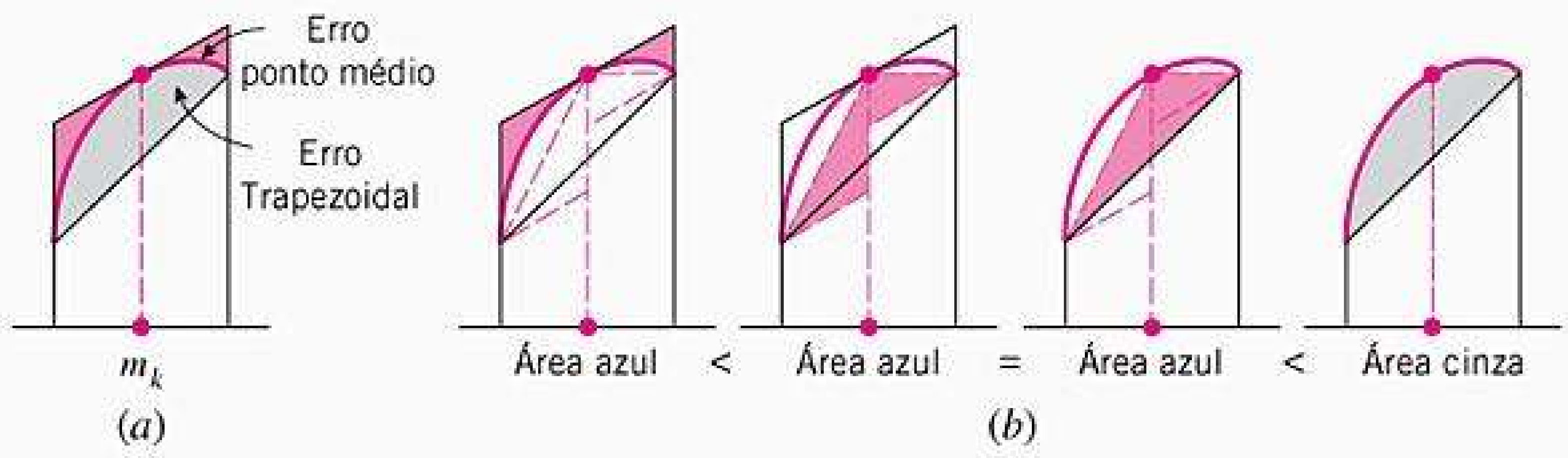


Figura 8.7.3

para cima, ocorrerá o inverso. Em resumo, temos o seguinte resultado, que enunciamos sem prova formal.

8.7.1 TEOREMA *Seja f contínua em [a, b] e sejam $|E_M|$ e $|E_T|$ os erros absolutos que resultam das aproximações pelo ponto médio e trapezoidal de $\int_a^b f(x)\,dx$ usando n subintervalos.*

(a) *Se o gráfico de f for côncavo para cima ou para baixo em (a, b), então $|E_M| < |E_T|$, isto é, o erro na aproximação do ponto médio será menor do que aquele na aproximação trapezoidal.*

(b) *Se o gráfico de f for côncavo para baixo em (a, b), então*

$$T_n < \int_a^b f(x)\,dx < M_n$$

(c) *Se o gráfico de f for côncavo para cima em (a, b), então*

$$M_n < \int_a^b f(x)\,dx < T_n$$

► Exemplo 3 Como o gráfico de $f(x) = 1/x$ é contínuo no intervalo [1, 2] e côncavo para cima no intervalo (1, 2), segue da parte (a) do Teorema 8.7.1 que M_n sempre dará uma aproximação melhor do que T_n para

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$$

Além disso, segue da parte (c) do Teorema 8.7.1 que $M_n < \ln 2 < T_n$ para cada inteiro positivo n. Observe que isso é consistente com nosso cálculo no Exemplo 2. ◄

ADVERTÊNCIA

Não conclua que a aproximação pelo ponto médio sempre é melhor do que a trapezoidal; a aproximação trapezoidal pode ser melhor se a função trocar de concavidade no intervalo de integração.

► Exemplo 4 As aproximações pelo ponto médio e trapezoidal podem ser usadas para aproximar sen 1 usando a integral

$$\text{sen}\,1 = \int_0^1 \cos x\,dx$$

Como $f(x) = \cos x$ é contínua no intervalo [0, 1] e côncava para baixo em (0, 1), segue das partes (a) e (b) do Teorema 8.7.1 que o erro absoluto de M_n será inferior a T_n e que $T_n < \text{sen}\,1 < M_n$ para cada inteiro positivo n. Isso é consistente com os resultados na Tabela 8.7.4 para $n = 5$ (cálculos imediatos omitidos). ◄

Tabela 8.7.4

sen 1 (NOVE CASAS DECIMAIS)	APROXIMAÇÃO	ERRO
0,841470985	$M_5 \approx 0{,}842875074$	$E_M = \text{sen } 1 - M_5 \approx -0{,}001404089$
0,841470985	$T_5 \approx 0{,}838664210$	$E_T = \text{sen } 1 - T_5 \approx 0{,}002806775$

▶ Exemplo 5 A Tabela 8.7.5 mostra aproximações pelo ponto médio e trapezoidal de $\text{sen } 3 = \int_0^3 \cos x\, dx$ usando $n = 10$ subdivisões do intervalo [0, 3]. Observe que $|E_M| < |E_T|$ e $T_{10} < \text{sen } 3 < M_{10}$, embora esses resultados não sejam garantidos pelo Teorema 8.7.1, já que f troca de concavidade no intervalo [0, 3]. ◀

Tabela 8.7.5

sen 3 (NOVE CASAS DECIMAIS)	APROXIMAÇÃO	ERRO
0,141120008	$M_{10} \approx 0{,}141650601$	$E_M = \text{sen } 3 - M_{10} \approx -0{,}000530592$
0,141120008	$T_{10} \approx 0{,}140060017$	$E_T = \text{sen } 3 - T_{10} \approx 0{,}001059991$

■ REGRA DE SIMPSON

Lembre que a média das aproximações pelos extremos esquerdo e direito dá uma aproximação melhor, a trapezoidal. Veremos, agora, como uma média ponderada das aproximações pelo ponto médio e trapezoidal pode dar uma aproximação ainda melhor.

A evidência numérica nas Tabelas 8.7.3, 8.7.4 e 8.7.5 revela que, nesses casos, $E_T \approx -2E_M$. Isso sugere que

$$\begin{aligned} 3\int_a^b f(x)\,dx &= 2\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \\ &= 2(M_n + E_M) + (T_n + E_T) \\ &= (2M_n + T_n) + (2E_M + E_T) \\ &\approx 2M_n + T_n \end{aligned}$$

Disso resulta

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{3}(2M_n + T_n)$$

Utilizaremos a notação S_{2n} para denotar o lado direito dessa aproximação. Assim,

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}(2M_n + T_n)$$

A Tabela 8.7.6 apresenta as aproximações S_{2n} correspondentes aos dados nas Tabelas 8.7.3 até 8.7.5.

Tabela 8.7.6

VALOR DA FUNÇÃO (NOVE CASAS DECIMAIS)	APROXIMAÇÃO	ERRO
$\ln 2 \approx 0{,}693147181$	$\int_1^2 (1/x)\,dx \approx S_{20} = \frac{1}{3}(2M_{10} + T_{10}) \approx 0{,}693147375$	$-0{,}000000194$
$\text{sen } 1 \approx 0{,}841470985$	$\int_0^1 \cos x\,dx \approx S_{10} = \frac{1}{3}(2M_5 + T_5) \approx 0{,}841471453$	$-0{,}000000468$
$\text{sen } 3 \approx 0{,}141120008$	$\int_0^3 \cos x\,dx \approx S_{20} = \frac{1}{3}(2M_{10} + T_{10}) \approx 0{,}141120406$	$-0{,}000000398$

Usando a fórmula da aproximação pelo ponto médio na Tabela 8.7.1 e a Fórmula (2) da aproximação trapezoidal, podemos obter uma fórmula análoga para S_{2n}. Para simplificar, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em $2n$ subintervalos, cada um de comprimento $(b-a)/(2n)$. Identificamos os extremos desses subintervalos por $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n} = b$. Então, $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}$ define uma partição de $[a, b]$ em n subintervalos iguais, sendo que $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n-1}$ são os pontos médios desses subintervalos. Usando $y_i = f(x_i)$, temos

$$\begin{aligned} M_n &= \left(\frac{b-a}{n}\right)[y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}] \\ &= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[2y_1 + 2y_3 + \cdots + 2y_{2n-1}] \\ T_n &= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + y_{2n}] \end{aligned}$$

Assim, $S_{2n} = \frac{1}{3}(2M_n + T_n)$ pode ser expresso por

$$S_{2n} = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}] \tag{6}$$

A aproximação

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_{2n} \tag{7}$$

dada por (6) é conhecida como ***regra de Simpson***. O erro dessa aproximação é denotado por

$$E_S = \int_a^b f(x)\,dx - S_{2n} \tag{8}$$

Como antes, o erro absoluto da aproximação (7) é dado por $|E_S|$.

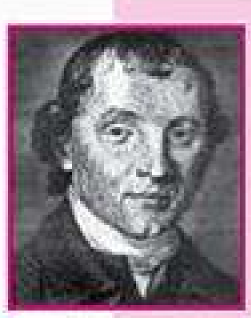
► Exemplo 6 Na Tabela 8.7.7 utilizamos a regra de Simpson com $2n = 10$ subintervalos para obter a aproximação

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{10} = 0{,}693150231$$

Para essa aproximação,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2-1}{10}\right) = \frac{1}{30}$$

Embora S_{10} seja uma média ponderada de M_5 e T_5, faz sentido comparar S_{10} com M_{10} e T_{10}, já que as somas dessas três aproximações envolvem o mesmo número de parcelas.



Thomas Simpson (1710-1761) Matemático inglês. Simpson era filho de um tecelão. Ele foi treinado para seguir os passos do pai e teve pouca educação formal no começo de sua vida. Seu interesse por Ciência e Matemática surgiu em 1724, quando presenciou um eclipse do Sol e recebeu dois livros de um vendedor ambulante, um sobre Astrologia e o outro sobre Aritmética. Simpson rapidamente absorveu seus conteúdos e logo tornou-se, com sucesso, adivinho local. Sua situação financeira melhorada permitiu-lhe desistir da tecelagem e casar-se com sua patroa. Então, em 1733, um incidente desafortunado e misterioso forçou-o a mudar-se. Ele se estabeleceu em Derby, onde lecionou em uma escola noturna e, durante o dia, trabalhou em uma tecelagem. Em 1736, mudou-se para Londres e publicou seu primeiro trabalho matemático em um periódico chamado *Ladies's Diary* (do qual, mais tarde, tornou-se editor). Em 1737, publicou um bem-sucedido livro de Cálculo, o qual possibilitou-lhe largar completamente a tecelagem e concentrar-se em ensinar e escrever. Sua sorte melhorou mais ainda em 1740, quando alguém chamado Robert Heath o acusou de plágio. A publicidade foi maravilhosa, e Simpson conseguiu escrever rapidamente uma sucessão de livros-texto de grande sucesso: *Álgebra* (dez edições mais traduções), *Geometria* (doze edições mais traduções), *Trigonometria* (cinco edições mais traduções) e inúmeros outros. É interessante notar que Simpson não descobriu a regra que leva seu nome. Ela era um resultado bem conhecido em sua época.

Usando os valores de M_{10} e T_{10} do Exemplo 2 e o valor de S_{10} da Tabela 8.7.7, temos

$$|E_M| = |\ln 2 - M_{10}| \approx |0{,}693147181 - 0{,}692835360| = 0{,}000311821$$
$$|E_T| = |\ln 2 - T_{10}| \approx |0{,}693147181 - 0{,}693771403| = 0{,}000624222$$
$$|E_S| = |\ln 2 - S_{10}| \approx |0{,}693147181 - 0{,}693150231| = 0{,}000003050$$

Comparando esses erros absolutos, fica claro que S_{10} é uma aproximação muito mais precisa de ln 2 do que M_{10} ou T_{10}. ◄

Tabela 8.7.7

i	EXTREMO x_i	$y_i = f(x_i) = 1/x_i$	MULTIPLICADOR w_i	$w_i y_i$
0	1,0	1,000000000	1	1,000000000
1	1,1	0,909090909	4	3,636363636
2	1,2	0,833333333	2	1,666666667
3	1,3	0,769230769	4	3,076923077
4	1,4	0,714285714	2	1,428571429
5	1,5	0,666666667	4	2,666666667
6	1,6	0,625000000	2	1,250000000
7	1,7	0,588235294	4	2,352941176
8	1,8	0,555555556	2	1,111111111
9	1,9	0,526315789	4	2,105263158
10	2,0	0,500000000	1	0,500000000
				20,794506921

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \left(\frac{1}{30}\right)(20{,}794506921) \approx 0{,}693150231$$

■ INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA REGRA DE SIMPSON

A aproximação pelo ponto médio (ou pela reta tangente) e a aproximação trapezoidal de uma integral definida baseiam-se na aproximação de um segmento da curva $y = f(x)$ por um segmento de reta. A intuição sugere que essas aproximações poderiam ser melhoradas usando arcos parabólicos em vez de segmentos de reta, incorporando, assim, a concavidade da curva $y = f(x)$ na aproximação.

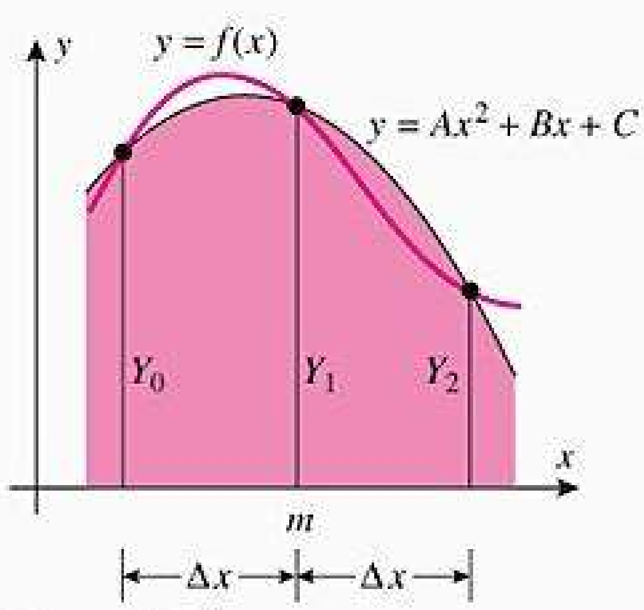


Figura 8.7.4

Essa idéia é carregada por uma fórmula, algumas vezes chamada de ***regra do terço***. Essa regra expressa a integral definida de uma função quadrática $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ em termos dos valores Y_0, Y_1 e Y_2 de g no extremo esquerdo, no ponto médio e no extremo direito, respectivamente, do intervalo de integração $[m - \Delta x, m + \Delta x]$ (ver Figura 8.7.4).

$$\int_{m-\Delta x}^{m+\Delta x} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{\Delta x}{3}[Y_0 + 4Y_1 + Y_2] \qquad (9)$$

Deixamos a cargo do leitor verificar essa regra. Aplicando a regra do terço aos subintervalos $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, com $k = 1,..., n$, chegamos à Fórmula (6) da regra de Simpson (Exercícios 49-50). Assim, a regra de Simpson corresponde à integral de uma aproximação quadrática por partes de $f(x)$.

■ ESTIMATIVAS DOS ERROS

Há duas fontes de erros com todos os métodos estudados nesta seção: o erro *de truncamento*, ou *intrínseco*, devido à fórmula de aproximação, e o erro *de arredondamento*, introduzido nos cálculos. Em geral, aumentando n reduzimos o erro de truncamento mas aumen-

tamos o erro de arredondamento, já que, para n grande, necessitamos de mais cálculos. Em aplicações práticas, é importante saber quão grande devemos tomar n para garantir um grau de precisão especificado. A análise do erro de arredondamento não será considerada neste texto, por ser muito complicada. Contudo, os teoremas seguintes, provados em livros de Análise Numérica, dão cotas superiores para os erros de truncamento das aproximações pelo ponto médio, trapezoidal e pela regra de Simpson.

8.7.2 TEOREMA **(*Estimativa do Erro pelo Ponto Médio e Trapezoidal*)** *Se f'' for contínua em $[a, b]$ e se K_2 for o valor máximo de $|f''(x)|$ em $[a, b]$, então*

$$(a)\quad |E_M| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\right| \le \frac{(b-a)^3 K_2}{24n^2} \tag{10}$$

$$(b)\quad |E_T| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{(b-a)^3 K_2}{12n^2} \tag{11}$$

8.7.3 TEOREMA **(*Estimativa do Erro em Simpson*)** *Se $f^{(4)}$ for contínua em $[a, b]$ e se K_4 for o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ em $[a, b]$, então*

$$|E_S| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{2n}\right| \le \frac{(b-a)^5 K_4}{180(2n)^4} \tag{12}$$

► Exemplo 7 Encontre uma cota superior para o erro absoluto que resulta da aproximação de

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

usando (a) a aproximação pelo ponto médio M_{10} com $n = 10$ subintervalos, (b) a aproximação trapezoidal T_{10} com $n = 10$ subintervalos e (c) a regra de Simpson S_{10} com $2n = 10$ subintervalos.

Solução Aplicaremos as Fórmulas (10), (11) e (12) com

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1 \quad \text{e} \quad b = 2$$

Para (10) e (11) usamos $n = 10$; para (12) usamos $2n = 10$, ou $n = 5$. Temos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

Assim,

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| = \frac{2}{x^3}, \quad |f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| = \frac{24}{x^5} \tag{13-14}$$

onde ignoramos os valores absolutos porque $f''(x)$ e $f^{(4)}(x)$ têm valores positivos em $1 \le x \le 2$. Como (13) e (14) são contínuas e decrescentes em $[1, 2]$, ambas as funções têm seus valores máximos em $x = 1$; para (13), esse valor máximo é 2 e, para (14), o valor máximo é 24. Assim, podemos tomar $K_2 = 2$ em (10) e (11) e $K_4 = 24$ em (12). Resulta

$$|E_M| \le \frac{(b-a)^3 K_2}{24n^2} = \frac{1^3 \cdot 2}{24 \cdot 10^2} \approx 0{,}000833333$$

$$|E_T| \le \frac{(b-a)^3 K_2}{12n^2} = \frac{1^3 \cdot 2}{12 \cdot 10^2} \approx 0{,}001666667$$

$$|E_S| \le \frac{(b-a)^5 K_4}{180(2n)^4} = \frac{1^5 \cdot 24}{180 \cdot 10^4} \approx 0{,}000013333 \quad ◄$$

Observe que as cotas superiores calculadas no Exemplo 7 são consistentes com os valores $|E_M|$, $|E_T|$ e $|E_S|$ calculados no Exemplo 6, mas são consideravelmente maiores do que aqueles valores. É bem comum que as cotas superiores dos erros absolutos dadas nos Teoremas 8.7.2 e 8.7.3 excedam substancialmente os erros absolutos verdadeiros. Contudo, isso não diminui a utilidade dessas cotas.

▶ Exemplo 8 Quantos subintervalos deveriam ser usados para aproximar

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

pela regra de Simpson para obter uma precisão de cinco casas decimais?

Solução Para obter uma precisão de cinco casas decimais, devemos escolher o número de subintervalos de tal modo que

$$|E_S| \leq 0{,}000005 = 5 \times 10^{-6}$$

Por (12), isso pode ser alcançado tomando $2n$ na regra de Simpson de tal modo que valha

$$\frac{(b-a)^5 K_4}{180(2n)^4} \leq 5 \times 10^{-6}$$

Fazendo $a = 1$, $b = 2$ e $K_4 = 24$ (obtido no Exemplo 7) nessa desigualdade, resulta

$$\frac{1^5 \cdot 24}{180 \cdot (2n)^4} \leq 5 \times 10^{-6}$$

que, tomando recíprocos, pode ser escrita como

$$(2n)^4 \geq \frac{2 \times 10^6}{75} \quad \text{ou} \quad n^4 \geq \frac{10^4}{6}$$

Assim,

$$n \geq \frac{10}{\sqrt[4]{6}} \approx 6{,}389$$

Como n é um inteiro, vemos que $n = 7$ é o menor valor de n que satisfaz essa exigência, com $2n = 14$. Assim, a aproximação S_{14} com 14 subintervalos produz uma precisão de cinco casas decimais. ◀

Nos casos em que é difícil encontrar os valores de K_2 e K_4 nas Fórmulas (10), (11) e (12), podemos trocar essas constantes por qualquer constante maior. Por exemplo, suponha que uma constante K que possa ser encontrada facilmente dê a certeza de que $|f''(x)| < K$ no intervalo. Então $K_2 \leq K$ e

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3 K_2}{12n^2} \leq \frac{(b-a)^3 K}{12n^2} \tag{15}$$

de modo que o lado direito de (15) é, também, uma cota superior do valor de $|E_T|$. Contudo, utilizando K, provavelmente aumentará o valor calculado do n que é necessário para a tolerância do erro dada. Muitas aplicações envolvem a resolução desses assuntos práticos concorrentes, exemplificados aqui pela compensação entre a conveniência de encontrar uma cota grosseira para $|f''(x)|$ e a eficiência de utilizar o menor n possível para a precisão desejada.

▶ Exemplo 9 Quantos subintervalos devem ser usados na aproximação de

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$$

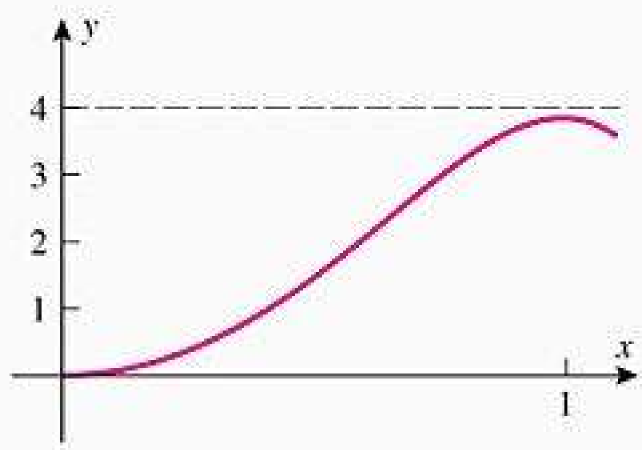
pelo ponto médio para uma precisão de três casas decimais?

Solução Para obter uma precisão de três casas decimais, precisamos escolher n de tal forma que

$$|E_M| \leq 0{,}0005 = 5 \times 10^{-4} \tag{16}$$

A partir de (10) com $f(x) = \cos(x^2)$, $a = 0$ e $b = 1$, um limite superior para o erro $|E_M|$ é dado por

$$|E_M| \leq \frac{K_2}{24n^2} \tag{17}$$



$y = |f''(x)| = |4x^2 \cos(x^2) + 2\,\text{sen}(x^2)|$

Figura 8.7.5

onde $|K_2|$ é o valor máximo de $|f''(x)|$ no intervalo [0, 1]. Mas,

$$f'(x) = -2x\,\text{sen}(x^2)$$
$$f''(x) = -4x^2 \cos(x^2) - 2\,\text{sen}(x^2) = -[4x^2 \cos(x^2) + 2\,\text{sen}(x^2)]$$

e portanto,

$$|f''(x)| = |4x^2 \cos(x^2) + 2\,\text{sen}(x^2)| \tag{18}$$

Seria cansativo buscar analiticamente o valor máximo dessa função no intervalo [0, 1]. Para x em [0, 1], é fácil ver que cada uma das expressões x^2, cos (x^2) e sen (x^2) é limitada por 1 em valor absoluto, de modo que $|4x^2 \cos(x^2) + 2\,\text{sen}(x^2)| \leq 4 + 2 = 6$ em [0, 1]. Podemos melhorar isso usando um recurso gráfico para esboçar $|f''(x)|$, como mostramos na Figura 8.7.5. É evidente pelo gráfico que

$$|f''(x)| < 4 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Desse modo, temos a partir de (17) que

$$|E_M| \leq \frac{K_2}{24n^2} < \frac{4}{24n^2} = \frac{1}{6n^2}$$

e assim podemos satisfazer (16) escolhendo n de forma que

$$\frac{1}{6n^2} < 5 \times 10^{-4}$$

o que pode ser escrito como

$$n^2 > \frac{10^4}{30} \quad \text{ou} \quad n > \frac{10^2}{\sqrt{30}} \approx 18{,}257$$

O menor valor de n que satisfaz essa desigualdade é $n = 19$. Assim, a aproximação pelo ponto médio M_{19} usando 19 subintervalos produz uma precisão de três casas decimais. ◄

UMA COMPARAÇÃO ENTRE OS TRÊS MÉTODOS

Dos três métodos estudados nesta seção, a regra de Simpson, em geral, produz resultados mais precisos do que as aproximações pelo ponto médio ou trapezoidal, com a mesma quantidade de trabalho. Para tornar isso plausível, vamos expressar (10), (11) e (12) em termos do comprimento do subintervalo

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{para } M_n \text{ e } T_n$$

e

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n} \quad \text{para } S_{2n}$$

Obtemos

$$|E_M| \leq \frac{1}{24} K_2 (b-a)(\Delta x)^2 \tag{19}$$

$$|E_T| \leq \frac{1}{12} K_2 (b-a)(\Delta x)^2 \tag{20}$$

$$|E_S| \leq \frac{1}{180} K_4 (b-a)(\Delta x)^4 \tag{21}$$

(verifique). Portanto, para a regra de Simpson, o limite superior do erro absoluto é proporcional a $(\Delta x)^4$, enquanto, para aproximações pelo ponto médio e trapezoidal, é proporcional a $(\Delta x)^2$. Assim, reduzindo o comprimento do intervalo por um fator de 10, por exemplo, reduz-se o limite do erro por um fator de 100 para o ponto médio e o trapezoidal, e por um fator de 10.000 para a regra de Simpson. Isso sugere que a precisão da regra de Simpson melhora muito mais rapidamente do que a das outras aproximações.

Como nota final, observe que, se $f(x)$ for um polinômio de grau 3 ou menor, então temos $f^{(4)}(x) = 0$ para todo x; assim, $K_4 = 0$ em (12) e, conseqüentemente, $|E_S| = 0$. Logo, a regra de

Simpson dá resultados exatos para polinômios de grau 3 ou menor. Analogamente, as aproximações pelo ponto médio e trapezoidal dão resultados exatos para polinômios de grau 1 ou menor. (O leitor deve ser capaz de ver isso geometricamente.)

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.7 (*Ver página 569 para respostas.*)

1. Seja T_n a aproximação trapezoidal para a integral definida de $f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$ usando n subintervalos.
   (a) Em termos de L_n e R_n (as aproximações pelos extremos esquerdo e direito), temos T_n = __________.
   (b) Em termos dos valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ da função nos extremos dos subintervalos, temos T_n = __________.
2. Sejam I a integral definida de f sobre um intervalo $[a, b]$ e T_n e M_n as respectivas aproximações trapezoidal e pelo ponto médio de I para um n dado. Suponha que o gráfico de f seja côncavo para cima no intervalo $[a, b]$; ordene as quantidades T_n, M_n e I de menor para maior: __________ < __________ < __________.
3. Seja S_{2n} a aproximação pela regra de Simpson da integral definida de $f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$ usando $2n$ subintervalos.
   (a) Em termos de M_n e T_n (as aproximações pelo ponto médio e trapezoidal), temos S_{2n} = __________.
   (b) Em termos dos valores $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ da função nos extremos dos subintervalos, temos S_{2n} = __________.
4. Suponha que $f^{(4)}$ seja contínua em $[0, 1]$ e que $f^{(k)}(x)$ satisfaça $|f^{(k)}(x)| \le 1$ em $[0, 1]$, para $k = 1, 2, 3, 4$. Encontre uma cota superior para o erro absoluto que resulta de aproximar a integral definida de f sobre $[0, 1]$ usando (a) a aproximação pelo ponto médio M_{10}, (b) a aproximação trapezoidal T_{10} e (c) a regra de Simpson S_{10}.
5. Aproxime $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ usando o método indicado.
   (a) M_4 = __________ (b) T_4 = __________
   (c) S_4 = __________ (d) S_8 = __________

EXERCÍCIOS 8.7 [C] CAS

1-6 Use $n = 10$ subintervalos para aproximar a integral com a aproximação (a) pelo ponto médio e (b) trapezoidal e use $2n = 10$ para aproximar a integral com a (c) regra de Simpson. Em cada caso, encontre o valor exato da integral e aproxime o erro absoluto. Expresse suas respostas com pelo menos quatro casas decimais.

1. $\int_2^5 \sqrt{x-1}\,dx$
2. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$
4. $\int_0^1 \cos x\,dx$
5. $\int_1^4 e^{-x}\,dx$
6. $\int_0^2 \frac{1}{2x+1}\,dx$

7-12 Use as desigualdades (10), (11) e (12) para encontrar cotas superiores para os erros nas partes (a), (b) e (c) dos exercícios indicados.

7. Exercício 1
8. Exercício 2
9. Exercício 3
10. Exercício 4
11. Exercício 5
12. Exercício 6

13-18 Use as desigualdades (10), (11) e (12) para encontrar um número n de subintervalos para a aproximação (a) pelo ponto médio e (b) trapezoidal que garanta que o erro absoluto seja menor que o valor dado. Também encontre um número $2n$ de subintervalos que garanta que o erro absoluto na aproximação pela (c) regra de Simpson seja menor que o valor dado.

13. Exercício 1; 5×10^{-4}
14. Exercício 2; 5×10^{-4}
15. Exercício 3; 10^{-3}
16. Exercício 4; 10^{-3}
17. Exercício 5; 10^{-6}
18. Exercício 6; 10^{-6}

19-20 Encontre uma função $g(x)$ da forma

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C$$

cujo gráfico contenha os pontos $(m - \Delta x, f(m - \Delta x))$, $(m, f(m))$e $(m + \Delta x, f(m + \Delta x))$, onde $f(x)$ é a função dada, e para os valores dados de m e Δx. Então verifique a Fórmula (9):

$$\int_{m-\Delta x}^{m+\Delta x} g(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}[Y_0 + 4Y_1 + Y_2]$$

onde $Y_0 = f(m - \Delta x)$, $Y_1 = f(m)$ e $Y_2 = f(m + \Delta x)$.

19. $f(x) = \frac{1}{x}$; $m = 3, \Delta x = 1$
20. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$; $m = \frac{1}{6}, \Delta x = \frac{1}{6}$

21-26 Aproxime a integral usando a regra de Simpson com $2n = 10$ intervalos e compare sua resposta com aquela produzida por algum recurso computacional provido de integração numérica. Expresse suas respostas com pelo menos quatro casas decimais.

21. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$
22. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
23. $\int_1^2 \sqrt{x^3-1}\,dx$
24. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2-\cos x}\,dx$

25. $\int_0^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ **26.** $\int_1^3 \sqrt{\ln x}\,dx$

27-28 O valor exato da integral dada é π (confira). Use $n = 10$ subintervalos para aproximar a integral com a aproximação (a) pelo ponto médio e (b) trapezoidal e use $2n = 10$ para aproximar a integral com a (c) regra de Simpson. Dê uma estimativa do erro absoluto e expresse suas respostas com pelo menos quatro casas decimais.

27. $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ **28.** $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

29. No Exemplo 8, mostramos que $2n = 14$ subdivisões garantem que a aproximação de

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

pela regra de Simpson é precisa com cinco casas decimais. Confirme isso comparando a aproximação de ln 2 pela regra de Simpson com $2n = 14$ ao valor produzido diretamente de seu recurso computacional.

30. Em cada parte, determine se a aproximação trapezoidal subestima ou superestima a integral definida dada.

(a) $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ (b) $\int_{3/2}^2 \cos(x^2)\,dx$

31-32 Encontre um valor de n que garanta que o erro absoluto na aproximação da integral com a aproximação pelo ponto médio seja inferior a 10^{-4}. Dê uma estimativa do erro absoluto e expresse suas repostas com pelo menos quatro casas decimais.

31. $\int_0^2 x \operatorname{sen} x\,dx$ **32.** $\int_0^1 e^{\cos x}\,dx$

33-34 Mostre que as desigualdades (10) e (11) não têm serventia para encontrar uma cota superior para o erro absoluto que resulta de aproximar a integral dada com as aproximações tanto pelo ponto médio quanto trapezoidal.

33. $\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx$ **34.** $\int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

35-36 Use a regra de Simpson com $2n = 10$ subintervalos para aproximar o comprimento da curva. Expresse sua reposta com pelo menos quatro casas decimais.

35. $y = \cos x, -\pi/2 \le x \le \pi/2$

36. $y = 1/x, 1 \le x \le 3$

ENFOCANDO CONCEITOS

37. A figura a seguir mostra um gráfico da curva velocidade v *versus* tempo t para uma bateria de testes do automóvel Mitsubishi Galant ES. Dê uma estimativa das velocidades em $t = 0$; 2,5; 5; 7,5; 10; 12,5 e 15 s a partir do gráfico, converta pé/s usando 1 milha/h = $\frac{22}{15}$ pés/s e use essas velocidades e a regra de Simpson para aproximar o número de pés percorridos nos 15 primeiros segundos. Arredonde sua resposta até o pé mais próximo. [*Sugestão*: Distância percorrida = $\int_0^{15} v(t)\,dt$.]

Fonte: Dados da revista *Car and Driver*, November 2003.

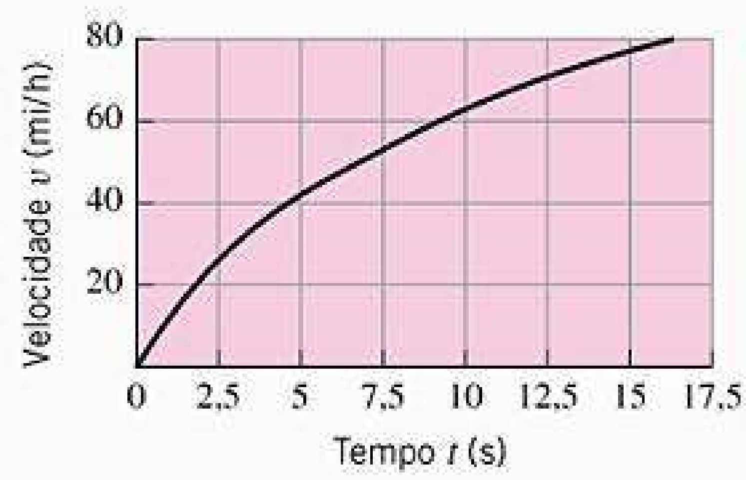


Figura Ex-37

38. Um gráfico da curva aceleração a *versus* tempo t para um objeto movendo-se em linha reta está na figura abaixo. Estime as acelerações em $t = 0, 1, 2, \ldots, 8$ s a partir do gráfico e use a regra de Simpson para aproximar a variação da velocidade de $t = 0$ a $t = 8$ s. Arredonde sua resposta até o décimo de cm/s mais próximo. [*Sugestão*: Variação na velocidade = $\int_0^8 a(t)\,dt$.]

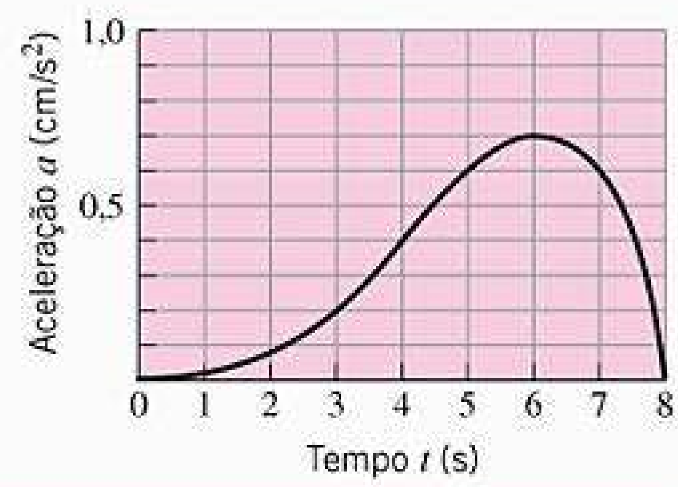


Figura Ex-38

39-42 Os métodos de integração numérica podem ser usados em problemas nos quais os valores do integrando são tão-somente dados por mensuração ou, então, determinados experimentalmente. Use a regra de Simpson para estimar o valor das integrais relevantes nestes exercícios.

39. A tabela abaixo dá as velocidades em milhas por segundo em vários instantes para um foguete de teste lançado para cima da superfície da Terra. Use esses valores para aproximar o número de milhas percorridas durante os primeiros 180 s. Arredonde sua resposta até o décimo de milha mais próximo. [*Sugestão*: Distância percorrida = $\int_0^{180} v(t)\,dt$.]

TEMPO t (s)	VELOCIDADE v (mi/s)
0	0,00
30	0,03
60	0,08
90	0,16
120	0,27
150	0,42
180	0,65

Figura Ex-39

40. A tabela abaixo mostra as velocidades de uma bala saída da boca de um rifle em várias distâncias. Use esses valores para aproximar o número de segundos para a bala percorrer 1.800 pés. Expresse sua resposta até o centésimo de segundo mais próximo. [*Sugestão*: Se v for a velocidade da bala e x a distância percorrida, então $v = dx/dt$, logo $dt/dx = 1/v$ e $t = \int_0^{1800}(1/v)\,dx$.]

DISTÂNCIA x (pés)	VELOCIDADE v (pés/s)
0	3100
300	2908
600	2725
900	2549
1200	2379
1500	2216
1800	2059

Figura Ex-40

41. As medidas de um caco de cerâmica descoberto em uma escavação arqueológica revelam que ele veio de um pote com uma base plana e secção transversal circular (ver figura abaixo). A figura mostra medidas do raio interior do caco feitas a cada 4 cm a partir da base em direção ao topo. Use esses valores para aproximar o volume interno do pote até o décimo de litro mais próximo (1 l = 1.000cm^3). [*Sugestão*: Use 7.2.3 (volume por secção transversal) para estabelecer uma integral apropriada para o volume.]

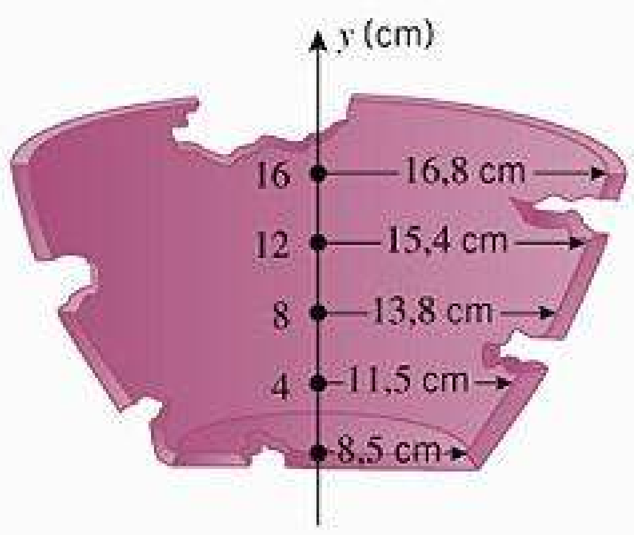


Figura Ex-41

42. Engenheiros querem construir uma estrada reta e nivelada, com 600 pés de comprimento e 75 pés de largura, fazendo um corte através de um morro (veja a figura a seguir). As alturas do morro acima da linha central da estrada proposta, obtidas de vários pontos de um mapa topográfico da região, estão na tabela que segue. Para estimar o custo da construção, eles precisam conhecer o volume de terra que deve ser removido. Aproxime esse volume, arredondando ao pé cúbico mais próximo. [*Sugestão*: Primeiro, estabeleça uma integral para a área da seção transversal do corte ao longo da linha central da estrada; depois, suponha que a altura do morro não varie entre a linha central e as margens da estrada.]

DISTÂNCIA HORIZONTAL x (pés)	ALTURA h (pés)
0	0
100	7
200	16
300	24
400	25
500	16
600	0

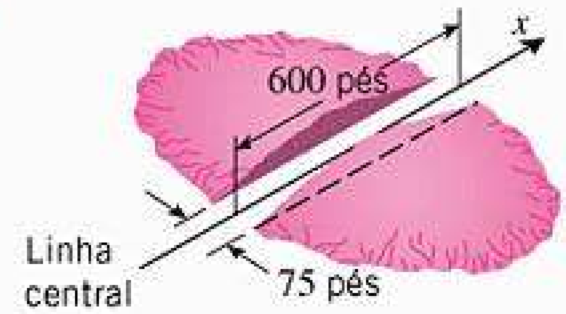


Figura Ex-42

C **43.** Seja $f(x) = \cos(x^2)$.

(a) Use um CAS para aproximar o valor máximo de $|f''(x)|$ em [0, 1].

(b) Qual é o tamanho de n na aproximação do ponto médio de $\int_0^1 f(x)\,dx$ para garantir que o erro absoluto seja menor do que 5×10^{-4}? Compare seu resultado com o obtido no Exemplo 9.

(c) Calcule a integral usando a aproximação pelo ponto médio com o valor de n obtido em (b).

C **44.** Seja $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$.

(a) Use um CAS para aproximar o valor máximo de $|f''(x)|$ em [0, 1].

(b) Qual é o tamanho de n na aproximação trapezoidal de $\int_0^1 f(x)\,dx$ para garantir que o erro absoluto seja menor do que 10^{-3}?

(c) Calcule a integral usando a aproximação trapezoidal com o valor de n obtido em (b).

C **45.** Seja $f(x) = \cos(x^2)$.

(a) Use um CAS para aproximar o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ em [0, 1].

(b) Qual é o tamanho de $2n$ na aproximação de $\int_0^1 f(x)\,dx$ pela regra de Simpson para garantir que o erro absoluto seja menor do que 10^{-4}?

(c) Calcule a integral usando a regra de Simpson com o valor de n obtido em (b).

C **46.** Seja $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$.

(a) Use um CAS para aproximar o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ em [0, 1].

(b) Qual é o tamanho de $2n$ na aproximação de $\int_0^1 f(x)\,dx$ pela regra de Simpson para garantir que o erro absoluto seja menor do que 10^{-5}?

(c) Calcule a integral usando a regra de Simpson com o valor de n obtido em (b).

ENFOCANDO CONCEITOS

47. (a) Verifique que a média das aproximações pelo extremo esquerdo e pelo extremo direito dadas na Tabela 8.7.1 dá a Fórmula (2) da aproximação trapezoidal.

(b) Suponha que f seja uma função contínua e não-negativa no intervalo $[a, b]$ e subdivida $[a, b]$ em pontos igualmente

espaçados $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Encontre a área do trapézio sob o segmento de reta que liga os pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ e acima do intervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Mostre que o lado direito da Fórmula (2) é a soma dessas áreas de trapézios (Figura 8.7.1).

48. Seja *f* uma função que é positiva, contínua, decrescente e côncava para baixo no intervalo $[a, b]$. Suponha que o intervalo $[a, b]$ esteja subdividido em n subintervalos de mesmo comprimento. Arranje as aproximações de $\int_a^b f(x)\,dx$ a seguir em ordem decrescente de valores: pelo extremo esquerdo, pelo extremo direito, pelo ponto médio e trapezoidal.

49. Suponha que $\Delta x > 0$ e que $g(x) = Ax^2 + Bx + C$. Seja m um número e defina $Y_0 = g(m - \Delta x)$, $Y_1 = g(m)$ e $Y_2 = g(m + \Delta x)$. Verifique a Fórmula (9):

$$\int_{m-\Delta x}^{m+\Delta x} g(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}[Y_0 + 4Y_1 + Y_2]$$

50. Suponha que *f* seja uma função contínua e não-negativa no intervalo $[a, b]$ e subdivida o intervalo $[a, b]$ em pontos igualmente espaçados $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = b$. Defina $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Seja $g_i(x)$ a função da forma $g_i(x) = Ax^2 + Bx + C$ que passa pelos pontos (x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}) e (x_{2i+2}, y_{2i+2}), $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Verifique que a Fórmula (6) calcula a área sob o gráfico de uma função quadrática por partes, mostrando que

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} g_i(x)\,dx\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$$

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.7

1. (a) $\frac{1}{2}(L_n + R_n)$ (b) $\left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$ **2.** $M_n < I < T_n$ **3.** (a) $\frac{1}{3}(2M_n + T_n)$ (b) $\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$ **4.** (a) $\frac{1}{2400}$ (b) $\frac{1}{1200}$ (c) $\frac{1}{1.800.000}$

5. (a) 0,307385118 (b) 0,315975361 (c) 0,309943906 (d) 0,310248532

8.8 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Até aqui concentramo-nos nas integrais definidas com integrandos contínuos e intervalos de integração finitos. Nesta seção ampliaremos o conceito de integral definida para incluir intervalos de integração infinitos e integrandos que se tornam infinitos dentro dos intervalos de integração.

■ INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Supõe-se na definição da integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que $[a, b]$ é um intervalo finito e que o limite que define a integral existe, isto é, que a função *f* é integrável. Observamos nos Teoremas 6.5.2 e 6.5.8 que funções contínuas são integráveis, bem como o são funções limitadas com um número finito de descontinuidades. Também observamos no Teorema 6.5.8 que funções não-limitadas no intervalo de integração não são integráveis. Assim, por exemplo, uma função com uma assíntota vertical dentro do intervalo de integração não seria integrável.

Nosso objetivo principal nesta seção é ampliar o conceito de uma integral definida para permitir intervalos infinitos de integração e integrandos com as assíntotas verticais dentro do intervalo de integração. Vamos chamar as assíntotas verticais de ***descontinuidades infinitas*** e as integrais com intervalos de integração infinitos ou com descontinuidades infinitas dentro do intervalo de integração de ***integrais impróprias***. Aqui estão alguns exemplos:

- Integrais impróprias com intervalos de integração infinitos:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

- Integrais impróprias com descontinuidades infinitas no intervalo de integração:

$$\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{1}^{2} \frac{dx}{x-1}, \quad \int_{0}^{\pi} \operatorname{tg} x\, dx$$

- Integrais impróprias com descontinuidades infinitas e intervalos infinitos de integração:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-9}, \quad \int_{1}^{+\infty} \sec x\, dx$$

INTEGRAIS SOBRE INTERVALOS INFINITOS

Para motivar uma definição razoável para integrais impróprias da forma

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

vamos começar com o caso em que f é contínua e não-negativa em $[a, +\infty)$; assim, podemos pensar na integral como a área abaixo da curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, +\infty)$ (Figura 8.8.1). A princípio, podemos estar inclinados a argumentar que essa área é infinita, pois a região tem uma extensão infinita. Porém, tal argumento estará baseado em uma intuição vaga, e não em uma lógica matemática precisa, uma vez que o conceito de área foi somente definido em intervalos de *extensão finita*. Dessa forma, antes de fazer qualquer afirmativa razoável sobre a área da região na Figura 8.8.1, precisamos começar por definir o que entendemos por área dessa região. Para isso, será útil focalizar um exemplo específico.

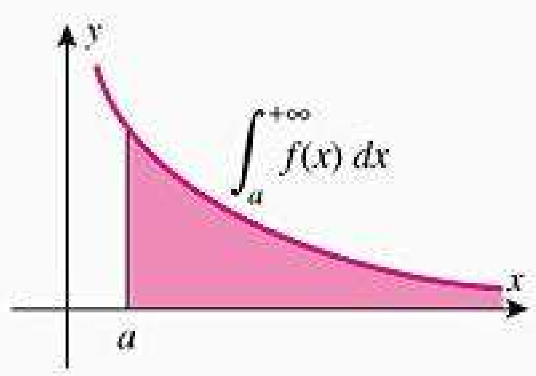


Figura 8.8.1

Vamos supor que estamos interessados na área A da região que está abaixo da curva $y = 1/x^2$ e acima do intervalo $[1, +\infty)$ do eixo x. Em vez de tentar encontrá-la toda de uma vez, vamos começar por calcular a parte dela acima do intervalo finito $[1, b]$, onde $b > 1$ é arbitrário. Essa área é

$$\int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg]_{1}^{b} = 1 - \frac{1}{b}$$

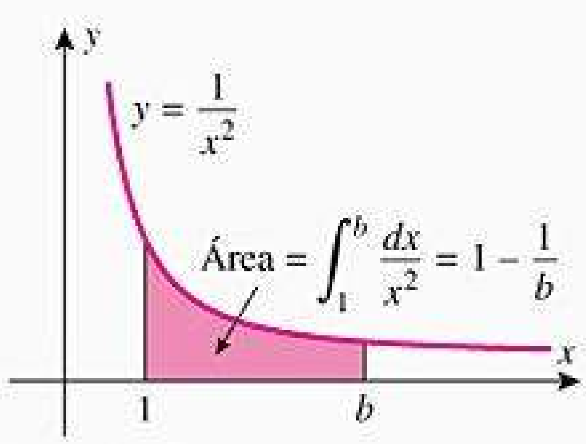


Figura 8.8.2

(Figura 8.8.2). Se permitirmos b crescer de tal forma que $b \to +\infty$, então a parte da área acima de $[1, b]$ irá começar a preencher a área sobre todo o intervalo $[1, +\infty)$ (Figura 8.8.3); logo, podemos definir razoavelmente a área A sob $y = 1/x^2$ sobre o intervalo $[1, +\infty)$ como sendo

$$A = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1 \tag{1}$$

Assim, a área tem um valor finito de 1, e não é infinita, como havíamos conjecturado inicialmente.

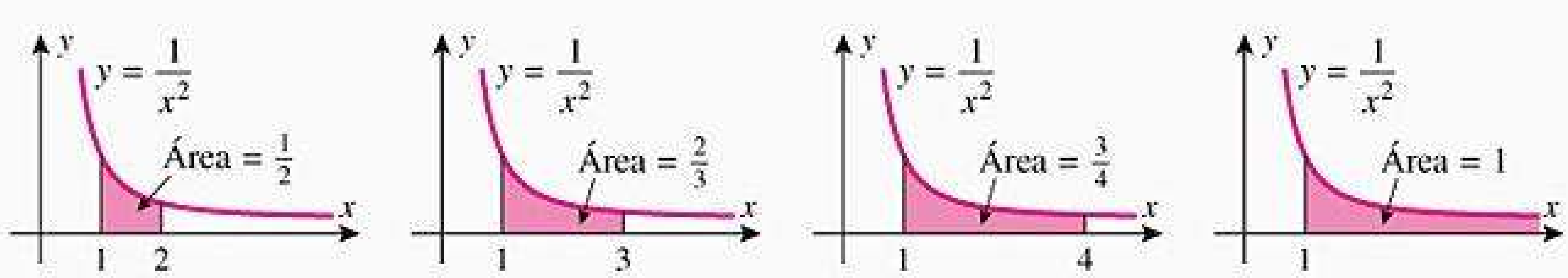


Figura 8.8.3

Tomando a discussão anterior como guia, vamos fazer a definição a seguir (que é aplicável a funções com valores tanto positivos quanto negativos).

Se f for uma função não-negativa no intervalo $[a, +\infty)$, então interpretamos a integral imprópria da Definição 8.8.1 como a área sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, +\infty)$. Se a integral convergir, então a área é finita e igual ao valor da integral; se divergir, consideramos a área como sendo infinita.

8.8.1 DEFINIÇÃO A ***integral imprópria de*** f ***no intervalo*** $[a, +\infty)$ é definida por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

No caso em que o limite existe, dizemos que a integral imprópria ***converge***, e o limite é definido como sendo o valor da integral. Caso ele não exista, dizemos que a integral imprópria ***diverge***, e não é atribuído nenhum valor.

► Exemplo 1 Calcule

$$\text{(a)} \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} \qquad \text{(b)} \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

Solução (a) Seguindo a definição, substituímos o limite superior infinito por um limite finito b, e então tomamos o limite da integral resultante. Isso fornece

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Solução (b)

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty$$

Nesse caso, a integral diverge e, portanto, não tem valor algum. ◄

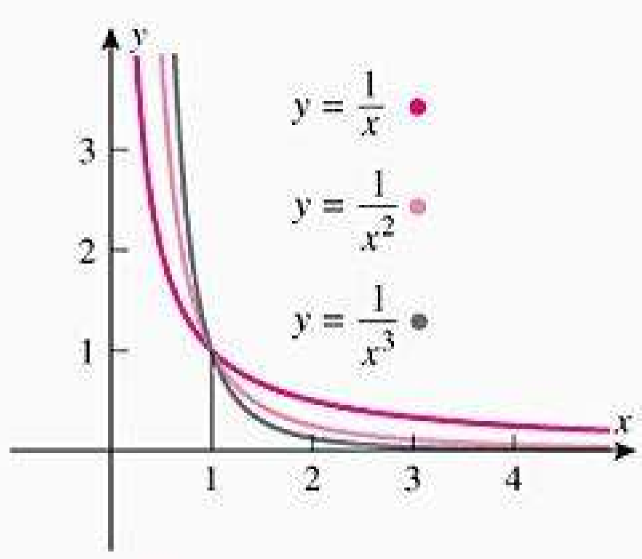


Figura 8.8.4

Como as funções $1/x^3$, $1/x^2$ e $1/x$ são não-negativas no intervalo $[1, +\infty)$, temos, a partir de (1) e do último exemplo, que sobre esse intervalo a a área sob $y = 1/x^3$ é $\frac{1}{2}$, que a área sob $y = 1/x^2$ é 1, e que a área sob $y = 1/x$ é infinita. Porém, superficialmente, os gráficos das três funções são muito parecidos (Figura 8.8.4), e não há nada que sugira por que uma das áreas seja infinita e as outras, não. Uma explicação é que $1/x^3$ e $1/x^2$ tendem a zero mais rapidamente do que $1/x$ quando $x \to +\infty$, de tal forma que a área no intervalo $[1, b]$ acumula menos rapidamente sob as curvas $y = 1/x^3$ e $y = 1/x^2$ do que sob $y = 1/x$ quando $b \to +\infty$, e a diferença é suficiente para que as duas primeiras áreas sejam finitas e a terceira, infinita.

► Exemplo 2 Para quais valores de p a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ converge?

Solução Sabemos do exemplo anterior que a integral diverge se $p = 1$; portanto, supomos que $p \neq 1$. Nesse caso, temos

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right]$$

Se $p > 1$, então o expoente $1 - p$ é negativo e $b^{1-p} \to 0$ quando $b \to +\infty$; se $p < 1$, então o expoente $1 - p$ é positivo e $b^{1-p} \to +\infty$ quando $b \to +\infty$. Assim, a integral converge se $p > 1$ e diverge em caso contrário. No caso convergente, o valor da integral é

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \left[0-\frac{1}{1-p}\right] = \frac{1}{p-1} \qquad (p > 1)$$ ◄

O seguinte teorema resume esse resultado.

8.8.2 TEOREMA

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & se \quad p > 1 \\ diverge & se \quad p \leq 1 \end{cases}$$

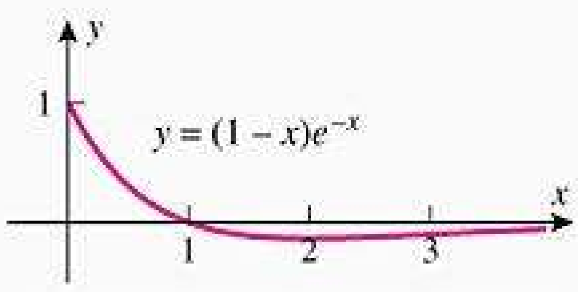
► Exemplo 3 Calcule $\int_0^{+\infty} (1-x)e^{-x}\,dx$.

Solução Integrando por partes com $u = 1 - x$ e $dv = e^{-x}\,dx$, obtemos

$$\int (1-x)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(1-x) - \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} (1-x)e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[xe^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b}$$



A área líquida com sinal entre o gráfico e o intervalo $[0, +\infty)$ é zero.

Figura 8.8.5

O limite é uma forma indeterminada do tipo ∞/∞; portanto, vamos aplicar a regra de L'Hôpital, derivando o numerador e o denominador em relação a *b*. Isso fornece

$$\int_0^{+\infty} (1-x)e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} = 0$$

Podemos interpretar isso como significando que a área líquida com sinal entre o gráfico de $y = (1-x)\,e^{-x}$ e o intervalo $[0, +\infty)$ é 0 (Figura 8.8.5). ◄

8.8.3 DEFINIÇÃO A ***integral imprópria de f no intervalo*** $(-\infty, b]$ é definida por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

Dizemos que a integral ***converge*** se o limite existir e ***diverge*** caso contrário. A ***integral imprópria de f no intervalo*** $(-\infty, +\infty)$ é definida por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (3)$$

onde c é um número real qualquer. Dizemos que a integral imprópria ***converge*** se ambas as parcelas convergirem e ***diverge*** se alguma delas divergir.

Se f for não-negativa no intervalo $(-\infty, +\infty)$, então interpretamos a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

como a área sob o gráfico de f acima do intervalo $(-\infty, +\infty)$. A área é finita e igual ao valor da integral se esta convergir, e infinita se ela divergir.

Embora seja costume escolher $c = 0$ em (3), essa escolha não é relevante, já que pode ser provado que nem a convergência nem o valor da integral são afetados pela escolha de c.

► Exemplo 4 Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solução Vamos calcular a integral escolhendo $c = 0$ em (3). Com esse valor para c, obtemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left[\text{arc tg}\, x\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\text{arc tg}\, b) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left[\text{arc tg}\, x\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (-\,\text{arc tg}\, a) = \frac{\pi}{2}$$

Assim, a integral converge e seu valor é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Uma vez que o integrando é não-negativo no intervalo $(-\infty, +\infty)$, a integral representa a área da região mostrada na Figura 8.8.6. ◀

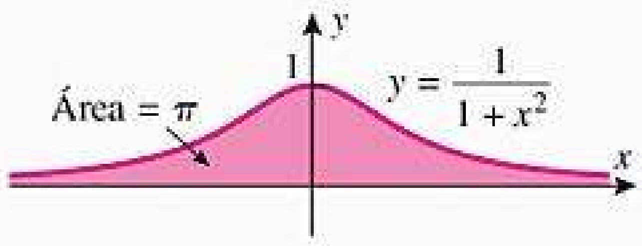


Figura 8.8.6

■ INTEGRAIS CUJOS INTEGRANDOS TÊM DESCONTINUIDADES INFINITAS

A seguir, vamos considerar integrais impróprias cujos integrandos têm descontinuidades infinitas. Vamos começar com o caso em que o intervalo de integração é um intervalo finito $[a, b]$ e a descontinuidade infinita ocorre no extemo direito.

Para motivar uma definição apropriada para tal integral, vamos considerar o caso em que f é não-negativa em $[a, b]$; dessa forma, podemos interpretar a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ como a área da região na Figura 8.8.7a. O problema de encontrar a área dessa região é complicado pelo fato de que ela se estende indefinidamente na direção positiva de y. Porém, em vez de tentar encontrar a área toda de uma só vez, podemos proceder indiretamente, calculando a parte dela acima do intervalo $[a, k]$, onde $a \le k < b$, e então fazendo k tender a b para completar a área toda da região (Figura 8.8.7b). Motivados por essa idéia, elaboramos a definição a seguir.

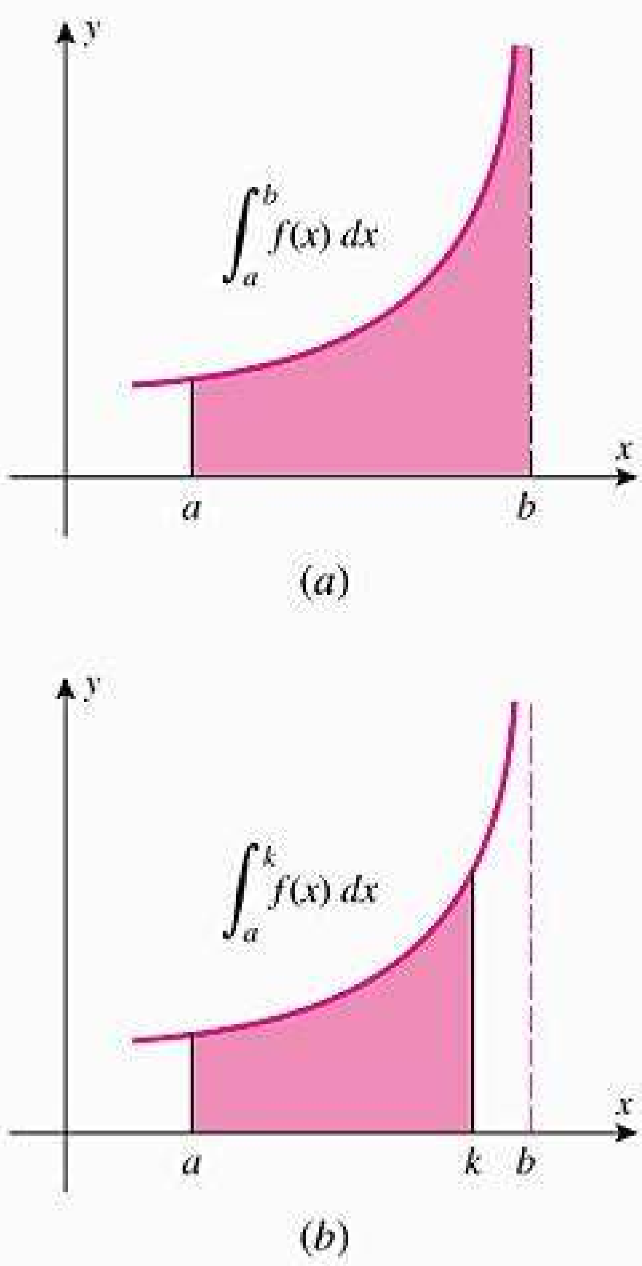


Figura 8.8.7

8.8.4 DEFINIÇÃO Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em b, então a ***integral imprópria de f no intervalo [a, b]*** é definida por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to b^-} \int_a^k f(x)\,dx \tag{4}$$

Caso o limite exista, dizemos que a integral imprópria ***converge***, e o limite é definido como sendo o valor da integral. Caso o limite não exista, dizemos que a integral imprópria ***diverge***, e não é atribuído nenhum valor.

▶ Exemplo 5 Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solução A integral é imprópria, pois o integrando tende a $+\infty$ quando x tende para o limite superior 1 pela esquerda. A partir de (4),

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{k \to 1^-} \int_0^k \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{k \to 1^-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^k$$
$$= \lim_{k \to 1^-} [-2\sqrt{1-k} + 2] = 2 \quad ◀$$

As integrais impróprias com uma descontinuidade infinita no extremo esquerdo ou dentro do intervalo de integração são definidas como segue.

8.8.5 DEFINIÇÃO Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em a, então a ***integral imprópria de f no intervalo [a, b]*** é definida por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to a^+} \int_k^b f(x)\,dx \tag{5}$$

Dizemos que a integral ***converge*** se o limite existir e ***diverge*** caso contrário. Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em um ponto c em (a, b),

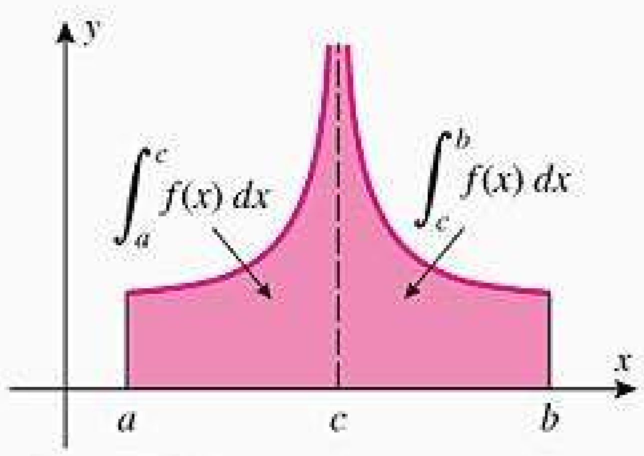


Figura 8.8.8

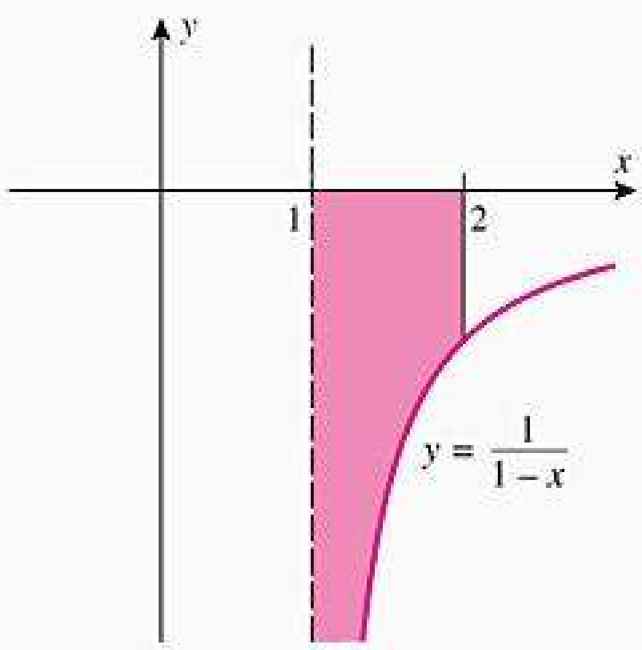


Figura 8.8.9

então a ***integral imprópria de f no intervalo [a, b]*** é definida por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{6}$$

Dizemos que a integral imprópria ***converge*** se ambas as parcelas convergirem e ***diverge*** se alguma delas divergir (Figura 8.8.8).

► Exemplo 6 Calcule

$$\text{(a)}\ \int_1^2 \frac{dx}{1-x} \qquad \text{(b)}\ \int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} \qquad \text{(c)}\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

Solução (a) A integral é imprópria porque o integrando tende a $-\infty$ quando x tende ao limite inferior 1 pela direita (Figura 8.8.9). A partir da Definição 8.8.5, obtemos

$$\int_1^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{k\to 1^+} \int_k^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{k\to 1^+} \Big[-\ln|1-x|\Big]_k^2$$
$$= \lim_{k\to 1^+} \Big[-\ln|-1| + \ln|1-k|\Big] = \lim_{k\to 1^+} \ln|1-k| = -\infty$$

Assim, a integral diverge.

Solução (b) A integral é imprópria porque o integrando tende a $+\infty$ no ponto $x = 2$, que está dentro do intervalo de integração. A partir da Definição 8.8.5, obtemos

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} + \int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} \tag{7}$$

Mas

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{k\to 2^-} \int_1^k \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{k\to 2^-} [3(k-2)^{1/3} - 3(1-2)^{1/3}] = 3$$
$$\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{k\to 2^+} \int_k^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = \lim_{k\to 2^+} [3(4-2)^{1/3} - 3(k-2)^{1/3}] = 3\sqrt[3]{2}$$

Assim, a partir de (7),

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

Solução (c) Essa integral é imprópria por duas razões – o intervalo de integração é infinito e há uma descontinuidade infinita em $x = 0$. Para calcular essa integral, vamos dividir o intervalo de integração em um ponto conveniente, digamos $x = 1$, e escrever

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

O integrando nessas duas integrais impróprias não acerta nenhuma fórmula na Tabela de Integrais das Capas, mas o radical sugere a substituição $x = u^2$, $dx = 2u\,du$, da qual obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int \frac{2u\,du}{u(u^2+1)} = 2\int \frac{du}{u^2+1}$$
$$= 2\,\text{arc tg}\,u + C = 2\,\text{arc tg}\,\sqrt{x} + C$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = 2\lim_{k\to 0^+} \Big[\text{arc tg}\,\sqrt{x}\Big]_k^1 + 2\lim_{k\to +\infty} \Big[\text{arc tg}\,\sqrt{x}\Big]_1^k$$
$$= 2\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] + 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \pi \ ◄$$

ADVERTÊNCIA

Às vezes, é tentador aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo diretamente a uma integral imprópria, sem tomar os limites apropriados. Para ilustrar o que pode acontecer de errado com esse procedimento, suponha que ignoremos o fato de que a integral

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \tag{8}$$

é imprópria e incorretamente a calculemos como

$$-\frac{1}{x-1}\bigg]_0^2 = -1 - (1) = -2$$

Esse resultado é evidentemente incorreto, pois o integrando nunca é negativo e, por conseqüência, a integral não poderia ser negativa! Para calcular (8) corretamente, deveríamos primeiro escrever

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

e, então, tratar cada parcela como uma integral imprópria. Na primeira parcela, vemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{k\to 1^-} \int_0^k \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{k\to 1^-} \left[-\frac{1}{k-1} - 1\right] = +\infty$$

de modo que (8) diverge.

COMPRIMENTO DE ARCO E ÁREA DE SUPERFÍCIE USANDO INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Nas Definições 7.4.2 e 7.5.2 para o comprimento de arco e a área de superfície, exigiu-se que a função f fosse lisa (derivada primeira contínua) para garantir a integrabilidade na fórmula resultante. Porém, essa exigência é muito restritiva, uma vez que algumas das fórmulas mais básicas em Geometria envolvem funções que não são lisas, mas que levam a integrais impróprias convergentes. Assim, vamos ampliar a definição de comprimento de arco e de área de superfície para permitir funções que não sejam lisas, mas para as quais a integral resultante na fórmula convirja.

► Exemplo 7 Deduza a fórmula para a circunferência de um círculo de raio r.

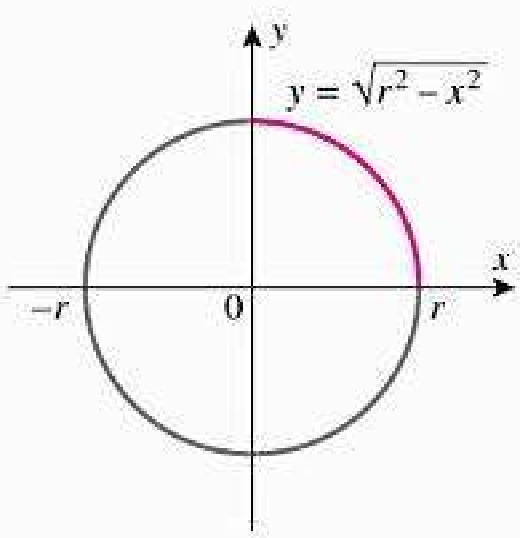


Figura 8.8.10

Solução Por conveniência, vamos supor que o círculo esteja centrado na origem; nesse caso, sua equação será $x^2 + y^2 = r^2$. Encontraremos o comprimento de arco da parte do círculo que está no primeiro quadrante e, então, vamos multiplicá-lo por 4 para obter a circunferência total (Figura 8.8.10).

Como a equação do semicírculo superior é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, temos, a partir da Fórmula (4) da Seção 7.4, que a circunferência C é

$$C = 4\int_0^r \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx = 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx$$
$$= 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Essa integral é imprópria por causa da descontinuidade infinita em $x = r$, de modo que a calculamos escrevendo

$$C = 4r \lim_{k\to r^-} \int_0^k \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$
$$= 4r \lim_{k\to r^-} \left[\text{arc sen}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^k$$

Fórmula (77) da Tabela de Integrais das Capas

$$= 4r \lim_{k\to r^-} \left[\text{arc sen}\left(\frac{k}{r}\right) - \text{arc sen } 0\right]$$
$$= 4r[\text{arc sen } 1 - \text{arc sen } 0] = 4r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi r \quad ◄$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.8 (*Ver página 580 para respostas.*)

1. Em cada parte, determine se a integral é imprópria e, caso positivo, dê a razão disso. Não calcule as integrais.

(a) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{cotg} x\, dx$ (b) $\int_{\pi/4}^{\pi} \operatorname{cotg} x\, dx$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ (d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\, dx$

(e) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$

2. Expresse cada integral imprópria do Exercício 1 em termos de um ou mais limites apropriados. Não calcule os limites.

3. A integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} x^{-p}\, dx$$

converge a __________ desde que __________.

4. Calcule as integrais que convergem.

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ (b) $\int_0^{+\infty} e^{x}\, dx$

(c) $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\, dx$ (d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

EXERCÍCIOS 8.8 Recurso Gráfico C CAS

1. Em cada parte, determine se a integral é imprópria e, se for, explique por quê.

(a) $\int_1^5 \frac{dx}{x-3}$ (b) $\int_1^5 \frac{dx}{x+3}$ (c) $\int_0^1 \ln x\, dx$

(d) $\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx$ (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ (f) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$

2. Em cada parte, determine todos os valores de p para os quais a integral é imprópria.

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ (b) $\int_1^2 \frac{dx}{x-p}$ (c) $\int_0^1 e^{-px}\, dx$

3-30 Calcule as integrais que convirjam.

3. $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx$

4. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$

5. $\int_3^{+\infty} \frac{2}{x^2-1}\, dx$

6. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$

7. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x}\, dx$

8. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$

9. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$

10. $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{x^2+9}$

11. $\int_{-\infty}^0 e^{3x}\, dx$

12. $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x\, dx}{3-2e^x}$

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx$

14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\, dx$

15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2}\, dx$

16. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\, dt$

17. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2}$

18. $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

19. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx$

20. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

21. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22. $\int_{-3}^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{9-x^2}}$

23. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-2\cos x}}\, dx$

24. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{1-\operatorname{tg} x}\, dx$

25. $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$

26. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2}$

27. $\int_{-1}^8 x^{-1/3}\, dx$

28. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

29. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

30. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

31-34 Faça a substituição u e calcule a integral definida resultante.

31. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx;\ u=\sqrt{x}$ [*Nota*: $u \to +\infty$ quando $x \to +\infty$]

32. $\int_{12}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)};\ u=\sqrt{x}$

33. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}\, dx;\ u=1-e^{-x}$
[*Nota*: $u \to 1$ quando $x \to +\infty$]

34. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx;\ u=e^{-x}$

35-36 Expresse a integral imprópria como um limite e, então, calcule esse limite com um CAS. Confirme sua resposta calculando diretamente as integrais com um CAS.

C 35. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x\, dx$

C 36. $\int_0^{+\infty} xe^{-3x}\, dx$

C 37. Em cada item, tente calcular exatamente a integral com um CAS. Se sua resposta não for numericamente simples, então use o CAS para encontrar uma aproximação numérica da integral.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^8+x+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$

C 38. Em cada item, confirme o resultado com um CAS.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$

39. Encontre o comprimento de arco da curva $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ acima do intervalo [0, 8].

40. Encontre o comprimento de arco da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ acima do intervalo [0, 2].

41-42 Use a regra de L'Hôpital para ajudar a calcular a integral imprópria.

41. $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\,dx$ **42.** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

43. Encontre a área da região entre o eixo x e a curva $y = e^{-3x}$ para $x \geq 0$.

44. Encontre a área da região entre o eixo x e a curva $y = 8/(x^2 - 4)$ para $x \geq 4$.

45. Suponha que a região entre o eixo x e a curva $y = e^{-x}$ para $x \geq 0$ gire em torno do eixo x.

(a) Encontre o volume do sólido que é gerado.

(b) Encontre a área da superfície do sólido.

ENFOCANDO CONCEITOS

46. Suponha que f e g sejam funções contínuas e que

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

se $x \geq a$. Dê um argumento informal razoável, usando áreas, para explicar por que os seguintes resultados são verdadeiros.

(a) Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

(b) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

[*Nota*: Os resultados neste exercício são, às vezes, chamados de ***testes de comparação*** para integrais impróprias.]

47-50 Use os resultados do Exercício 46.

47. (a) Confirme gráfica e algebricamente que

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \ (x \geq 1)$$

(b) Calcule a integral

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

(c) O que o resultado obtido em (b) diz sobre a integral

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx?$$

48. (a) Confirme gráfica e algebricamente que

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{e^x}{2x+1} \quad (x \geq 0)$$

(b) Calcule a integral

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x+1}$$

(c) O que o resultado obtido em (b) diz sobre a integral

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{2x+1}\,dx?$$

49. Seja R a região à direita de $x = 1$ que é limitada pelo eixo x e pela curva $y = 1/x$. Quando essa região gira em torno do eixo x, ela gera um sólido cuja superfície é conhecida como ***corneta de Gabriel*** (por razões que devem ficar claras na figura abaixo). Mostre que o sólido tem um volume finito, mas que sua superfície tem uma área infinita. [*Nota*: Foi sugerido que se alguém pudesse saturar o interior do sólido com tinta e permitir que permeasse para a superfície, então poderíamos pintar uma superfície infinita com uma quantidade finita de tinta! O que você acha?]

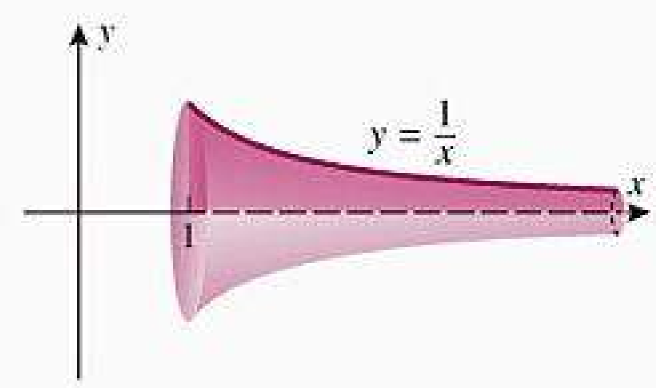


Figura Ex-49

50. Em cada parte, use o Exercício 46 para determinar se a integral converge ou diverge. Se convergir, então use a parte (b) daquele exercício para encontrar uma cota superior para o valor da integral.

(a) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{x^5+1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{xe^x}{2x+1}\,dx$

ENFOCANDO CONCEITOS

51. Esboce a região cuja área é

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

e use seu esboço para mostrar que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-y}{y}}\,dy$$

52. (a) Dê um argumento informal razoável, baseado em áreas, que explique por que as integrais

$$\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx \quad \text{e} \quad \int_{0}^{+\infty} \cos x\,dx$$

divergem.

(b) Mostre que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge.

53. Em teoria eletromagnética, o potencial magnético em um ponto no eixo de uma bobina circular é dado por

$$u = \frac{2\pi NIr}{k}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

onde N, I, r, k e a são constantes. Encontre u.

C **54.** A *velocidade média* $\bar{v}$ das moléculas de um gás ideal é dada por

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

e a *raiz média quadrada da velocidade* v_{rms}, por

$$v_{rms}^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} v^4 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

onde v é a velocidade da molécula, T é a temperatura do gás, M é o peso molecular do gás e R é a constante do gás.

(a) Use um CAS para mostrar que

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{1}{2a^4}, \quad a > 0$$

e esse resultado para mostrar que $\bar{v} = \sqrt{8RT/(\pi M)}$.

(b) Use um CAS para mostrar que

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^5}, \quad a > 0$$

e esse resultado para mostrar que $v_{rms} = \sqrt{3RT/M}$.

55. No Exercício 23 da Seção 7.7, determinamos o trabalho necessário para levar um satélite de 6.000 libras para uma posição orbital, que está 1.000 milhas acima da superfície da Terra. As idéias discutidas naquele exercício serão necessárias aqui.

(a) Encontre uma integral definida que represente o trabalho necessário para levar um satélite de 6.000 libras para uma posição b milhas acima da superfície da Terra.

(b) Encontre uma integral definida que represente o trabalho necessário para levar um satélite de 6.000 libras para uma distância "infinita" acima da superfície da Terra. Calcule a integral. [*Nota*: O resultado obtido aqui é, às vezes, chamado de trabalho necessário para "escapar" da gravidade da Terra.]

56-57 Uma ***transformada*** é uma fórmula que converte ou "transforma" uma função em outra. As transformadas são usadas em aplicações para converter um problema difícil em um mais fácil, cuja solução pode ser usada para resolver o problema original difícil. A ***transformada de Laplace*** de uma função $f(t)$, que desempenha um papel importante no estudo das equações diferenciais, é denotada por $\mathscr{L}\{f(t)\}$ e definida por

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Nessa fórmula, s é tratada como uma constante no processo de integração; assim, a transformada de Laplace tem o efeito de transformar $f(t)$ em uma função de s. Use essa fórmula nestes exercícios.

56. Mostre que

(a) $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s},\ s > 0$ (b) $\mathscr{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2},\ s > 2$

(c) $\mathscr{L}\{\text{sen}\, t\} = \frac{1}{s^2+1},\ s > 0$

(d) $\mathscr{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1},\ s > 0$

57. Em cada parte, encontre a transformada de Laplace.

(a) $f(t) = t, s > 0$ (b) $f(t) = t^2, s > 0$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases},\ s > 0$

C **58.** Mais adiante no livro, no Volume 2, mostraremos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Confirme que isso é razoável usando um CAS ou uma calculadora com capacidade de integração numérica.

59. Use o resultado do Exercício 58 para mostrar que

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx = 1,\ \sigma > 0$

60-61 Uma integral imprópria convergente em um intervalo infinito pode ser aproximada, primeiro, substituindo-se o(s) limite(s) infinito(s) de integração por limite(s) finito(s) e, então, usando uma técnica de integração numérica, tal como a regra de Simpson, para aproximar a integral com limite(s) finito(s). Essa técnica está ilustrada nestes exercícios.

60. Suponha que a integral no Exercício 58 foi aproximada escrevendo-a primeiro como

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^K e^{-x^2}\,dx + \int_K^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

e, então, abandonando o segundo termo e aplicando a regra de Simpson à integral

$$\int_0^K e^{-x^2}\,dx$$

A aproximação resultante tem duas fontes de erro: o erro da regra de Simpson e o erro

$$E = \int_K^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

que resulta de descartar o segundo termo. Chamamos E de ***erro de truncamento***.

(a) Aproxime a integral no Exercício 58 aplicando a regra de Simpson, com $2n = 10$ subdivisões à integral

$$\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$$

Arredonde sua resposta para quatro casas decimais e compare a $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ arredondado para quatro casas decimais.

(b) Use o resultado obtido no Exercício 46 e o fato de que $e^{-x^2} \leq \frac{1}{3}xe^{-x^2}$ para $x \geq 3$ para mostrar que o erro de truncamento na aproximação de (a) satisfaz $0 < E < 2{,}1 \times 10^{-5}$.

61. (a) Pode-se mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

Aproxime essa integral aplicando a regra de Simpson, com $2n = 20$ subdivisões à integral

$$\int_0^{4} \frac{1}{x^6+1}\,dx$$

Arredonde sua resposta para três casas decimais e compare-a com $\pi/3$ arredondado para três casas decimais.

(b) Use o resultado obtido no Exercício 46 e o fato de que $1/(x^6+1) < 1/x^6$ para $x \geq 4$ para mostrar que o erro de truncamento na aproximação em (a) satisfaz $0 < E < 2 \times 10^{-4}$.

62. Para quais valores de p a integral $\int_0^{+\infty} e^{px}\,dx$ converge?

63. Mostre que $\int_0^{1} dx/x^p$ converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$.

C **64.** É possível, às vezes, converter uma integral imprópria em uma integral "própria" com o mesmo valor, através de uma substituição apropriada. Calcule a integral a seguir, fazendo a substituição indicada, e investigue o que acontece se calcularmos a integral diretamente, usando um CAS.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx;\ u = \sqrt{1-x}$$

65-66 Transforme a integral imprópria dada em uma integral própria fazendo a substituição u dada e, então, aproxime a integral própria pela regra de Simpson com $2n = 10$ subdivisões. Arredonde sua resposta para três casas decimais.

65. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx;\ u = \sqrt{x}$

66. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}}\,dx;\ u = \sqrt{1-x}$

67. A ***função gama***, $\Gamma(x)$, é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Pode-se mostrar que essa integral imprópria converge se, e somente se, $x > 0$.

(a) Encontre $\Gamma(1)$.

(b) Prove: $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ para todo $x > 0$. [*Sugestão*: Use integração por partes.]

(c) Use os resultados de (a) e (b) para encontrar $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$ e $\Gamma(4)$; depois, faça uma conjectura sobre $\Gamma(n)$ para valores inteiros positivos de n.

(d) Mostre que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. [*Sugestão*: Ver Exercício 58.]

(e) Use os resultados obtidos em (b) e (d) para mostrar que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

68. Dada a função gama definida no Exercício 67, use-a para mostrar que

(a) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n\Gamma(n+1),\quad n > 0$

[*Sugestão*: Tome $t = -\ln x$.]

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right),\quad n > 0$

[*Sugestão*: Tome $t = x^n$. Use o resultado do Exercício 67 (b).]

69. Um ***pêndulo simples*** consiste em uma massa que oscila em um plano vertical no extremo de uma haste sem massa com comprimento L, conforme a Figura Ex-69. Suponha que um pêndulo simples seja deslocado de um ângulo θ_0 e solto a partir do repouso. Pode-se mostrar que, na ausência de atrito, o tempo T necessário para o pêndulo fazer uma oscilação completa, chamado de ***período***, é dado por

$$T = \sqrt{\frac{8L}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta \qquad (1)$$

onde $\theta = \theta(t)$ é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical no instante t. A integral imprópria em (1) é difícil de ser calculada numericamente. Usando a substituição sugerida abaixo, pode-se mostrar que o período pode ser expresso como

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}}\,d\phi \qquad (2)$$

onde $k = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$. A integral em (2) é chamada de ***integral elíptica completa de primeira espécie*** e é mais facilmente calculada por métodos numéricos.

(a) Obtenha (2) a partir de (1) substituindo

$$\cos\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$$
$$\cos\theta_0 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta_0/2)$$
$$k = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$$

e, então, fazendo a mudança de variável

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta_0/2)} = \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{k}$$

(b) Use (2) e a capacidade de integração numérica de seu CAS para encontrar o período de um pêndulo simples para o qual $L = 1{,}5$ pés, $\theta = 20°$ e $g = 32$ pés/s^2.

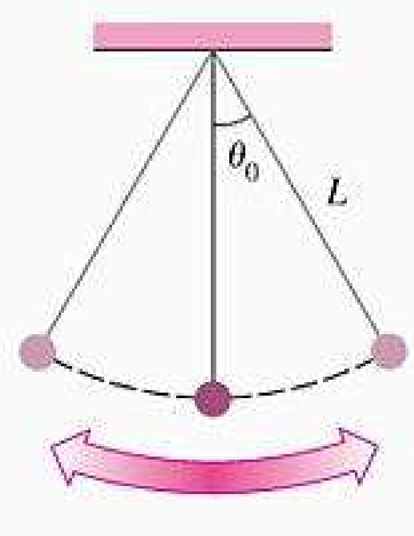


Figura Ex-69

✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.8

1. (a) própria (b) imprópria, pois cotg x tem uma descontinuidade infinita em $x = \pi$ (c) imprópria, porque o intervalo de integração é infinito (d) imprópria, porque o intervalo de integração é infinito e o integrando tem uma descontinuidade infinita em $x = 1$ (e) própria

2. (b) $\lim\limits_{b\to\pi^-}\int_{\pi/4}^{b} \operatorname{cotg} x\,dx$ (c) $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+1}\,dx$ (d) $\lim\limits_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x^2+1}\,dx$

3. $\frac{1}{p-1}$; $p > 1$ **4.** (a) 1 (b) diverge (c) diverge (d) 3

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO

1-6 Calcule a integral com a ajuda de uma substituição u apropriada.

1. $\int \sqrt{4+9x}\,dx$ **2.** $\int \frac{1}{\sec \pi x}\,dx$

3. $\int \sqrt{\cos x}\,\operatorname{sen} x\,dx$ **4.** $\int \frac{dx}{x \ln x}$

5. $\int x\,\operatorname{tg}^2(x^2)\sec^2(x^2)\,dx$ **6.** $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{x+9}\,dx$

7. (a) Calcule a integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$$

de três maneiras: usando a substituição $u = \sqrt{x}$, usando a substituição $u = \sqrt{2-x}$ e completando o quadrado.

(b) Mostre que as respostas de (a) são equivalentes.

8. Calcule a integral $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ usando

(a) integração por partes.

(b) a substituição $u = \sqrt{x^2+1}$.

9-12 Use integração por partes para calcular a integral.

9. $\int xe^{-x}\,dx$ **10.** $\int x\,\operatorname{sen} 2x\,dx$

11. $\int \ln(2x+3)\,dx$ **12.** $\int_0^{1/2} \operatorname{arc\,tg}(2x)\,dx$

13. Calcule $\int 8x^4 \cos 2x\,dx$ usando integração por partes tabulada.

14. Uma partícula move-se ao longo do eixo x com função velocidade $v(t) = t^2e^{-t}$. Qual é a distância percorrida por ela do instante $t = 0$ até o instante $t = 5$?

15-20 Calcule a integral.

15. $\int \operatorname{sen}^2 5\theta\,d\theta$ **16.** $\int \operatorname{sen}^3 2x \cos^2 2x\,dx$

17. $\int \operatorname{sen} x \cos 2x\,dx$ **18.** $\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2x \cos 4x\,dx$

19. $\int \operatorname{sen}^4 2x\,dx$ **20.** $\int x\cos^5(x^2)\,dx$

21-26 Calcule a integral efetuando uma substituição trigonométrica apropriada.

21. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ **22.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **24.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$

25. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$ **26.** $\int \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}\,dx$

27-32 Calcule a integral usando o método das frações parciais.

27. $\int \frac{dx}{x^2+3x-4}$ **28.** $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$

29. $\int \frac{x^2+2}{x+2}\,dx$ **30.** $\int \frac{x^2+x-16}{(x-1)(x-3)^2}\,dx$

31. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$ **32.** $\int \frac{dx}{x^3+x}$

33. Considere a integral $\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$.

(a) Calcule a integral usando a substituição $x = \sec\theta$. Para quais valores de x é válida sua resposta?

(b) Calcule a integral usando a substituição $x = \operatorname{sen}\theta$. Para quais valores de x é válida sua resposta?

(c) Calcule a integral usando o método das frações parciais. Para quais valores de x é válida sua resposta?

34. Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = (x-3)/(x^3+x^2)$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.

35-40 Calcule a integral usando a Tabela de Integrais no verso da capa.

35. $\int \operatorname{sen} 7x \cos 9x\,dx$ **36.** $\int (x^3-x^2)e^{-x}\,dx$

37. $\int x\sqrt{x-x^2}\,dx$ **38.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x+3}}$

39. $\int \operatorname{tg}^2 2x\,dx$ **40.** $\int \frac{3x-1}{2+x^2}\,dx$

41-42 Use $n = 10$ subintervalos para aproximar a integral com as aproximações (a) pelo ponto médio e (b) trapezoidal e use $2n = 10$ subintervalos para aproximar a integral com a (c) regra de Simpson. Em cada caso, encontre o valor exato da integral e aproxime o erro absoluto. Expresse suas respostas com pelo menos quatro casas decimais.

41. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$

42. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}\,dx$

43-44 Use as desigualdades (10), (11) e (12) da Seção 8.7 para encontrar cotas superiores para os erros nas partes (a), (b) e (c) dos exercícios indicados.

43. Exercício 41.

44. Exercício 42.

45-46 Use as desigualdades (10), (11) e (12) da Seção 8.7 para encontrar um número n de subintervalos com as aproximações (a) pelo ponto médio e (b) trapezoidal que garanta que o erro absoluto seja menor que o valor dado. Também encontre um número $2n$ de subintervalos que garanta que o erro absoluto na aproximação pela (c) regra de Simpson seja menor que o valor dado.

45. Exercício 41; 5×10^{-4}

46. Exercício 42; 10^{-6}

47-50 Calcule a integral se for convergente.

47. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

48. $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2+4}$

49. $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

50. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x-1}\,dx$

51. Encontre a área da região que é delimitada pelo eixo x e a curva $y = (\ln x - 1)/x^2$ para $x \geq e$.

52. Encontre o volume do sólido que é gerado quando a região entre a curva $y = e^{-x}$ para $x \geq 0$ e o eixo x gira em torno do eixo y.

53. Encontre um valor positivo de a que satisfaça a equação

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = 1$$

54. Considere os seguintes métodos de calcular integrais: substituição u, integração por partes, frações parciais, fórmulas de redução e substituições trigonométricas. Em cada parte, dê a abordagem que você tentaria em primeiro lugar para calcular a integral. Se nenhuma delas parecer apropriada, então diga isso. Não é preciso calcular a integral.

(a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \cos x \operatorname{sen} x\,dx$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{(x+1)^3}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$

(h) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$

55-74 Calcule a integral.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{(3+x^2)^{3/2}}$

56. $\displaystyle\int x \cos 3x\,dx$

57. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^7 \theta\,d\theta$

58. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta - 6\operatorname{sen}\theta + 12}\,d\theta$

59. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x\,dx$

60. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$

61. $\displaystyle\int e^{2x} \cos 3x\,dx$

62. $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1-2x^2)^{3/2}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

64. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{(4-9x^2)^2}$

65. $\displaystyle\int_4^8 \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

67. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$

69. $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{arc\,sen} x\,dx$

70. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 4x \sec^4 4x\,dx$

71. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\operatorname{tg}^3\theta - \operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$

73. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

74. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}, \quad a, b > 0$

EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Como engenheiro-chefe de uma grande ferrovia, é necessário que o leitor analise os custos de cortar montanhas e construir túneis para projetar o leito de uma nova ferrovia entre duas cidades em expansão. Para aprender mais sobre a Matemática necessária para poder proceder a essa análise e para aplicar a Matemática aprendida neste capítulo, visite a página

www.bookman.com.br

a p ê n d i c e A

REVISÃO DE TRIGONOMETRIA

FUNÇÕES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

■ ÂNGULOS

Os ângulos em um plano podem ser gerados pela rotação de um raio (semi-reta) em torno de sua extremidade. A posição inicial do raio é denominada ***lado inicial*** do ângulo, a posição final é chamada de ***lado final*** do ângulo e o ponto onde se cruzam os lados inicial e final é o ***vértice*** do ângulo. Vamos admitir a possibilidade de que o raio possa fazer mais de uma revolução completa. Os ângulos são considerados ***positivos*** se gerados no sentido anti-horário e ***negativos*** se gerados no sentido horário (Figura A.1).

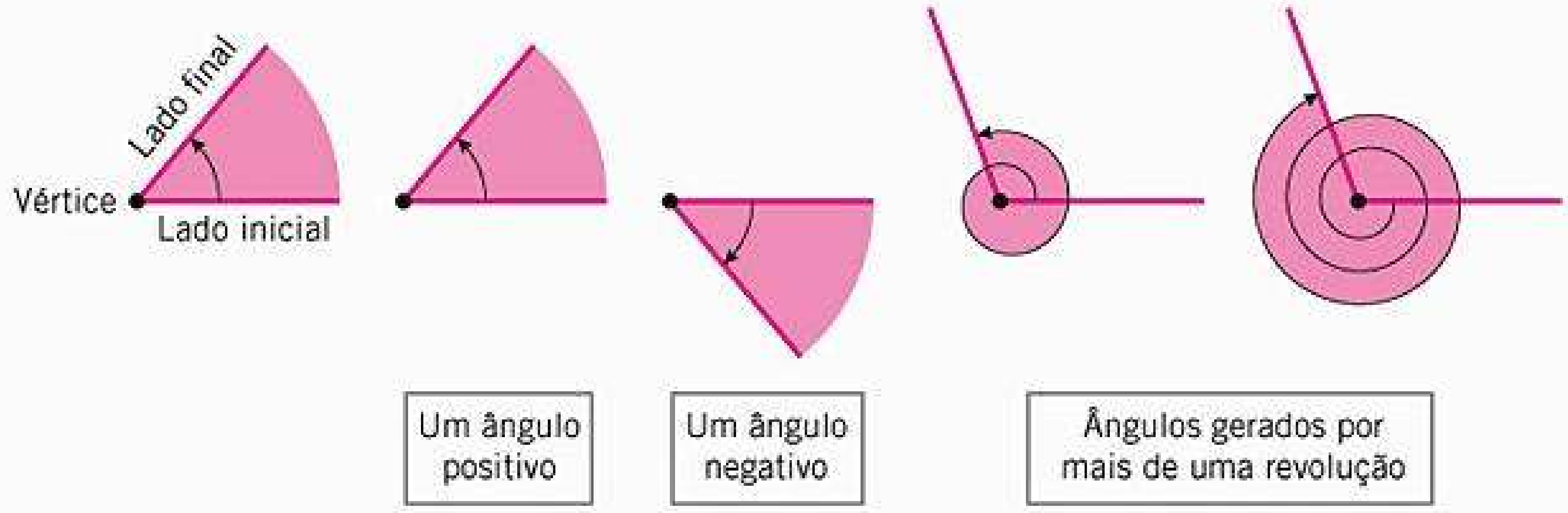


Figura A.1

Existem dois sistemas padrão de medida para descrever o tamanho de um ângulo: ***medida em graus*** e ***medida em radianos***. Na medida em graus, 1 grau (escreve-se 1°) é a medida de um ângulo gerado por 1/360 de uma revolução. Assim, há 360° em um ângulo de uma revolução, 180° em um ângulo de meia revolução, 90° em um ângulo de 1/4 de revolução (*ângulo reto*), e assim por diante. Os graus são divididos em 60 partes iguais, denominadas ***minutos***, e os minutos são divididos em 60 partes iguais, denominadas ***segundos***. Assim, 1 minuto (escreve-se 1′) é 1/60 de um grau, e 1 segundo (escreve-se 1″) é 1/60 de um minuto. As subdivisões menores de um grau são expressas como frações de segundo.

Na medida em radianos, os ângulos são medidos pelo comprimento do arco que eles subentendem sobre um círculo de raio 1 quando o vértice está no centro. Uma unidade de arco sobre um círculo de raio 1 é denominada ***radiano*** (escreve-se 1 rad) (Figura A.2) e, portanto, a circunferência inteira de um círculo de raio 1 tem 2π radianos. Segue que um ângulo de 360° subentende um arco de 2π radianos, um ângulo de 180° subentende um arco de π radianos, um ângulo de 90° subentende um arco de $\pi/2$ radianos, e assim por diante. A Figura A.3 e a Tabela 1 mostram a relação entre as medidas em graus e em radianos para alguns ângulos positivos importantes.

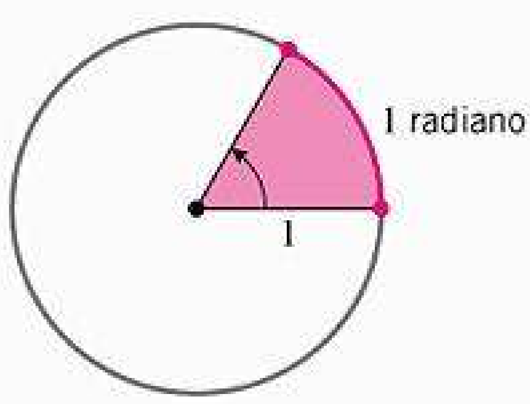


Figura A.2

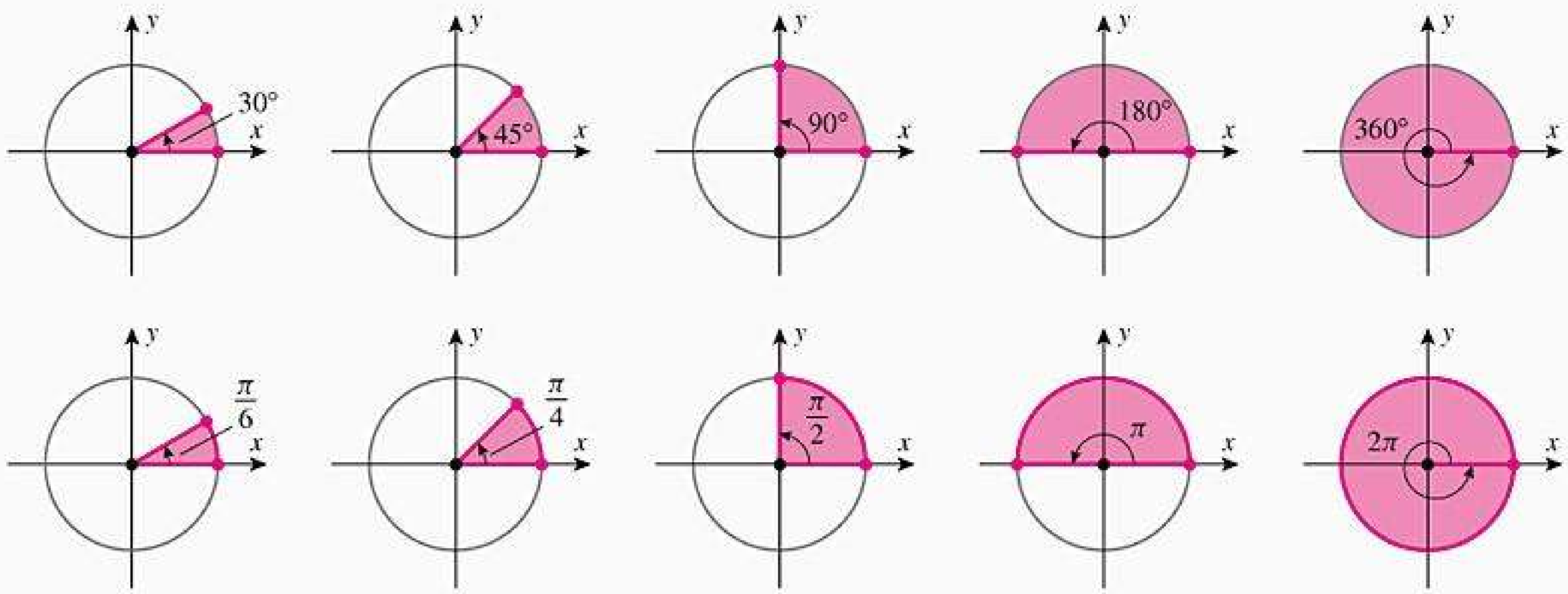


Figura A.3

Note que, na Tabela 1, os ângulos em graus são designados pelo símbolo de grau, mas os ângulos em radianos não têm unidades especificadas. Isso é uma prática padrão – deve-se entender que as unidades são radianos quando não houver unidade especificada para um ângulo.

Tabela 1

Graus	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianos	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

A partir do fato de que π radianos correspondem a 180°, obtemos as fórmulas a seguir, que são úteis para converter graus em radianos e vice-versa.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx 0{,}01745 \text{ rad} \tag{1}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 44{,}8'' \tag{2}$$

► Exemplo 1

(a) Expresse 146° em radianos (b) Expresse 3 radianos em graus

Solução (a) A partir de (1), os graus podem ser convertidos em radianos multiplicando-se por um fator de conversão de $\pi/180$. Assim,

$$146^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \cdot 146\right) \text{rad} = \frac{73\pi}{90} \text{ rad} \approx 2{,}5482 \text{ rad}$$

Solução (b) De (2), radianos podem ser convertidos em graus multiplicando-se por um fator de conversão de $180/\pi$. Assim,

$$3 \text{ rad} = \left(3 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{540}{\pi}\right)^\circ \approx 171{,}9^\circ \blacktriangleleft$$

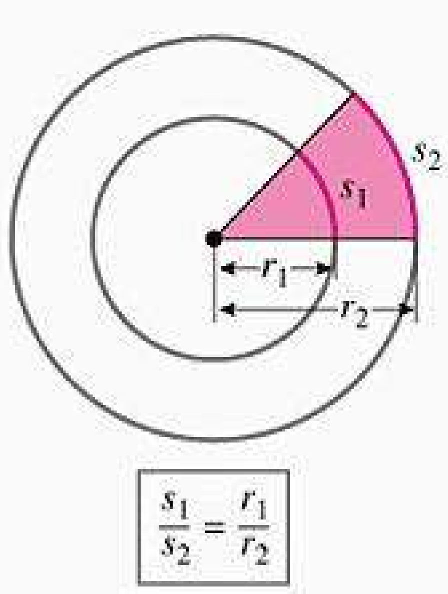


Figura A.4

■ RELAÇÕES ENTRE COMPRIMENTO DE ARCO, ÂNGULO, RAIO E ÁREA

Há um teorema em Geometria plana que estabelece que, para dois círculos concêntricos, a razão entre os comprimentos de arco subentendidos por um ângulo central é igual à razão dos raios correspondentes (Figura A.4). Em particular, se s for o comprimento de arco subentendido sobre um círculo de raio r por um ângulo central de θ radianos, então, compa-

rando com o comprimento de arco subentendido pelo mesmo ângulo sobre um círculo de raio 1, obtemos

$$\frac{s}{\theta} = \frac{r}{1}$$

de onde tiramos as seguintes relações entre o ângulo central θ, o raio r e o comprimento de arco subentendido s quando θ estiver em radianos (Figura A.5):

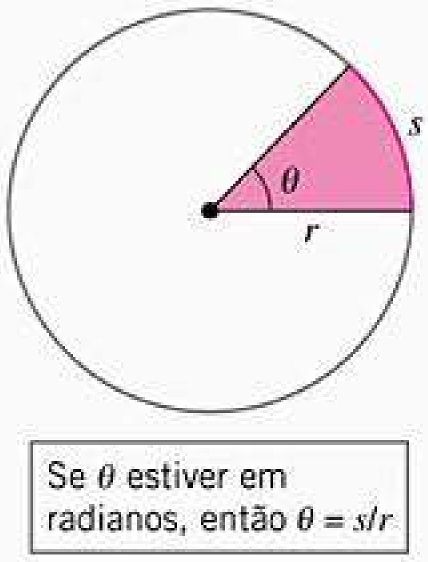


Figura A.5

$$\theta = s/r \quad \text{e} \quad s = r\theta \tag{3-4}$$

A região sombreada na Figura A.5 é chamada de ***setor***. É um teorema na Geometria plana que a razão entre a área A desse setor e a área de todo o círculo é a mesma que a razão entre o ângulo central do setor e o ângulo do círculo inteiro; assim, se os ângulos estiverem em radianos, temos

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

Resolvendo-se para A, resulta a seguinte fórmula para a área de um setor em termos do raio r e do ângulo θ em radianos:

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta \tag{5}$$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

O ***seno***, o ***cosseno***, a ***tangente***, a ***cotangente***, a ***secante*** e a ***cossecante*** de um ângulo agudo positivo θ podem ser definidos como razões entre os lados de um triângulo retângulo. Usando a notação da Figura A.6, essas definições tomam a seguinte forma:

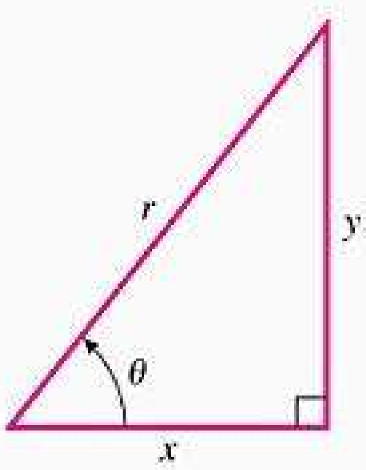


Figura A.6

$$\begin{aligned}
\text{sen}\ \theta &= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}, &\quad \text{cossec}\ \theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto a } \theta} = \frac{r}{y} \\
\cos\theta &= \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}, &\quad \sec\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \theta} = \frac{r}{x} \\
\text{tg}\ \theta &= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta} = \frac{y}{x}, &\quad \text{cotg}\ \theta &= \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{cateto oposto a } \theta} = \frac{x}{y}
\end{aligned} \tag{6}$$

Vamos dizer que sen, cos, tg, cotg, sec e cossec são as ***funções trigonométricas***. Como triângulos similares têm lados proporcionais, os valores das funções trigonométricas dependem somente do tamanho de θ e não do triângulo retângulo particular usado para calcular as razões. Além disso, nessas definições não importa se θ estiver medido em graus ou em radianos.

► Exemplo 2 Sabemos da Geometria que dois lados de um triângulo de ângulos de 45°, 45° e 90° são iguais e que a hipotenusa de um triângulo de ângulos de 30°, 60° e 90° é duas vezes o lado menor, que é o lado oposto ao ângulo de 30°. Esses fatos e o Teorema de Pitágoras fornecem a Figura A.7. A partir da figura, obtemos os resultados na Tabela 2. ◄

Figura A.7

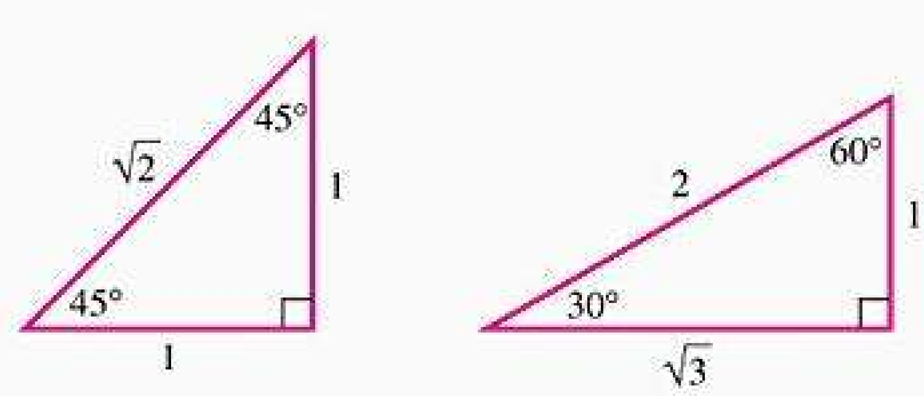


Tabela 2

$\text{sen } 45° = 1/\sqrt{2}$,	$\cos 45° = 1/\sqrt{2}$,	$\text{tg } 45° = 1$
$\text{cossec } 45° = \sqrt{2}$,	$\sec 45° = \sqrt{2}$,	$\text{cotg } 45° = 1$
$\text{sen } 30° = 1/2$,	$\cos 30° = \sqrt{3}/2$,	$\text{tg } 30° = 1/\sqrt{3}$
$\text{cossec } 30° = 2$,	$\sec 30° = 2/\sqrt{3}$,	$\text{cotg } 30° = \sqrt{3}$
$\text{sen } 60° = \sqrt{3}/2$,	$\cos 60° = 1/2$,	$\text{tg } 60° = \sqrt{3}$
$\text{cossec } 60° = 2/\sqrt{3}$,	$\sec 60° = 2$,	$\text{cotg } 60° = 1/\sqrt{3}$

ÂNGULOS EM SISTEMAS DE COORDENADAS RETANGULARES

Como os ângulos de um triângulo retângulo estão entre 0 e 90°, as fórmulas em (6) não são diretamente aplicáveis a ângulos negativos ou maiores do que 90°. Para estender as funções trigonométricas a esses casos, será conveniente considerar ângulos em sistemas de coordenadas retangulares. Dizemos que um ângulo está na ***posição padrão*** em um sistema de coordenadas xy se seu vértice estiver na origem e seu lado inicial sobre o eixo x positivo (Figura A.8).

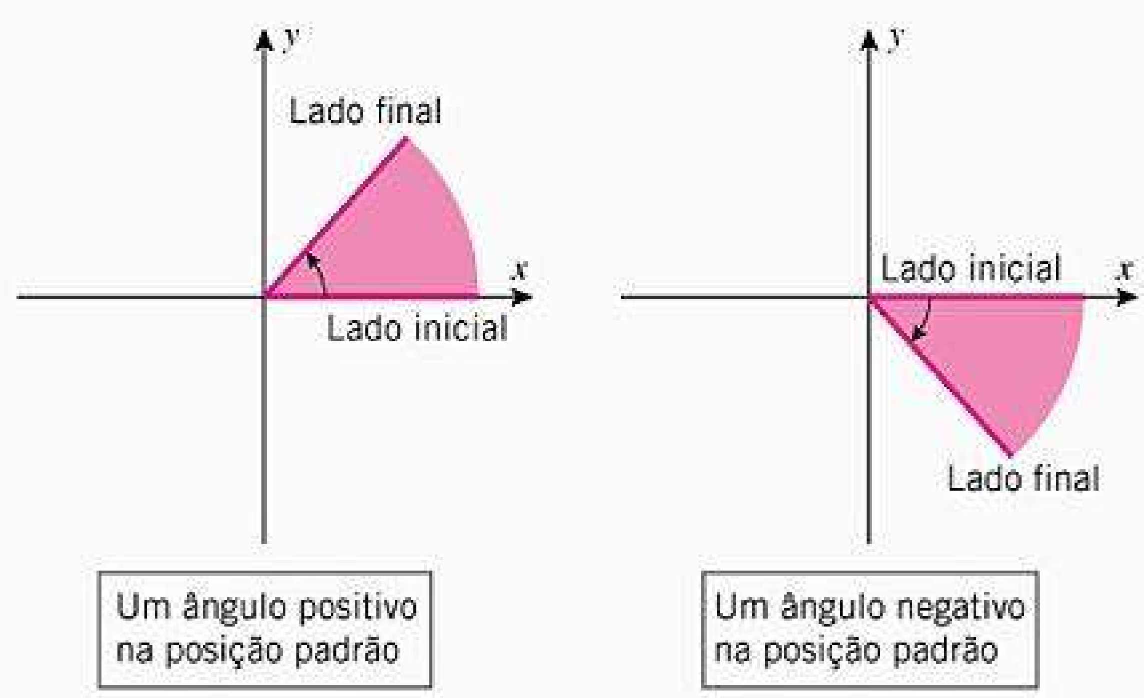


Figura A.8

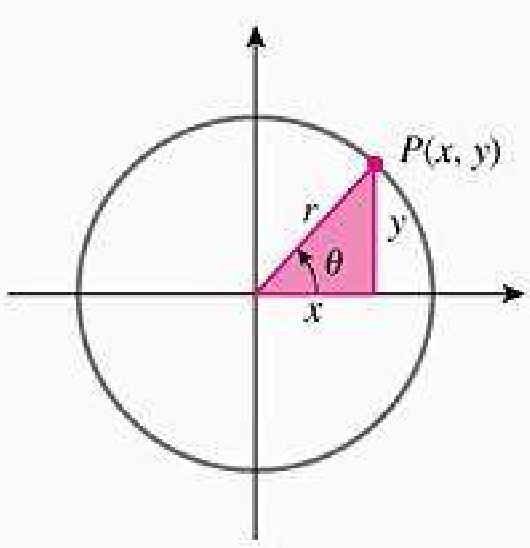


Figura A.9

Para definir as funções trigonométricas de um ângulo θ na posição padrão, construímos um círculo de raio r, centrado na origem, e tomamos $P(x, y)$ como a intersecção do lado final de θ com esse círculo (Figura A.9). Fazemos a definição seguinte.

A.1 DEFINIÇÃO

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$
$$\text{cossec}\,\theta = \frac{r}{y}, \quad \sec\theta = \frac{r}{x}, \quad \text{cotg}\,\theta = \frac{x}{y}$$

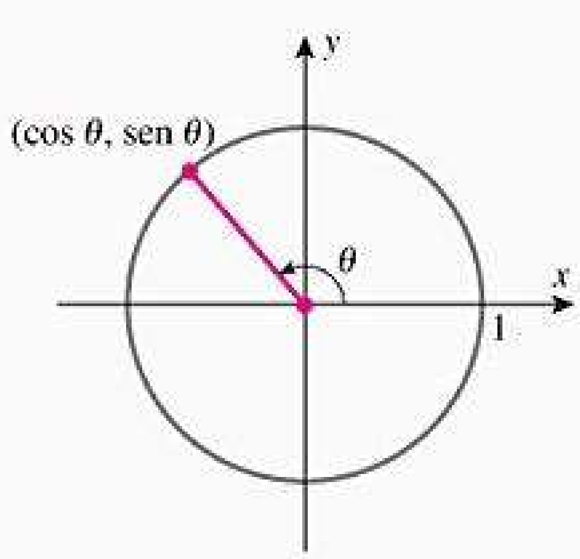


Figura A.10

Note que as fórmulas dessa definição estão de acordo com aquelas dadas em (6); logo, não há conflito com a definição anterior de funções trigonométricas para triângulos. Porém, essa definição se aplica a todos os ângulos (exceto quando ocorrer um zero no denominador).

No caso especial em que $r = 1$, temos que sen $\theta = y$ e cos $\theta = x$, portanto o lado final do ângulo θ intersecta o círculo unitário no ponto (cos θ, sen θ) (Figura A.10). Temos, a partir da Definição A.1, que as funções trigonométricas remanescentes de θ são expressas por

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cossec}\,\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad (7\text{-}10)$$

Essas observações sugerem o seguinte procedimento para o cálculo de funções trigonométricas de ângulos comuns:

- Construa o ângulo θ na posição padrão de um sistema de coordenadas (x, y).
- Encontre as coordenadas da intersecção do lado final do ângulo com o círculo unitário; as coordenadas (x e y) dessa intersecção são, respectivamente, os valores de cos θ e sen θ.
- Use as fórmulas (7) a (10) para encontrar os valores das funções trigonométricas remanescentes a partir dos valores de cos θ e sen θ.

▶ Exemplo 3 Calcule as funções trigonométricas de $\theta = 150°$.

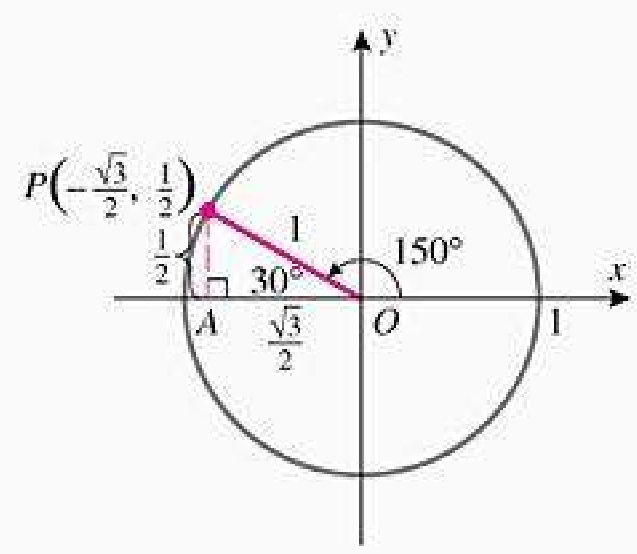


Figura A.11

Solução Construa um círculo unitário e coloque o ângulo $\theta = 150°$ na posição padrão (Figura A.11). Uma vez que o ângulo $\angle AOP$ mede 30° e o triângulo ΔOAP tem ângulos de 30°, 60° e 90°, o lado AP tem comprimento $\frac{1}{2}$ (metade da hipotenusa) e o lado OA, pelo Teorema de Pitágoras, tem um comprimento de $\sqrt{3}/2$. Assim, as coordenadas de P são $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$, de onde obtemos

$$\operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2}, \quad \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 150° = \frac{\operatorname{sen} 150°}{\cos 150°} = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cossec} 150° = \frac{1}{\operatorname{sen} 150°} = 2, \quad \sec 150° = \frac{1}{\cos 150°} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cotg} 150° = \frac{1}{\operatorname{tg} 150°} = -\sqrt{3} \quad ◀$$

▶ Exemplo 4 Calcule as funções trigonométricas de $\theta = 5\pi/6$.

Solução Como $5\pi/6 = 150°$, esse problema é equivalente ao do Exemplo 3. Daquele exemplo, obtemos

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cossec}\frac{5\pi}{6} = 2, \quad \sec\frac{5\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{cotg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} \quad ◀$$

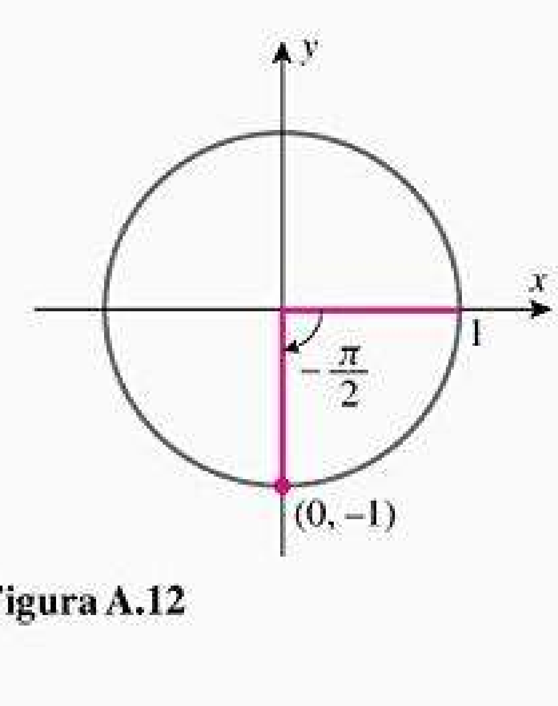


Figura A.12

▶ Exemplo 5 Calcule as funções trigonométricas de $\theta = -\pi/2$.

Solução De acordo com a Figura A.12, o lado final de $\theta = -\pi/2$ intersecta o círculo unitário no ponto $(0, -1)$, portanto

$$\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1, \; \cos(-\pi/2) = 0$$

e das Fórmulas (7) a (10) obtemos

$$\operatorname{tg}(-\pi/2) = \frac{\operatorname{sen}(-\pi/2)}{\cos(-\pi/2)} = \frac{-1}{0} \quad \text{(indefinida)}$$

$$\operatorname{cotg}(-\pi/2) = \frac{\cos(-\pi/2)}{\operatorname{sen}(-\pi/2)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec(-\pi/2) = \frac{1}{\cos(-\pi/2)} = \frac{1}{0} \quad \text{(indefinida)}$$

$$\operatorname{cossec}(-\pi/2) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-\pi/2)} = \frac{1}{-1} = -1 \blacktriangleleft$$

Pelos métodos ilustrados nos três últimos exemplos, o leitor deve ser capaz de obter todos os resultados da Tabela 3. Os traços indicam quantidades não definidas.

Tabela 3

	$\theta = 0$ (0°)	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/2$ (90°)	$2\pi/3$ (120°)	$3\pi/4$ (135°)	$5\pi/6$ (150°)	π (180°)	$3\pi/2$ (270°)	2π (360°)
sen θ	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	−1	0
cos θ	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	−1/2	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	−1	0	1
tg θ	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	−1	$-1/\sqrt{3}$	0	—	0
cossec θ	—	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	—	−1	—
sec θ	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	—	−2	$-\sqrt{2}$	$-2/\sqrt{3}$	−1	—	1
cotg θ	—	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

> Os valores exatos das funções trigonométricas somente podem ser obtidos em casos especiais; normalmente, é necessário dispor de uma calculadora ou de um programa computacional.

Os sinais das funções trigonométricas de um ângulo são determinados pelo quadrante no qual cai o lado final do ângulo. Por exemplo, se o lado final cair no primeiro quadrante, então x e y são positivos na Definição A.1. Assim, todas as funções trigonométricas têm valores positivos. Se o lado final cair no segundo quadrante, então x é negativo e y positivo; logo, seno e cossecante são positivos, mas todas as demais funções trigonométricas são negativas. O diagrama na Figura A.13 mostra quais funções trigonométricas são positivas nos vários quadrantes. O leitor achará instrutivo conferir que os resultados na Tabela 3 são consistentes com a Figura A.13.

■ IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Uma ***identidade trigonométrica*** é uma equação envolvendo funções trigonométricas que é verdadeira para todos os ângulos para os quais ambos os lados da equação estão definidos. Uma das identidades mais importantes em Trigonometria pode ser deduzida aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo na Figura A.9 para obter

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Dividindo ambos os lados por r^2 e usando as definições de sen θ e cos θ (Definição A.1), obtemos o seguinte resultado fundamental:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{11}$$

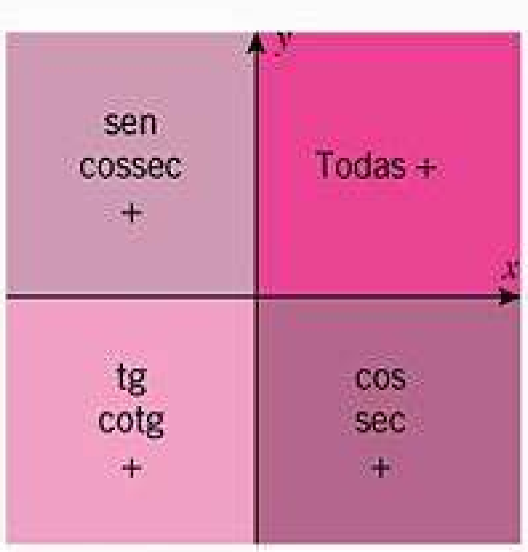


Figura A.13

As seguintes identidades podem ser obtidas de (11) dividindo-se ambos os membros por $\cos^2\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta$, respectivamente, e então aplicando as Fórmulas (7) a (10):

$$\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta \tag{12}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta \tag{13}$$

Se (x, y) for um ponto no círculo unitário, também estarão nele os pontos $(-x, y)$, $(-x, -y)$ e $(x, -y)$ (por quê?), e os quatro pontos formam os vértices de um retângulo com os lados paralelos aos eixos coordenados (Figura A.14*a*). As coordenadas x e y de cada vértice representam o seno e o cosseno de um ângulo na posição padrão, cujo lado final passa pelo vértice; assim, obtemos as identidades nas partes (*b*), (*c*) e (*d*) da Figura A.14 para o seno e o cosseno. Dividindo aquelas identidades, obtemos identidades para a tangente. Em suma:

$$\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta, \quad \operatorname{sen}(\pi+\theta) = -\operatorname{sen}\theta, \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \tag{14-16}$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta, \quad \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta \tag{17-19}$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\theta) = -\operatorname{tg}\theta, \quad \operatorname{tg}(\pi+\theta) = \operatorname{tg}\theta, \quad \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta \tag{20-22}$$

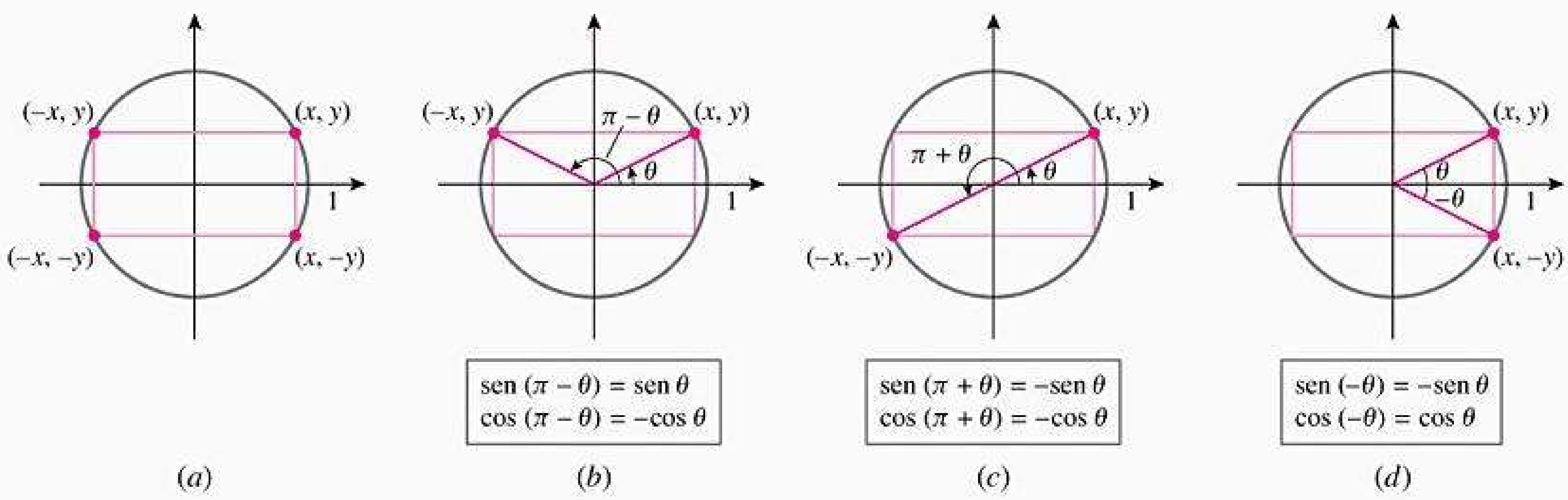


Figura A.14

Dois ângulos na posição padrão que tenham o mesmo lado final devem ter os mesmos valores para suas funções trigonométricas, pois seus lados finais intersectam o círculo unitário no mesmo ponto. Em particular, dois ângulos cujas medidas em radianos diferem por um múltiplo de 2π têm o mesmo lado final e, portanto, as suas funções trigonométricas têm os mesmos valores. Isso dá lugar às identidades

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta - 2\pi) \tag{23}$$

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta - 2\pi) \tag{24}$$

e, mais geralmente,

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta \pm 2n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

$$\cos\theta = \cos(\theta \pm 2n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{26}$$

A identidade (21) implica que

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta + \pi) \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta - \pi) \tag{27-28}$$

A identidade (27) é precisamente (21) com os termos da soma em ordem inversa, e a identidade (28) segue de (21) substituindo $\theta - \pi$ no lugar de θ. Essas duas identidades estabelecem

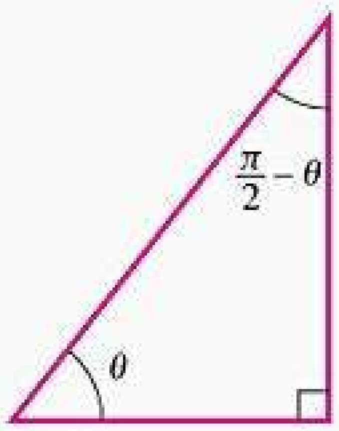


Figura A.15

que somar ou subtrair π de um ângulo não afeta o valor de sua tangente. Tem-se que o mesmo é verdadeiro para todo múltiplo de π; assim,

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta \pm n\pi), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{29}$$

A Figura A.15 mostra ângulos complementares θ e $(\pi/2) - \theta$ de um triângulo retângulo. Tem-se, a partir de (6), que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto adjacente a } (\pi/2) - \theta}{\text{hipotenusa}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto oposto a } (\pi/2) - \theta}{\text{hipotenusa}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

o que fornece as identidades

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cotg}\theta \tag{30-32}$$

onde a terceira identidade resulta da divisão das duas primeiras. Essas identidades também são válidas para ângulos que não são agudos ou que são negativos.

A LEI DOS COSSENOS

O próximo teorema, denominado ***lei dos cossenos***, generaliza o Teorema de Pitágoras. Esse resultado tem valor por si mesmo e também como ponto de partida de algumas identidades trigonométricas importantes.

A.2 TEOREMA (***Lei dos Cossenos***) *Se os lados de um triângulo tiverem comprimentos a, b, c e se θ for o ângulo entre os lados com comprimentos a e b, então*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

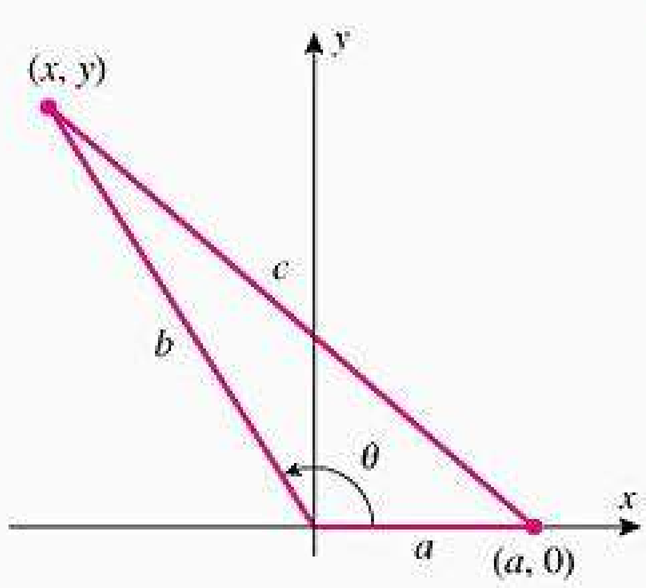


Figura A.16

DEMOSTRAÇÃO Vamos introduzir um sistema de coordenadas de tal forma que θ esteja na posição padrão com o lado de comprimento a sobre o eixo x positivo. De acordo com a Figura A.16, o lado de comprimento a se estende da origem até um ponto $(a, 0)$ e o lado b, da origem até algum ponto (x, y). A partir da definição de sen θ e cos θ, temos que sen $\theta = y/b$ e $\cos\theta = x/b$, logo

$$y = b\operatorname{sen}\theta, \quad x = b\cos\theta \tag{33}$$

A partir da fórmula da distância entre os pontos (x, y) e $(a, 0)$ (ver Apêndice G, na internet), obtemos

$$c^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2$$

e, portanto, por (33)

$$\begin{aligned} c^2 &= (b\cos\theta - a)^2 + b^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= a^2 + b^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Vamos agora mostrar como usar a lei dos cossenos para obter as identidades a seguir, denominadas ***fórmulas de adição*** para o seno e o cosseno:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{34}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{35}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{36}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{37}$$

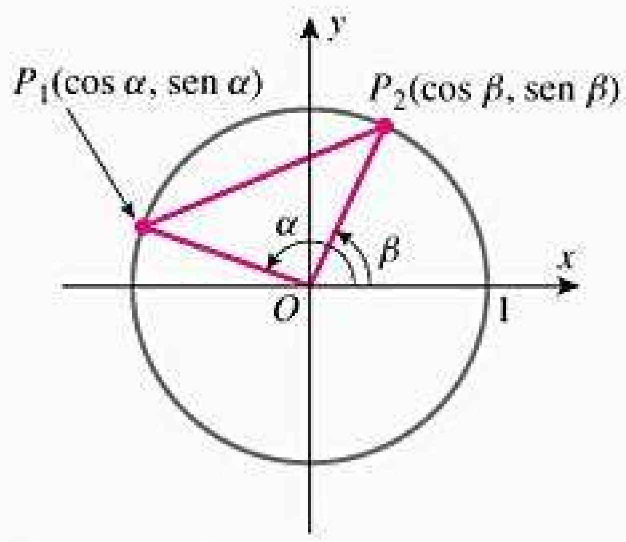


Figura A.17

Vamos deduzir primeiro (37). Em nossa dedução, vamos supor que $0 \le \beta < \alpha < 2\pi$ (Figura A.17). Conforme a figura, os lados finais de α e β intersectam o círculo unitário nos pontos $P_1(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $P_2(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Se denotarmos os comprimentos dos lados do triângulo OP_1P_2 por OP_1, P_1P_2 e OP_2, então $OP_1 = OP_2 = 1$ e, da fórmula da distância entre dois pontos,

$$\begin{aligned}(P_1P_2)^2 &= (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha)^2\\ &= (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\\ &= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\end{aligned}$$

Mas o ângulo $P_2OP_1 = \alpha - \beta$, de modo que da lei dos cossenos resulta que

$$\begin{aligned}(P_1P_2)^2 &= (OP_1)^2 + (OP_2)^2 - 2(OP_1)(OP_2)\cos(\alpha - \beta)\\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

Igualando as duas expressões para $(P_1P_2)^2$ e simplificando, obtemos

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

o que completa a dedução de (37).

Podemos usar (31) e (37) para deduzir (36) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - (-\beta)\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}(-\beta)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\beta\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

As identidades (34) e (35) podem ser obtidas de (36) e (37) substituindo-se $-\beta$ por β e usando as identidades

$$\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta, \quad \cos(-\beta) = \cos\beta$$

Deixamos para o leitor deduzir as identidades

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{38-39}$$

A identidade (38) pode ser obtida dividindo-se (34) por (35) e, então, simplificando-se. A identidade (39) pode ser obtida de (38) substituindo-se $-\beta$ por β e simplificando-se.

No caso especial em que $\alpha = \beta$, as identidades (34), (35) e (38) dão lugar às ***fórmulas do ângulo duplo***

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \tag{40}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \tag{41}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \tag{42}$$

Usando-se a identidade $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, (41) pode ser reescrita nas formas alternativas

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \text{e} \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \tag{43-44}$$

Se substituirmos α por $\alpha/2$ em (43) e (44) e usarmos alguma álgebra, obteremos as ***fórmulas do ângulo metade***.

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{45-46}$$

Deixamos como exercício deduzir as seguintes ***fórmulas de produto em soma*** a partir de (34) até (37):

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)] \tag{47}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \tag{48}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \tag{49}$$

Também deixamos como exercício deduzir as seguintes ***fórmulas de soma em produto***:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{50}$$

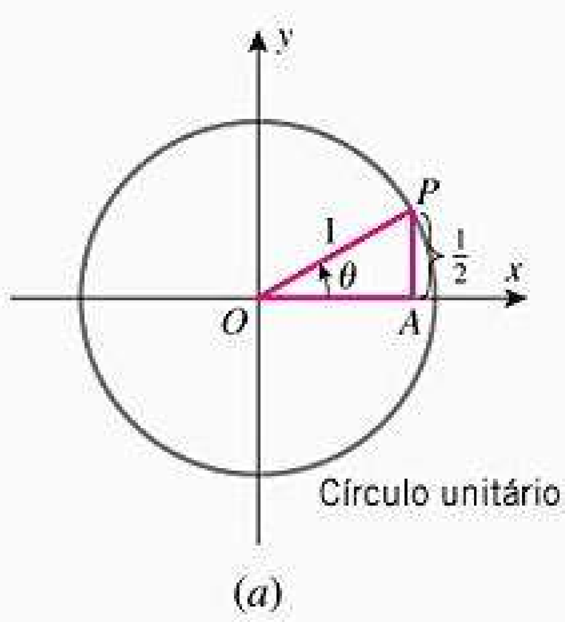
$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{51}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{52}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{53}$$

ENCONTRANDO UM ÂNGULO A PARTIR DO VALOR DE SUAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Há inúmeras situações nas quais é necessário encontrar um ângulo desconhecido a partir do valor conhecido de uma de suas funções trigonométricas. O exemplo a seguir ilustra um método para fazer isso.



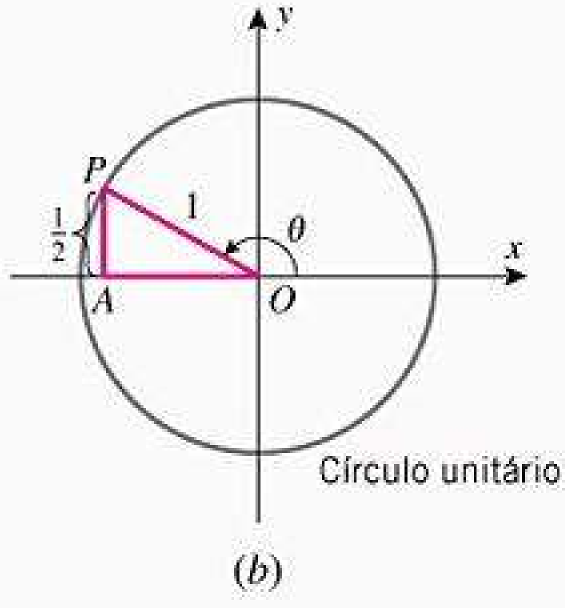


Figura A.18

► Exemplo 6 Encontre θ sabendo que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

Solução Vamos começar procurando por ângulos positivos que satisfaçam a equação. Como $\operatorname{sen}\theta$ é positivo, o ângulo θ deve terminar no primeiro ou no segundo quadrante. Se terminar no primeiro quadrante, então a hipotenusa do triângulo OAP na Figura A.18*a* é o dobro do lado AP, portanto

$$\theta = 30° = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

Se θ terminar no segundo quadrante (Figura A.18*b*), então a hipotenusa no triângulo OAP é o dobro do lado AP; logo, o ângulo $AOP = 30°$, o que implica

$$\theta = 180° - 30° = 150° = \frac{5\pi}{6}\text{ rad}$$

Encontradas essas duas soluções, todas as outras podem ser obtidas somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 360° (2π rad) a esses ângulos. Assim, o conjunto de todas as soluções é dado pelas fórmulas

$$\theta = 30° \pm n\cdot 360°, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$\theta = 150° \pm n \cdot 360°, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ou, em radianos,

$$\theta = \frac{\pi}{6} \pm n \cdot 2\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \pm n \cdot 2\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$ ◀

■ ÂNGULO DE INCLINAÇÃO

A inclinação de uma reta não-vertical L está relacionada com o ângulo formado entre L e o eixo x positivo. Se ϕ for o menor ângulo positivo medido no sentido anti-horário do eixo x até L, então a inclinação da reta pode ser expressa como

$$m = \text{tg}\ \phi \tag{54}$$

(Figura A.19*a*). O ângulo ϕ, denominado ***ângulo de inclinação*** da reta, satisfaz $0° \leq \phi < 180°$ em graus (ou, de forma equivalente, $0 \leq \phi < \pi$ em radianos). Se ϕ for um ângulo agudo, então $m = \text{tg}\ \phi$ é positivo e a reta inclina-se para cima à direita; e se ϕ for um ângulo obtuso, então $m = \text{tg}\ \phi$ é negativo e a reta inclina-se para baixo à direita. Por exemplo, a reta cujo ângulo de inclinação for 45º tem uma inclinação de $m = \text{tg}\ 45° = 1$, e a reta cujo ângulo de inclinação for 135º tem uma inclinação de $m = \text{tg}\ 135° = -1$ (Figura A.19*b*). A Figura A.20 mostra uma regra conveniente de uso da reta $x = 1$ como uma "régua" para visualizar a relação entre retas com várias inclinações.

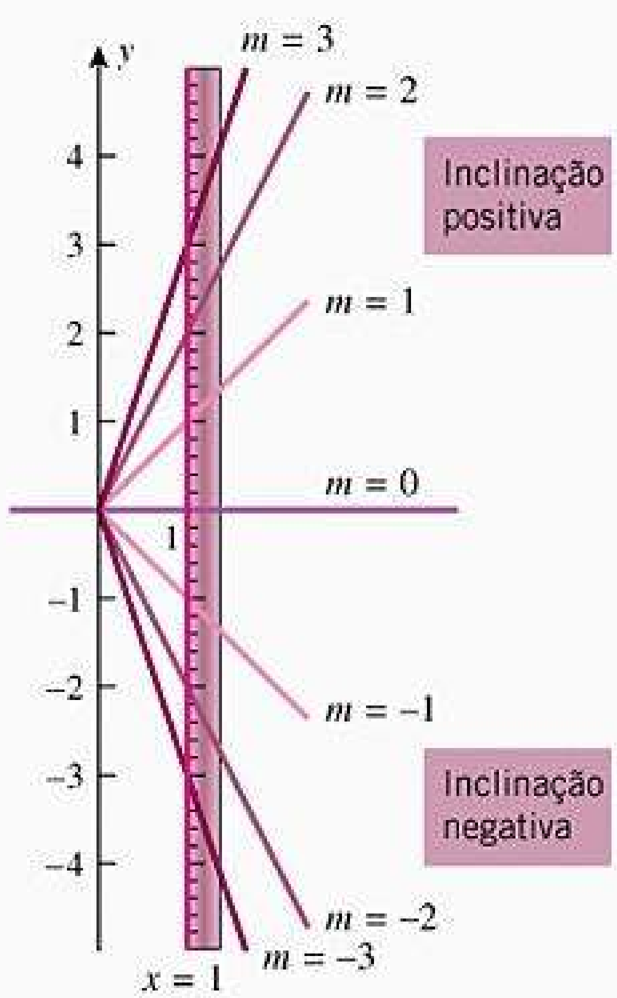


Figura A.20

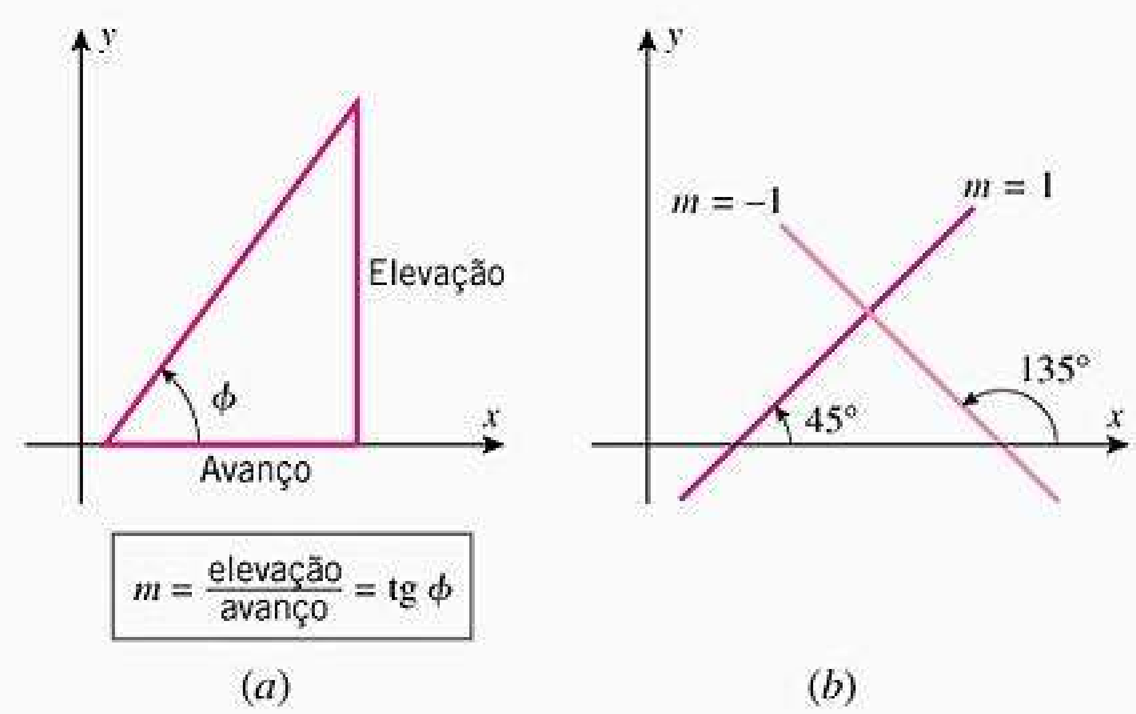


Figura A.19

EXERCÍCIOS A

1-2 Expresse os ângulos em radianos.

1. (a) 75º (b) 390º (c) 20º (d) 138º

2. (a) 420º (b) 15º (c) 225º (d) 165º

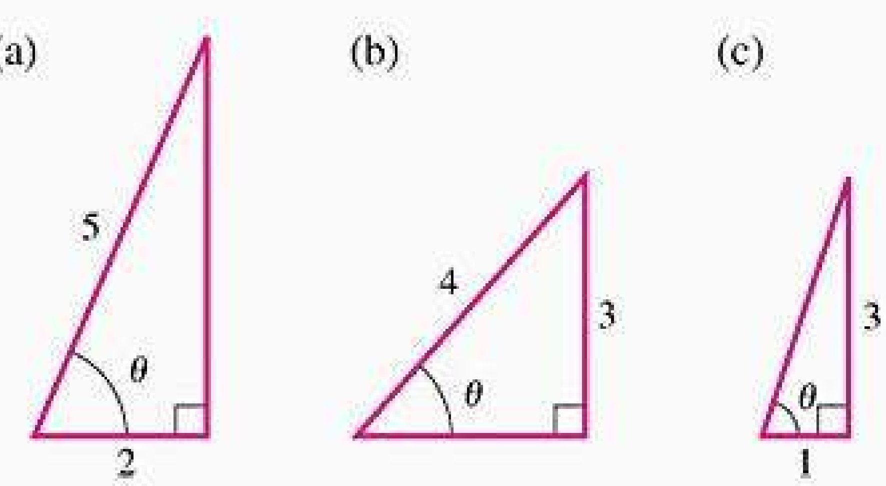
3-4 Expresse os ângulos em graus.

3. (a) $\pi/15$ (b) 1,5 (c) $8\pi/5$ (d) 3π

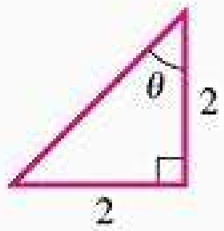
4. (a) $\pi/10$ (b) 2 (c) $2\pi/5$ (d) $7\pi/6$

5-6 Encontre os valores exatos de todas as seis funções trigonométricas de θ.

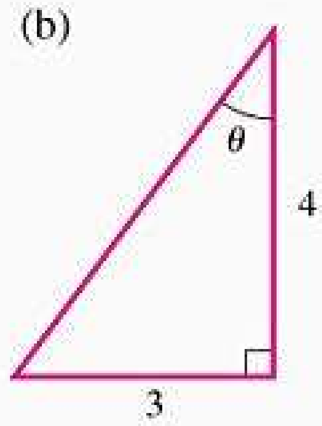
5. (a) (b) (c)



6. (a)



(b)



(c)



7-12 O ângulo θ é um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Resolva os problemas desenhando um triângulo apropriado. Não use calculadora.

7. Encontre sen θ e cos θ, dado que tg $\theta = 3$.

8. Encontre sen θ e tg θ, dado que cos $\theta = \frac{2}{3}$.

9. Encontre tg θ e cossec θ, dado que sec $\theta = \frac{5}{2}$.

10. Encontre cotg θ e sec θ, dado que cossec $\theta = 4$.

11. Encontre o comprimento do lado adjacente a θ, dado que a hipotenusa tem comprimento 6 e cos $\theta = 0,3$.

12. Encontre o comprimento da hipotenusa, dado que o lado oposto a θ tem comprimento 2,4 e sen $\theta = 0{,}8$.

13-14 É dado o valor do ângulo θ. Encontre os valores de todas as seis funções trigonométricas de θ sem usar a calculadora.

13. (a) $225°$ (b) $-210°$ (c) $5\pi/3$ (d) $-3\pi/2$

14. (a) $330°$ (b) $-120°$ (c) $9\pi/4$ (d) -3π

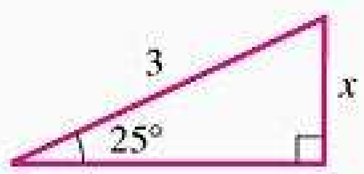
15-16 Use as informações dadas para encontrar os valores exatos das funções trigonométricas restantes de θ.

15. (a) $\cos\theta = \frac{3}{5}, 0 < \theta < \pi/2$
(b) $\cos\theta = \frac{3}{5}, -\pi/2 < \theta < 0$
(c) $\text{tg}\,\theta = -1/\sqrt{3}, \pi/2 < \theta < \pi$
(d) $\text{tg}\,\theta = -1/\sqrt{3}, -\pi/2 < \theta < 0$
(e) $\text{cossec}\,\theta = \sqrt{2}, 0 < \theta < \pi/2$
(f) $\text{cossec}\,\theta = \sqrt{2}, \pi/2 < \theta < \pi$

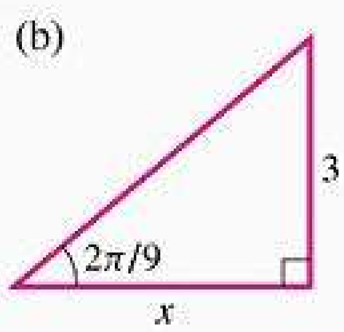
16. (a) $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{4}, 0 < \theta < \pi/2$
(b) $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{4}, \pi/2 < \theta < \pi$
(c) $\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{3}, 0 < \theta < \pi/2$
(d) $\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{3}, \pi < \theta < 3\pi/2$
(e) $\sec\theta = -\frac{5}{2}, \pi/2 < \theta < \pi$
(f) $\sec\theta = -\frac{5}{2}, \pi < \theta < 3\pi/2$

17-18 Use um recurso computacional para obter x até a quarta casa decimal.

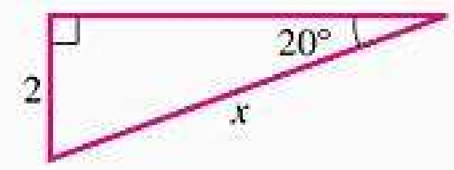
17. (a)



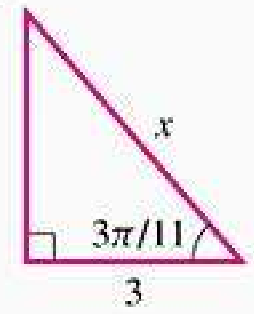
(b)



18. (a)



(b)



19. Em cada parte, seja θ um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Expresse as cinco funções trigonométricas restantes em termos de a.

(a) $\text{sen}\,\theta = a/3$ (b) $\text{tg}\,\theta = a/5$ (c) $\sec\theta = a$

20-27 Encontre todos os valores de θ (em radianos) que satisfaçam a equação dada. Não use calculadora.

20. (a) $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$ (b) $\text{sen}\,\theta = -1/\sqrt{2}$

21. (a) $\text{tg}\,\theta = -1$ (b) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

22. (a) $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ (b) $\text{tg}\,\theta = \sqrt{3}$

23. (a) $\text{tg}\,\theta = 1/\sqrt{3}$ (b) $\text{sen}\,\theta = -\sqrt{3}/2$

24. (a) $\text{sen}\,\theta = -1$ (b) $\cos\theta = -1$

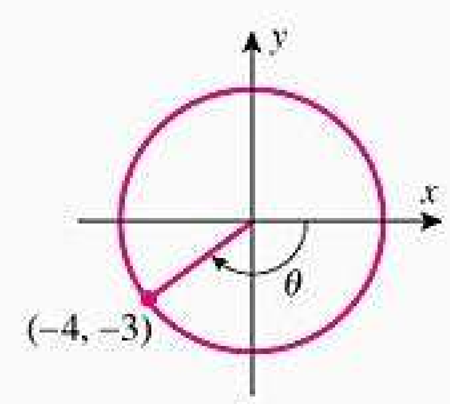
25. (a) $\text{cotg}\,\theta = -1$ (b) $\text{cotg}\,\theta = \sqrt{3}$

26. (a) $\sec\theta = -2$ (b) $\text{cossec}\,\theta = -2$

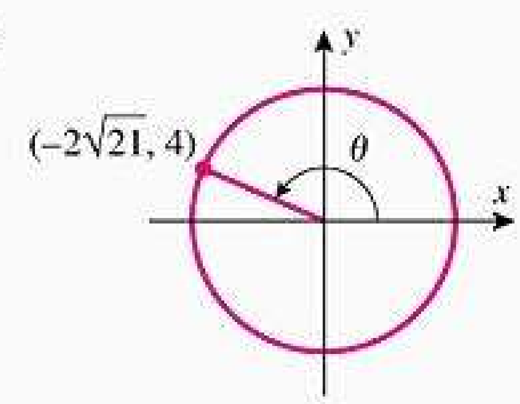
27. (a) $\text{cossec}\,\theta = 2/\sqrt{3}$ (b) $\sec\theta = 2/\sqrt{3}$

28-29 Encontre os valores de todas as seis funções trigonométricas de θ.

28.



29.



30. Encontre todos os valores de θ (em radianos) tais que

(a) $\text{sen}\,\theta = 1$ (b) $\cos\theta = 1$ (c) $\text{tg}\,\theta = 1$
(d) $\text{cossec}\,\theta = 1$ (e) $\sec\theta = 1$ (f) $\text{cotg}\,\theta = 1$

31. Encontre todos os valores de θ (em radianos) tais que

(a) $\text{sen}\,\theta = 0$ (b) $\cos\theta = 0$ (c) $\text{tg}\,\theta = 0$
(d) cossec θ é indefinido (e) sec θ é indefinido
(f) cotg θ é indefinido

32. Como poderíamos usar uma régua e um transferidor para aproximar sen 17° e cos 17°?

33. Encontre o comprimento de um arco circular em um círculo com raio de 4 cm subentendido por um ângulo de

(a) $\pi/6$ (b) $150°$

34. Encontre o raio de um setor circular que tem um ângulo de $\pi/3$ e um comprimento de arco de 7 unidades.

35. Um ponto P movendo-se no sentido anti-horário sobre um círculo com raio de 5 cm percorre um arco com comprimento de 2 cm. Qual é o ângulo varrido por um raio do centro do círculo até P?

36. Encontre a fórmula para a área A de um setor circular em termos de seu raio r e do comprimento de arco s.

37. Como mostra a figura abaixo, um cone circular reto é feito de um pedaço de círculo de papel de raio R retirando um setor de ângulo θ e colando as bordas da parte restante. Encontre

(a) o raio r da base do cone em termos de R e θ

(b) a altura h do cone em termos de R e θ

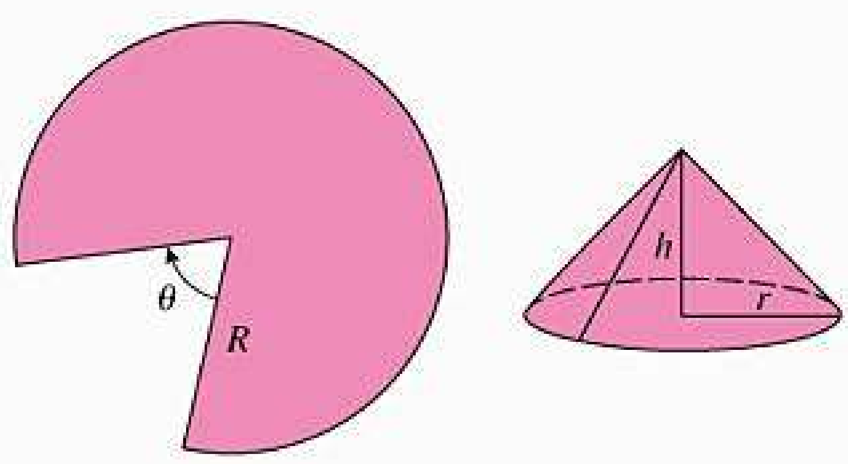


Figura Ex-37

38. Como mostra a figura abaixo, sejam r e L o raio da base e a altura inclinada de um cone circular reto. Mostre que a área da superfície lateral S do cone é $S = \pi rL$. [*Sugestão*: Como mostrado na Figura Ex-37, a superfície lateral do cone torna-se um setor circular quando cortada ao longo de uma reta a partir do vértice até a base e tornada uma figura plana.]

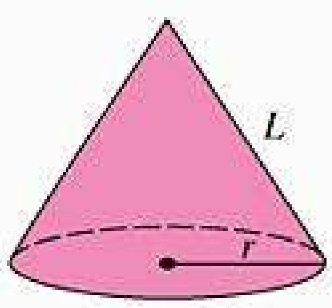


Figura Ex-38

39. Dois lados de um triângulo têm comprimentos de 3 cm e 7 cm e formam um ângulo de 60°. Encontre a área do triângulo.

40. Seja ABC um triângulo cujos ângulos em A e B são 30° e 45°. Se o lado oposto ao ângulo B tem comprimento igual a 9, encontre os comprimentos dos lados restantes e o ângulo em C.

41. Uma escada de 10 pés apoiada em uma casa faz um ângulo de 67° em relação ao solo. Qual é a distância do topo até o chão? Expresse sua resposta até o décimo de pé mais próximo.

42. De um ponto ao nível do chão a 120 pés de um prédio, o ângulo de elevação até o topo do prédio é de 76°. Encontre a altura do prédio e expresse sua resposta até o pé mais próximo.

43. Um observador ao nível do chão está a uma distância d de um prédio. Os ângulos de elevação até as bases das janelas do segundo e terceiro andares são α e β, respectivamente. Encontre a distância h entre as bases das janelas em termos de α, β e d.

44. De um ponto ao nível do chão, o ângulo de elevação ao topo de uma torre é α. De um ponto que está d unidades mais perto da torre, o ângulo de elevação é β. Encontre a altura h da torre em termos de α, β e d.

45-46 Não use calculadora nestes exercícios.

45. Se $\cos\theta = \frac{2}{3}$ e $0 < \theta < \pi/2$, obtenha

(a) $\text{sen}\, 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$

46. Se $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ e $\text{tg}\,\beta = 2$, onde $0 < \alpha < \pi/2$ e $0 < \beta < \pi/2$, obtenha

(a) $\text{sen}\,(\alpha - \beta)$ (b) $\cos(\alpha + \beta)$

47. Expresse $\text{sen}\, 3\theta$ e $\cos 3\theta$ em termos de $\text{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$.

48-58 Deduza as identidades dadas.

48. $\dfrac{\cos\theta\sec\theta}{1+\text{tg}^2\theta} = \cos^2\theta$

49. $\dfrac{\cos\theta\,\text{tg}\,\theta + \text{sen}\,\theta}{\text{tg}\,\theta} = 2\cos\theta$

50. $2\,\text{cossec}\,2\theta = \sec\theta\,\text{cossec}\,\theta$ **51.** $\text{tg}\,\theta + \text{cotg}\,\theta = 2\,\text{cossec}\,2\theta$

52. $\dfrac{\text{sen}\,2\theta}{\text{sen}\,\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta$

53. $\dfrac{\text{sen}\,\theta + \cos 2\theta - 1}{\cos\theta - \text{sen}\,2\theta} = \text{tg}\,\theta$

54. $\text{sen}\,3\theta + \text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,2\theta\cos\theta$

55. $\text{sen}\,3\theta - \text{sen}\,\theta = 2\cos 2\theta\,\text{sen}\,\theta$

56. $\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$ **57.** $\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta}$

58. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right) = \cos\theta$

59-60 Estes exercícios referem-se a um triângulo arbitrário ABC, no qual o comprimento do lado oposto a A é a, o comprimento do lado oposto a B é b, e o comprimento do lado oposto a C é c.

59. Prove: a área de um triângulo ABC pode ser escrita como

$$\text{área} = \tfrac{1}{2}bc\,\text{sen}\,A$$

Encontre duas outras fórmulas análogas para a área.

60. Prove a ***lei dos senos***: em qualquer triângulo, as razões dos lados para os senos dos ângulos opostos são iguais, isto é:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$$

61. Use as identidades (34) até (37) para expressar cada uma das seguintes expressões em termos de $\text{sen}\,\theta$ ou $\cos\theta$.

(a) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$ (b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$

(c) $\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)$ (d) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)$

62. Deduza as identidades (38) e (39).

63. Deduza a identidade

(a) (47) (b) (48) (c) (49).

64. Se $A = \alpha + \beta$ e $B = \alpha - \beta$, então $\alpha = \frac{1}{2}(A+B)$ e $\beta = \frac{1}{2}(A-B)$ (verifique). Use esses resultados e as identidades (47) até (49) para deduzir a identidade

(a) (50) (b) (52) (c) (53)

65. Substitua β por $-\beta$ na identidade (50) para deduzir (51).

66. (a) Expresse $3 \operatorname{sen} \alpha + 5 \cos \alpha$ na forma

$$C \operatorname{sen} (\alpha + \phi)$$

(b) Mostre que uma soma da forma

$$A \operatorname{sen} \alpha + B \cos \alpha$$

pode ser reescrita na forma $C \operatorname{sen} (\alpha + \phi)$.

67. Mostre que o comprimento da diagonal do paralelogramo na figura abaixo é

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

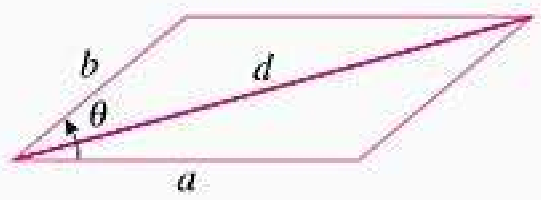


Figura Ex-67

68-69 Encontre o ângulo de inclinação da reta com inclinação m até o grau mais próximo. Use um recurso gráfico quando necessário.

68. (a) $m = \frac{1}{2}$ (b) $m = -1$ (c) $m = 2$ (d) $m = -57$

69. (a) $m = -\frac{1}{2}$ (b) $m = 1$ (c) $m = -2$ (d) $m = 57$

70-71 Encontre o ângulo de inclinação da reta até o grau mais próximo. Use um recurso gráfico quando necessário.

70. (a) $3y = 2 - \sqrt{3}x$ (b) $y - 4x + 7 = 0$

71. (a) $y = \sqrt{3}x + 2$ (b) $y + 2x + 5 = 0$

a p ê n d i c e B

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMINAIS

Vamos supor neste Apêndice que o leitor saiba dividir polinômios e usar o algoritmo de Briot-Ruffini. Se for necessário revisar essas técnicas, o leitor deve procurar um livro de Álgebra.

UMA BREVE REVISÃO DE POLINÔMIOS

Lembre que, se n for um inteiro não-negativo, então um ***polinômio de grau n*** é uma função que pode ser escrita nas formas a seguir, dependendo de querermos as potências de x em ordem crescente ou decrescente:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n \qquad (c_n \neq 0)$$

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0 \quad (c_n \neq 0)$$

Os números $c_0, c_1, \ldots, c_n$ são denominados ***coeficientes*** do polinômio. O coeficiente c_n (que multiplica a potência mais alta de x) é chamado de ***coeficiente dominante***, o termo c_nx^n é conhecido como ***termo dominante*** e o coeficiente c_0 é o ***termo constante***. Os polinômios com graus 1, 2, 3, 4 e 5 são chamados de ***linear***, ***quadrático***, ***cúbico***, ***quártico*** e ***quíntico***, respectivamente. Por simplicidade, os polinômios gerais de grau baixo são, freqüentemente, escritos sem os subscritos nos coeficientes:

$$p(x) = a$$ Polinômio constante

$$p(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$ Polinômio linear

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$ Polinômio quadrático

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$ Polinômio cúbico

Quando tentamos fatorar completamente um polinômio, uma de três coisas pode ocorrer:

- Pode ser que consigamos decompor o polinômio em fatores lineares distintos, usando somente números reais, como no exemplo a seguir:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$$

- Pode ser que consigamos decompor o polinômio em fatores lineares, usando somente números reais, mas alguns dos fatores podem ser repetidos; por exemplo:

$$x^6 - 3x^4 + 2x^3 = x^3(x^3 - 3x + 2) = x^3(x-1)^2(x-2) \qquad (1)$$

- Pode ser que consigamos decompor o polinômio em fatores lineares ou quadráticos, usando somente números reais, porém, não somos capazes de decompor os fatores quadráticos sem usar números imaginários (tais fatores quadráticos são chamados de ***irredutíveis*** sobre os números reais); por exemplo:

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$$

Aqui, o fator $x^2 + 1$ é irredutível sobre os números reais.

Em geral, se $p(x)$ for um polinômio de grau n com coeficiente dominante a e se forem permitidos números imaginários, então $p(x)$ pode ser fatorado como

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) \qquad (2)$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são denominados ***zeros*** de $p(x)$ ou ***raízes*** da equação $p(x) = 0$ e (2) é denominada ***fatoração linear completa*** de $p(x)$. Em (2), se algum dos fatores for repetido, então eles podem ser combinados; por exemplo, se os k primeiros fatores forem distintos e os restantes forem repetições dos k primeiros, então (2) pode ser expressa como

$$p(x) = a(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_k)^{m_k} \qquad (3)$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ são as raízes *distintas* de $p(x) = 0$. Os expoentes $m_1, m_2, \ldots, m_k$ mostram quantas vezes os vários fatores ocorrem na fatoração completa; por exemplo, em (3) o fator $(x - r_1)$ ocorre m_1 vezes, $(x - r_2)$ ocorre m_2 vezes, e assim por diante. Algumas técnicas para fatorar polinômios são discutidas adiante neste apêndice. Em geral, se um fator $(x - r)$ ocorrer m vezes na fatoração completa de um polinômio, dizemos que r é uma raiz ou um zero ***com multiplicidade m***, e se $(x - r)$ não repetir (isto é, tem multiplicidade 1), dizemos que r é uma raiz ou zero ***simples***. Por exemplo, temos a partir de (1) que a equação $x^6 - 3x^4 + 2x^3 = 0$ pode ser expressa como

$$x^3(x - 1)^2 (x + 2) = 0 \qquad (4)$$

de modo que essa equação tem três raízes distintas: $x = 0$ com multiplicidade 3, $x = 1$ com multiplicidade 2 e uma raiz simples $x = -2$.

Observe que em (3) a soma da multiplicidade das raízes deve ser n, pois $p(x)$ tem grau n; isto é,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$$

Por exemplo, em (4) as multiplicidades somam 6, que é o grau do polinômio.

Segue de (2) que um polinômio de grau n pode ter, no máximo, n raízes distintas; se todas as raízes forem simples, então haverá *exatamente n*; no caso de repetição, teremos menos do que n. Porém, na contagem das raízes de um polinômio é padrão contar as multiplicidades, pois essa convenção nos permite dizer que um polinômio de grau n tem n raízes. Por exemplo, a partir de (1) as seis raízes do polinômio $p(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^3$ são

$$r = 0, 0, 0, 1, 1, -2$$

Resumindo, temos o seguinte teorema importante.

B.1 TEOREMA *Se forem permitidas raízes imaginárias e se as raízes forem contadas de acordo com suas multiplicidades, então um polinômio de grau n tem exatamente n raízes.*

O TEOREMA DO RESTO

Quando dois inteiros positivos são divididos, eles podem ser expressos como o quociente mais o resto sobre o divisor, onde o resto é menor que o divisor. Por exemplo:

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

Se multiplicarmos essa equação por 5, obtemos

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

que estabelece que o *numerador é o divisor vezes o quociente mais o resto.*

O seguinte teorema, que daremos sem prova, é um resultado análogo para divisão de polinômios.

B.2 TEOREMA *Se $p(x)$ e $s(x)$ forem polinômios e se $s(x)$ não for o polinômio zero, então $p(x)$ pode ser expresso como*

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$$

onde $q(x)$ e $r(x)$ são o quociente e o resto que resultam quando $p(x)$ for dividido por $s(x)$; além disso, ou $r(x)$ é o polinômio zero ou o grau de $r(x)$ é menor do que o grau de $s(x)$.

No caso especial em que $p(x)$ for dividido por um polinômio de primeiro grau da forma $x - c$, o resto deve ser alguma constante r, pois ou é zero ou tem grau menor do que 1. Assim, o Teorema B. 2 implica que

$$p(x) = (x - c)q(x) + r$$

e isso, por sua vez, implica que $p(c) = r$. Em suma, temos o seguinte teorema.

B.3 TEOREMA (***Teorema do Resto***) *Se um polinômio $p(x)$ for dividido por $x - c$, então o resto é $p(c)$.*

► Exemplo 1 De acordo com o Teorema do Resto, o resto da divisão de

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 3$$

por $x + 4$ deve ser

$$p(-4) = 2(-4)^3 + 3(-4)^2 - 4(-4) - 3 = -67$$

Mostre que é isso o que acontece.

Solução Por divisão

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 3x^2 - 4x - 3 & x+4 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3 + 8x^2} & 2x^2 - 5x + 16 \\ \quad -5x^2 - 4x & \\ \quad \underline{-5x^2 - 20x} & \\ \qquad\quad 16x - 3 & \\ \qquad\quad \underline{16x + 64} & \\ \qquad\qquad -67 & \end{array}$$

o que mostra que o resto é –67.

Solução alternativa Como estamos dividindo por uma expressão da forma $x - c$ (onde $c = -4$), podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini em vez da divisão. Os cálculos são

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{-4} & 2 & 3 & -4 & -3 \\ & & -8 & 20 & -64 \\ \hline & 2 & -5 & 16 & -67 \end{array}$$

mostrando, novamente, que o resto é – 67. ◄

O TEOREMA DA FATORAÇÃO

Fatorar um polinômio $p(x)$ é escrevê-lo como um produto de polinômios de graus menores, chamados de ***fatores*** de $p(x)$. Para $s(x)$ ser um fator de $p(x)$, não pode haver resto quando $p(x)$ for dividido por $s(x)$. Por exemplo, se $p(x)$ puder ser fatorado como

$$p(x) = s(x)q(x) \tag{5}$$

então,

$$\frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \tag{6}$$

logo, dividindo $p(x)$ por $s(x)$, obtemos um quociente $q(x)$ e nenhum resto. Reciprocamente, (6) implica (5), logo $s(x)$ é um fator de $p(x)$ se não existir resto quando $p(x)$ for dividido por $s(x)$.

No caso especial em que $x - c$ for um fator de $p(x)$, o polinômio $p(x)$ pode ser expresso como

$$p(x) = (x - c)q(x)$$

o que implica $p(c) = 0$. Reciprocamente, se $p(c) = 0$, então, pelo Teorema do Resto, $x - c$ é um fator de $p(x)$, uma vez que o resto é zero quando $p(x)$ for dividido por $x - c$. Esses resultados estão resumidos no seguinte teorema.

B.4 TEOREMA (***Teorema da Fatoração***) *Um polinômio $p(x)$ tem $x - c$ como um fator se, e somente se, $p(c) = 0$.*

Segue desse teorema que as afirmações abaixo todas dizem a mesma coisa de diferentes maneiras:

- $x - c$ é um fator de $p(x)$
- $p(c) = 0$
- c é um zero de $p(x)$
- c é uma raiz da equação $p(x) = 0$
- c é uma solução da equação $p(x) = 0$
- c é um corte no eixo x de $y = p(x)$

► Exemplo 2 Confirme que $x - 1$ é um fator de

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

dividindo $p(x)$ por $x - 1$ e verificando que o resto é zero.

Solução Por divisão

$$\begin{array}{rl|l}
x^3 - 3x^2 - 13x - 15 & & x - 1 \\ \hline
\underline{x^3 - x^2} & & x^2 - 2x - 15 \\
-2x^2 - 13x & & \\
\underline{-2x^2 + 2x} & & \\
-15x + 15 & & \\
\underline{-15x + 15} & & \\
0 & &
\end{array}$$

o que mostra que o resto é zero.

Solução alternativa Como estamos dividindo por uma expressão da forma $x - c$, podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini. Os cálculos são

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{1} & 1 & -3 & -13 & 15 \\ & & 1 & -2 & -15 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

o que confirma ser zero o resto. ◄

■ USANDO UM FATOR PARA ENCONTRAR OUTROS FATORES

Se $x - c$ for um fator de $p(x)$, e se $q(x) = p(x) / (x - c)$, então

$$p(x) = (x - c)q(x) \tag{7}$$

logo, os fatores lineares adicionais de $p(x)$ podem ser obtidos fatorando-se o quociente $q(x)$.

► Exemplo 3 Fatore

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \tag{8}$$

completamente em fatores lineares.

Solução No Exemplo 2, mostramos que $x - 1$ é um fator de $p(x)$ e também vimos que $p(x) /(x - 1) = x^2 - 2x - 15$. Assim,

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x^2 - 2x - 15)$$

Fatorando-se por inspeção $x^2 - 2x - 15$, resulta

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x - 5)(x + 3)$$

o que é a fatoração linear completa de $p(x)$. ◄

■ MÉTODOS PARA ENCONTRAR RAÍZES

Uma equação quadrática geral $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser resolvida através da fórmula quadrática, que expressa a solução da equação em termos dos coeficientes. Versões dessa fórmula eram conhecidas desde os tempos da Babilônia, e no século XVII foram obtidas fórmulas para a solução de equações cúbicas e quárticas gerais. Porém, tentativas de encontrar fórmulas para a solução de equações gerais de quinto grau ou com grau maior foram infrutíferas. A razão para isso ficou clara quando, em 1829, o matemático francês Evariste Galois (1811-1832) provou que é impossível expressar a solução de uma equação geral de quinto ou maior grau em termos de seus coeficientes usando operações algébricas.

Hoje, temos poderosos programas de computação para encontrar os zeros de polinômios específicos. Por exemplo, leva somente alguns segundos para um CAS (p. ex., *Mathematica*, *Maple* ou *Derive*), mostrar que os zeros do polinômio

$$p(x) = 10x^4 - 23x^3 - 10x^2 + 29x + 6 \tag{9}$$

são

$$x = -1, \quad x = -\tfrac{1}{5}, \quad x = \tfrac{3}{2} \quad \text{e} \quad x = 2 \tag{10}$$

Os algoritmos usados por esses programas para encontrar os zeros, inteiros ou racionais, caso existam, de um polinômio estão baseados no teorema a seguir, o qual é provado em cursos avançados de Álgebra.

B.5 TEOREMA *Suponha que*

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

seja um polinômio com coeficientes inteiros.

(*a*) *Se r for um zero inteiro de p(x), então r deve ser um divisor do termo constante c_0.*

(*b*) *Se r = a/b for um zero racional de p(x), onde todos os fatores comuns de a e de b foram cancelados, então a deve ser um divisor do termo constante c_0, e b deve ser um divisor do coeficiente dominante c_n.*

Por exemplo, em (9), o termo constante é 6 (que tem por divisores ±1, ±2, ±3 e ±6) e o coeficiente dominante é 10 (que tem por divisores ±1, ±2, ±5 e ±10). Assim, os únicos zeros inteiros possíveis de $p(x)$ são

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

e os únicos zeros racionais não-inteiros possíveis são

$$\pm\tfrac{1}{2},\ \pm\tfrac{1}{5},\ \pm\tfrac{1}{10},\ \pm\tfrac{2}{5},\ \pm\tfrac{3}{2},\ \pm\tfrac{3}{5},\ \pm\tfrac{3}{10},\ \pm\tfrac{6}{5}$$

Usando um computador, é simples calcular $p(x)$ em cada um desses números e mostrar que seus únicos zeros são os números dados em (10).

► Exemplo 4 Resolva a equação $x^3 + 3x^2 - 7x - 21 = 0$.

Solução As soluções da equação são os zeros do polinômio

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 7x - 21$$

Vamos procurar, primeiro, pelos zeros inteiros. Como todos esses zeros devem dividir o termo constante, as únicas possibilidades são ±1, ±3, ±7 e ±21. Substituindo esses valores em $p(x)$ (ou usando o método do Exercício 6), obtemos que $x = -3$ é um zero inteiro. Isso nos diz que $x + 3$ é um fator de $p(x)$, que pode ser escrito como

$$x^3 + 3x^2 - 7x - 21 = (x + 3)\, q(x)$$

onde $q(x)$ é o quociente da divisão de $x^3 + 3x^2 - 7x - 21$ por $x + 3$. Deixamos a cargo do leitor mostrar, efetuando a divisão, que $q(x) = x^2 - 7$; logo

$$x^3 + 3x^2 - 7x - 21 = (x+3)(x^2-7) = (x+3)(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$$

o que nos diz que as soluções da equação dada são $x = 3$, $x = \sqrt{7} \approx 2{,}65$ e $x = -\sqrt{7} \approx -2{,}65$. ◄

EXERCÍCIOS B [C] CAS

1-2 Encontre o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ que resulta da divisão de $p(x)$ por $s(x)$.

1. (a) $p(x) = x^4 + 3x^3 - 5x + 10$; $s(x) = x^2 - x + 2$
   (b) $p(x) = 6x^4 + 10x^2 + 5$; $s(x) = 3x^2 - 1$
   (c) $p(x) = x^5 + x^3 + 1$; $s(x) = x^2 + x$
2. (a) $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x + 7$; $s(x) = x^2 - x + 1$
   (b) $p(x) = 2x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 1$; $s(x) = 2x^2 - x + 1$
   (c) $p(x) = 5x^6 + 4x^2 + 5$; $s(x) = x^3 + 1$

3-4 Use o algoritmo de Briot-Ruffini para encontrar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ que resulta da divisão de $p(x)$ por $s(x)$.

3. (a) $p(x) = 3x^3 - 4x - 1$; $s(x) = x - 2$
   (b) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; $s(x) = x + 5$
   (c) $p(x) = x^5 - 1$; $s(x) = x - 1$
4. (a) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$; $s(x) = x - 1$
   (b) $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 17x^2 - 27x - 9$; $s(x) = x + 4$
   (c) $p(x) = x^7 + 1$; $s(x) = x - 1$

5. Seja $p(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 4$. Use o algoritmo de Briot-Ruffini e o Teorema do Resto para encontrar $p(0)$, $p(1)$, $p(-3)$ e $p(7)$.

6. Seja $p(x)$ o polinômio do Exemplo 4. Use o algoritmo de Briot-Ruffini e o Teorema do Resto para calcular $p(x)$ em $x = \pm 1, \pm 3, \pm 7$ e ± 21.

7. Seja $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Encontre um polinômio $q(x)$ e uma constante r tais que

(a) $p(x) = (x - 2)\, q(x) + r$

(b) $p(x) = (x + 1)\, q(x) + r$

8. Seja $p(x) = x^5 - 1$. Encontre um polinômio $p(x)$ e uma constante r tais que

(a) $p(x) = (x + 1)\, q(x) + r$

(b) $p(x) = (x - 1)\, q(x) + r$

9. Em cada parte, faça uma lista de todos os possíveis candidatos a zeros racionais de $p(x)$.

(a) $p(x) = x^7 + 3x^3 - x + 24$

(b) $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7x - 10$

(c) $p(x) = x^{35} - 17$

10. Encontre todos os zeros inteiros de

$$p(x) = x^6 + 5x^5 - 16x^4 - 15x^3 - 12x^2 - 38x - 21$$

11-15 Fatore completamente os polinômios.

11. $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

12. $p(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$

13. $p(x) = x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

14. $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x - 9$

15. $p(x) = x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 34x^2 - 45x - 18$

C **16.** Para cada uma das fatorações obtidas nos Exercícios 11 a 15, verifique suas respostas usando um CAS.

17-21 Encontre todas as soluções reais das equações.

17. $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$

18. $2x^3 - 5x^2 - 10x + 3 = 0$

19. $3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0$

20. $2x^4 - x^3 - 14x^2 - 5x + 6 = 0$

21. $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 8x + 12 = 0$

C **22.** Para cada uma das equações resolvidas nos Exercícios 17 a 21, verifique sua resposta usando um CAS.

23. Obtenha todos os valores de k para os quais $x - 1$ é um fator do polinômio $p(x) = k^2x^3 - 7kx + 10$.

24. Será $x + 3$ um fator de $x^7 + 2187$? Justifique sua resposta.

C **25.** Uma fatia com 3 cm de espessura é cortada de um cubo, deixando um volume de 196 cm^3. Use um CAS para encontrar o comprimento de um lado do cubo original.

26. (a) Mostre que não há nenhum número racional positivo que exceda seu cubo por 1.

(b) Existe algum número real que exceda seu cubo por 1? Justifique sua resposta.

27. Use o Teorema da Fatoração para mostrar cada uma das seguintes afirmações.

(a) $x - y$ é um fator de $x^n - y^n$ para todos os valores inteiros positivos de n.

(b) $x + y$ é um fator de $x^n - y^n$ para todos os valores inteiros positivos pares de n.

(c) $x + y$ é um fator de $x^n + y^n$ para todos os valores inteiros positivos ímpares de n.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

► Exercícios 1.1 (página 12)

1. **(a)** $-2{,}9; -2{,}0; 2{,}35; 2{,}9$ **(b)** nenhum **(c)** 0 **(d)** $-1{,}75 \le x \le 2$, 15 **(e)** $y_{max} = 2{,}8$ em $x = -2{,}6$; $y_{min} = -2{,}2$ em $x = 1{,}2$

3. **(a)** sim **(b)** sim **(c)** não **(d)** não

5. **(a)** 1943 **(b)** 1960; 4200 **(c)** não, precisamos da população anual **(d)** guerra, *marketing* **(e)** divulgação de riscos de saúde, pressão social, campanha antifumo, aumento nos impostos

7. **(a)** 1999, em torno de \$43.400 **(b)** 1985, \$37.000 **(c)** segundo ano

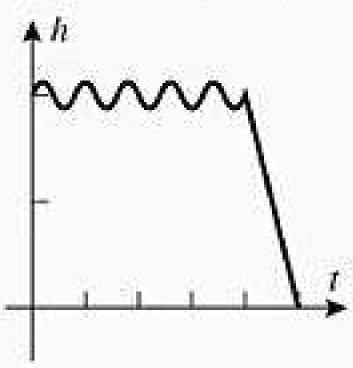
9. **(a)** $-2; 10; 10; 25; 4; 27t^2 - 2$ **(b)** $0; 4; -4; 6; 2\sqrt{2}$; $f(3t) = 1/3t$ para $t > 1$ e $f(3t) = 6t$ para $t \le 1$

11. **(a)** $x \ne 3$ **(b)** $x \le -\sqrt{3}, x \ge \sqrt{3}$ **(c)** $(-\infty, +\infty)$ **(d)** $x \ne 0$ **(e)** $x \ne \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

13. **(a)** $x \le 3$ **(b)** $-2 \le x \le 2$ **(c)** $x \ge 0$ **(d)** todos x **(e)** todos x

15. **(a)** não; guerra, peste, enchente, terremotos **(b)** decresce por 8 horas, dá um salto para cima e se repete

17.

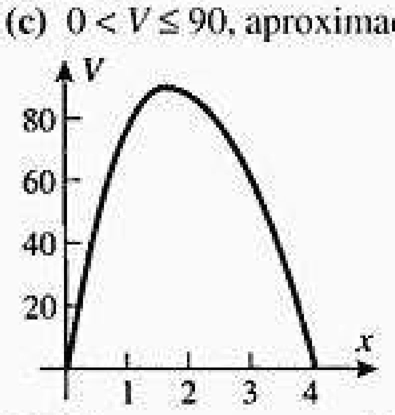


19. **(a)** 2,4
(b) nenhum
(c) $x \le 2$; $4 \le x$
(d) $y_{min} = -1$; nenhum máximo

21. $h = L(1 - \cos\theta)$

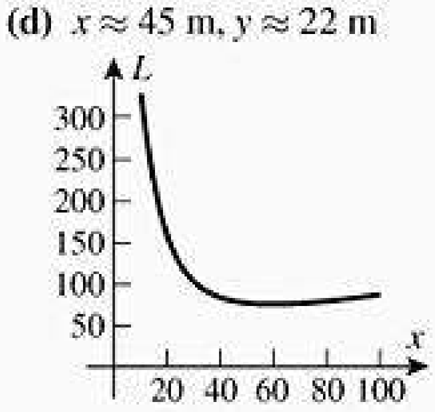
23. **(a)** $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ 4x+1, & x \ge 0 \end{cases}$ **(b)** $g(x) = \begin{cases} 1-2x, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \\ 2x-1, & x \ge 1 \end{cases}$

25. **(a)** $V = (8 - 2x)(15 - 2x)x$
(b) $0 < x < 4$
(c) $0 < V \le 90$, aproximadamente



(d) V parece ter um máximo para $x \approx 1{,}7$.

27. **(a)** $L = x + 2y$
(b) $L = x + 2000/x$
(c) $0 < x \le 100$
(d) $x \approx 45$ m, $y \approx 22$ m



29. **(a)** $r \approx 3{,}4$; $h \approx 13{,}8$ **(b)** mais alto **(c)** $r \approx 3{,}1$ cm; $h \approx 16{,}0$ cm; $C \approx 4{,}76$ centavos

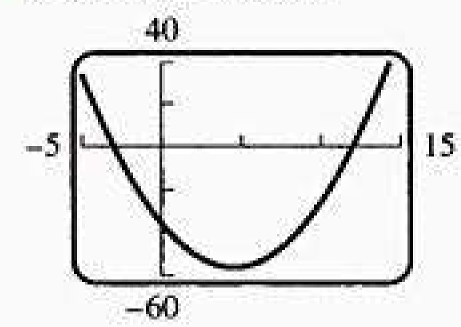
31. **(i)** $x = 1, -2$ **(ii)** $g(x) = x + 1$, para todo x

33. **(a)** 25°F **(b)** 13°F **(c)** 5°F **35.** 15°F

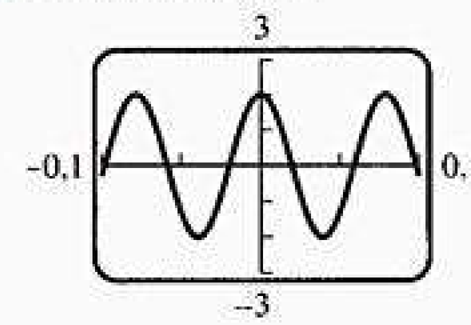
► Exercícios 1.2 (página 24)

1. (e) **3.** (b), (c) **5.** $[-3, 3] \times [0, 5]$

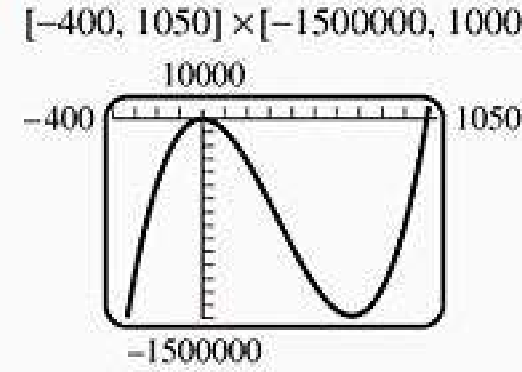
9. $[-5, 14] \times [-60, 40]$



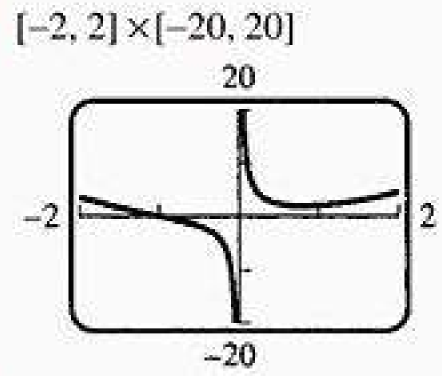
11. $[-0{,}1; 0{,}1] \times [-3, 3]$



13. $[-400, 1050] \times [-1500000, 10000]$

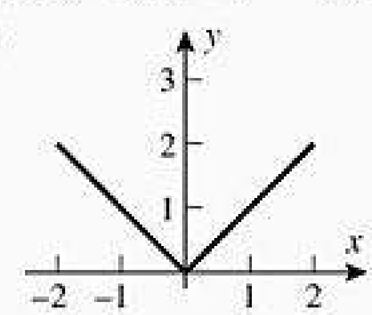


15. $[-2, 2] \times [-20, 20]$

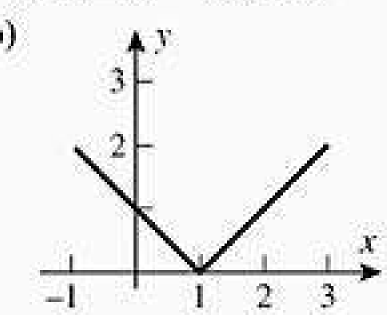


19. **(a)** $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ **(b)** $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ **(c)** não

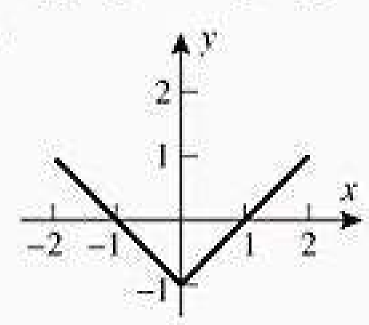
21. **(a)**



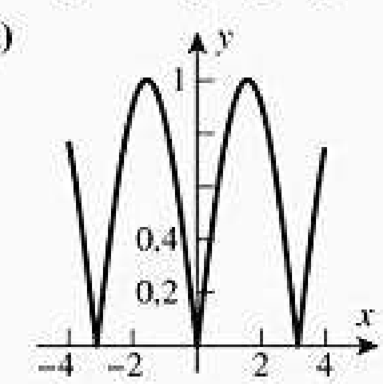
(b)



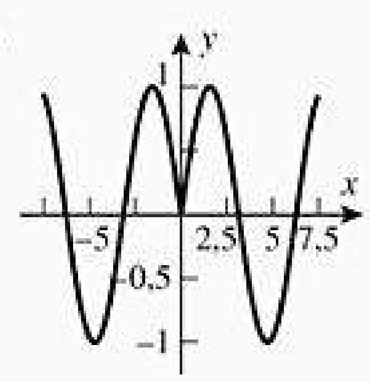
(c)



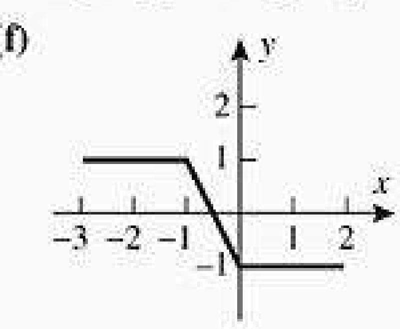
(d)



(e)

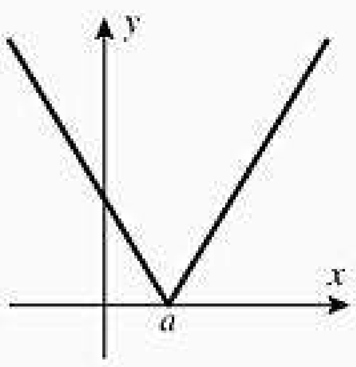


(f)

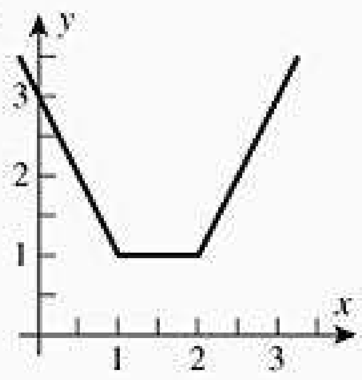


23. O gráfico de $y = |f(x)|$ consiste naquelas partes do gráfico de $y = f(x)$ que ficam acima do eixo x junto com a reflexão pelo eixo x das partes do gráfico de $y = f(x)$ que ficam abaixo do eixo x.

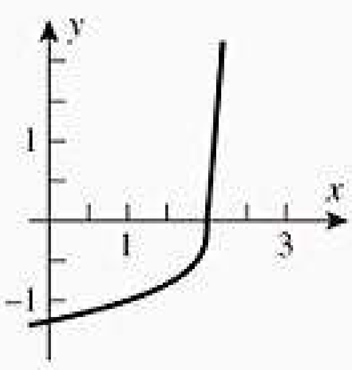
25. **(a)**



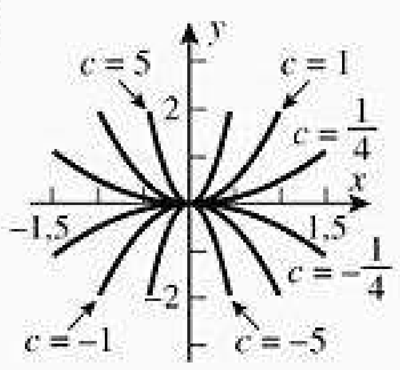
(b)



27.

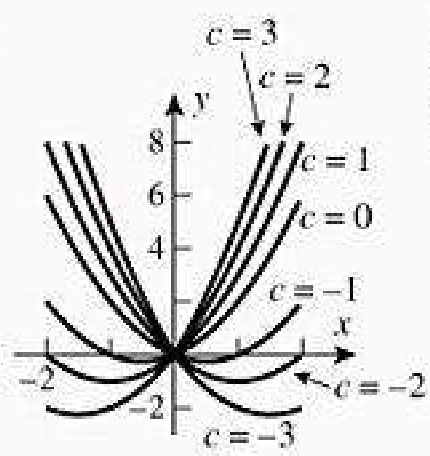


31. **(a)**



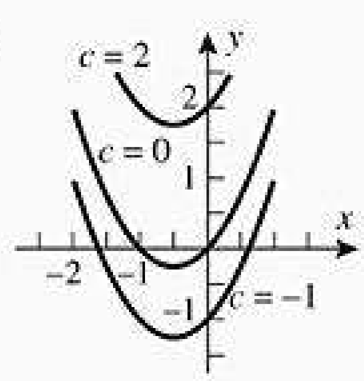
O gráfico é estendido na direção vertical e refletido pelo eixo x se $c < 0$.

(b)



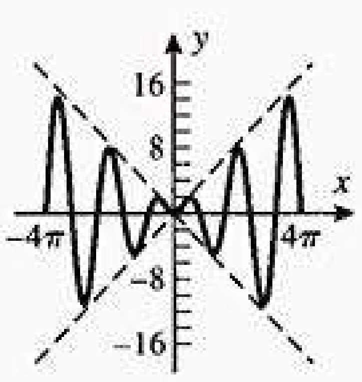
O gráfico é transladado de tal modo que seu vértice está na parábola $y = -x^2$.

(c)



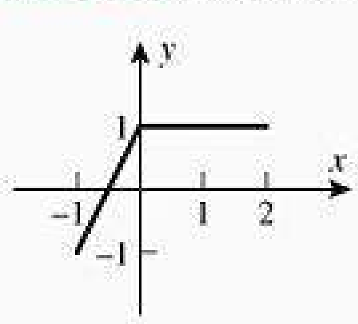
O gráfico é transladado verticalmente.

33.

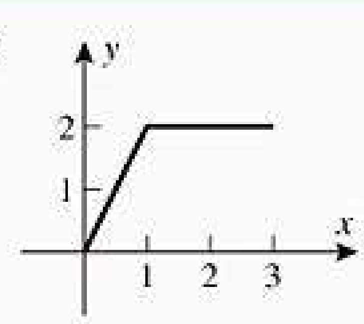


► Exercícios 1.3 (página 36)

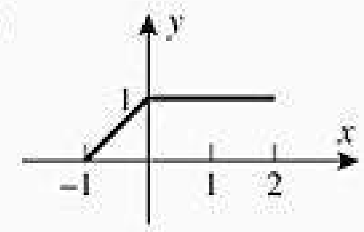
1. **(a)**



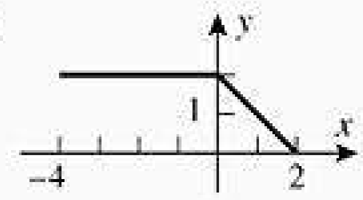
(b)



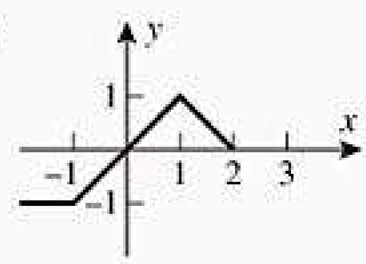
(c)



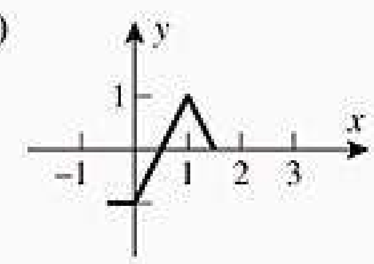
(d)



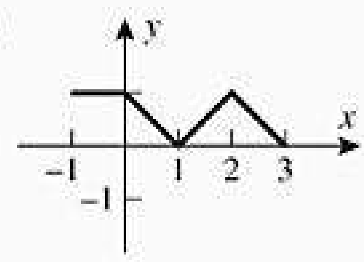
3. **(a)**



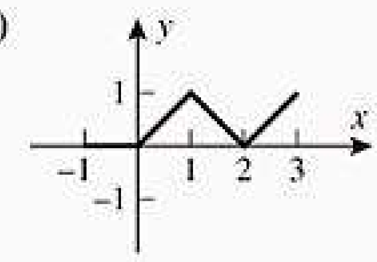
(b)



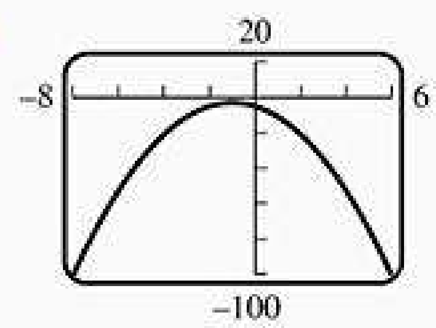
(c)



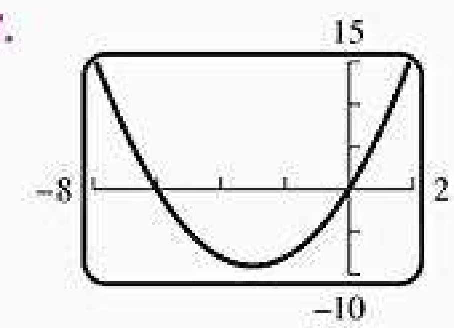
(d)



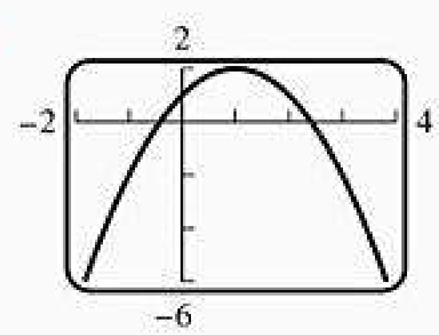
5.



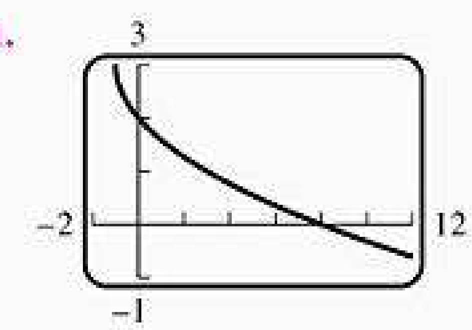
7.



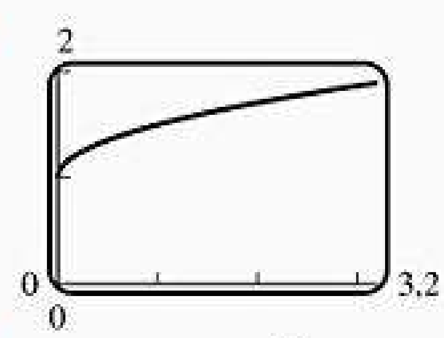
9.



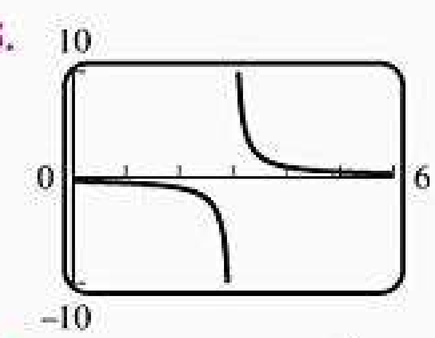
11.



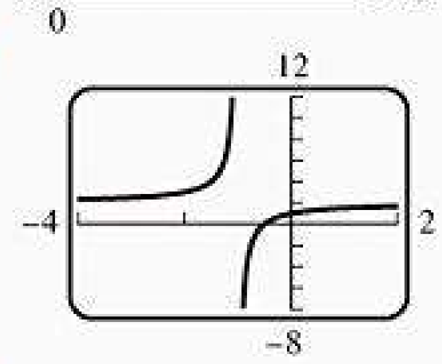
13.



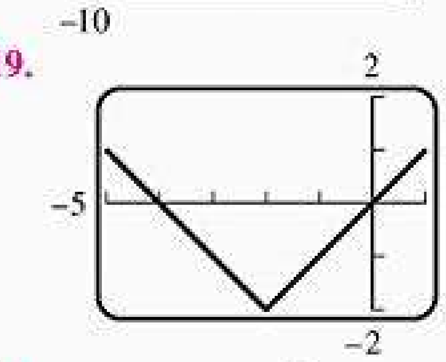
15.



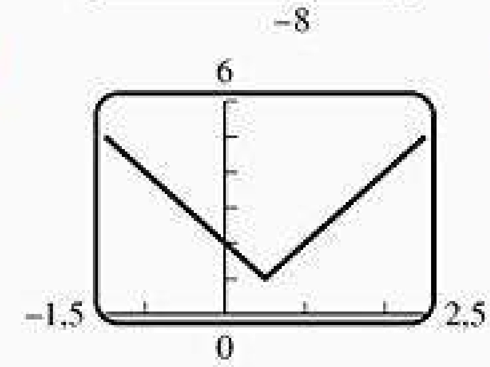
17.



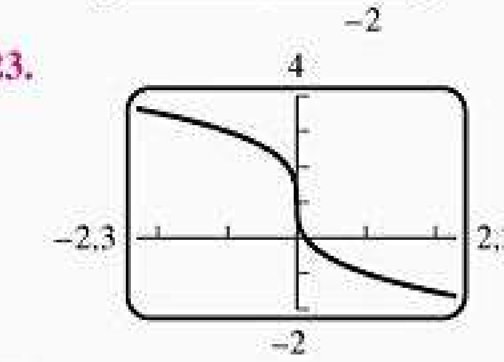
19.



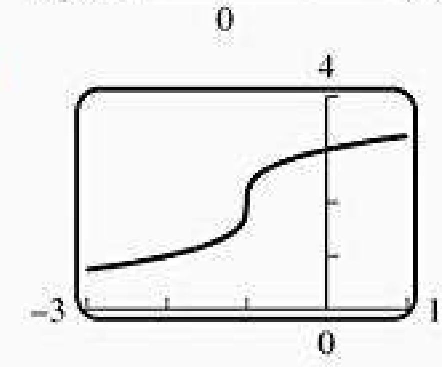
21.



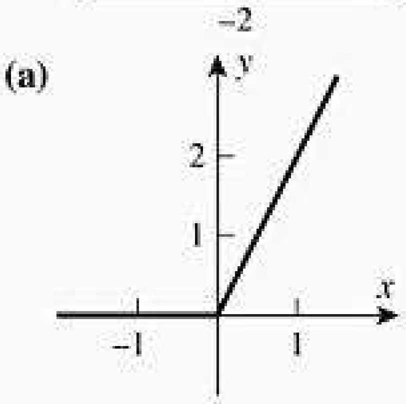
23.



25.



27. **(a)**



(b) $y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

29. $3\sqrt{x-1}, x \geq 1$; $\sqrt{x-1}, x \geq 1$; $2x - 2, x \geq 1$; $2, x > 1$

31. **(a)** 3 **(b)** 9 **(c)** 2 **(d)** 2

33. **(a)** t^4+1 **(b)** t^2+4t+5 **(c)** x^2+4x+5 **(d)** $\dfrac{1}{x^2}+1$
(e) $x^2+2xh+h^2+1$ **(f)** x^2+1 **(g)** $x+1$ **(h)** $9x^2+1$

35. $1-x,\ x\le 1;\ \sqrt{1-x^2},\ |x|\le 1$

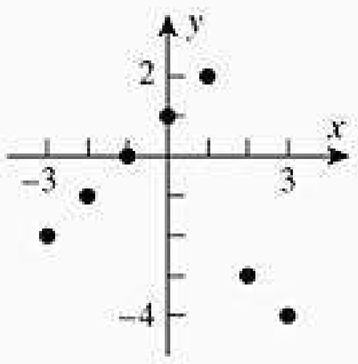
37. $\dfrac{1}{1-2x},\ x\neq \dfrac{1}{2},\ 1;\ -\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2},\ x\neq 0,\ 1$ **39.** $x^{-6}+1$

41. **(a)** $g(x)=\sqrt{x},\ h(x)=x+2$ **(b)** $g(x)=|x|,\ h(x)=x^2-3x+5$

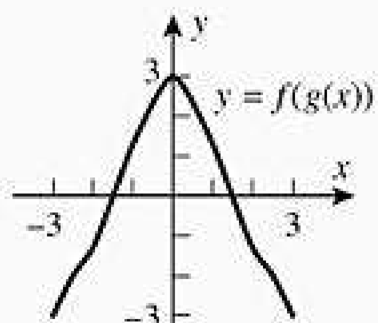
43. **(a)** $g(x)=x^2,\ h(x)=\text{sen}\ x$ **(b)** $g(x)=3/x,\ h(x)=5+\cos x$

45. **(a)** $f(x)=x^3;\ g(x)=1+\text{sen}\ x,\ h(x)=x^2$
(b) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=1-x,\ h(x)=\sqrt[3]{x}$

47.



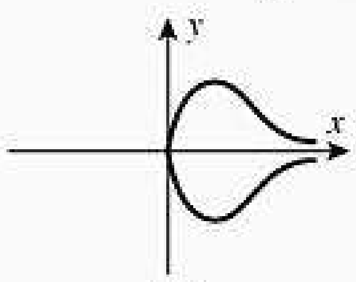
49.



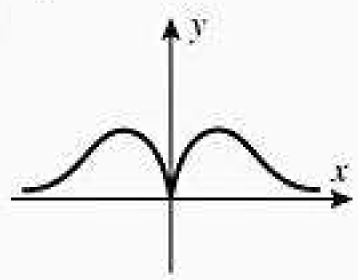
51. ±1,5; ±2 **53.** $3w+3x;\ 6x+3h$ **55.** $-\dfrac{1}{xw};\ -\dfrac{1}{x(x+h)}$

57. f = nenhum dos dois, g = ímpar, h = par

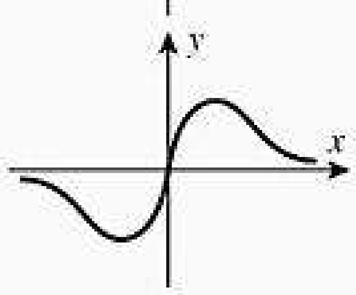
59. **(a)**



(b)



(c)

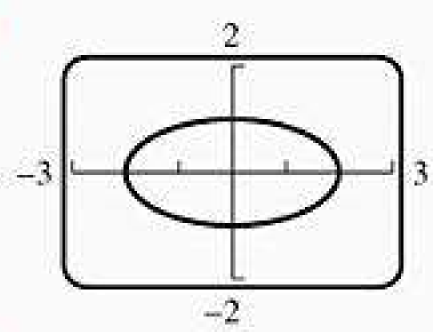


61. **(a)** par **(b)** ímpar **(c)** ímpar **(d)** nenhum

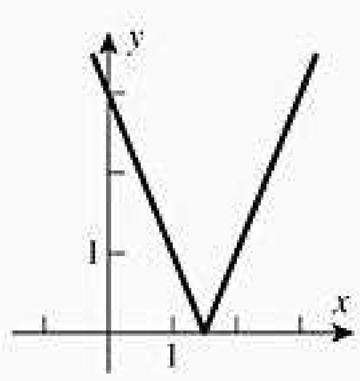
63. **(a)** par **(b)** ímpar **(c)** par **(d)** nenhum **(e)** ímpar **(f)** par

67. **(a)** eixo y
(b) origem
(c) eixo x, eixo y, origem

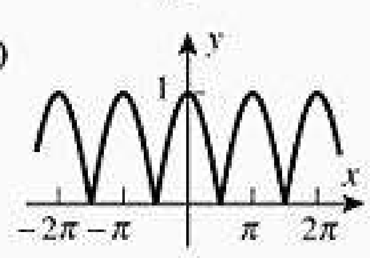
69.



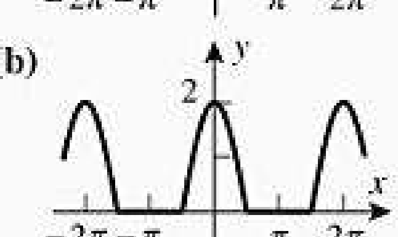
71.



73. **(a)**



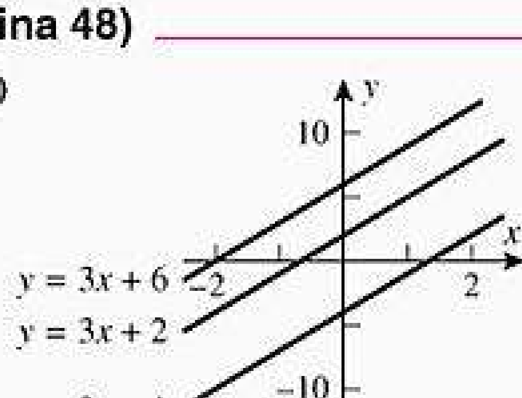
(b)



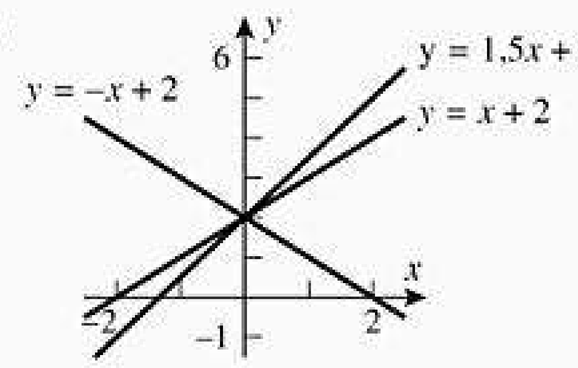
75. sim; $f(x)=x^k,\ g(x)=x^n$

► Exercícios 1.4 (página 48)

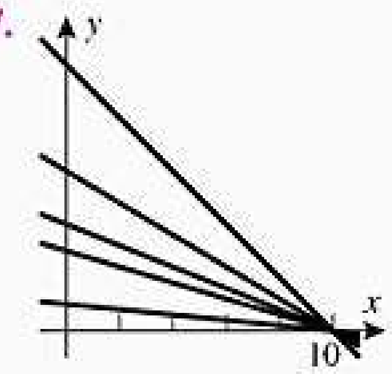
1. **(a)** $y=3x+b$ **(b)** $y=3x+6$ **(c)**



3. **(a)** $y=mx+2$ **(b)** $y=-x+2$ **(c)**

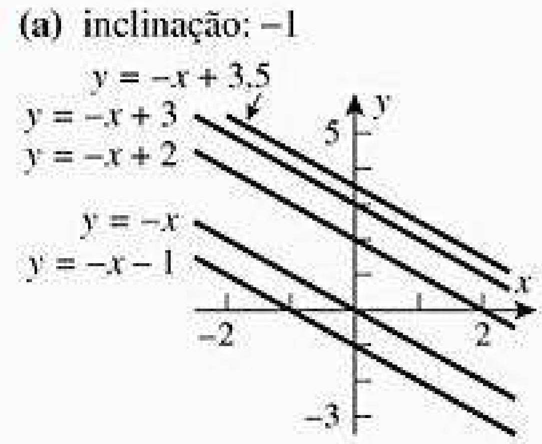


5. $y=\pm\dfrac{9-x_0x}{\sqrt{9-x_0^2}}$ **7.**

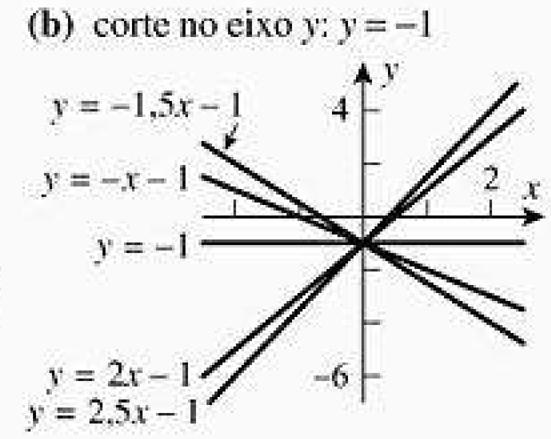


Cortes com eixo y representam valor atual do item sendo depreciado

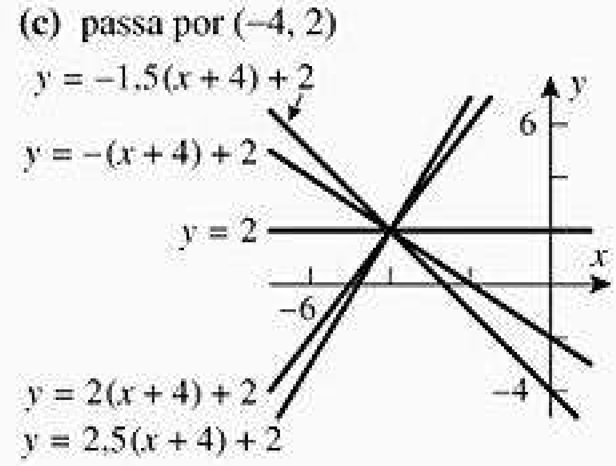
9. **(a)** inclinação: −1



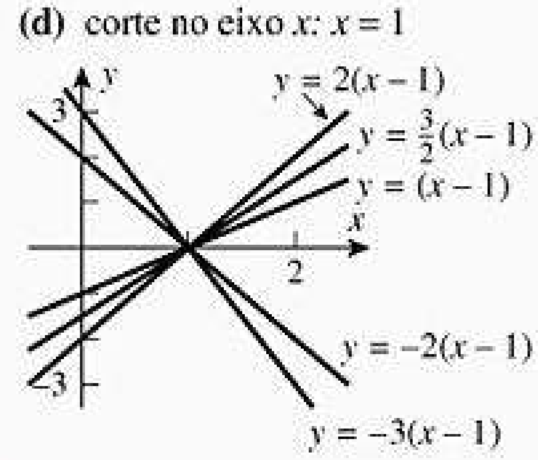
(b) corte no eixo y: $y=-1$



(c) passa por (−4, 2)

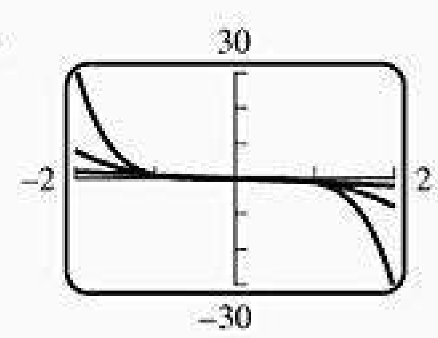


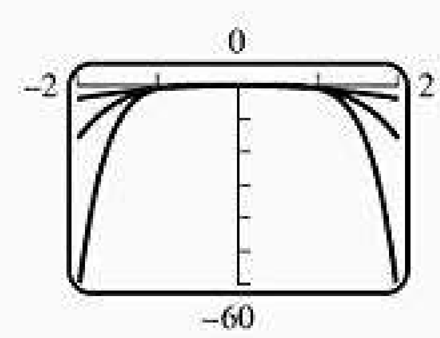
(d) corte no eixo x: $x=1$



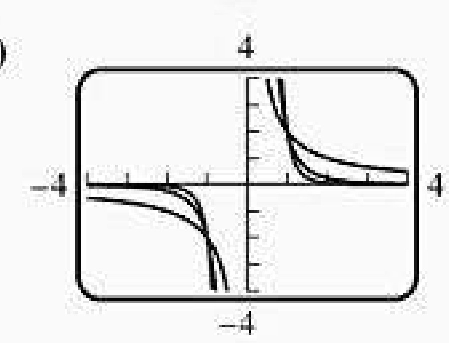
11. **(a)** VI
(b) IV
(c) III
(d) V
(e) I
(f) II

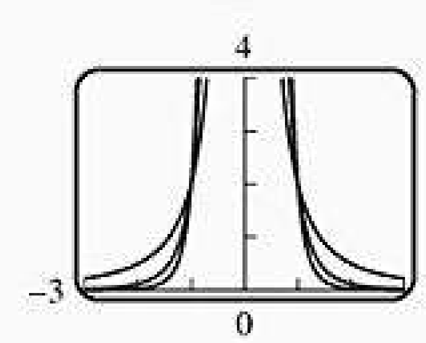
13. **(a)**



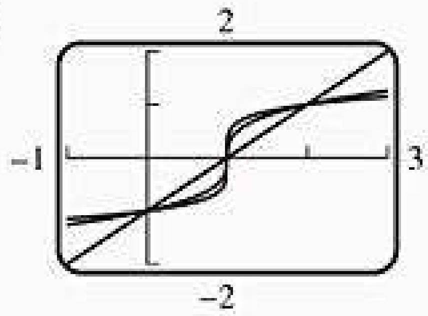


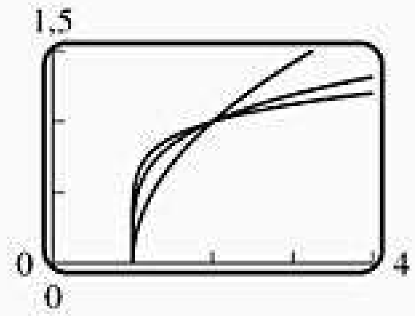
(b)



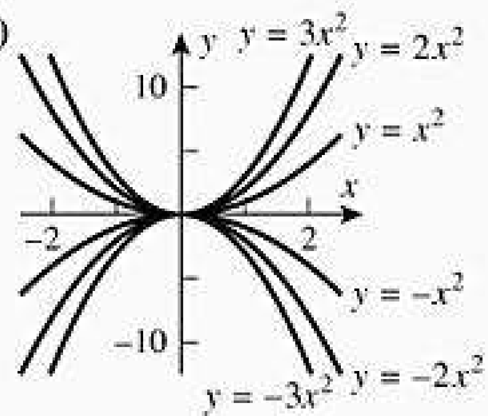


(c)

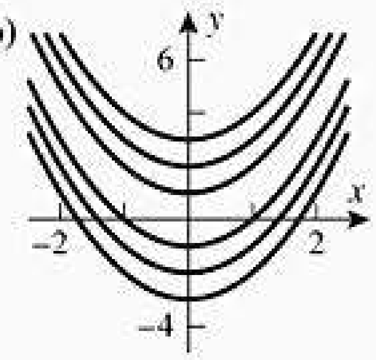




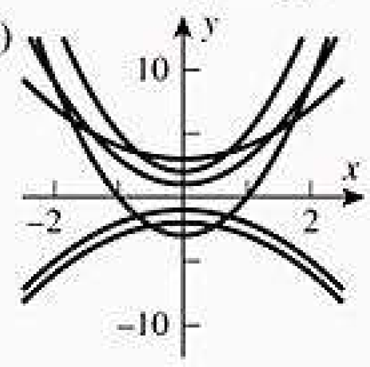
15. **(a)**



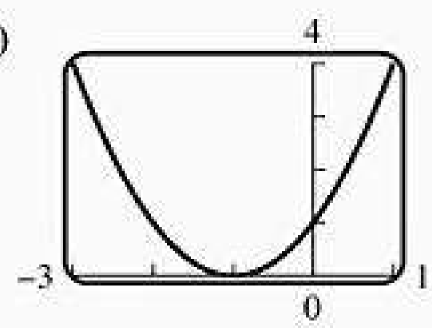
(b)



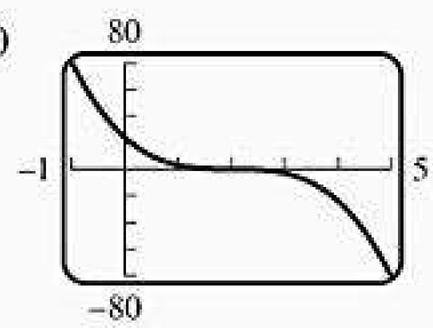
(c)



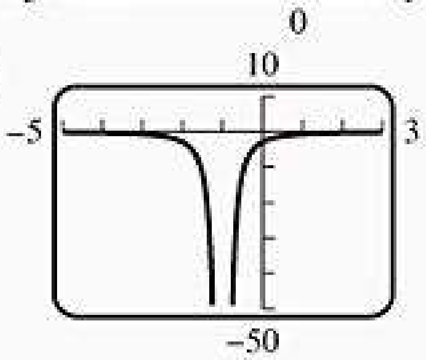
17. **(a)**



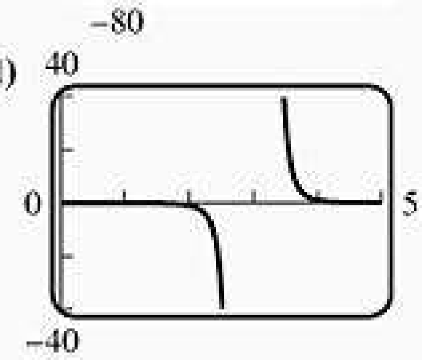
(b)



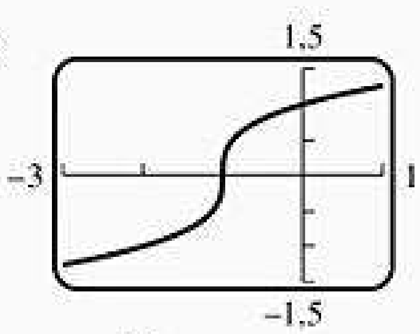
(c)



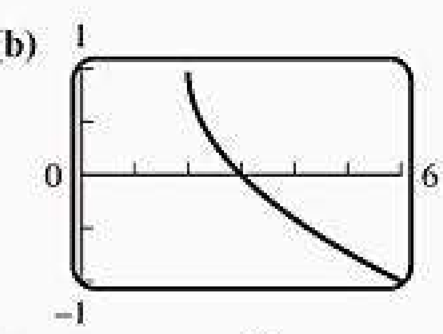
(d)



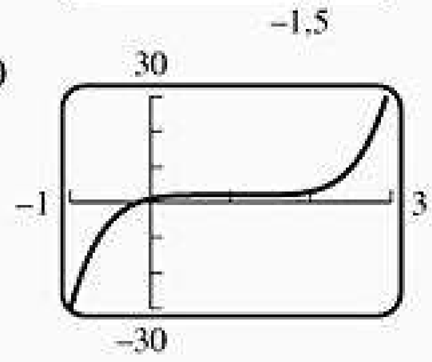
19. **(a)**



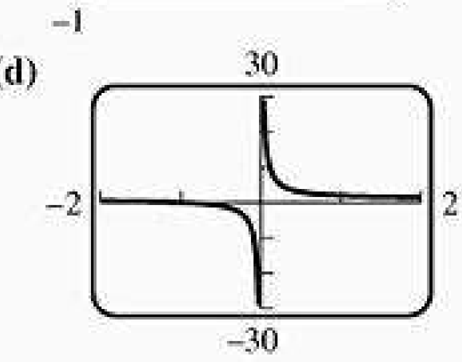
(b)



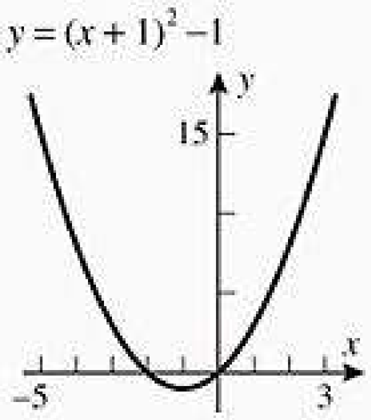
(c)



(d)



21. $y = (x+1)^2 - 1$

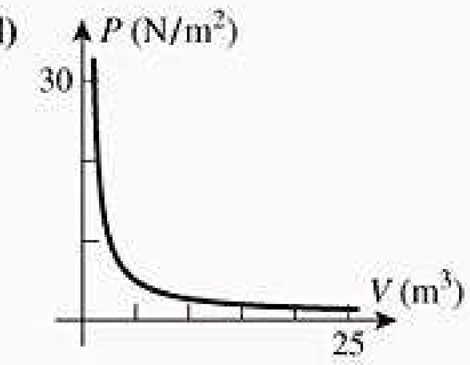


23. **(a)** newton-metro (N·m) **(b)** 20 N·m

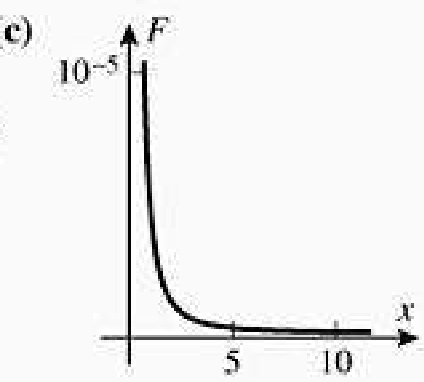
(c)

V (L)	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0
P (N/m^2)	80×10^3	40×10^3	20×10^3	$13{,}3 \times 10^3$	10×10^3

(d)



25. **(a)** $k = 0{,}000045$ N·m^2
(b) 0,000005 N
(d) A força torna-se infinita; a força tende a zero.
(c)

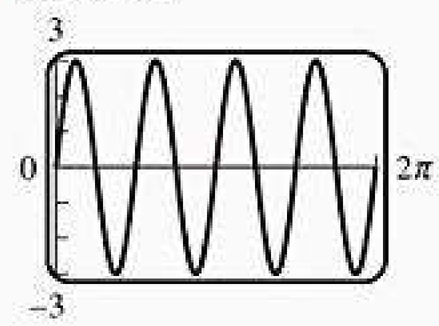


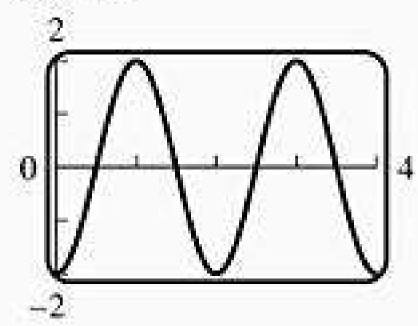
27. **(a)** II; $y = 1$, $x = -1$ e 2 **(b)** I; $y = 0$, $x = -2$ e 3 **(c)** IV; $y = 2$
(d) III; $y = 0$, $x = -2$

29. **(a)** $y = 3 \text{ sen } (x/2)$ **(b)** $y = 4 \cos 2x$ **(c)** $y = -5 \text{ sen } 4x$

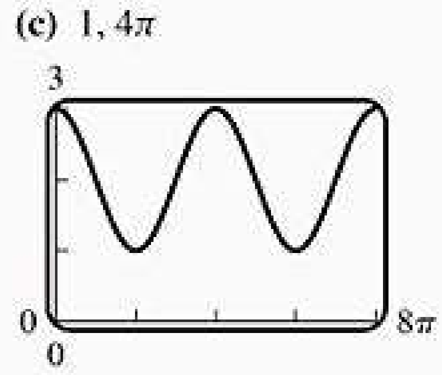
31. **(a)** $y = \text{sen } [x + (\pi/2)]$ **(b)** $y = 3 + 3 \text{ sen } (2x/9)$
(c) $y = 1 + 2\,\text{sen}\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

33. **(a)** 3, $\pi/2$ **(b)** 2, 2





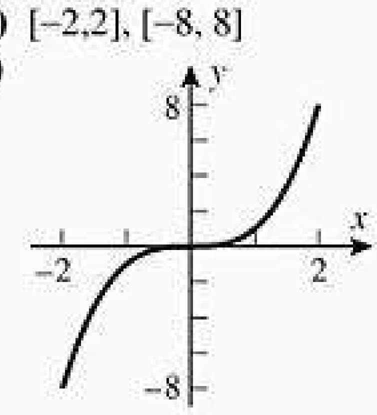
(c) 1, 4π



35. **(b)** $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\theta = \text{arc tg } (A_2/A_1)$
(c) $x = \frac{5\sqrt{13}}{2} \text{ sen}(2\pi t + \text{arc tg } \frac{1}{2\sqrt{3}})$

► Exercícios 1.5 (página 62)

1. **(a)** sim **(b)** não **(c)** sim **(d)** não
3. **(a)** sim **(b)** sim **(c)** não **(d)** sim **(e)** não **(f)** não
5. **(a)** sim **(b)** não
7. **(a)** 8, −1, 0
(b) [−2,2], [−8, 8]
(c)



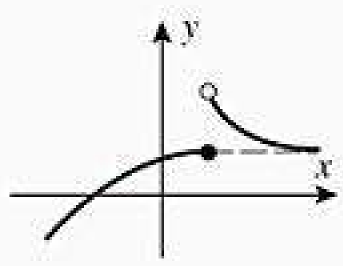
9. $\frac{1}{7}(x + 6)$
11. $\sqrt[3]{(x + 5)/3}$
13. $(x^3 + 1)/2$
15. $-\sqrt{3/x}$
17. $\begin{cases} (5/2) - x, & x > 1/2 \\ 1/x, & 0 < x \le 1/2 \end{cases}$
19. $x^{1/4} - 2$ para $x \ge 16$

21. $\frac{1}{2}(3 - x^2)$ para $x \le 0$ **23.** $\frac{1}{10}(1 + \sqrt{1 - 20x})$ para $x \le -4$

25. **(a)** $y = (6{,}214 \times 10^{-4})x$ **(b)** $x = \frac{10^4}{6{,}214}y$
(c) quantos metros em y milhas

27. **(b)** simetria em torno da reta $y = x$ **29.** 10

33.

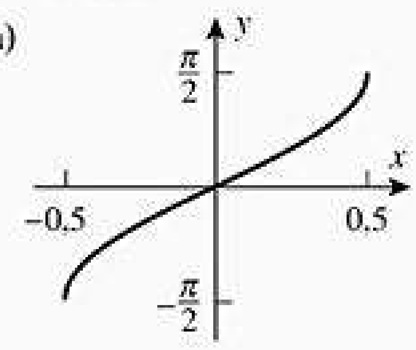


35. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$

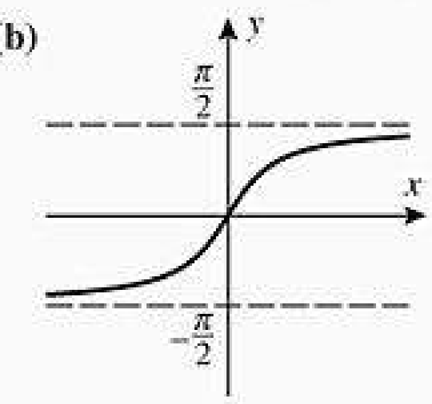
37. **(a)** $0 \le x \le \pi$ **(b)** $-1 \le x \le 1$ **(c)** $-\pi/2 < x < \pi/2$
(d) $-\infty < x < +\infty$ **39.** $\frac{24}{25}$

41. **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

43. **(a)**



(b)

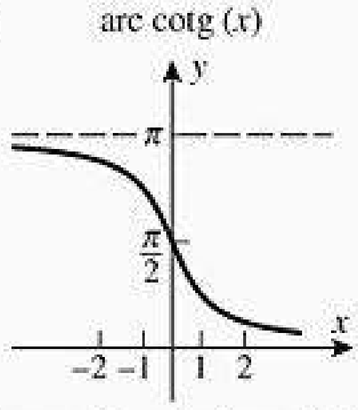


45. **(a)** $x = 3{,}6964$ rad **(b)** $\theta = -76{,}7^{\circ}$

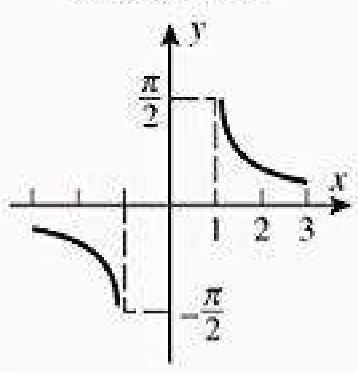
47. **(a)** 0,25545, erro **(b)** $|x| \le$ sen 1

49. **(a)**

arc cotg (x)



arc cossec (x)



(b) arc cotg x: todos x, $0 < y < \pi$
arc cossec x: $|x| \ge 1$, $0 < |y| < \pi/2$

51. **(a)** $55{,}0^{\circ}$ **(b)** $33{,}6^{\circ}$ **(c)** $25{,}8^{\circ}$ **53.** **(a)** 21,1 horas **(b)** 2,9 horas

55. 29°

► Exercícios 1.6 (página 74)

1. **(a)** −4 **(b)** 4 **(c)** $\frac{1}{4}$ **3.** **(a)** 2,9690 **(b)** 0,0341

5. **(a)** 4 **(b)** −5 **(c)** 1 **(d)** $\frac{1}{2}$ **7.** **(a)** 1,3655 **(b)** −0,3011

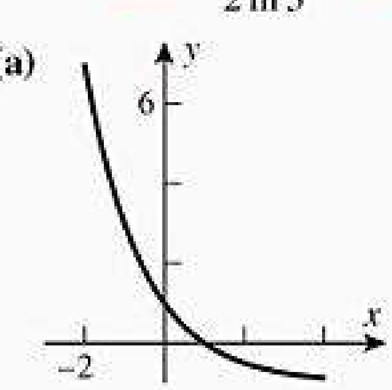
9. **(a)** $2r + \dfrac{s}{2} + \dfrac{t}{2}$ **(b)** $s - 3r - t$

11. **(a)** $1 + \log x + \frac{1}{2}\log(x-3)$ **(b)** $2\ln|x| + 3\ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

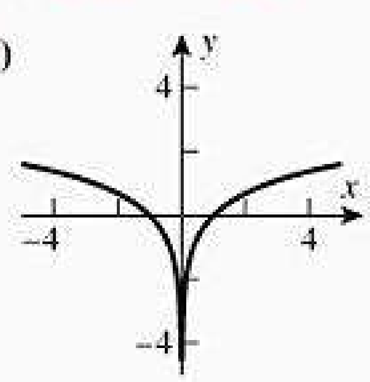
13. $\log \frac{256}{3}$ **15.** $\ln \dfrac{\sqrt[3]{x}(x+1)^2}{\cos x}$ **17.** 0,01 **19.** e^2 **21.** 4 **23.** 10^5

25. $\sqrt{3/2}$ **27.** $-\dfrac{\ln 3}{2\ln 5}$ **29.** $\frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}$ **31.** −2 **33.** 0, −ln 2

35. **(a)**

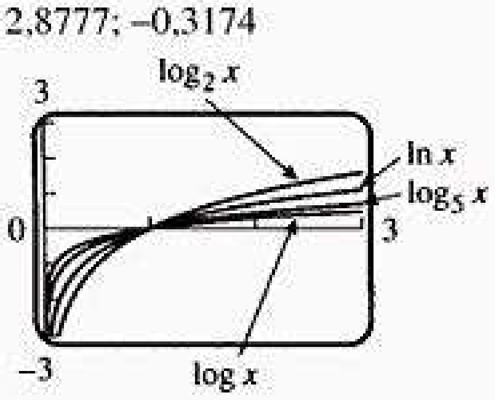


(b)



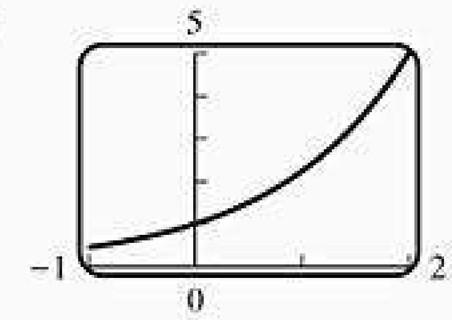
37. 2,8777; −0,3174

39.



41. $x \approx 1{,}471; 7{,}857$

43. **(a)** não **(b)** $y = 2^{x/4}$ **(c)** $y = 2^{-x}$ **(d)** $y = (\sqrt{5})^x$



45. $\log \frac{1}{2} < 0$, então $3 \log \frac{1}{2} < 2 \log \frac{1}{2}$ **47.** 201 dias

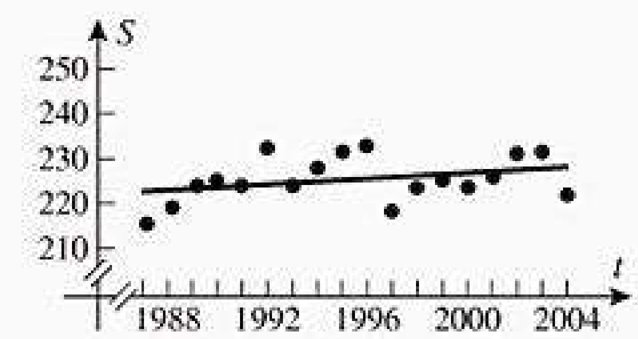
49. **(a)** 7,4 básico **(b)** 4,2 ácido **(c)** 6,4 ácido **(d)** 5,9 ácido

51. **(a)** 140 dB, causa dano **(b)** 120 dB, causa dano
(c) 80 dB, não causa dano **(d)** 75 dB, não causa dano

53. ≈ 200 **55.** **(a)** $\approx 5 \times 10^{16}$ J **(b)** $\approx 0{,}67$

► Exercícios 1.7 (página 82)

1. II **3.** $S = 0{,}32895t - 430{,}94$, coeficiente = 0,3433

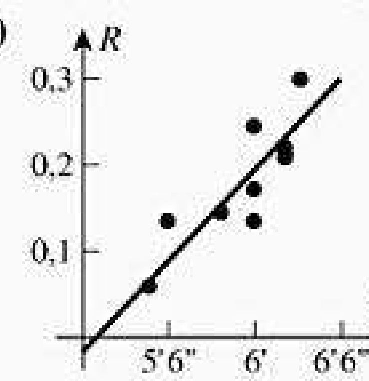


5. **(a)** $p = 0{,}0146T + 3{,}98$; 0,9999 **(b)** 3,25 atm **(c)** ≈ -272ºC

7. **(a)** $R = 0{,}00723T + 1{,}55$ **(b)** ≈ -214º C

9. **(a)** $S = 0{,}50179\omega - 0{,}00643$ **(b)** $\approx 16{,}0$ kgf

11. **(a)** $R = 0{,}2087h - 1{,}0549$; 0,842333 **13.** **(a)** $3b^2 + 2b + 1$
(b) **(b)** $y = x - 1/3$



15. A reta de regressão linear liga o terceiro ponto ao ponto médio do segmento de reta vertical determinado pelos dois outros pontos.

17. **(a)** 181,8 km/s/Mly **(b)** $1{,}492 \times 10^{10}$ anos **(c)** aumentar

19. $T = 849{,}5 + 143{,}5 \operatorname{sen}\left[\dfrac{\pi}{183}t - \dfrac{\pi}{2}\right]$ **21.** $t = 0{,}445\sqrt{d}$

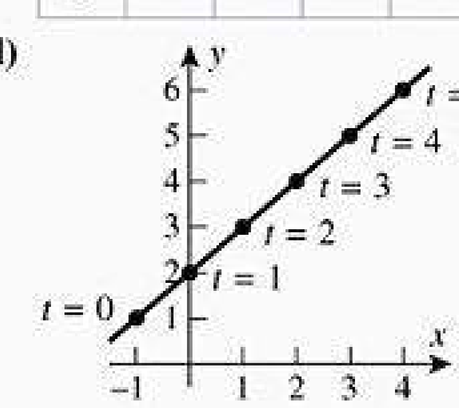
► Exercícios 1.8 (página 93)

1. **(a)** $y = x + 2$

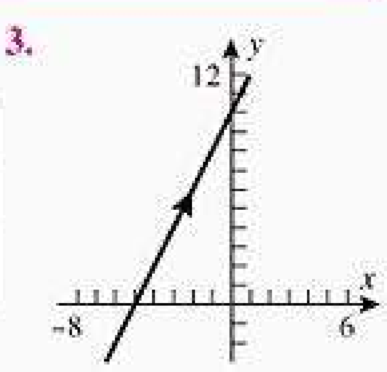
(c)

t	0	1	2	3	4	5
x	−1	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5	6

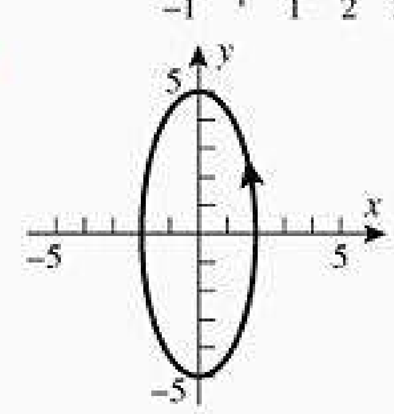
(d)



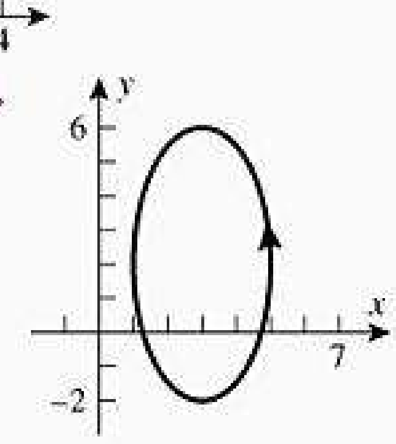
3.



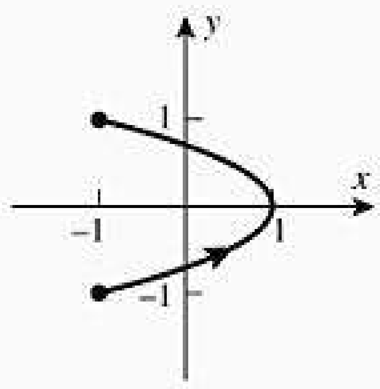
5.



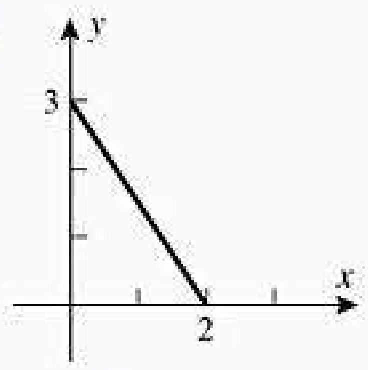
7.



9.



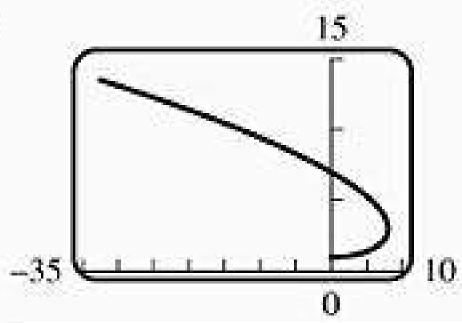
11.



13. $x = 5\cos t,\ y = -5 \operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 2\pi$ **15.** $x = 2,\ y = t$

17. $x = t^2,\ y = t,\ -1 \le t \le 1$

19. **(a)**

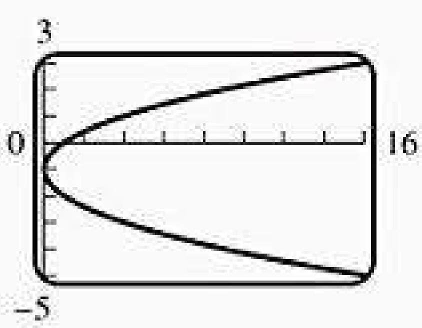


(b)

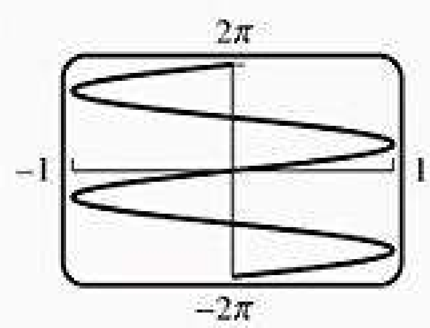
t	0	1	2	3	4	5
x	0	5,5	8	4,5	−8	−32,5
y	1	1,5	3	5,5	9	13,5

(c) $t = 0,\ 2\sqrt{3}$ **(d)** $0 < t < 2\sqrt{2}$ **(e)** 2

21. **(a)**



(b)



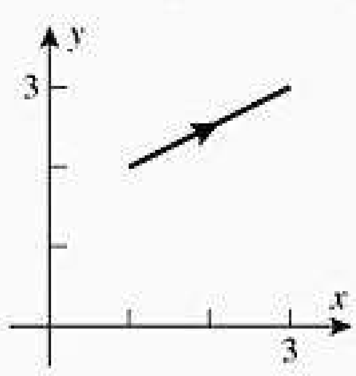
23. **(c)** $x = 1 + t,\ y = -2 + 6t,\ 0 \le t \le 1$

(d) $x = 2 - t,\ y = 4 - 6t,\ 0 \le t \le 1$

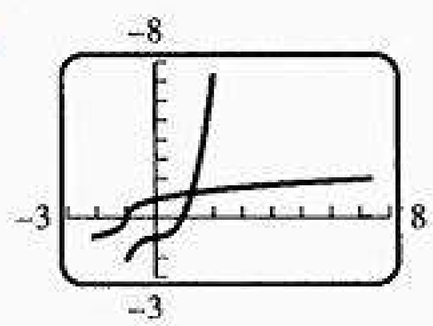
25. **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{3}{4}$ **27.** **(a)** IV **(b)** II **(c)** V **(d)** VI **(e)** III **(f)** I

29. À medida que t varia, um ponto sobre a curva move-se em ambos os sentidos ao longo de uma parte da parábola $y = x^2$.

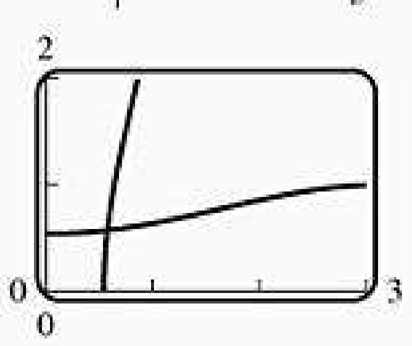
31. **(b)**



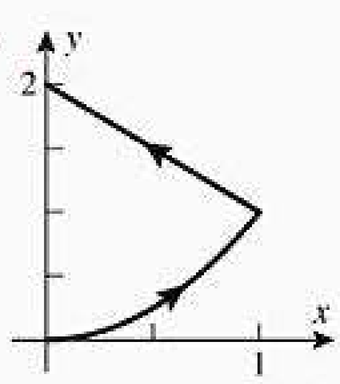
33.



35.



37.



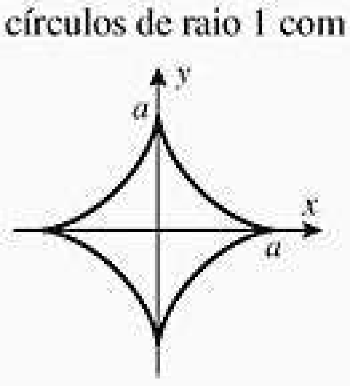
39. **(a)** $x = 4\cos t\ y = 3 \operatorname{sen} t$ **(b)** $x = -1 + 4\cos t,\ y = 2 + 3 \operatorname{sen} t$

41. **(a)** $x = 400\sqrt{2}t,\ y = 400\sqrt{2}t - 4{,}9t^2$ **(b)** 16.326,53 m

(c) 65.306,12 m

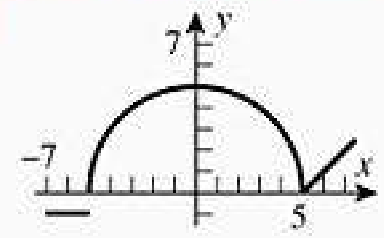
43. **(a)** elipses com centro fixado, variando o eixo de simetria **(b)** (supondo $a \neq 0,\ b \neq 0$) elipses com centro variando, fixado o eixo de simetria **(c)** círculos de raio 1 com centros na reta $y = x - 1$

45. **(a)**

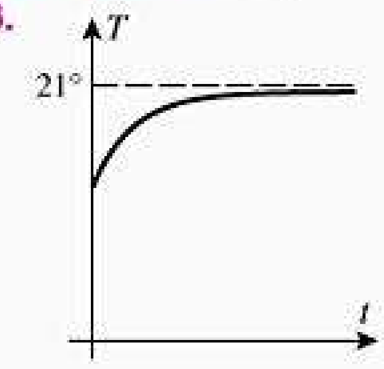


► Capítulo 1. Exercícios de Revisão (página 96)

1.



3.



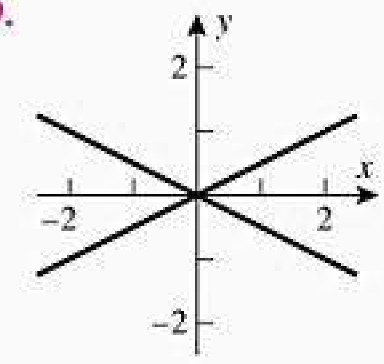
5. **(a)** $C = 5x^2 + (64/x)$ **(b)** $x > 0$

7. **(a)** $V = (180 - 2x)(150 - x)\,x \text{ cm}^3$

(b) $0 < x < 90$

(c) 36,4 cm × 113,6 cm × 107,2 cm

9.



11.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	−1	2	1	3	−2	−3	4	−4
$g(x)$	3	2	1	−3	−1	−4	4	−2	0
$(f \circ g)(x)$	4	−3	−2	−1	1	0	−4	2	3
$(g \circ f)(x)$	−1	−3	4	−4	−2	1	2	0	3

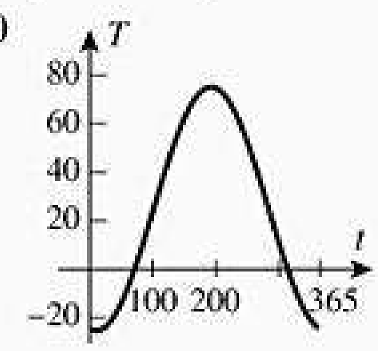
13. 0, −2 **15.** $1/(2 - x^2),\ x \neq \pm 1, \pm\sqrt{2}$

17. **(a)** ímpar **(b)** par **(c)** nenhuma das duas **(d)** par

19. **(a)** círculos de raio 1 centrados na parábola $y = x^2$

(b) parábolas que se abrem para cima com vértices na reta $y = x/2$

21. **(a)**



(b) 11 de janeiro **(c)** 122

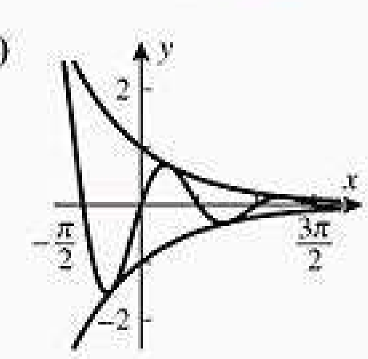
23. $A : \left(-\frac{2}{3}\pi,\ 1 - \sqrt{3}\right);\ B : \left(\frac{1}{3}\pi,\ 1 + \sqrt{3}\right);\quad C : \left(\frac{2}{3}\pi,\ 1 + \sqrt{3}\right);$
$D : \left(\frac{5}{3}\pi,\ 1 - \sqrt{3}\right)$

27. **(a)** $\frac{1}{2}(x + 1)^{1/3}$ **(b)** não há **(c)** $\frac{1}{2}\ln(x - 1)$ **(d)** $\dfrac{x + 2}{x - 1}$

(e) $\dfrac{1}{2 + \operatorname{arc\,sen} x}$ **(f)** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{3}\right),\ x \le -\dfrac{2}{3\pi - 2}$ ou $x \ge \dfrac{2}{3\pi + 2}$

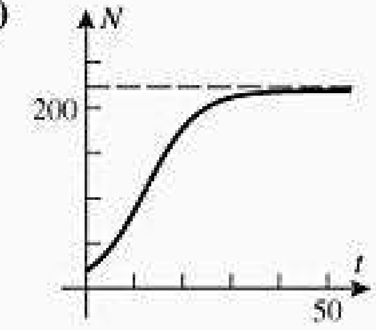
29. **(a)** $\frac{33}{65}$ **(b)** $\frac{56}{65}$ **31.** 10^{55} km **33.** $15x + 2$

35. **(a)**



(b) $-\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2};\quad -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$

37. **(a)**



(b) em torno de 10 anos **(c)** 220 ovelhas

39. **(b)** 3,654; 332.105,108

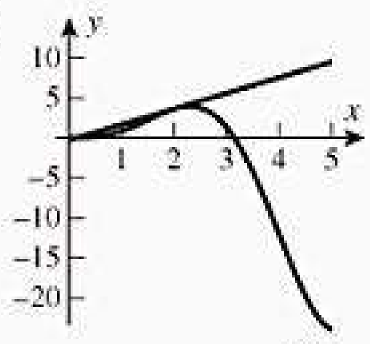
41. **(a)**

1,90	1,92	1,94	1,96	1,98	2,00
3,4161	3,4639	3,5100	3,5543	3,5967	3,6372

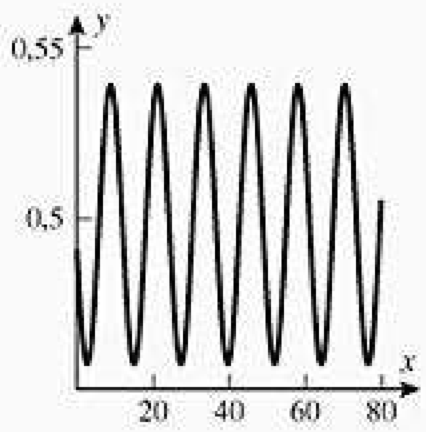
2,02	2,04	2,06	2,08	2,10
3,6756	3,7119	3,7459	3,7775	3,8068

(b) $y = 1{,}9590x - 0{,}29101$ **(c)** $y = 1{,}9590x - 0{,}2808$

(d)

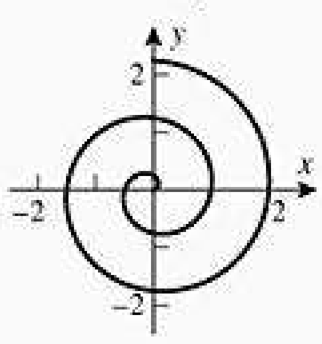


43. $T = 0{,}537 + 0{,}495\ \text{sen}\left[\frac{\pi}{6}(t - 6{,}5)\right]$



45. $x = \sqrt{2}\cos t,\ y = -\sqrt{2}\ \text{sen}\ t,\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$

47.

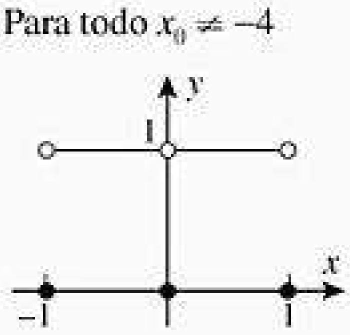


▶ Exercícios 2.1 (página 110)

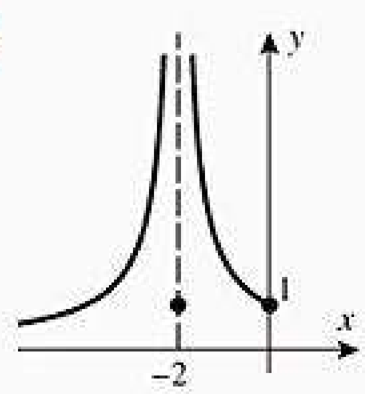
1. **(a)** 0 **(b)** 0 **(c)** 0 **(d)** 3 **3.** **(a)** $-\infty$ **(b)** $-\infty$ **(c)** $-\infty$ **(d)** 1

5. Para todo $x_0 \neq -4$

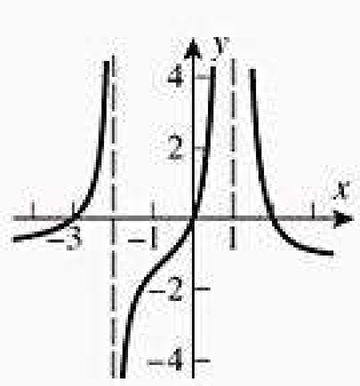
7.



9.



11.



13. **(a)** $\frac{1}{3}$ **(b)** $+\infty$ **(c)** $-\infty$

15. **(a)** 3 **(b)** não existe

17. $y = -2x - 1$

19. $y = 4x - 3$

23. **(a)** subtração catastrófica quando o intervalo x for pequeno (o tamanho depende do recurso computacional) **(c)** não

25. **(a)** comprimento do bastão em repouso **(b)** 0. À medida que a velocidade tende à da luz, o comprimento do bastão tende a zero

▶ Exercícios 2.2 (página 121)

1. **(a)** −6 **(b)** 13 **(c)** −8 **(d)** 16 **(e)** 2 **(f)** $-\frac{1}{2}$
(g) O denominador tende a zero, mas o numerador não.
(h) O denominador tende a zero, mas o numerador não.

3. 6 **5.** $\frac{3}{4}$ **7.** 4 **9.** $-\frac{4}{5}$ **11.** −3 **13.** $\frac{3}{2}$ **15.** $+\infty$

17. não existe **19.** $-\infty$ **21.** $+\infty$ **23.** não existe **25.** $+\infty$

27. $+\infty$ **29.** 6 **31.** **(a)** 2 **(b)** 2 **(c)** 2 **33.** **(a)** 3

35. **(a)** O Teorema 2.2.2(a) não pode ser aplicado

(b) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = -\infty$ **37.** $\frac{1}{4}$

39. O limite à esquerda e/ou à direita pode ser $\pm\infty$; ou o limite pode existir e ser igual a qualquer número real predeterminado.

▶ Exercícios 2.3 (página 131)

1. **(a)** $-\infty$ **(b)** $+\infty$ **3.** **(a)** 0 **(b)** −1

5. **(a)** −12 **(b)** 21 **(c)** −15 **(d)** 25 **(e)** 2 **(f)** $\frac{3}{5}$ **(g)** 0 **(h)** não existe

7. $-\infty$ **9.** $+\infty$ **11.** $\frac{3}{2}$ **13.** 0 **15.** 0 **17.** $\frac{-\sqrt[3]{5}}{2}$ **19.** $\sqrt{5}$

21. $1/\sqrt{6}$ **23.** $\sqrt{3}$ **25.** $-\infty$ **27.** $-\frac{1}{7}$

29. $\lim_{t\to+\infty} n(t) = +\infty;\ \lim_{t\to+\infty} e(t) = c$ **31.** **(a)** $+\infty$ **(b)** −5 **33.** 0

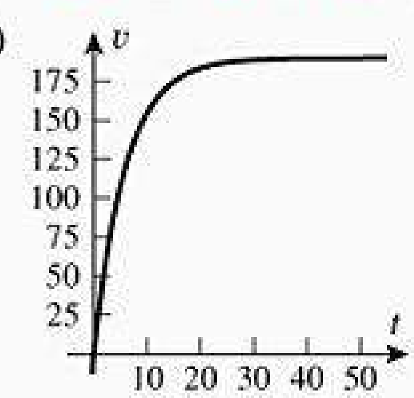
35. $a/2$ **37.** $\lim_{x\to+\infty} p(x) = (-1)^n\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$

39. Para $m > n$, os limites são ambos zero; para $m = n$, os limites são iguais ao coeficiente dominante de p; para $n > m$, os limites são $\pm\infty$.

41. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2+3x^n}{1-x^m} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > n \\ -3 & \text{se } m = n \\ +\infty & \text{se } m < n \text{ e } n - m \text{ for ímpar} \\ -\infty & \text{se } m < n \text{ e } n - m \text{ for par} \end{cases}$$

43. $+\infty$ **45.** $+\infty$ **47.** 1 **49.** 1 **51.** $-\infty$ **53.** $-\infty$ **55.** 1 **57.** $+\infty$

59. **(a)**



(b) $c = 190$
(c) É a velocidade terminal do pára-quedista.

61. São iguais a L. **63.** e **65.** e **67.** $1/e$ **69.** $+\infty$ **71.** e **73.** $1/e$

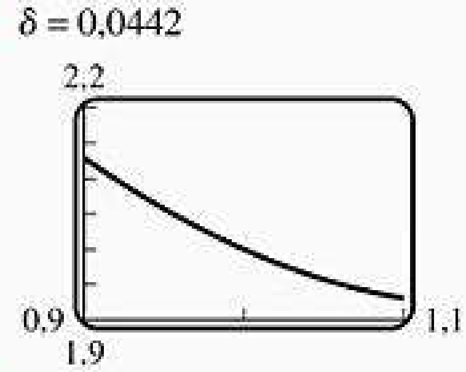
75. e^6 **77.** e^{-6} **79.** $x + 2$ **81.** $1 - x^2$ **83.** sen x

▶ Exercícios 2.4 (página 140)

1. **(a)** $|x| < 0{,}1$ **(b)** $|x - 3| < 0{,}0025$ **(c)** $|x - 4| < 0{,}000125$

3. **(a)** $x_0 = 3{,}8025,\ x_1 = 4{,}2025$ **(b)** $\delta = 0{,}1975$

5. $\delta = 0{,}0442$



7. $\delta = 0{,}13$
9. $\delta = 0{,}05$
11. $\delta = 0{,}05$

13. $\delta = \sqrt[3]{8{,}001} - 2 \approx 8{,}332986 \cdot 10^{-5}$ **15.** $\delta = 1/505 \approx 0{,}000198$

17. **(a)** $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$ **(b)** $\delta = 0{,}0001$

19. $\delta = 1/5200 \approx 0{,}0001923$ **21.** $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ **23.** $\delta = \epsilon/2$ **25.** $\delta = \epsilon$

27. **(b)** 65 **(c)** $\epsilon/65$; 65; 65; $\epsilon/65$ **29.** $\delta = \min\left(1, \frac{1}{6}\epsilon\right)$

31. $\delta = \min(1, \epsilon/(1+\epsilon))$ **33.** $\delta = 2\epsilon$

35. **(a)** $\sqrt{10}$ **(b)** 99 **(c)** −10 **(d)** −101

37. **(a)** $-\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}};\ \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$ **(b)** $\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$ **(c)** $-\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}$ **39.** 10

41. 999

43. −202 **45.** −57,5 **47.** $N = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ **49.** $N = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2\epsilon}$

51. $N = (1 + 2/\epsilon)^2$ **53.** $|x| < \frac{1}{10}$ **(b)** $|x - 1| < \frac{1}{1000}$
(c) $|x - 3| < \frac{1}{10\sqrt{10}}$ **(d)** $|x| < \frac{1}{10}$

55. $\delta = 1/\sqrt{M}$ **57.** $\delta = 1/M$ **59.** $\delta = 1/(-M)^{1/4}$ **61.** $\delta = \epsilon$

63. $\delta = \epsilon^2$ **65.** $\delta = \epsilon$ **67.** **(a)** $\delta = -1/M$ **(b)** $\delta = 1/M$

69. **(a)** $N = M - 1$ **(b)** $N = M - 1$ **71.** $\delta = \min\left(2, \frac{1}{8}\epsilon\right)$

73. **(a)** 0,4 ampèr **(b)** aproximadamente de 0,39474 a 0,40541 ampèr **(c)** de $3/(7{,}5 + \delta)$ a $3/(7{,}5 - \delta)$ **(d)** $\delta \approx 0{,}01870$ **(e)** a corrente tende a $+\infty$.

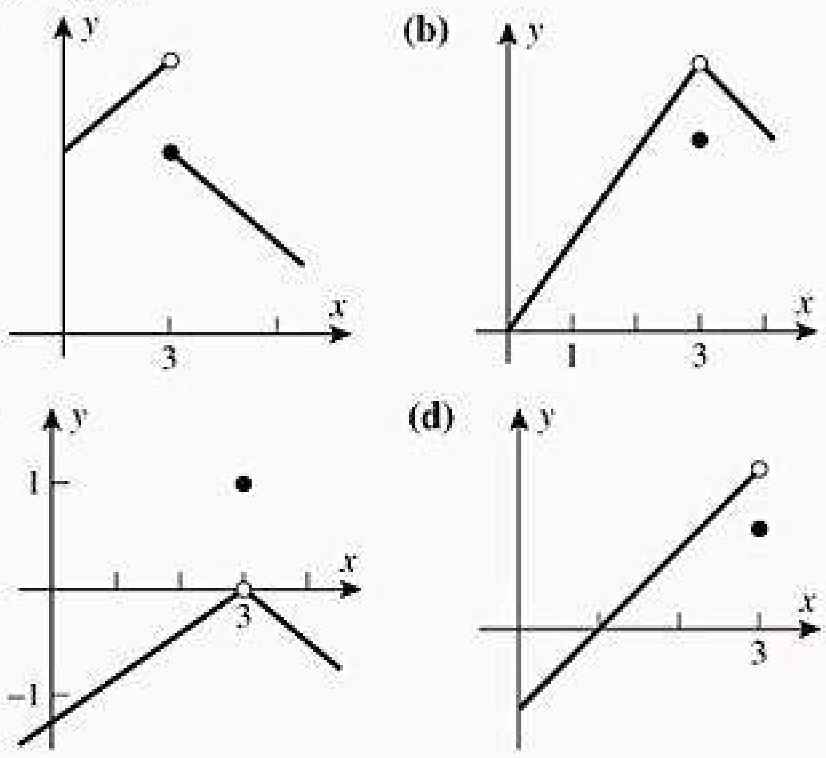
► Exercícios 2.5 (página 152)

1. **(a)** não-contínua, $x = 2$ **(b)** não-contínua, $x = 2$ **(c)** não-contínua, $x = 2$ **(d)** contínua **(e)** contínua **(f)** contínua

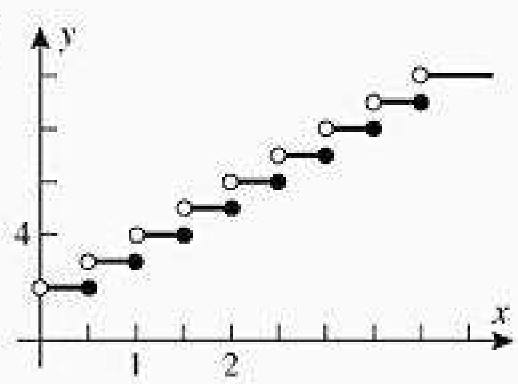
3. **(a)** não-contínua, $x = 1$; 3 **(b)** contínua **(c)** não-contínua, $x = 1$ **(d)** contínua **(e)** não-contínua, $x = 3$ **(f)** contínua

5. **(a)** 3 **(b)** 3

7. **(a)** **(b)** **(c)** **(d)**



9. **(a)**

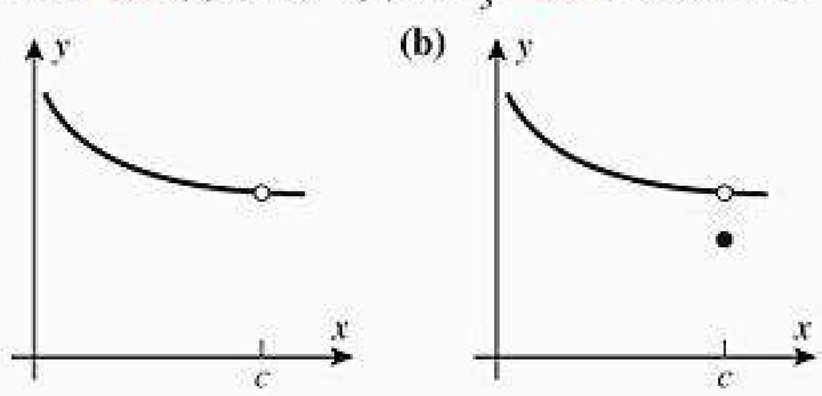


(b) Um segundo pode custar 1 dólar.

11. nenhum **13.** nenhum **15.** $-1/2$, 0 **17.** -1, 0, 1 **19.** nenhum

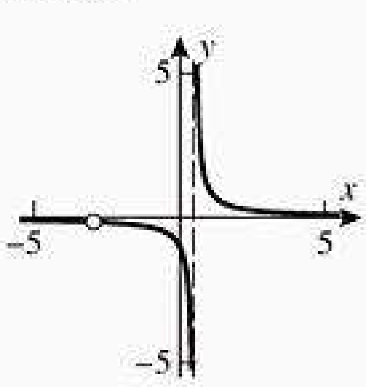
21. nenhum **23.** **(a)** $k = 5$ **(b)** $k = \frac{4}{3}$ **25.** $k = 4$, $m = 5/3$

27. **(a)** **(b)**



29. **(a)** $x = 0$, não-removível **(b)** $x = -3$, removível **(c)** $x = 2$, removível; $x = -2$, não-removível

31. **(a)** $x = \frac{1}{2}$ não-removível; em $x = -3$, removível **(b)** $(2x - 1)(x + 3)$



35. **(a)** $f(x) = k$ para $x \neq c$, $f(c) = 0$; $g(x) = l$ para $x \neq c$, $g(c) = 0$. Se $k = -l$, então $f + g$ é contínua; caso contrário, não. **(b)** $f(x) = k$ para $x \neq c$, $f(c) = 1$; $g(x) = l \neq 0$ para $x \neq c$, $g(c) = 1$. Se $kl = 1$, então fg é contínua; caso contrário, não.

39. $f(x) = 1$ para $0 \le x < 1$, $f(x) = -1$ para $1 \le x \le 2$

45. $x = -1{,}25$; $x = 0{,}75$ **47.** $x = -1{,}605$, $x = 1{,}375$

49. $x = 2{,}24$ **51.** $x = 4{,}847$ cm

► Exercícios 2.6 (página 160)

1. nenhum **3.** $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5. $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7. $2n\pi + (\pi/6)$, $2n\pi + (5\pi/6)$, $n = 0, \pm 1, 2\pm, \ldots$

9. $[-1, 1]$ **11.** $(0, 3)$ e $(3, +\infty)$ **13.** $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$

15. **(a)** sen x, $x^3 + 7x + 1$ **(b)** $|x|$, sen x **(c)** x^3, cos x, $x + 1$ **(d)** $\sqrt{x}$, $3 + x$, sen x, $2x$ **(e)** sen x, sen x **(f)** $x^5 - 2x^3 + 1$, cos x

17. 1 **19.** $-\pi/6$ **21.** 3 **23.** $+\infty$ **25.** $\frac{7}{3}$ **27.** 0 **29.** 0 **31.** 1

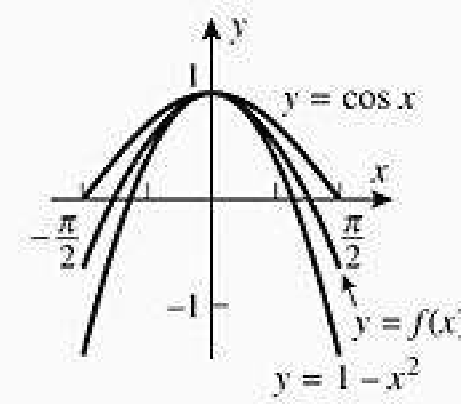
33. 2 **35.** não existe **37.** 0 **39.** a/b **41.** **(b)** 1/10 **43.** **(b)** -1

45. $\lim_{x \to 0}$ sen$(1/x)$ não existe **47.** $k = \frac{1}{2}$ **49.** **(a)** 1 **(b)** 0 **(c)** 1

51. $-\pi$ **53.** $-\sqrt{2}$ **55.** 1 **57.** 5 **59.** 3 **61.** 0

63. $-|x| \le x \cos(50\pi/x) \le |x|$

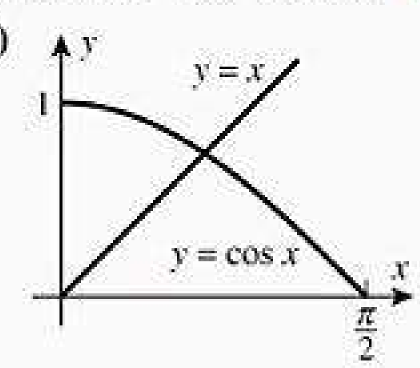
65. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ pelo Teorema do Confronto.



67. $g(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 0$ pelo Teorema do Confronto.

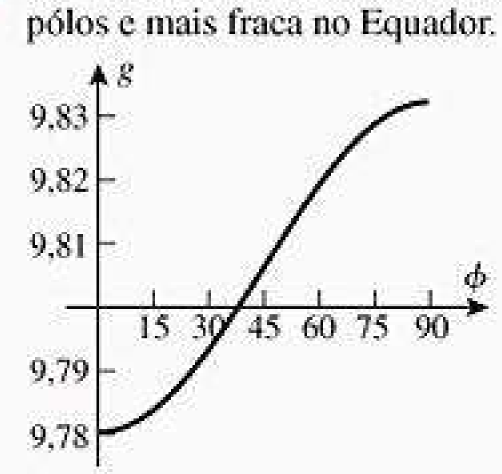
71. **(a)** 0,17365 **(b)** 0,17453 **73.** **(a)** 0,08749 **(b)** 0,08727

75. **(b)**



(c) 0,739

77. **(a)** A gravidade é mais forte nos pólos e mais fraca no Equador.



► Capítulo 2. Exercícios de Revisão (página 162)

1. **(a)** 1 **(b)** não existe **(c)** não existe **(d)** 1 **(e)** 3 **(f)** 0 **(g)** 0 **(h)** 2 **(i)** $\frac{1}{2}$

3. **(a)** 0,405 **5.** 1 **7.** $-3/2$ **9.** 32/3

11. **(a)** $y = 0$ **(b)** não existe **(c)** $y = 2$ **13.** 1 **15.** $3 - k$ **17.** 0

19. e^{-3} **21.** \$2001,60; \$2009,66; \$2013,62; \$2013,75

23. **(a)** Um exemplo é $2x/(x - 1)$.

25. **(a)** $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ **(b)** $\delta = 0{,}0045$

27. **(a)** $\delta = 0{,}0025$ **(b)** $\delta = 0{,}0025$ **(c)** $\delta = 1/9000$ (Alguns valores maiores também funcionam.)

31. **(a)** -1, 1 **(b)** nenhum **(c)** -3, 0 **33.** não; não-contínua em $x = 2$

35. Considere $f(x) = x$ para $x \neq 0$, $f(0) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $k = 0$.

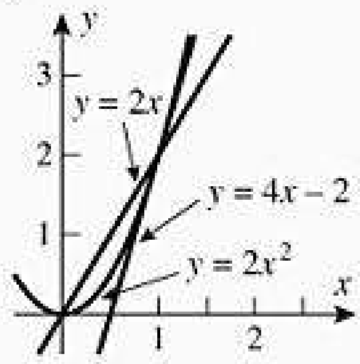
► Exercícios 3.1 (página 176)

1. **(a)** 4 m/s **3.** **(a)** 33 m/s **(b)** 55 m/s

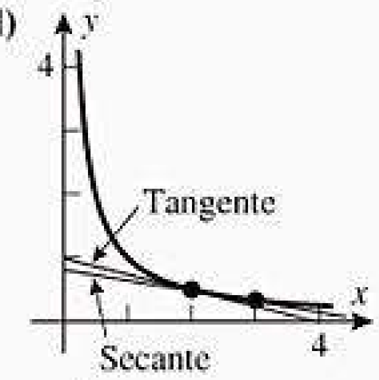
5. **(a)** t_0 **(b)** 0 **(c)** aumentando a velocidade **(d)** diminuindo a velocidade

7. reta com inclinação igual à velocidade

9. **(a)** 2
(b) 0
(c) $4x_0$
(d)



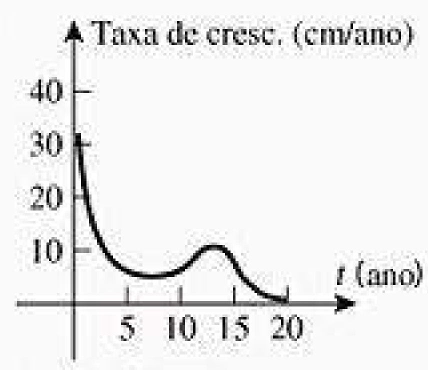
11. **(a)** $-\frac{1}{6}$
(b) $-\frac{1}{4}$
(c) $-1/x_0^2$
(d)



13. **(a)** $2x_0$ **(b)** -2 **15.** **(a)** $1/(2\sqrt{x_0})$ **(b)** $\frac{1}{2}$

17. **(a)** 72º F em torno das 16 horas e 30 minutos **(b)** 4º F/h
(c) −7º F/h em torno das 21 horas.

19. **(a)** primeiro ano
(b) 6 cm/ano
(c) 10 cm/ano cerca de 14 anos
(d)

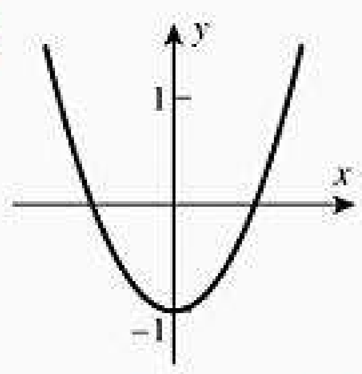


21. **(a)** $6400\sqrt{10}$ m **(b)** $160\sqrt{10}$ m/s **(c)** $\frac{9}{2}\sqrt[6]{4000}$ m/s
(d) $480\sqrt{10}$ m/s

23. **(a)** 720 cm/min **(b)** 192 cm/min

► Exercícios 3.2 (página 187)

1. 2; 0; −2; −1 **5.**



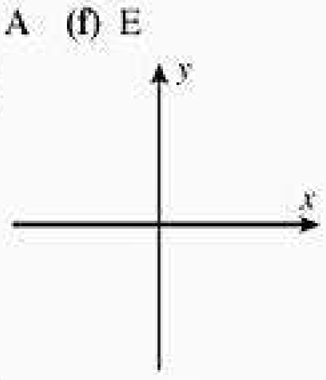
3. **(b)** 3 **(c)** 3

7. $y = 5x - 16$
9. $4x$, $y = 4x - 2$
11. $3x^2$; $y = 0$

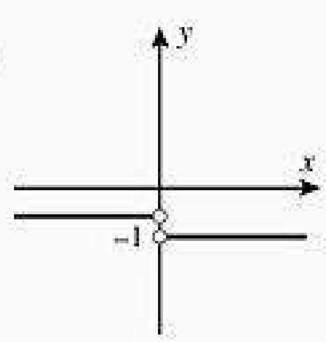
13. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{3}$ **15.** $-1/x^2$ **17.** $2x - 1$

19. $-1/(2x^{3/2})$ **21.** $8t + 1$ **23.** **(a)** D **(b)** F **(c)** B **(d)** C
(e) A **(f)** E

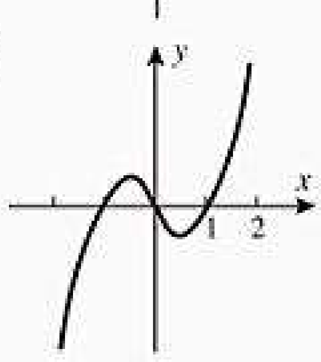
25. **(a)**



(b)

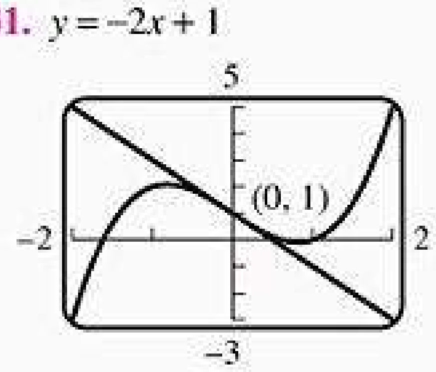


(c)



27. **(a)** $\sqrt{x}$, 1 **(b)** x^2, 3 **31.** $y = -2x + 1$

29. -2



33. **(b)**

h	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$[f(1+h)-f(1)]/h$	1,6569	1,4355	1,3911	1,3868	1,3863	1,3863

35. **(a)** dólares por m **(b)** o preço por m adicional **(c)** positivo
(d) $1000

37. **(a)** $F \approx 200$ lb, $dF/d\theta \approx 50$ lb/rad **(b)** $\mu = -0{,}025$

39. **(a)** $T \approx 115$º F, $dT/dt \approx -3{,}35$ºF/min **(b)** $k = -0{,}084$

► Exercícios 3.3 (página 196)

1. $28x^6$ **3.** $24x^7 + 2$ **5.** 0 **7.** $-\frac{1}{3}(7x^6 + 2)$

9. $-3x^{-4} - 7x^{-8}$ **11.** $24x^{-9} + (1/\sqrt{x})$ **13.** $12x(3x^2 + 1)$

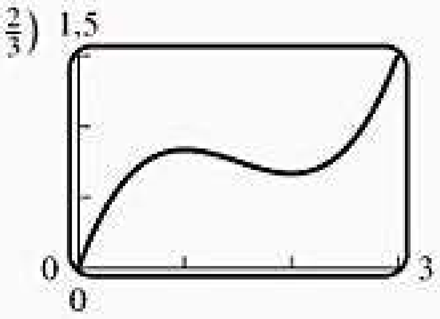
15. $3ax^2 + 2bx + c$ **17.** 7 **19.** $2t - 1$ **21.** 15 **23.** −8 **25.** 0

27. 0 **29.** $32t$ **31.** $3\pi r^2$ **33.** **(a)** $4\pi r^2$ **(b)** 100π **35.** $y = 5x + 17$

37. **(a)** $42x - 10$ **(b)** 24 **(c)** $2/x^3$ **(d)** $700x^3 - 96x$

39. **(a)** $-210x^{-8} + 60x^2$ **(b)** $-6x^{-4}$ **(c)** $6a$

41. **(a)** 0 **(b)** 112 **(c)** 360 **45.** $(1, \frac{5}{6})(2, \frac{2}{3})$



47. $y = 3x^2 - x - 2$ **61.** sim, 3

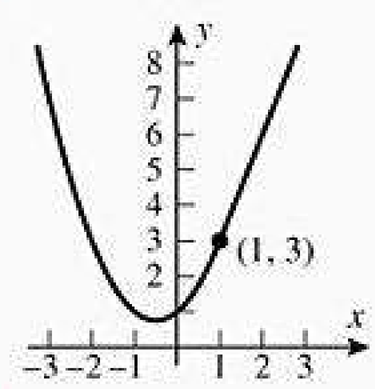
49. $x = \frac{1}{2}$

51. $(2 \pm \sqrt{3}, -6 - 4\sqrt{3})$, $(2 - \sqrt{3}, -6 + 4\sqrt{3})$

53. $-2x_0$

57. $-\dfrac{2GmM}{r^3}$

59. $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$



63. não-diferenciável em $x = 1$ **65.** **(a)** $x = \frac{2}{3}$ **(b)** $x = \pm 2$ **67.** **(b)** sim

69. **(a)** $n(n-1)(n-2)\cdots 1$ **(b)** 0 **(c)** $a_n n(n-1)(n-2)\cdots 1$

75. $-12/(2x+1)^3$ **77.** $-2/(x+1)^3$

► Exercícios 3.4 (página 203)

1. $4x + 1$ **3.** $4x^3$ **5.** $18x^2 - \frac{3}{2}x + 12$

7. $-15x^{-2} - 14x^{-3} + 48x^{-4} + 32x^{-5}$ **9.** $3x^2$ **11.** $-\frac{5}{4}$ **13.** $\frac{7}{16}$

15. −29 **17.** 0 **19.** **(a)** $-\frac{37}{4}$ **(b)** $-\frac{23}{16}$

21. **(a)** 10 **(b)** 19 **(c)** 9 **(d)** −1 **23.** $-2 \pm \sqrt{3}$ **25.** nenhum

27. −2 **31.** $F''(x) = x\,f''(x) + 2\,f'(x)$

35. **(a)** $2(1 + x^{-1})(x^{-3} + 7) + (2x + 1)(-x^{-2})(x^{-3} + 7) +$
$(2x + 1)(1 + x^{-1})(-3x^{-4})$ **(b)** $3(7x^6 + 2)(x^7 + 2x - 3)^2$

37. $g'(x) = n(f(x))^{n-1}(x)$ **39.** $f'(x) = -nx^{-n-1}$

► Exercícios 3.5 (página 207)

1. $-4\,\text{sen}\,x + 2\cos x$ **3.** $4x^2\,\text{sen}\,x - 8x\cos x$

5. $(1 + 5\,\text{sen}\,x - 5\cos x)/(5 + \text{sen}\,x)^2$ **7.** $\sec x\,\text{tg}\,x - \sqrt{2}\sec^2 x$

9. $-4\,\text{cossec}\,x\,\text{cotg}\,x + \text{cossec}^2 x$ **11.** $\sec^3 x + \sec x\,\text{tg}^2 x$ **13.** $-\dfrac{\text{cossec}\,x}{1 + \text{cossec}\,x}$

15. 0 **17.** $\dfrac{1}{(1 + x\,\text{tg}\,x)^2}$ **19.** $-x\cos x - 2\,\text{sen}\,x$

21. $-x\,\text{sen}\,x + 5\cos x$ **23.** $-4\,\text{sen}\,x\cos x$

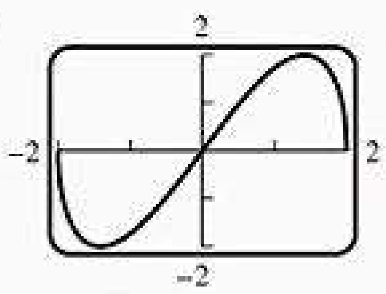
25. **(a)** $y = x$ **(b)** $y = 2x - (\pi/2) + 1$ **(c)** $y = 2x + (\pi/2) - 1$

29. **(a)** $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2$ **(b)** $x = -3\pi/2, \pi/2$
(c) não há reta tangente horizontal **(d)** $x = \pm 2\pi, \pm\pi, 0$

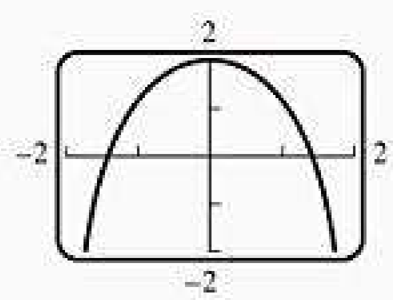
31. 0,087 m/grau **33.** 1,75 m/grau **35.** **(a)** $-\cos x$ **(b)** $\cos x$
37. 3; 7; 11;...
39. **(a)** todos x **(b)** todos x **(c)** $x \neq (\pi/2) + n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
(d) $x \neq n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **(e)** $x \neq (\pi/2) + n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
(f) $x \neq n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **(g)** $x \neq (2n+1)\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
(h) $x \neq n\pi/2,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **(i)** todos x

► Exercícios 3.6 (página 214)

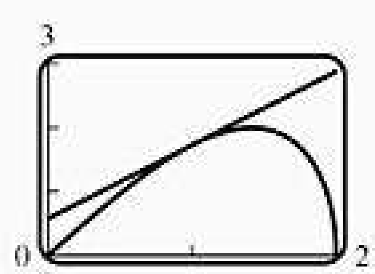
1. 6 **3.** **(a)** $(2x-3)^5,\ 10(2x-3)^4$ **(b)** $2x^5 - 3,\ 10x^4$
5. **(a)** -7 **(b)** -8 **7.** $37(x^3+2x)^{36}(3x^2+2)$
9. $-2\left(x^3 - \frac{7}{x}\right)^{-3}\left(3x^2 + \frac{7}{x^2}\right)$ **11.** $\frac{24(1-3x)}{(3x^2-2x+1)^4}$
13. $\frac{3}{4\sqrt{x}\sqrt{4+3\sqrt{x}}}$ **15.** $-\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **17.** $-20\cos^4 x \operatorname{sen} x$
19. $-\frac{3}{\sqrt{x}}\cos(3\sqrt{x})\operatorname{sen}(3\sqrt{x})$ **21.** $28x^6\sec^2(x^7)\operatorname{tg}(x^7)$
23. $-\frac{5\operatorname{sen}(5x)}{2\sqrt{\cos(5x)}}$
25. $-3[x + \operatorname{cossec}(x^3+3)]^{-4}[1 - 3x^2\operatorname{cossec}(x^3+3)\operatorname{cotg}(x^3+3)]$
27. $10x^3\operatorname{sen}5x\cos5x + 3x^2\operatorname{sen}^2 5x$
29. $-x^3\sec\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) + 5x^4\sec\left(\frac{1}{x}\right)$
31. $\operatorname{sen}(\cos x)\operatorname{sen} x$ **33.** $-6\cos^2(\operatorname{sen}2x)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2x)\cos2x$
35. $35(5x+8)^6(1-\sqrt{x})^6 - \frac{3}{\sqrt{x}}(5x+8)^7(1-\sqrt{x})^5$
37. $\frac{33(x-5)^2}{(2x+1)^4}$ **39.** $-\frac{2(2x+3)^2(52x^2+96x+3)}{(4x^2-1)^9}$
41. $5[x\operatorname{sen}2x + \operatorname{tg}^4(x^7)]^4[2x\cos2x + \operatorname{sen}2x + 28x^6\operatorname{tg}^3(x^7)\sec^2(x^7)]$
43. $y = -x$ **45.** $y = -1$ **47.** $y = 8\sqrt{\pi}x - 8\pi$ **49.** $y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$
51. $-25x\cos(5x) - 10\operatorname{sen}(5x) - 2\cos(2x)$ **53.** $4(1-x)^{-3}$;
55. $3\operatorname{cotg}^2\theta\operatorname{cossec}^2\theta$ **57.** $\pi(b-a)\operatorname{sen}2\pi\omega$
59. **(a)**



(c) $\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$



(d) $y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1)$



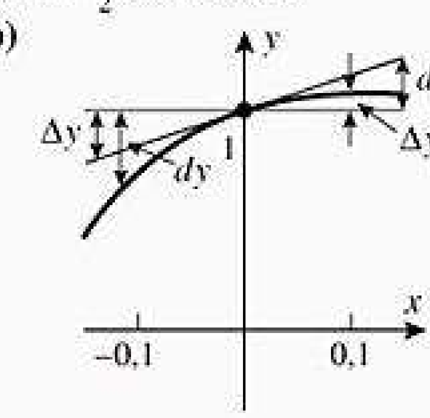
61. **(c)** $f = 1/T$ **(d)** amplitude = 0,6 cm, $T = 2\pi/15$ segundos por oscilação, $f = 15/(2\pi)$ oscilações por segundo
63. $\frac{7}{24}\sqrt{6}$ **65.** **(a)** 10 lb/pol^2; -2 lb/pol^2/milha **(b)** $-0,6$ lb/pol^2/s
67. $\begin{cases}\cos x, & 0 < x < \pi \\ -\cos x, & -\pi < x < 0\end{cases}$
69. **(a)** $-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ **(b)** não existe limite quando x tende a 0
71. **(a)** 21 **(b)** -36 **73.** $1/2x$ **75.** $\frac{2}{3}x$ **79.** $f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$

► Exercícios 3.7 (página 221)

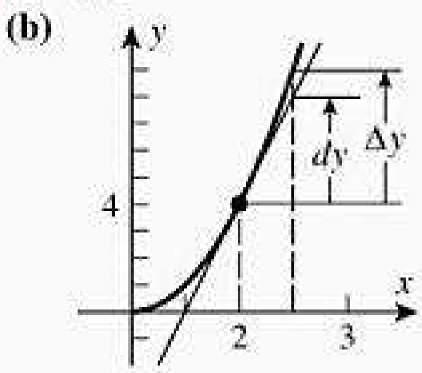
1. **(a)** 6 **(b)** $-\frac{1}{3}$ **3.** **(a)** -2 **(b)** $6\sqrt{5}$
5. **(b)** $A = x^2$ **(c)** $\frac{dA}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$ **(d)** 12 cm^2/min
7. **(a)** $\frac{dV}{dt} = \pi\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right)$ **(b)** -20π cm^3/s, decrescendo
9. **(a)** $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{x^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$ **(b)**; $-\frac{5}{16}$ rad/s; decrescendo
11. $\frac{4\pi}{15}$ cm^2/min **13.** $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ km/h **15.** 4860π cm^3/min **17.** $\frac{1}{2}$ m/s
19. $\frac{125}{\sqrt{61}}$ pés/s **21.** 704 pés/s
23. **(a)** 500 mi, 1716 mi **(b)** 1354 mi; 27,7 mi/min
25. $\frac{9}{20\pi}$ m/min **27.** 125π pés^3/min **29.** 250 milhas/h **31.** $\frac{36\sqrt{69}}{25}$ pés/min
33. $\frac{8\pi}{5}$ km/s **35.** $600\sqrt{7}$ km/h
37. **(a)** $-\frac{60}{7}$ unidades por segundo **(b)** descendo
39. -4 unidades por segundo
41. $x = \pm\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}}$ **43.** 4,5 cm/s; afastado **47.** $\frac{20}{9\pi}$ cm/s

► Exercícios 3.8 (página 229)

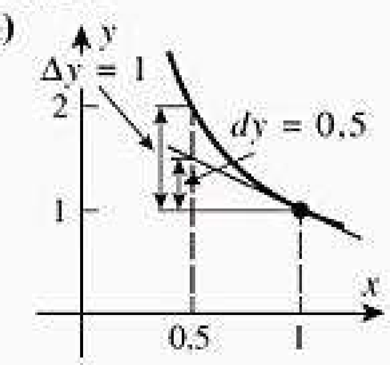
1. **(a)** $f(x) \approx 1 + 3(x-1)$ **(b)** $f(1+\Delta x) \approx 1 + 3\,\Delta x$ **(c)** 1,06
3. **(a)** $1 + \frac{1}{2}x$, 0,95; 1,05
(b)



13. $|x| < 1,692$
15. $|x| \le 0,3158$ **17.** **(a)** 0,0174533 **(b)** $x_0 = 45°$ **(c)** 0,694765
19. 83,16 **21.** 8,0625 **23.** 8,9944 **25.** 0,1 **27.** 0,8573
29. **(a)** 4, 5
(b)



31. **(a)** 0,5; 1
(b)



33. $3x^2\,dx,\ 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ **35.** $(2x-2)\,dx,\ 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\,\Delta x$
37. **(a)** $(12x^2 - 14x)\,dx$ **(b)** $(-x\operatorname{sen}x + \cos x)\,dx$
39. **(a)** $\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}dx$ **(b)** $-17(1+x)^{-18}dx$ **41.** 0,0225 **43.** 0,0048
45. **(a)** ±2 m^2 **(b)** lado: $\pm1\%$; área: $\pm2\%$
47. **(a)** oposto: $\pm\,0,151$ cm; adjacente: $\pm\,0,087$ cm
(b) oposto: $\pm\,3,0\%$; adjacente: $\pm\,1,0\%$
49. $\pm10\%$ **51.** $\pm0,017$ cm^2 **53.** $\pm\,6\%$ **55.** $\pm\,0,5\%$ **57.** $15\pi/2$ cm^3
59. **(a)** $\alpha = 1,5 \times 10^{-5}/°C$ **(b)** 180,1 cm de comprimento

► Capítulo 3. Exercícios de Revisão (página 232)

3. **(a)** $2x$ **(b)** 4 **5.** 58,75 pés/s **7.** **(a)** 13 km/h **(b)** 7 km/h
9. **(a)** $-2/\sqrt{9-4x}$ **(b)** $1/(x+1)^2$
11. **(a)** $x = -2, -1, 1, 3$ **(b)** $(-\infty, -2), (-1, 1), (3, +\infty)$
(c) $(-2, -1), (1, 3)$ **(d)** 4
13. **(a)** 78 milhões de pessoas por ano **(b)** 1,3% ao ano
15. **(a)** $x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}x$ **(c)** $4x\cos x + (2 - x^2)\operatorname{sen}x$
17. **(a)** $(6x^2 + 8x - 17)/(3x+2)^2$ **(c)** $118/(3x+2)^3$
19. **(a)** 2000 l/min **(b)** 2500 l/min **21.** **(a)** 3,6 **(b)** $-0,777778$
23. $f(1) = 0,\ f'(1) = 5$ **25.** $y = -16x,\ y = -145x/4$
29. **(a)** $8x^7 - \frac{3}{2\sqrt{x}} - 15x^{-4}$ **(b)** $(2x+1)^{100}(1030x^2 + 10x - 1414)$
(c) $\frac{(x-1)(15x+1)}{2\sqrt{3x+1}}$ **(d)** $-3(3x+1)^2(3x+2)/x^7$
31. $x = \frac{7}{2}, 2, -\frac{1}{2}$ **33.** $y = \pm2x$

35. $x = n\pi \pm (\pi/4)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **37.** $y = -3x + (1 + 9\pi/4)$
39. (a) $40\sqrt{3}$ (b) 7500 **41.** 500π m^2/min
43. (a) −0,5; 1; 0,5 (b) $\pi/4$, 1, $\pi/2$ (c) 3, −1, 0
45. (a) entre 139,48 m e 144,55 m (b) $|d\phi| \leq 0{,}98°$

► Exercícios 4.1 (página 241)

1. $\frac{2}{3}(2x-5)^{-2/3}$ **3.** $-\frac{2}{(x-2)^2}\left[\frac{x+1}{x-2}\right]^{-1/3}$

5. $\frac{1}{3}x^2(5x^2+1)^{-5/3}(25x^2+9)$ **7.** $-\frac{15[\text{sen}(3/x)]^{3/2}\cos(3/x)}{2x^2}$

9. (a) $(6x^2 - y - 1)/x$ (b) $4x - 2/x^2$ **11.** $-\frac{x}{y}$ **13.** $\frac{1-2xy-3y^3}{x^2+9xy^2}$

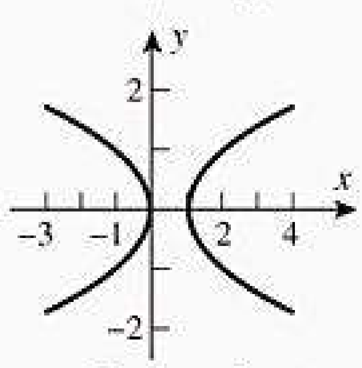
15. $\frac{-y^{3/2}}{x^{3/2}}$ **17.** $\frac{1-2xy^2\cos(x^2y^2)}{2x^2y\cos(x^2y^2)}$

19. $\frac{1-3y^2\,\text{tg}^2(xy^2+y)\sec^2(xy^2+y)}{3(2xy+1)\,\text{tg}^2(xy^2+y)\sec^2(xy^2+y)}$ **21.** $-\frac{8}{9y^3}$ **23.** $\frac{2y}{x^2}$

25. $\frac{\text{sen}\,y}{(1+\cos y)^3}$ **27.** $-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ **29.** $-15^{-3/4} \approx -0{,}1312$

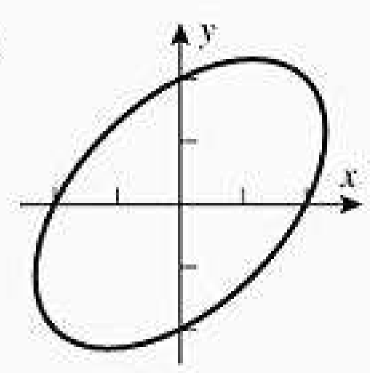
31. $-\frac{9}{13}$ **33.** $\frac{2t^3+3a^2}{2a^3-6at}$ **35.** $-\frac{b^2\lambda}{a^2\omega}$

37. (a)



(c) $x = -y^2$ ou $x = y^2 + 1$

39. (b)

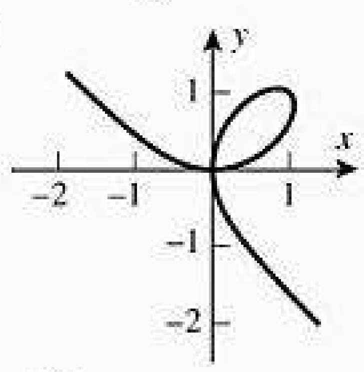


(b) ±1,1547
(c) $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

41. pontos (2,2), (−2, −2); $y' = -1$ em ambos

43. $a = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{4}$

45. (a)



(c) $2\sqrt[3]{2}/3$

47. $y = (\sqrt{3}/3)x$, $y = -(\sqrt{3}/3)x$
51. $-\frac{2y^3+3t^2y}{(6ty^2+t^3)\cos t}$
53. $-1, \frac{2}{3}$

► Exercícios 4.2 (página 247)

1. $1/x$ **3.** $1/(1+x)$ **5.** $2x/(x^2-1)$ **7.** $\frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$ **9.** $2/x$

11. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ **13.** $1 + \ln x$ **15.** $2x\log_2(3-2x) - \frac{2x^2}{(\ln 2)(3-2x)}$

17. $\frac{2x(1+\log x) - x/(\ln 10)}{(1+\log x)^2}$ **19.** $1/(x\ln x)$ **21.** 2 cossec $2x$

23. $-\frac{1}{x}\,\text{sen}(\ln x)$ **25.** 2 cotg x/(ln 10) **27.** $\frac{3}{x-1} + \frac{8x}{x^2+1}$

29. $-\text{tg}\,x + \frac{3x}{4-3x^2}$ **31.** $x\sqrt[3]{1+x^2}\left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{3(1+x^2)}\right]$

33. $\frac{(x^2-8)^{1/3}\sqrt{x^3+1}}{x^6-7x+5}\left[\frac{2x}{3(x^2-8)} + \frac{3x^2}{2(x^3+1)} - \frac{6x^5-7}{x^6-7x+5}\right]$

35. ex^{e-1} **37.** (a) $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$ (b) $-\frac{\ln 2}{x(\ln x)^2}$

39. $y = ex - 2$ **41.** $y = -x/e$ **43.** $y = x/e$ **45.** $A(w) = w/2$
49. $f(x) = \ln(x+1)$ **51.** (a) $1/e^2$ (b) 1

► Exercícios 4.3 (página 254)

1. (b) 1/9 **3.** $-2/x^2$ **5.** (a) não (b) sim (c) sim (d) sim

7. $\frac{1}{15y^2+1}$ **9.** $\frac{1}{10y^4+3y^2}$ **11.** $7e^{7x}$ **13.** $x^2e^x(x+3)$

15. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ **17.** $(x\sec^2 x + \text{tg}\,x)\,e^{x\,\text{tg}\,x}$ **19.** $(1-3e^{3x})e^{x-e^{3x}}$

21. $\frac{x-1}{e^x-x}$ **23.** $2^x \ln 2$ **25.** $\pi^{\text{sen}\,x}(\ln\pi)\cos x$

27. $(x^3-2x)^{\ln x}\left[\frac{3x^2-2}{x^3-2x}\ln x + \frac{1}{x}\ln(x^3-2x)\right]$

29. $(\ln x)^{\text{tg}\,x}\left[\frac{\text{tg}\,x}{x\ln x} + (\sec^2 x)\ln(\ln x)\right]$ **31.** ex^{e-1} **33.** $3/\sqrt{1-9x^2}$

35. $-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ **37.** $3x^2/(1+x^6)$ **39.** $-\frac{\sec^2 x}{\text{tg}^2 x} = -\text{cossec}^2 x$

41. $\frac{e^x}{|x|\sqrt{x^2-1}} + e^x\,\text{arc sec}\,x$ **43.** 0 **45.** 0 **47.** $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

51. $\frac{(3x^2+\text{arc tg}\,y)(1+y^2)}{(1+y^2)e^y - x}$ **53.** (b) $1 - (\sqrt{3}/3)$

55. (b) $y = (88x - 89)/7$ **57.** (a) $k^n e^{kx}$ (b) $(-1)^n k^n e^{-kx}$

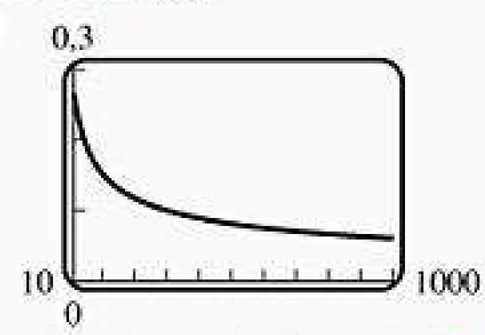
59. $-\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}}(x-\mu)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ **65.** $r = 1, K = 12$

67. ln 10 **69.** 12π **71.** $\sqrt{3}/2$

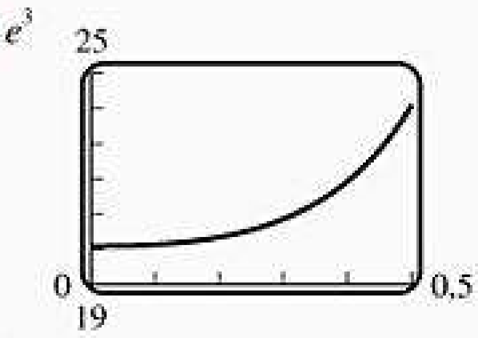
► Exercícios 4.4 (página 263)

1. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$
3. (b) $T_f(x) = -2(x+1)$, $T_g(x) = -3(x+1)$ (c) limite = 2/3
5. 1 **7.** 1 **9.** −1 **11.** 0 **13.** $-\infty$ **15.** 0 **17.** 2 **19.** 0
21. π **23.** $-\frac{5}{3}$ **25.** e^{-3} **27.** e^2 **29.** $e^{2/\pi}$ **31.** 0 **33.** $\frac{1}{2}$
35. $+\infty$ **39.** (b) 2

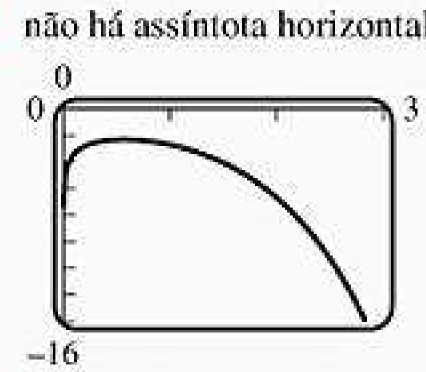
41. 0



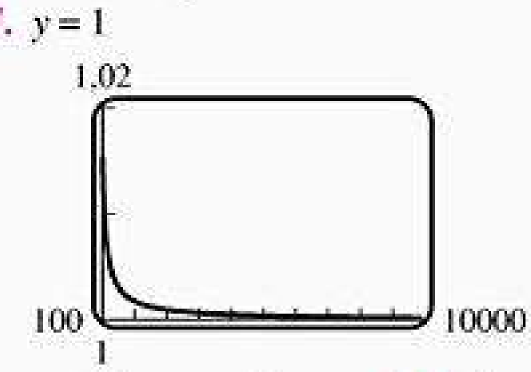
43. e^3



45. não há assíntota horizontal



47. $y = 1$



49. (a) 0 (b) $+\infty$ (c) 0 (d) $-\infty$ (e) $+\infty$ (f) $-\infty$ **51.** 1
53. não existe **55.** Vt/L **59.** (b) Ambos limites são iguais a 0.
61. não existe

► Capítulo 4. Exercícios de Revisão (página 265)

1. $\frac{3}{2}(6x-5)^{-3/4}$ **3.** $\frac{9}{2(x+2)^2}\left[\frac{x-1}{x+2}\right]^{1/2}$

5. (a) $\frac{2-3x^2-y}{x}$ (b) $-\frac{1}{x^2} - 2x$ **7.** $-\frac{y^2}{x^2}$

9. $\frac{y\sec(xy)\,\text{tg}(xy)}{1 - x\sec(xy)\,\text{tg}\,(xy)}$ **11.** $-\frac{21}{16y^3}$ **13.** $2/(2-\pi)$ **17.** $(\sqrt[3]{4}/3, \sqrt[3]{2}/3)$

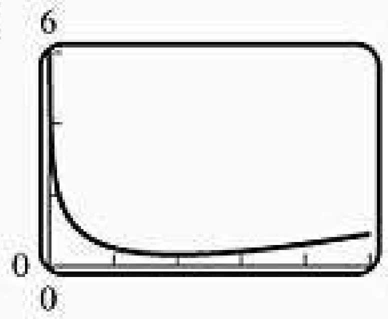
19. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x+4}$ **21.** $\frac{1}{x}$ **23.** $\frac{1}{3x(\ln x+1)^{2/3}}$

25. $\frac{1}{(\ln 10)x\ln x}$ **27.** $\frac{3}{2x} + \frac{2x^3}{1+x^4}$ **29.** $2x$ **31.** $e^{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})$

33. $\frac{2}{\pi(1+4x^2)}$ **35.** $e^x x^{(e^x)}\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$ **37.** $\frac{1}{|2x+1|\sqrt{x^2+x}}$

39. $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

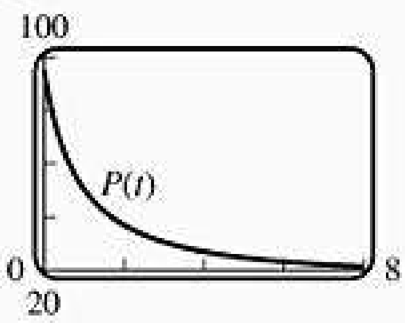
41. **(b)**

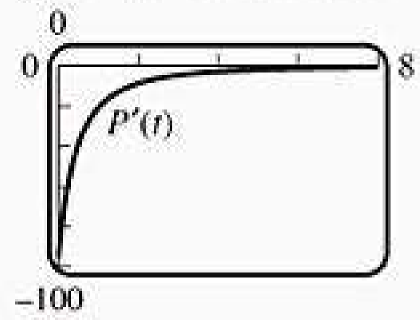


(d) A inclinação deve ser zero entre 1 e e.
(e) $x = 2$

43. e^2 **45.** $e^{1/e}$ **47.** Não; por exemplo, $f(x) = x^3$. **49.** $(1/3, e)$

55. **(a)** 100 **(b)** A população tende a 19. **(c)** A *taxa* tende a zero.



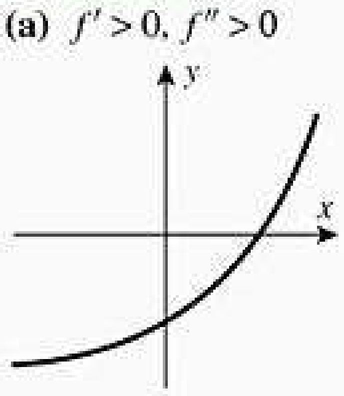


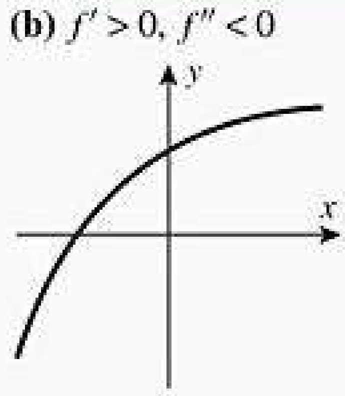
57. $+\infty, +\infty$: é; $+\infty, -\infty$: não é; $-\infty, +\infty$: não é; $-\infty, -\infty$: é.

59. $+\infty$ **61.** 1/9

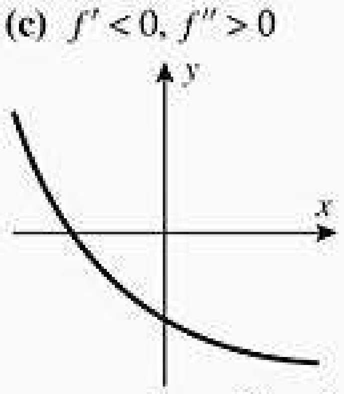
► Exercícios 5.1 (página 275)

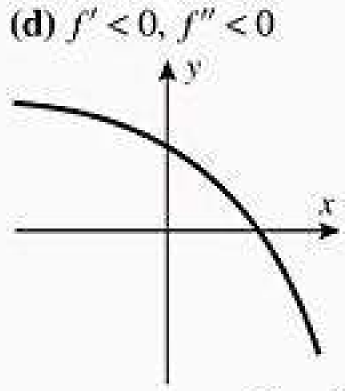
1. **(a)** $f' > 0, f'' > 0$ **(b)** $f' > 0, f'' < 0$





(c) $f' < 0, f'' > 0$ **(d)** $f' < 0, f'' < 0$





3. A: $dy/dx < 0, d^2y/dx^2 > 0$ B: $dy/dx > 0, d^2y/dx^2 < 0$
C: $dy/dx < 0, d^2y/dx^2 < 0$ **5.** $x = -1, 0, 1, 2$

7. **(a)** $[4, 6]$ **(b)** $[1, 4], [6, 7]$ **(c)** $(1, 2), (3, 5)$ **(d)** $(2, 3), (5, 7)$
(e) $x = 2, 3, 5$

9. **(a)** $[1, 3]$ **(b)** $(-\infty, 1], [3, +\infty)$ **(c)** $(-\infty, 2), (4, +\infty)$ **(d)** $(2, 4)$
(e) $x = 2, 4$

11. **(a)** $[3/2, +\infty]$ **(b)** $(-\infty, 3/2]$ **(c)** $(-\infty, +\infty)$ **(d)** não há **(e)** não há

13. **(a)** $(-\infty, +\infty)$ **(b)** não há **(c)** $(-1/2, +\infty)$ **(d)** $(-\infty, -1/2)$ **(e)** $-1/2$

15. **(a)** $[1, +\infty)$ **(b)** $(-\infty, 1]$ **(c)** $(-\infty, 0), (\frac{2}{3}, +\infty)$ **(d)** $(0, \frac{2}{3})$ **(e)** $0, \frac{2}{3}$

17. **(a)** $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ **(b)** $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right], \left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$
(c) $\left(0, \dfrac{4-\sqrt{6}}{2}\right), \left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$ **(d)** $(-\infty, 0), \left(\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}, \dfrac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$
(e) $0, \dfrac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$

19. **(a)** $[-1/2, +\infty)$ **(b)** $(-\infty, -1/2]$ **(c)** $(-2, 1)$
(d) $(-\infty, -2), (1, +\infty)$ **(e)** $-2, 1$

21. **(a)** $[-1, 0], [1, +\infty)$ **(b)** $(-\infty, -1], [0, 1]$ **(c)** $(-\infty, 0), (0 +\infty)$
(d) não há **(e)** não há

23. **(a)** $(-\infty, 0]$ **(b)** $[0, +\infty)$ **(c)** $(-\infty, -1), (1, +\infty)$
(d) $(-1, 1)$ **(e)** $-1, 1$

25. **(a)** $[0, +\infty)$ **(b)** $(-\infty, 0]$ **(c)** $(-2, 2)$
(d) $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ **(e)** $-2, 2$

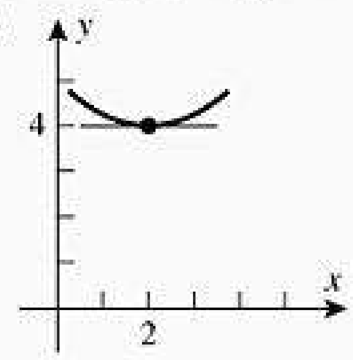
27. **(a)** $[0, +\infty)$ **(b)** $(-\infty, -1]$ **(c)** $\left(-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}}\right)$
(d) $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}}\right), \left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}}, +\infty\right)$ **(e)** $\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}}$.

29. crescente: $[-\pi/4, 3\pi/4]$; decrescente: $[-\pi, -\pi/4], [3\pi/4, \pi]$; côncava para cima: $(-3\pi/4, \pi/4)$; côncava para baixo: $(-\pi, -3\pi/4), (\pi/4, \pi)$; pontos de inflexão: $-3\pi/4, \pi/4$

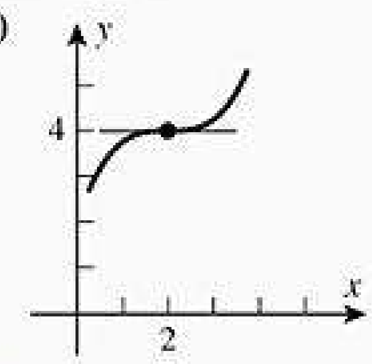
31. crescente: não há; decrescente: $(-\pi, \pi)$; côncava para cima: $(-\pi, 0)$; côncava para baixo: $(0, \pi)$; ponto de inflexão: 0

33. crescente: $[-\pi, -3\pi/4], [-\pi/4, \pi/4], [3\pi/4, \pi]$; decrescente: $[-3\pi/4, -\pi/4]$, $[\pi/4, 3\pi/4]$; côncava para cima: $(-\pi/2, 0), (\pi/2, \pi)$; côncava para baixo: $(-\pi, -\pi/2), (0, \pi/2)$; pontos de inflexão: $0, \pm\pi/2$

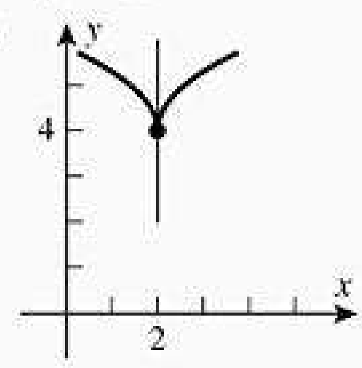
35. **(a)**



(b)



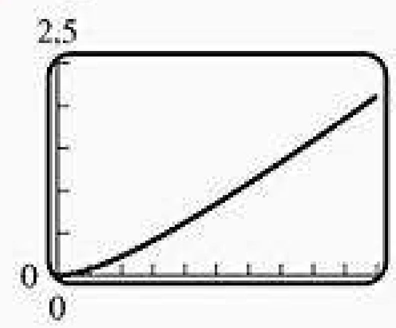
(c)

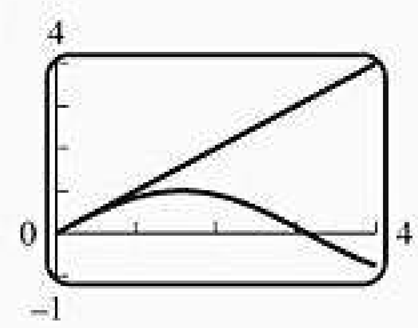


37. **(a)** 0
(b) 1
(c) $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = 0$

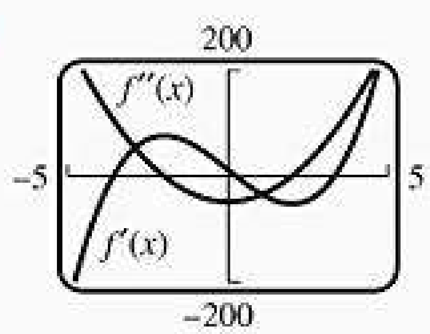
39. ponto de inflexão em $x = a$ se n for ímpar e ≥ 3.

41. $1 + \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{1+x} \geq 0$ se $x > 0$ **43.** $x \geq \operatorname{sen} x$





47.

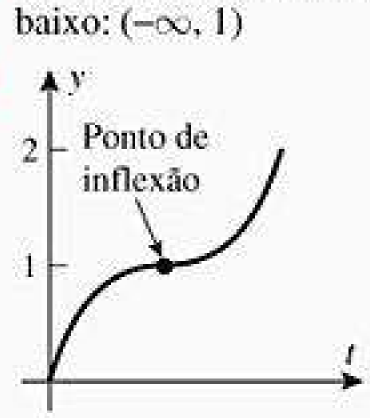


pontos de inflexão em $x = -2$; 2
côncava para cima em $[-5, -2]$;$[2,5]$
côncava para baixo em $[-2, 2]$
crescente em $[-3,5829; 0,2513]$ e $[3,3316; 5]$
decrescente em $[-5; -3,5829]$, $[0,2513; 3,3316]$

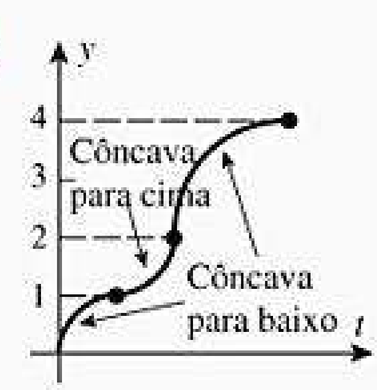
49. $-2,464202; 0,662597; 2,701605$ **53.** **(a)** verdadeira **(b)** falsa

57. **(c)** ponto de inflexão: $(1, 0)$; côncava para cima: $(1, +\infty)$; côncava para baixo: $(-\infty, 1)$

63.

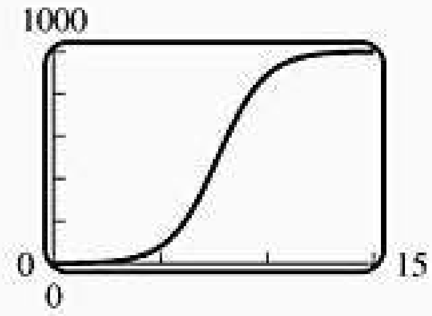


65.



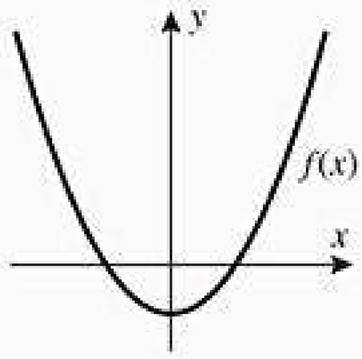
67. **(a)** $\dfrac{LAk}{(1+A)^2}$ **(c)** $\dfrac{1}{k}\ln A$

69. o oitavo dia

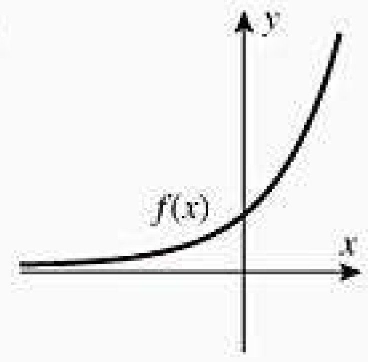


► Exercícios 5.2 (página 287)

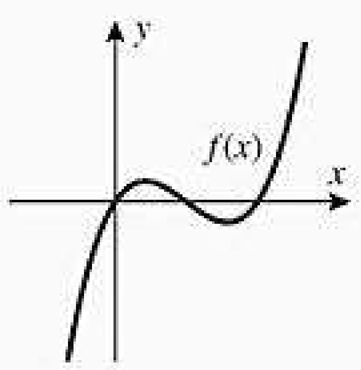
1. **(a)**



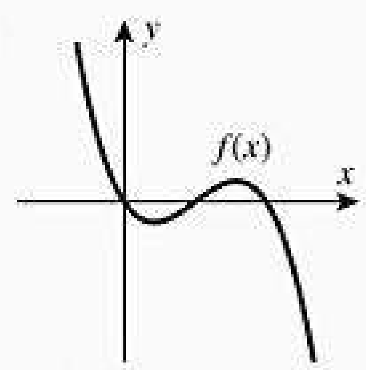
(b)



(c)



(d)



5. **(b)** nada **(c)** f tem um mínimo relativo em $x = 1$, g não tem extremo relativo em $x = 1$.

7. Críticos: $0, \pm\sqrt{2}$; estacionários: $0, \pm\sqrt{2}$

9. Críticos: -3 e 1; estacionários: -3 e 1 **11.** Críticos: $0, \pm 5$; estacionário: 0

13. Críticos: $n\pi/2$ para cada inteiro n; estacionários: $n\pi + \pi/2$ para cada inteiro n

15. **(a)** não há **(b)** $x = 1$ **(c)** não há **17.** **(a)** 2 **(b)** 0 **(c)** 1,3

19. 0 (nenhum dos dois); $\sqrt[3]{5}$ (mínimo) **21.** -2 (mínimo), $2/3$ (máximo)

23. 0 (mínimo) **25.** -1 (mínimo), 1 (máximo)

27. máximo relativo em $(4/3, 19/3)$

29. máximo relativo em $(\pi/4, 1)$; mínimo relativo em $(3\pi/4, -1)$

31. máximo relativo em $(1, 1)$; mínimos relativos em $(0, 0)$, $(2, 0)$

33. máximo relativo em $(-1, 0)$; mínimo relativo em $(-3/5, -108/3125)$

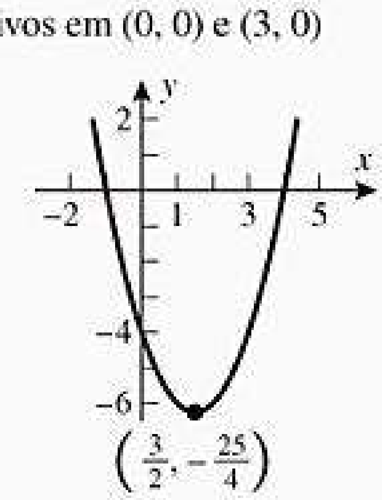
35. máximo relativo em $(-1, 1)$; mínimo relativo em $(0, 0)$

37. sem extremos relativos **39.** mínimo relativo em $(0, \ln 2)$

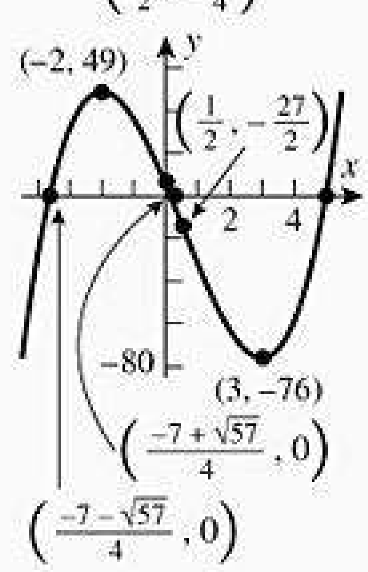
41. mínimo relativo em $(-\ln 2, -1/4)$

43. máximo relativo em $(3/2, 9/4)$; mínimos relativos em $(0, 0)$ e $(3, 0)$

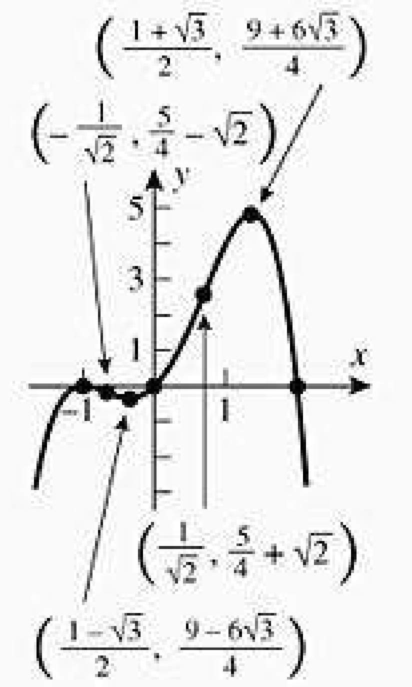
45. cortes com os eixos: $(0, -4)$, $(-1, 0)$, $(4, 0)$
pontos estacionários: $(3/2, -25/4)$ (mínimo)
pontos de inflexão: nenhum



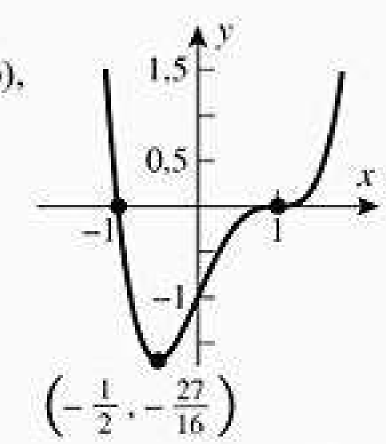
47. cortes com os eixos: $(0, 5)$, $\left(\dfrac{-7 \pm \sqrt{57}}{4}, 0\right)$, $(5, 0)$
pontos estacionários: $(-2, 49)$ (máximo), $(3, -76)$ (mínimo)
ponto de inflexão: $(1/2, -27/2)$



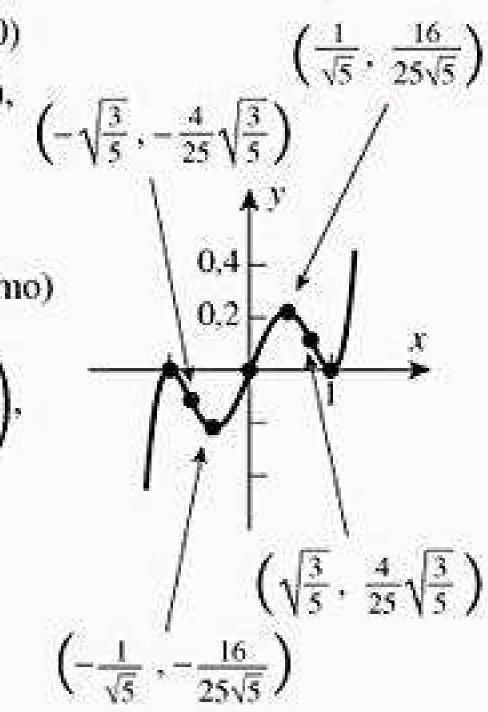
49. cortes com os eixos: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$
pontos estacionários: $(-1, 0)$ (máximo),
$\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{9-6\sqrt{3}}{4}\right)$ (mínimo),
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{9+6\sqrt{3}}{4}\right)$ (máximo)
pontos de inflexão: $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{4} - \sqrt{2}\right)$,
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{4} + \sqrt{2}\right)$,



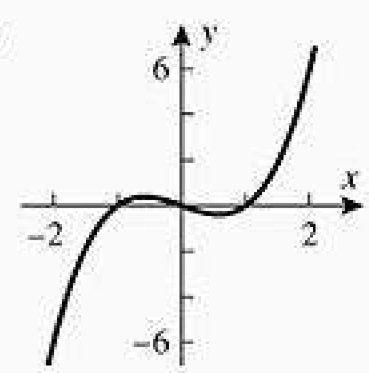
51. cortes com os eixos: $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$
pontos estacionários: $(-1/2, -27/16)$ (mínimo), $(1, 0)$ (nenhum dos dois)
pontos de inflexão: $(0, -1)$, $(1, 0)$



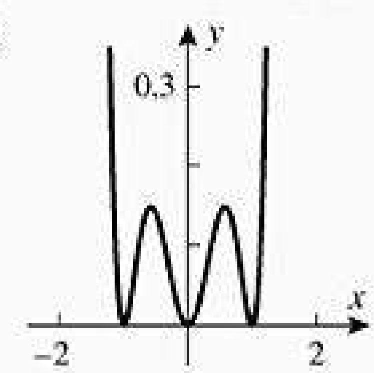
53. cortes com os eixos: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$
pontos estacionários: $(-1, 0)$ (máximo),
$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{16}{25\sqrt{5}}\right)$ (mínimo),
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{16}{25\sqrt{5}}\right)$ (máximo), $(1, 0)$ (mínimo)
pontos de inflexão: $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{5}}, -\dfrac{4}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$,
$(0, 0)$, $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}, \dfrac{4}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$



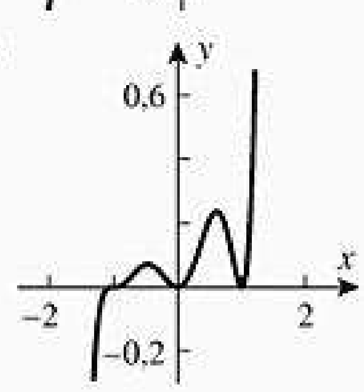
55. **(a)**



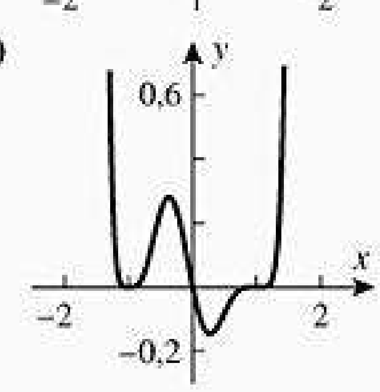
(b)



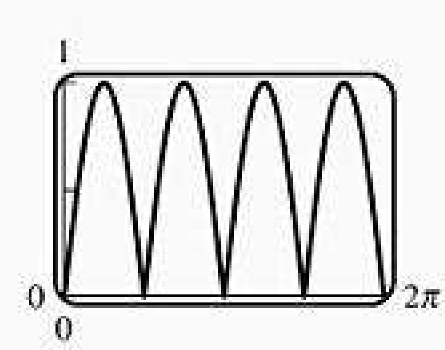
(c)



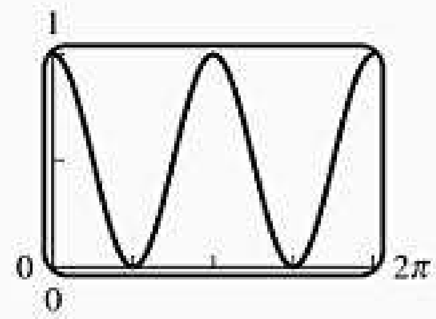
(d)



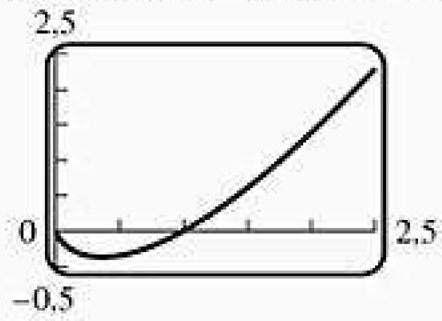
57. min. relativo 0 em $x = \pi/2$; π; $3\pi/2$;
max. relativo 1 em $x = \pi/4$; $3\pi/4$; $5\pi/4$; $7\pi/4$



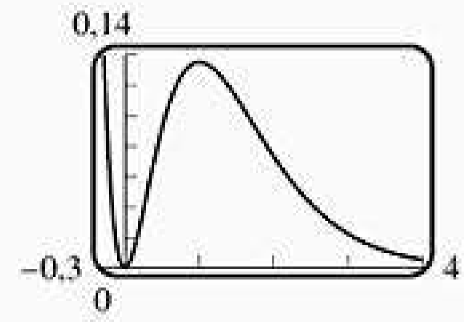
59. min. relativo 0 em $x = \pi/2$; $3\pi/2$
max. relativo 1 em $x = \pi$



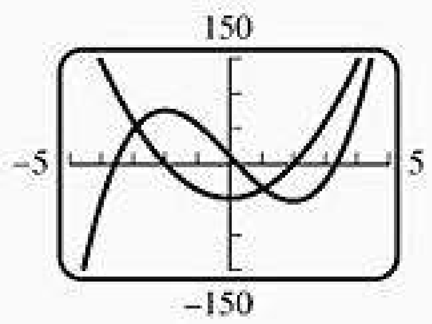
61. min. relativo $-1/e$ em $x = 1/e$



63. min. relativo 0 em $x = 0$
max. relativo $1/e^2$ em $x = 1$



65. min. relativo em $x = -3{,}58$; 3,33
max. relativo em $x = 0{,}25$



67. máximo relativo em $x \approx -0{,}272$; mínimo relativo em $x \approx -0{,}224$.

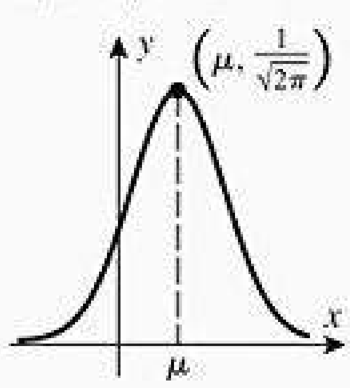
69. máximo relativo em $x = 0$; mínimo relativo em $x \approx \pm 0{,}618$.

71. **(a)** 54 **(b)** 9

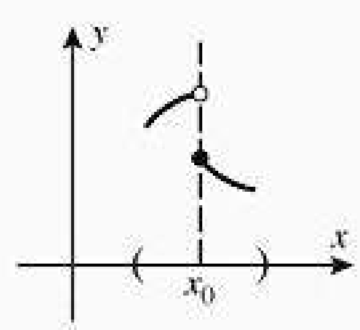
73. **(a)** $(-2{,}2; 4)$, $(2; 1{,}2)$, $(4{,}2; 3)$
(b) pontos críticos em $x = -5{,}1$; -2; $0{,}2$; 2;
mínimo local em $x = -5{,}1$ e 2; máximo local em $x = -2$;
sem extremos em $x = 0{,}2$; $f''(1) \approx -1{,}2$.

75. $a = -2$, $b = 3$, $c = d = 0$

77. **(b)**

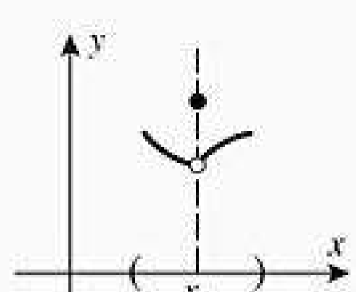


79. **(a)**



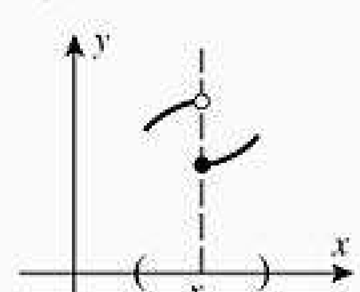
$f(x_0)$ não é um valor extremo

(b)



$f(x_0)$ é um valor relativo

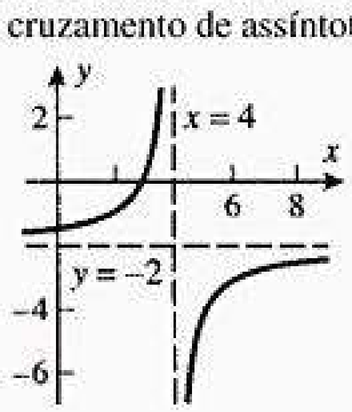
(c)



$f(x_0)$ é um mínimo relativo

► Exercícios 5.3 (página 299)

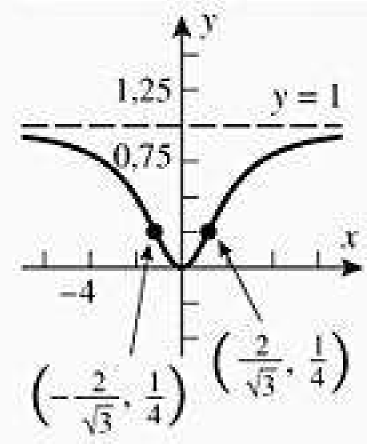
1. pontos estacionários: não há;
pontos de inflexão: não há;
assíntotas: $x = 4$, $y = -2$;
cruzamento de assíntota: não há.



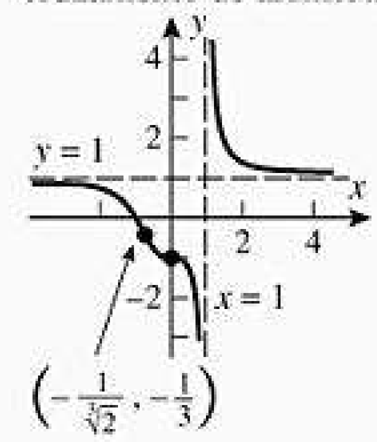
3. pontos estacionários: não há;
ponto de inflexão: (0, 0);
assíntotas: $x = \pm 2$, $y = 0$;
cruzamento de assíntota: (0, 0).



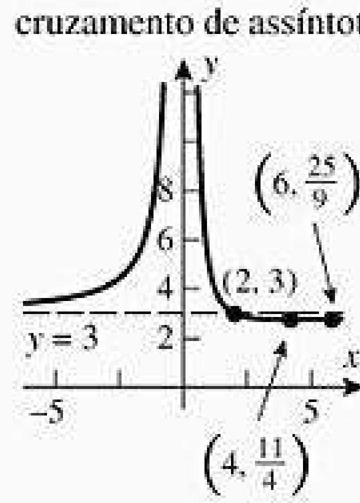
5. ponto estacionário: (0, 0);
ponto de inflexão: $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$;
assíntotas: $y = 1$;
cruzamento de assíntota: não há.



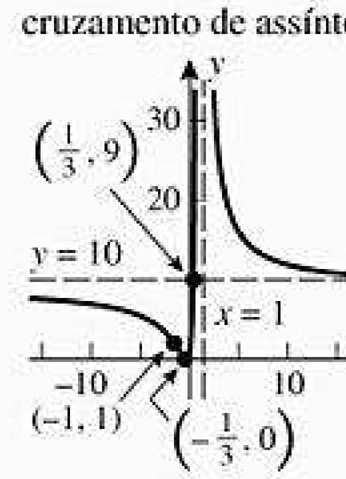
7. ponto estacionário: (0, −1);
pontos de inflexão: (0, −1), $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{1}{3}\right)$;
assíntotas: $x = 1$, $y = 1$;
cruzamento de assíntota: não há.



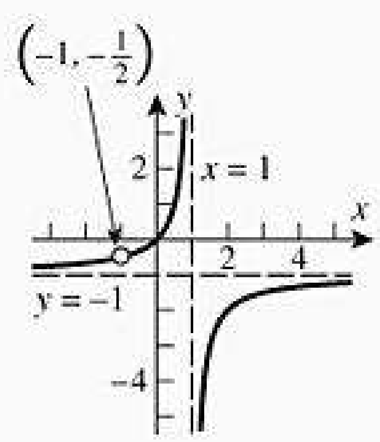
9. ponto estacionário: (4, 11/4);
ponto de inflexão: (6, 25/9);
assíntotas: $x = 0$, $y = 3$;
cruzamento de assíntota: (2, 3).



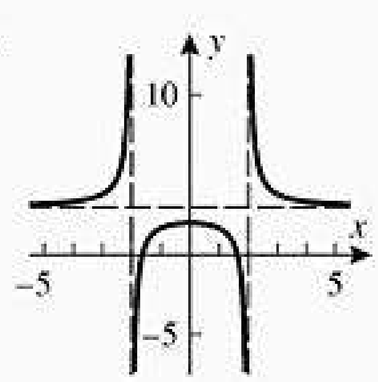
11. ponto estacionário: (−1/3, 0);
ponto de inflexão: (−1, 1);
assíntotas: $x = 1$, $y = 9$;
cruzamento de assíntota: (1/3, 9).



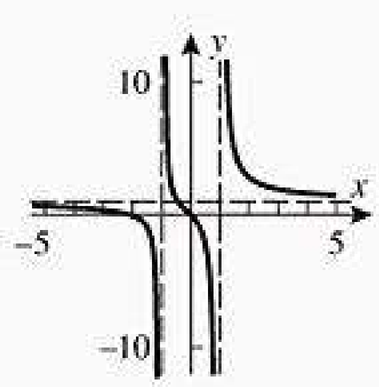
13. pontos estacionários: não há;
pontos de inflexão: não há;
assíntotas: $x = 1$, $y = -1$;
cruzamento de assíntota: não há.



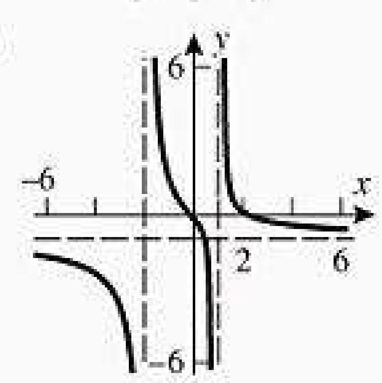
15. **(a)**



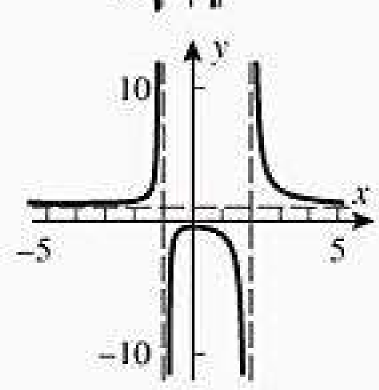
(b)



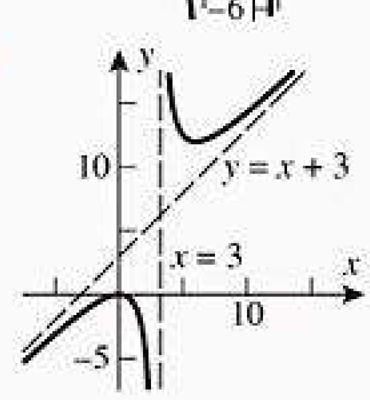
(c)



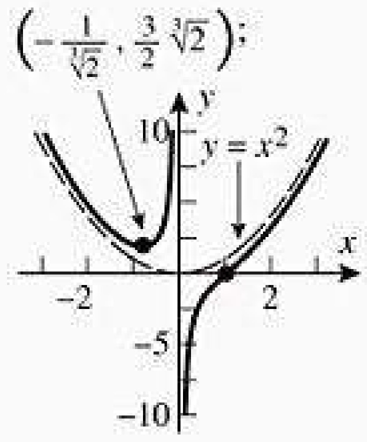
(d)



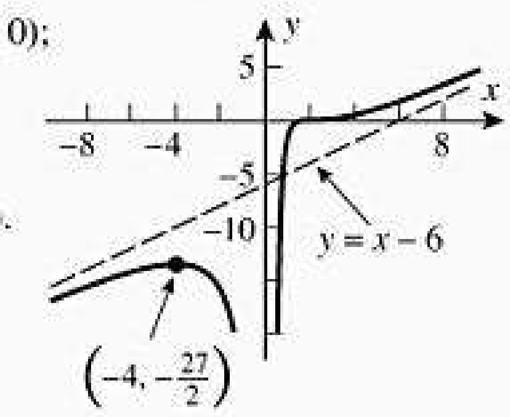
17.



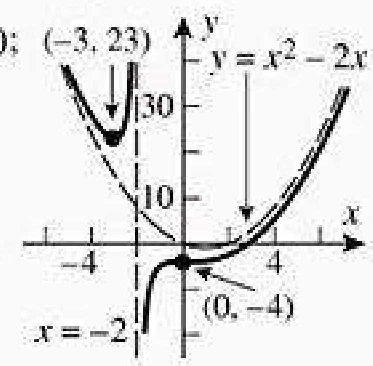
19. ponto estacionário: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$;
ponto de inflexão: (1, 0);
assíntotas: $x = 0$, $y = x^2$;
cruzamento de assíntota: não há.



21. pontos estacionários: (−4, −27/2), (2, 0);
ponto de inflexão: (2, 0);
assíntotas: $x = 0$, $y = x - 6$;
cruzamento de assíntota: (2/3, −16/3).

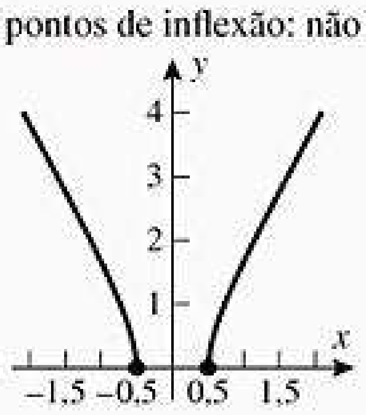


23. pontos estacionários: (−3, 23), (0, −4);
pontos de inflexão: (0, −4);
assíntotas: $x = -2$, $y = x^2 - 2x$;
cruzamento de assíntota: não há.

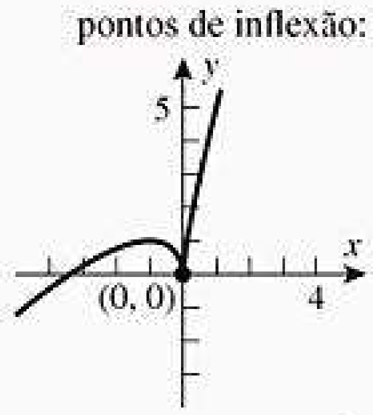


25. **(a)** VI **(b)** I **(c)** III **(d)** V **(e)** IV **(f)** II

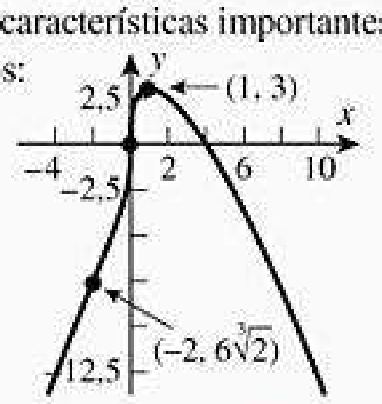
27. pontos críticos: (±1/2, 0);
pontos de inflexão: não há.

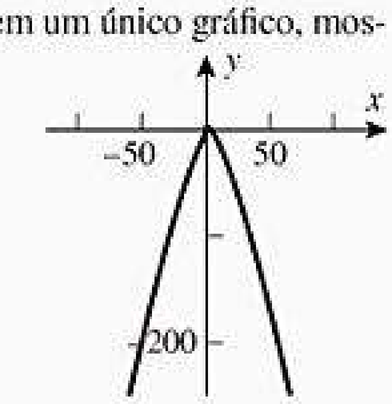


29. pontos críticos: (−1, 1), (0, 0);
pontos de inflexão: não há.

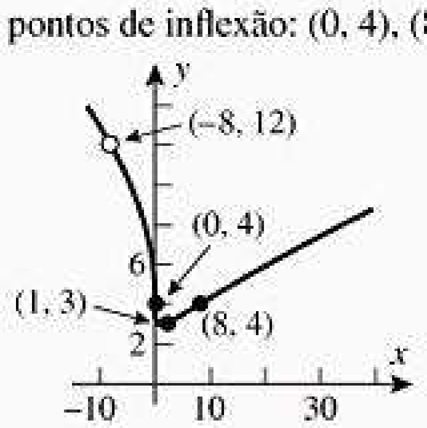


31. pontos críticos: (0, 0), (1, 3); ponto de inflexão: $(-2, -6\sqrt[3]{2})$. Como é difícil ver todas as características importantes em um único gráfico, mostramos dois gráficos:

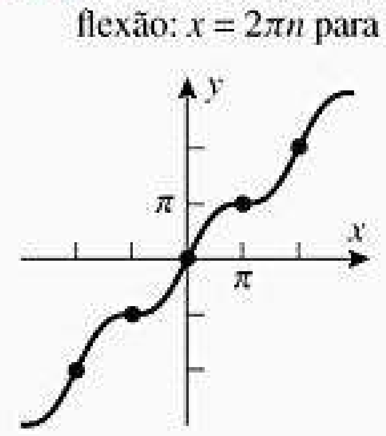




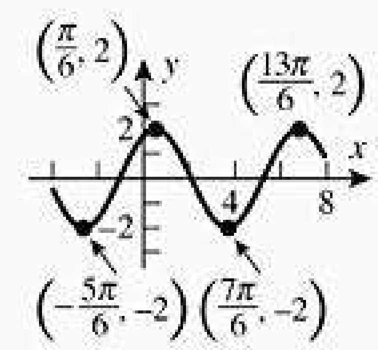
33. pontos críticos: (0, 4), (1, 3);
pontos de inflexão: (0, 4), (8, 4).



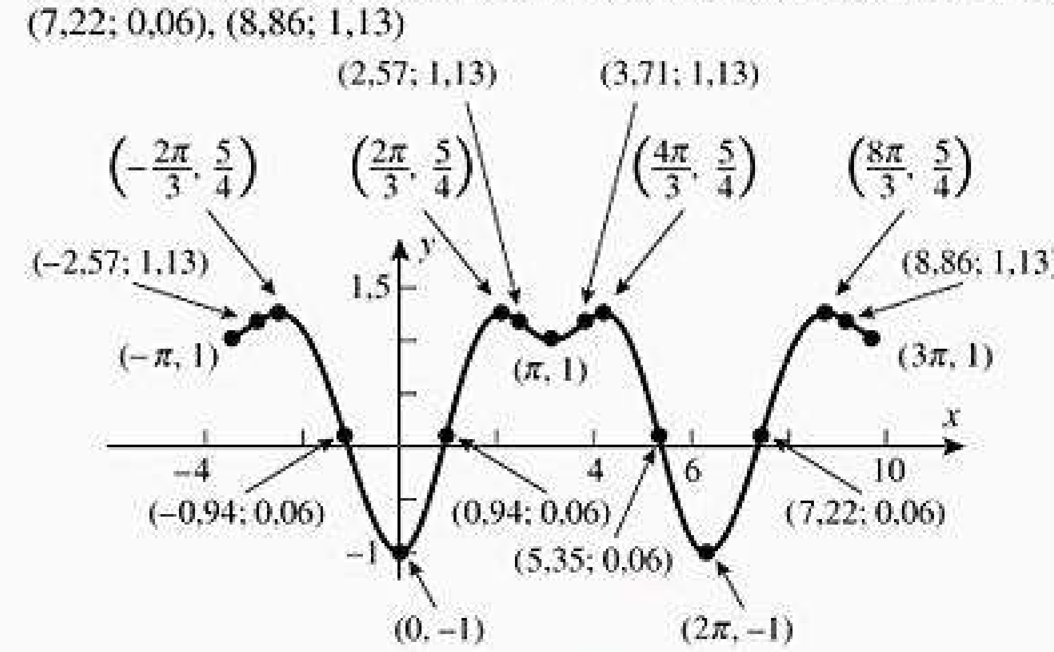
35. Extremos: não há; pontos de inflexão: $x = 2\pi n$ para inteiros n



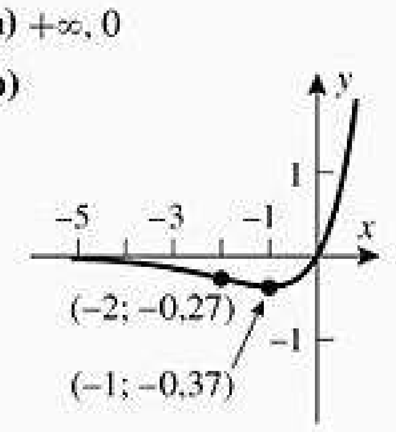
37. mínimo relativo em $x = 7\pi/6 + 2\pi n$ para n inteiro qualquer;
máximo relativo em $x = \pi/6 + 2\pi n$ para n inteiro qualquer;
pontos de inflexão: $x = 2\pi/3 + \pi n$ para n inteiro qualquer.



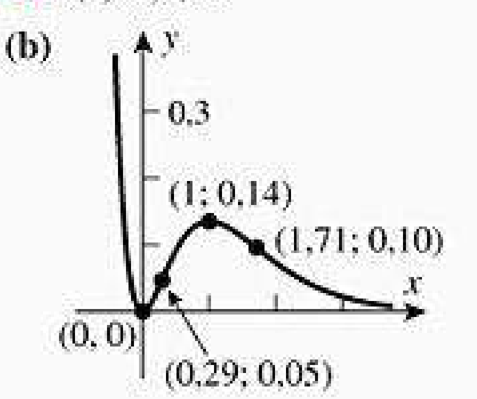
39. mínimos relativos: 1 em $x = -\pi, \pi, 3\pi$, −1 em $x = 0, 2\pi$;
máximos relativos: 5/4 em $x = -2\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 8\pi/3$;
pontos de inflexão onde $\cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$: (−2,57; 1,13), (−0,94; 0,06), (0,94; 0,06), (2,57; 1,13), (3,71; 1,13), (5,35; 0,06), (7,22; 0,06), (8,86; 1,13)



41. **(a)** $+\infty$, 0
(b)

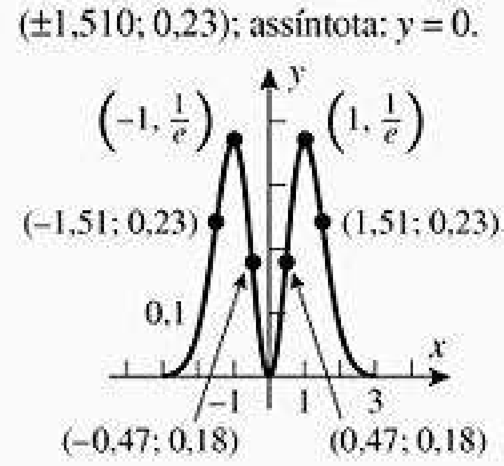


43. **(a)** 0, $+\infty$
(b)

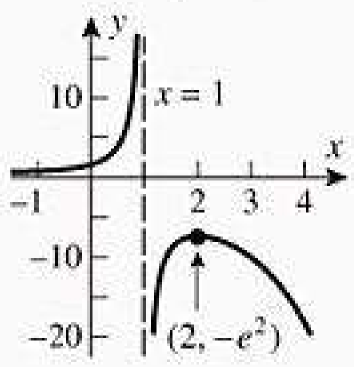


45. **(a)** 0, 0

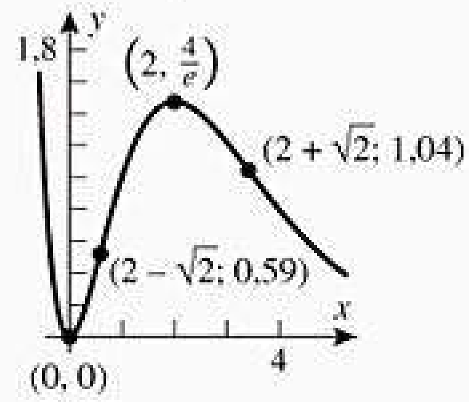
(b) máximo relativo = $1/e$ em $x = \pm 1$; mínimo relativo = 0 em $x = 0$; pontos de inflexão onde $x = \pm\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$, aproximadamente (±0,47; 0,18), (±1,510; 0,23); assíntota: $y = 0$.



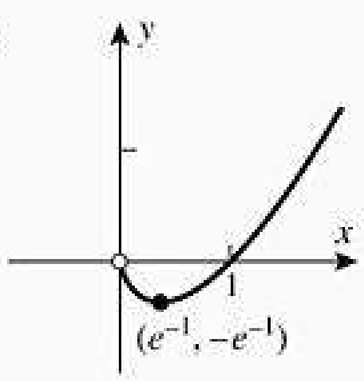
47. **(a)** $-\infty$, 0
(b) máximo relativo = $-e^2$ em $x = 2$;
não há mínimo relativo;
não há pontos de inflexão;
assíntotas: $y = 0$, $x = 1$.



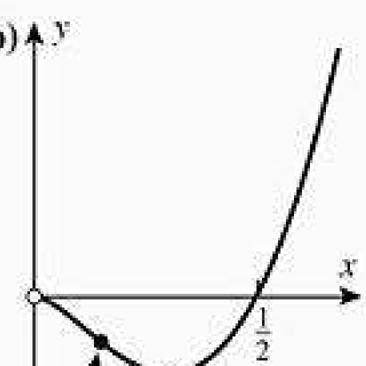
49. **(a)** 0, $+\infty$
(b) máximo relativo = $4/e$ em $x = 2$;
mínimo relativo = 0 em $x = 0$;
pontos de inflexão em $x = 2 \pm \sqrt{2}$;
assíntota: $y = 0$.



51. **(a)** $+\infty$, 0
(b)

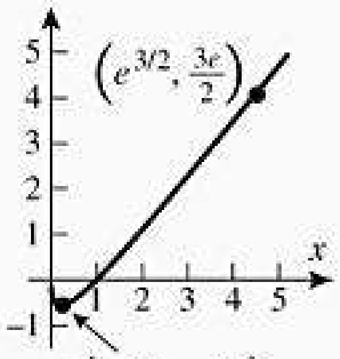


53. **(a)** $+\infty$, 0
(b)

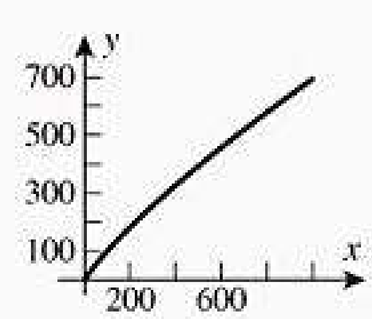


$\left(\frac{1}{2e^{3/2}}, \frac{-3}{8e^3}\right)$ $\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{-1}{8e}\right)$

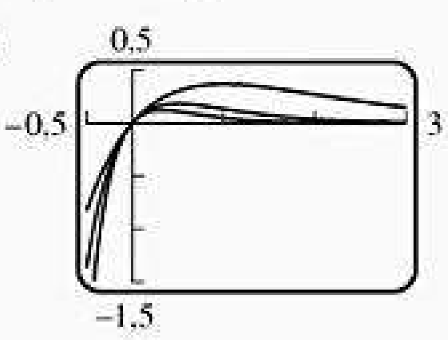
55. **(a)** $+\infty$, 0
(b) não há máximo relativo; mínimo relativo = $-\dfrac{3}{2e}$ em $x = e^{-3/2}$;
ponto de inflexão: $(e^{3/2}, 3e/2)$;
não há assíntotas. Como é difícil ver todas as características importantes em um único gráfico, mostramos dois gráficos:



$\left(e^{3/2}, \frac{3e}{2}\right)$ $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2e}\right)$

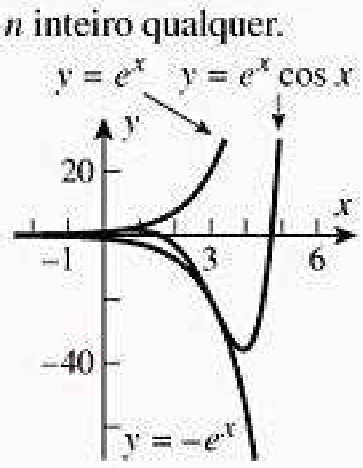


57. **(a)**

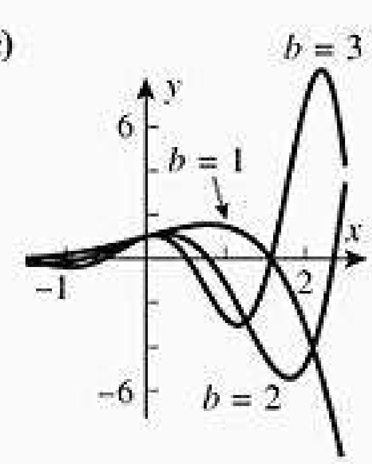


(b) máximo relativo em $x = 1/b$; ponto de inflexão em $x = 2/b$

59. **(a)** não existe, 0
(b) $y = e^x$ e $y = e^x \cos x$ intersectam em $x = 2\pi n$, $y = -e^x$ e $y = e^x \cos x$ intersectam em $x = 2\pi n + \pi$, para n inteiro qualquer.

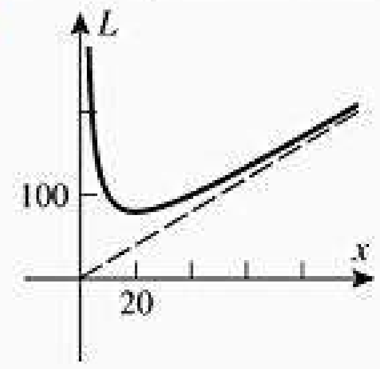


(c)

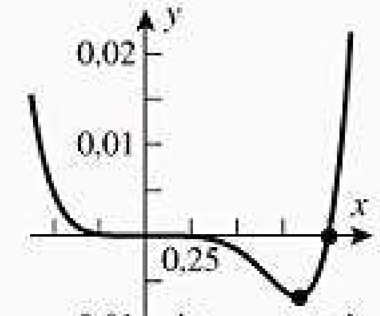


61. **(a)** $x = 1$; 2,5; 3; 4 **(b)** $(-\infty, 1]$, $[2,5; 3]$ **(c)** máximo relativo em $x = 1$ e 3; mínimo relativo em $x = 2,5$ **(d)** $x \approx 0,6$; 1,9; 4

63.



65. O gráfico não detecta os zeros em $x = 0$ e 1 e o mínimo em $x = 5/6$

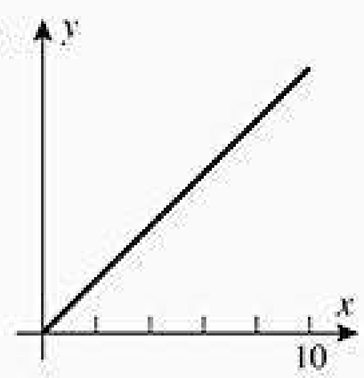


$\left(\frac{5}{6}, -\frac{625}{93312}\right)$

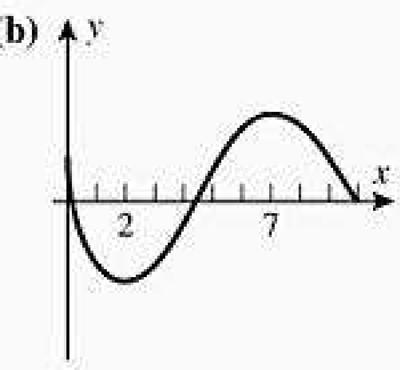
► Exercícios 5.4 (página 307)

1. máximo relativo em $x = 2$; 6; máximo absoluto em $x = 6$; mínimo relativo e absoluto em $x = 4$

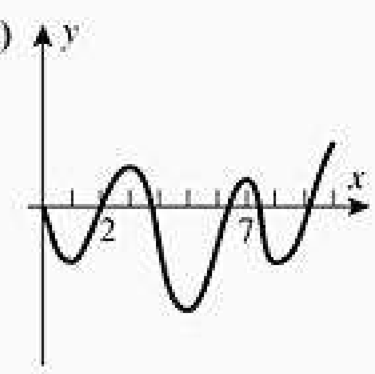
3. **(a)**



(b)



(c)



7. máximo = 2 em $x = 1$ e 2; mínimo = 1 em $x = 3/2$.
9. máximo = 8 em $x = 4$; mínimo = -1 em $x = 1$.
11. valor máximo $3/\sqrt{5}$ at $x = 1$, valor mínimo $-3/\sqrt{5}$ at $x = -1$
13. máximo = $\sqrt{2} - \pi/4$ em $x = -\pi/4$; mínimo = $\pi/3 - \sqrt{3}$ em $x = \pi/3$.

15. valor máximo 17 em $x = -5$, valor mínimo 1 em $x = -3$.

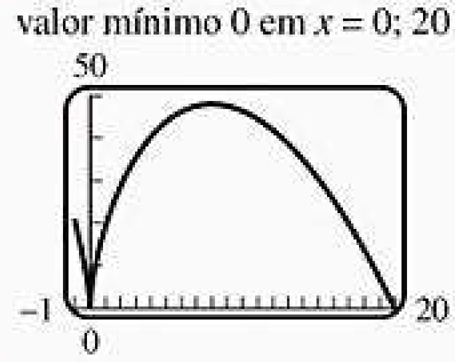
17. não há máximos; mínimo = $-9/4$ em $x = 1/2$.

19. valor máximo $f(1) = 1$, não há mínimo **21.** não há máximo, nem mínimo

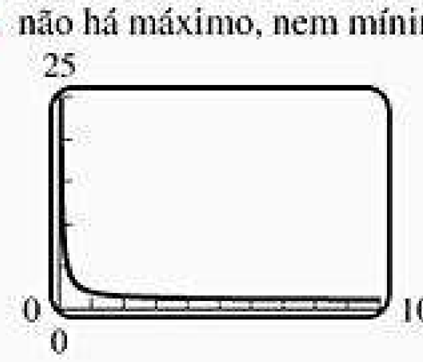
23. máximo = $-2 - 2\sqrt{2}$ em $x = -1 - \sqrt{2}$; não há mínimos.

25. não há máximos; mínimo = 0 em $x = 0$ e 2.

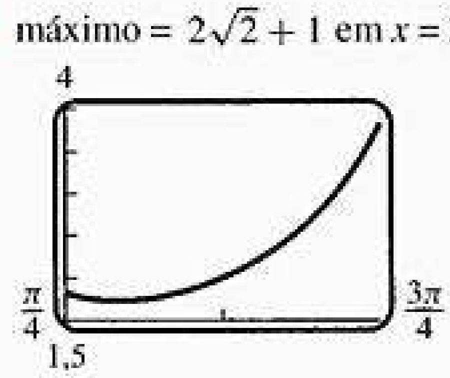
27. valor máximo 48 em $x = 8$, valor mínimo 0 em $x = 0$; 20



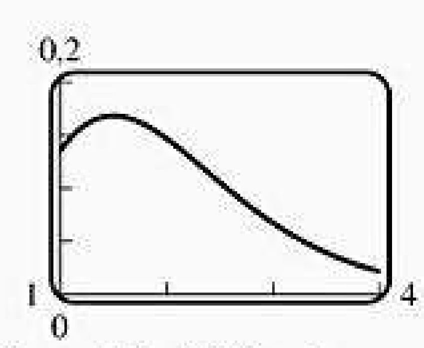
29. não há máximo, nem mínimo



31. máximo = $2\sqrt{2} + 1$ em $x = 3\pi/4$; mínimo = $\sqrt{3}$ em $x = \pi/3$.

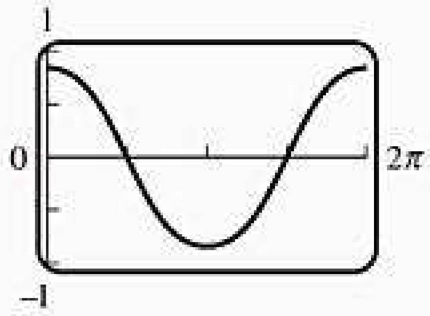


33. valor máximo $\frac{27}{8}e^{-3}$ em $x = \frac{3}{2}$, valor mínimo $64/e^8$ em $x = 4$



35. máximo = 5 ln 10 − 9 em $x = 3$; mínimo = 5 ln (10/9) − 1 em $x = 1/3$.

37. valor máximo $\text{sen}(1) \approx 0{,}84147$
valor mínimo $-\text{sen}(1) \approx -0{,}84147$



39. valor máximo 2, valor mínimo $-\frac{1}{4}$

41. máximo = 3 em $x = 2n\pi$; mínimo = $-3/2$ em $x = \pm 2\pi/3 + 2n\pi$, com n inteiro qualquer.

45. $f'(1) = 2$ **49.** $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ é o mais próximo; $(-1, -1)$ é o mais distante

51. máximo $y = 4$ em $t = \pi$ e 3π; mínimo $y = 0$ em $t = 0$ e 2π

► Exercícios 5.5 (página 318)

1. **(a)** 1 **(b)** $\frac{1}{2}$ **3.** 500 m paralelamente e 250 m perpendicularmente ao córrego. **5.** 500 m × 750 m **7.** 5 cm × $\frac{12}{5}$ cm **9.** $10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}$

11. 24 m ($1 o metro da cerca), 12 m ($2 o metro da cerca)

15. **(a)** máximo $N \approx 161.788$, mínimo $N = 125.000$ **(b)** $t = 40$

17. 11.664 pol³ **19.** $\frac{200}{27}$ pés³ **21.** base 10 cm², altura 20 cm

23. tampa (ou base) $\sqrt[3]{3V/4}$ unidades quadradas, altura $\frac{4}{3}\sqrt[3]{3V/4}$

25. altura = $2\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}\,R$, raio = $\sqrt{(5+\sqrt{5})/10}\,R$

29. altura = raio = $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm **31.** $L/12$ por $L/12$ por $L/12$

33. altura = $L/\sqrt{3}$, raio = $\sqrt{2/3}\,L$

35. raio $\sqrt[6]{450/\pi^2}$ cm, altura $\frac{30}{\pi}\sqrt[3]{\pi^2/450}$ cm

37. altura = $4R$, raio = $\sqrt{2}R$ **39.** $\pi/3$ **41.** $5\sqrt{5}$ pés

43. **(a)** 7000 unidades **(b)** sim **(c)** $15 **45.** 13.722 kg **47.** $1/\sqrt{5}$

53. **(a)** $(2, 2), (-2, -2), (2/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}), (-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$

55. $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ **57.** $\left(-1/\sqrt{3}, \frac{3}{4}\right)$ **59.** $(1, 2)(1 + 2^{2/3})^{3/2}$m

61. 30 cm a partir da fonte mais fraca **63.** $x = 1 + 2\sqrt{2}$

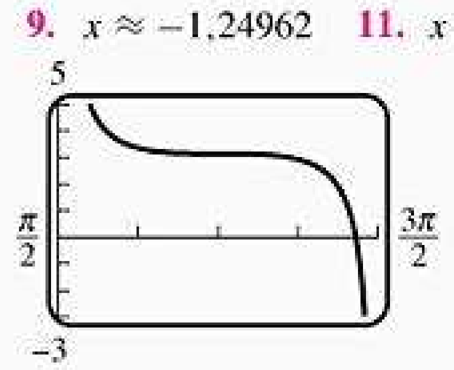
67. **(c)** $\frac{1}{4}$ km a favor da corrente a partir da casa

► Exercícios 5.6 (página 327)

1. 1,414213562 **3.** 1,817120593 **5.** $x \approx 1.76929$

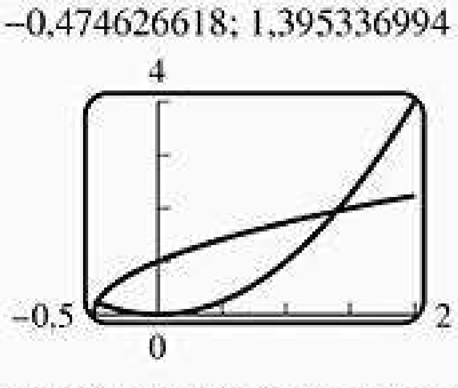
7. 1,224439550 **9.** $x \approx -1{,}24962$ **11.** $x \approx 1{,}02987$

13. 4,493409458



15. $x \approx 0{,}68233$

17. $-0{,}474626618$; 1,395336994



19. $x \approx 0{,}58853$ ou 3,09636

21. **(b)** 3,162277660

23. **(b)** $-4{,}098859132$

25. $x = -1$ ou $x \approx 0{,}17951$

27. (0,589754512; 0,347810385)

29. **(b)** $\theta \approx 2{,}99156$ rad ou 171°

31. $-1{,}220744085$; 0,724491959

33. $i = 0{,}053362$ ou 5,33%

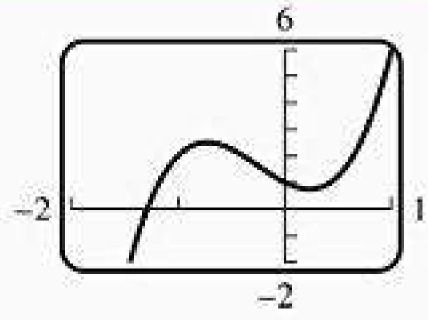
35. **(a)** Os valores não convergem. **37.** **(d)** $f(c) = 0$

► Exercícios 5.7 (página 334)

1. $c = 4$ **3.** $c = \pi$ **13.** **(a)** $[-2, 1]$

5. $c = 1$ **7.** $c = 1$ **(b)** $c \approx -1{,}29$

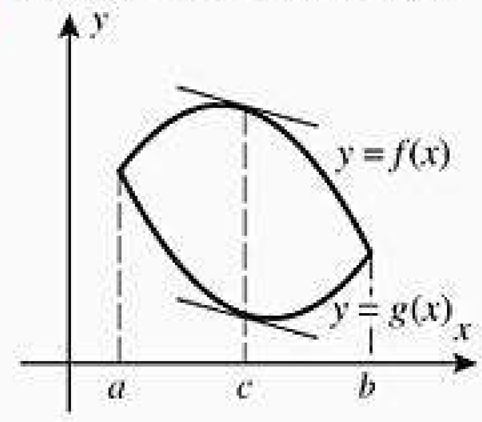
9. $\frac{5}{4}$ **11.** $-\sqrt{5}$ **(c)** $-1{,}2885843$



15. **(b)** tg x não é contínua em $[0, \pi]$. **25.** $f(x) = xe^x - e^x + 2$

35. **(b)** $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = \cos x$

37.



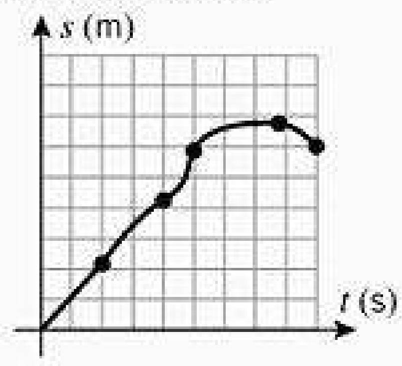
41. $a = 6, b = -3$

► Exercícios 5.8 (página 342)

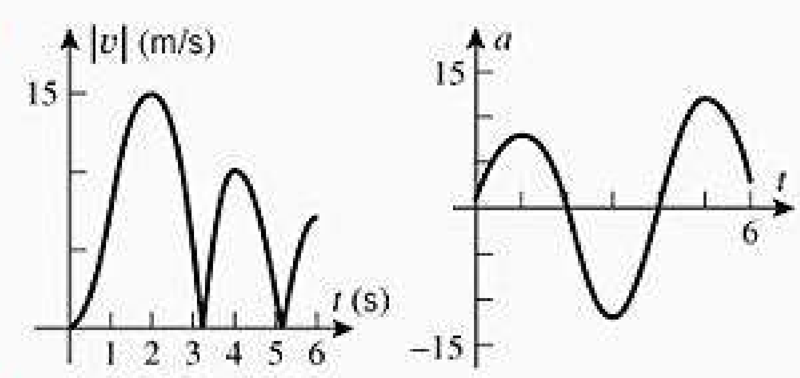
1. **(a)** positivo, negativo, diminuindo a velocidade
(b) positivo, positivo, aumentando a velocidade
(c) negativo, positivo, diminuindo a velocidade

3. **(a)** esquerda
(b) negativa
(c) aumentando a velocidade
(d) diminuindo a velocidade

5.



7.



9. **(a)** 7,5 pés/s² **(b)** $t = 0$ s

11. **(a)**

t	s	v	a
1	0,71	0,56	−0,44
2	1	0	−0,62
3	0,71	−0,56	−0,44
4	0	−0,79	0
5	−0,71	−0,56	0,44

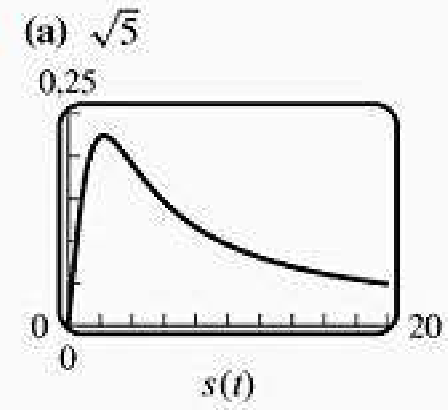
(b) parou em $t = 2$; movendo-se para a direita em $t = 1$; movendo-se para a esquerda em $t = 3$, 4 e 5. **(c)** aumentando a velocidade em $t = 3$; diminuindo a velocidade em $t = 1$ e 5; nenhum dos dois em $t = 2$ e 4.

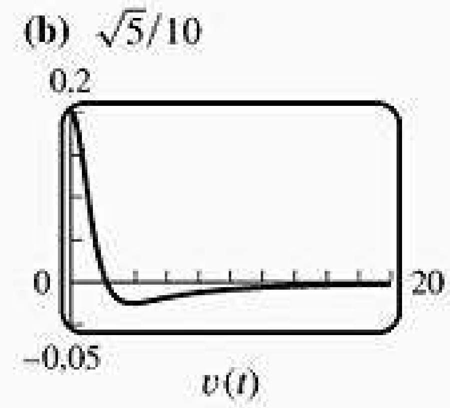
13. **(a)** $v(t) = 3t^2 - 12t$, $a(t) = 6t - 12$ **(b)** $s(1) = -5$ m, $v(1) = -9$ m/s $|v(1)| = 9$ m/s, $a(1) = -6$ m/s² **(c)** 0; 4 **(d)** aumentando a velocidade em $0 < t < 2$ e $4 < t$, diminuindo a velocidade em $2 < t < 4$ **(e)** 39 m

15. **(a)** $v(t) = 3\pi\ \text{sen}(\pi t/3)$; $a(t) = \pi^2 \cos(\pi t/3)$ **(b)** $s(1) = 9/2$ m; $v(1)$ = velocidade escalar = $3\sqrt{3}\pi/2$ m/s; $a = \pi^2/2$ m/s² **(c)** $t = 0$ s, 3 s **(d)** Aumentando a velocidade: $0 < t < 1{,}5$ e $3 < t < 4{,}5$; diminuindo a velocidade: $1{,}5 < t < 3$ e $4{,}5 < t < 5$ **(e)** 31,5 m

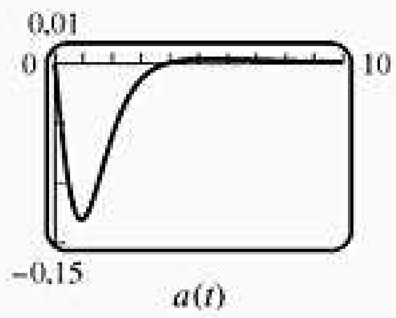
17. **(a)** $v(t) = -\frac{1}{3}(t^2 - 6t + 8)e^{-t/3}$; $a(t) = \frac{1}{9}(t^2 - 12t + 26)e^{-t/3}$ **(b)** $s(1) = 9e^{-1/3}$, $v(1) = -e^{-1/3}$, velocidade escalar = $e^{-1/3}$, $a(1) = \frac{5}{3}e^{-1/3}$ **(c)** $t = 2$ s, 4 s **(d)** Aumentando a velocidade: $2 < t < 6 - \sqrt{10}$ e $4 < t < 5$; diminuindo a velocidade: $0 < t < 2$ e $6 - \sqrt{10} < t < 4$ **(e)** $8 - 24e^{-2/3} + 48e^{-4/3} - 33e^{-5/3}$

19. **(a)** $\sqrt{5}$ **(b)** $\sqrt{5}/10$

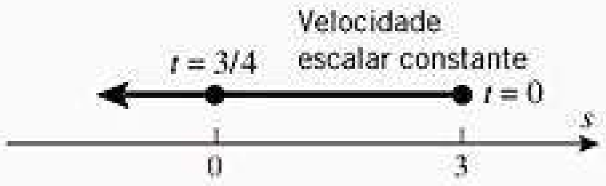




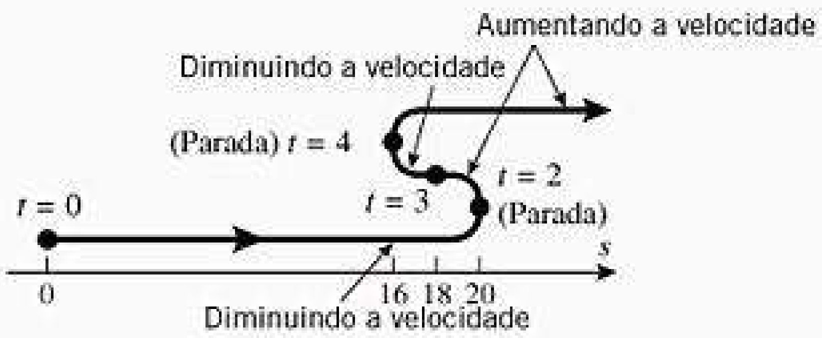
(c) aumentando a velocidade em $\sqrt{5} < t < \sqrt{15}$, diminuindo a velocidade em $0 < t < \sqrt{5}$ e $\sqrt{15} < t$



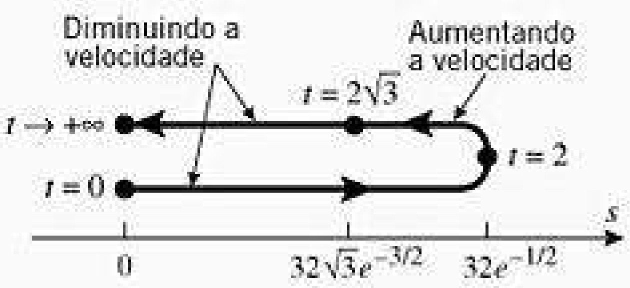
21.



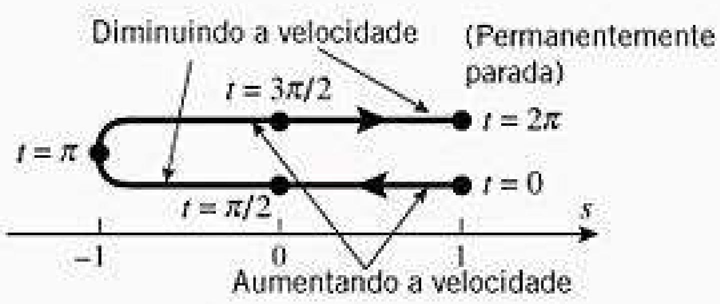
23.



25.



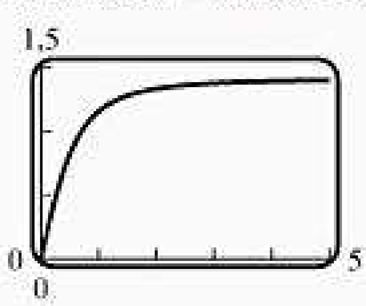
27.



29. (a) 12 m/s (b) $t = 2{,}2$ s; $s = -24{,}2$ pés

31. (a) $t = 2 \pm 1/\sqrt{3}$, $s = \ln 2$, $v = \pm\sqrt{3}$ (b) $t = 2$, $s = 0$, $a = 6$

33. (a) 1,5 (b) $\sqrt{2}$



35. (b) $\frac{2}{3}$ unidade (c) $0 \le t < 1$ e $t > 2$

► Capítulo 5. Exercícios de Revisão (página 344)

1. (a) $f(x_1) < f(x_2)$; $f(x_1) > f(x_2)$; $f(x_1) = f(x_2)$
   (b) $f' > 0$; $f' < 0$; $f' = 0$

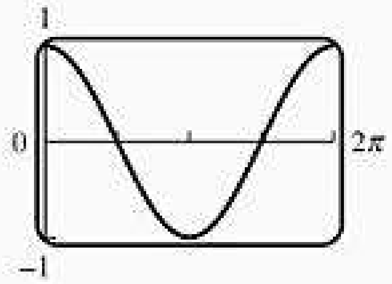
3. (a) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ (b) $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ (c) $(-\infty, +\infty)$ (d) não há (e) não há

5. (a) $[0, +\infty)$ (b) $(-\infty, 0]$ (c) $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$
   (d) $(-\infty, -\sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2/3}, +\infty)$ (e) $-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}$

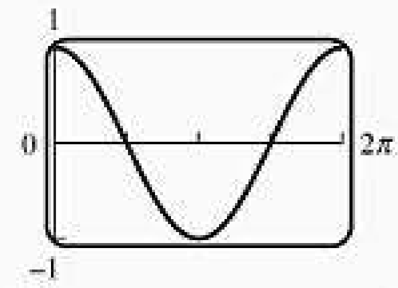
7. (a) $[-1, +\infty)$ (b) $(-\infty, -1]$ (c) $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$
   (d) $(0, 2)$ (e) 0 e 2

9. (a) $(-\infty, 0]$ (b) $[0, +\infty)$ (c) $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, +\infty)$
   (d) $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (e) $\pm 1/\sqrt{2}$

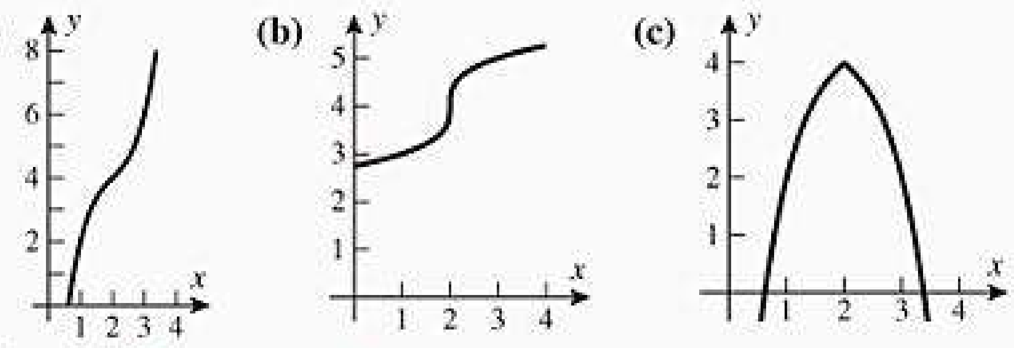
11. (a) crescente
    (b) decrescente
    (c) côncava para cima
    (d) côncava para baixo
    (e) pontos de inflexão



13. (a) crescente
    (b) decrescente
    (c) côncava para cima
    (d) côncava para baixo
    (e) pontos de inflexão



15. (a) (b) (c)

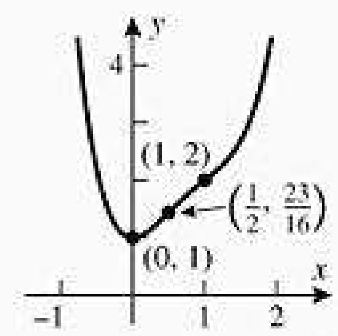


17. $-\dfrac{b}{2a} \le 0$ 19. $x = -1$ 21. (a) em um ponto de inflexão

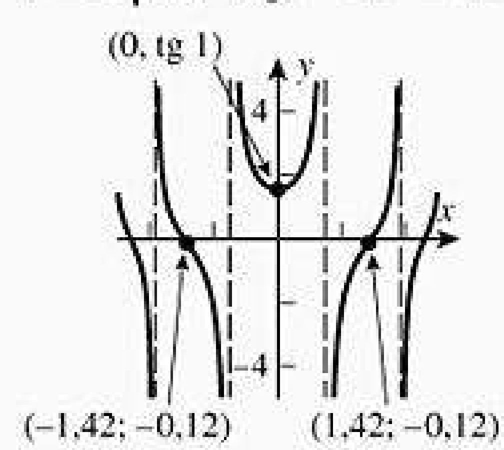
25. (a) $x = \pm\sqrt{2}$ (pontos estacionários) (b) $x = 0$ (ponto estacionário)

27. (a) max. relativo em $x = 1$, min. relativo em $x = 7$, nenhum dos dois em $x = 0$
    (b) max. relativo em $x = \pi/2$; $3\pi/2$; min. relativo em $x = 7\pi/6$; $11\pi/6$
    (c) max. relativo em $x = 5$

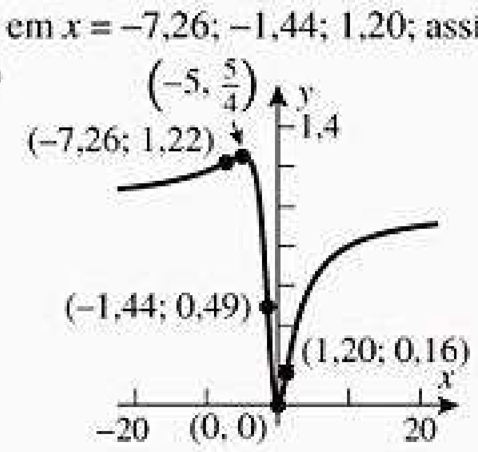
29. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
min. relativo em $x = 0$
pontos de inflexão em $x = \frac{1}{2}, 1$;
não há assíntotas



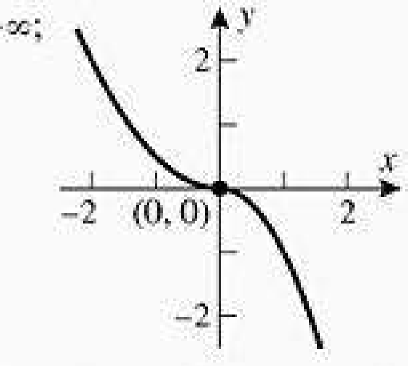
31. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ não existe; ponto crítico em $x = 0$; min. relativo em $x = 0$; ponto de inflexão quando $1 + 4x^2 \operatorname{tg}(x^2 + 1) = 0$; assíntotas verticais em $x = \pm\sqrt{\pi(n + \frac{1}{2}) - 1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$



33. pontos críticos em $x = -5$; 0; max. relativo em $x = -5$, min. relativo em $x = 0$; pontos de inflexão em $x = -7{,}26$; $-1{,}44$; $1{,}20$; assíntota horizontal $y = 1$ quando $x \to \pm\infty$



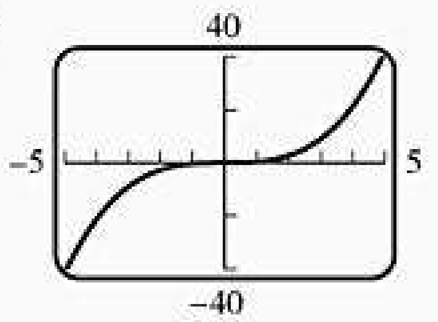
35. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
ponto crítico em $x = 0$;
não há extremo;
ponto de inflexão em $x = 0$
(f muda a concavidade);
não há assíntota



37. não há extremos relativos 39. mínimo relativo de 0 em $x = 0$

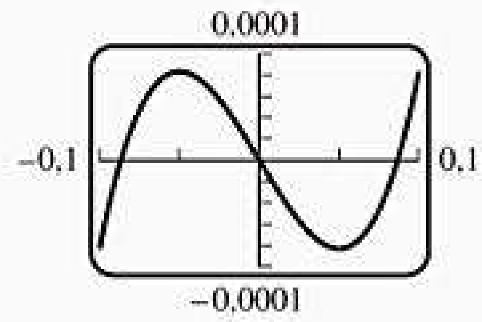
41. mínimo relativo de 0 em $x = 0$ 43. mínimo relativo de 0 em $x = 0$

45. **(a)**

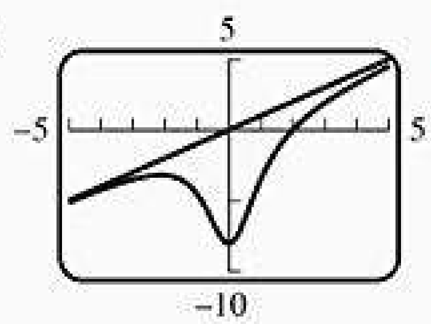


(b) max. relativo em $x = -\frac{1}{20}$, min. relativo em $x = \frac{1}{20}$

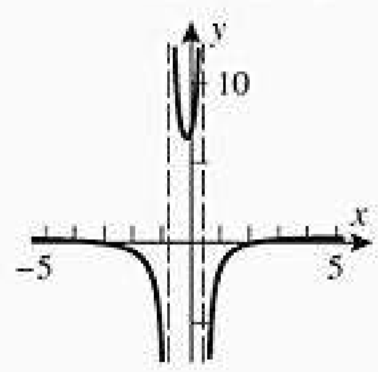
(c) Detalhes mais finos podem ser vistos quando é feito o gráfico sobre uma janela x muito menor.



47. **(a)**



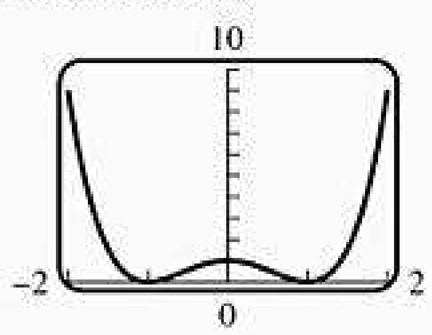
49. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 7}{3x^2 + x - 1}, x \neq \dfrac{1}{2}$

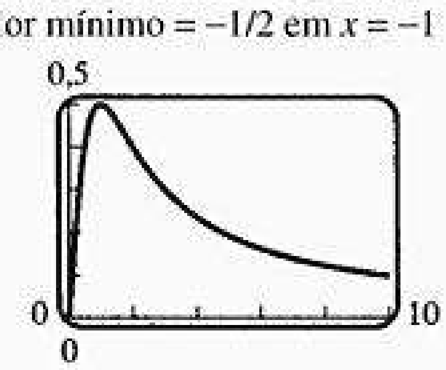


53. **(a)** verdadeira **(b)** falsa

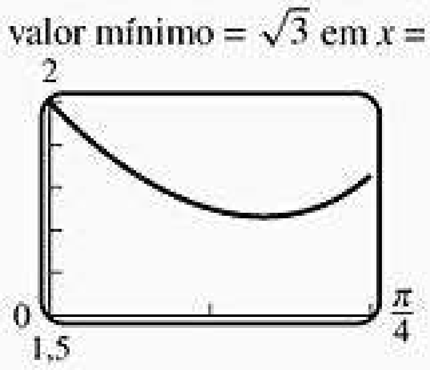
55. **(a)** não há máximo; min = −13/4 em $x = 3/2$ **(b)** não há máximos ou mínimos **(c)** m = $e^2/4$ em $x = 2$ **(d)** não há máximo; min = $e^{-1/e}$ em $x = 1/e$

57. **(a)** valor mínimo 0 em $x = \pm 1$; não há máximo **(b)** valor máximo = 1/2 em $x = 1$; valor mínimo = −1/2 em $x = -1$

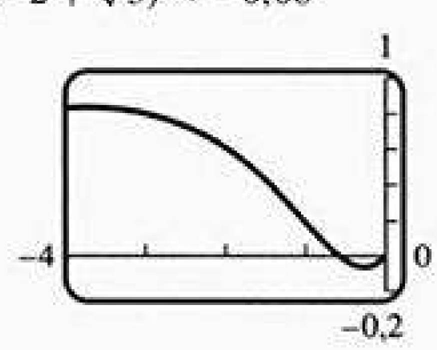




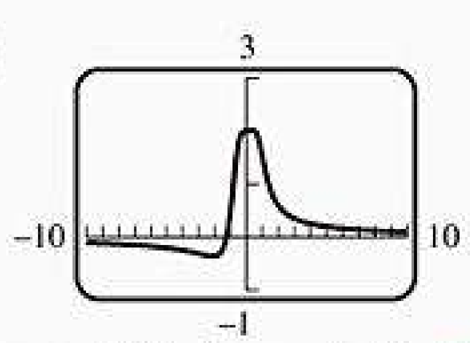
(c) valor máximo = 2 em $x = 0$; valor mínimo = $\sqrt{3}$ em $x = \pi/6$



(d) valor máximo = $f(-2 - \sqrt{3}) \approx 0{,}84$; valor mínimo $f(-2 + \sqrt{3}) \approx -0{,}06$



59. **(a)**

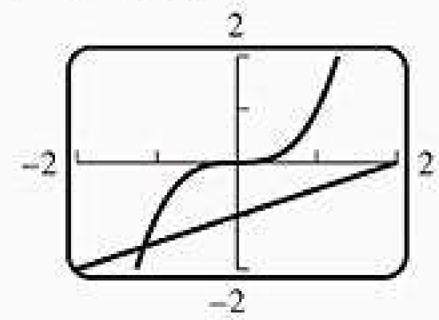


(b) mínimo: (−2,111985; −0,355116); máximo: (0,372591; 2,012931)

61. largura = $4\sqrt{2}$, altura = $3\sqrt{2}$ **63.** 20 cm de lado

65. $x \approx -2{,}11491; 0{,}25410; 1{,}86081$

67. $-1{,}165373043$



69. 249×10^6 km

71. **(a)** sim, $c = 0$ **(b)** não **(c)** sim, $c = \sqrt{\pi/2}$

73. Use o Teorema de Rolle

75. **(a)** sim **(b)** sim

77. **(a)** $v = -2\dfrac{t(t^4 + 2t^2 - 1)}{(t^4 + 1)^2}$, $a = 2\dfrac{3t^8 + 10t^6 - 12t^4 - 6t^2 + 1}{(t^4 + 1)^3}$
(c) $t = 0{,}64$; $s = 1{,}2$ **(d)** $0 \le t \le 0{,}64$ s
(e) aumentando a velocidade quando $0 \le t < 0{,}36$ e $0{,}64 < t < 1{,}1$; caso contrário, diminui a velocidade **(f)** velocidade escalar máxima = 1,05 m/s quando $t = 1{,}10$ s

► Exercícios 6.1 (página 354)

1.

n	2	5	10	50	100
A_n	0,853553	0,749739	0,710509	0,676095	0,671463

3.

n	2	5	10	50	100
A_n	1,57080	1,93376	1,98352	1,99935	1,99984

5.

n	2	5	10	50	100
A_n	0,583333	0,645635	0,668771	0,688172	0,690653

7.

n	2	5	10	50	100
A_n	0,433013	0,659262	0,726130	0,774567	0,780106

9.

n	2	5	10	50	100
A_n	3,71828	2,85174	2,59327	2,39772	2,37398

11.

n	2	5	10	50	100
A_n	1,04720	0,75089	0,65781	0,58730	0,57894

13. $3(x - 1)$ **15.** $x(x + 2)$ **17.** $(x + 3)(x - 1)$

21. área = $A(6) - A(3)$ **23.** $f(x) = 2x$; $a = 2$

► Exercícios 6.2 (página 363)

1. **(a)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \sqrt{1 + x^2} + C$
(b) $\displaystyle\int (x + 1)e^x dx = xe^x + C$

5. $\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{x^3 + 5}\right] = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}}$, logo $\displaystyle\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}} dx = \sqrt{x^3 + 5} + C.$

7. $\dfrac{d}{dx}[\text{sen}(2\sqrt{x})] = \dfrac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, logo $\displaystyle\int \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \text{sen}(2\sqrt{x}) + C.$

9. **(a)** $(x^9/9) + C$ **(b)** $\frac{7}{12}x^{12/7} + C$ **(c)** $\frac{2}{9}x^{9/2} + C$

11. $\dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{6x^4} + C$ **13.** $-\dfrac{1}{2}x^{-2} - \dfrac{12}{5}x^{5/4} + \dfrac{8}{3}x^3 + C$

15. $(x^2/2) + (x^5/5) + C$ **17.** $3x^{4/3} - \frac{12}{7}x^{7/3} + \frac{3}{10}x^{10/3} + C$

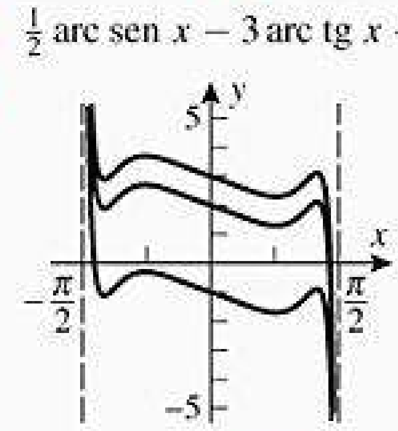
19. $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + C$ **21.** $2 \ln |x| + 3e^x + C$

23. $-3 \cos x - 2 \text{ tg } x + C$ **25.** $\text{tg } x + \sec x + C$

27. $\tan \theta + C$ **29.** $\sec x + C$ **31.** $\theta - \cos \theta + C$

33. $\frac{1}{2}$ arc sen x − 3 arc tg $x + C$ **35.** $\text{tg } x - \sec x + C$

37.



39. $f(x) = \cos x + 1$

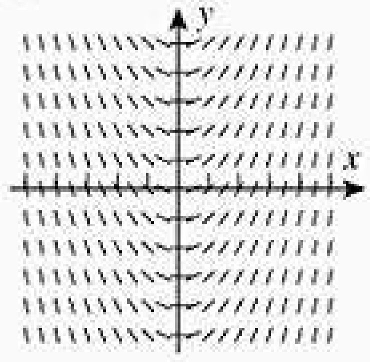
41. **(a)** $y(x) = \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{5}{4}$
(b) $y = -\cos t + t + 1 - \pi/3$
(c) $y(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} - \frac{8}{3}$

43. **(a)** $y = 4e^x - 3$ **(b)** $y(t) = \ln |t| + 5$

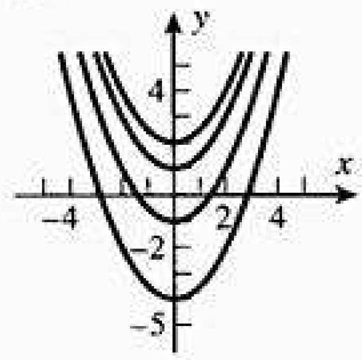
45. $f(x) = \dfrac{4}{15}x^{5/2} + C_1x + C_2$

47. $y = x^2 + x - 6$ **49.** $y = x^3 - 6x + 7$

51. (a)

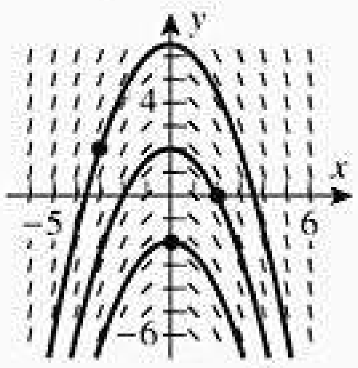


(b)

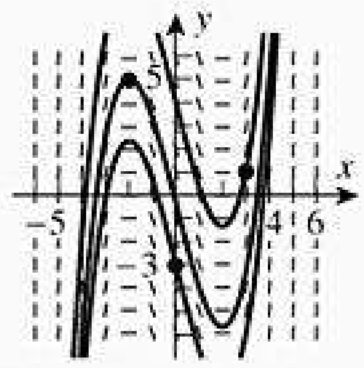


(c) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-1$

53. (b)



55. (c)



57. (b) $F(0)-G(0)=\frac{8}{3}$ **59.** $F'(x)=G'(x)=1,\ x\neq 0$

61. $\operatorname{tg} x - x + C$ **63.** (a) $\frac{1}{2}(x-\operatorname{sen} x)+C$ (b) $\frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x)+C$

65. $v=\dfrac{1087}{\sqrt{273}}T^{1/2}$ pés/s

► Exercícios 6.3 (página 371)

1. (a) $\dfrac{(x^2+1)^{24}}{24}+C$ (b) $-\dfrac{\cos^4 x}{4}+C$
(c) $-2\cos\sqrt{x}+C$ (d) $\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+5}+C$

3. (a) $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x+C$ (b) $\frac{1}{10}(1+\operatorname{sen} t)^{10}+C$
(c) $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+C$ (d) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2)+C$

5. (a) $\ln|\ln x|+C$ (b) $-\frac{1}{5}e^{-5x}+C$
(c) $-\frac{1}{3}\ln(1+\cos 3\theta)+C$ (d) $\ln(1+e^x)+C$

9. $\frac{1}{40}(4x-3)^{10}+C$ **11.** $-\frac{1}{7}\cos 7x+C$ **13.** $\frac{1}{4}\sec 4x+C$

15. $\frac{1}{2}e^{2x}+C$ **17.** $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(2x)+C$ **19.** $\frac{1}{21}(7t^2+12)^{3/2}+C$

21. $\dfrac{3}{2(1-2x)^2}+C$ **23.** $-\dfrac{1}{40(5x^4+2)^2}+C$ **25.** $e^{\operatorname{sen} x}+C$

27. $-\frac{1}{6}e^{-2x^3}+C$ **29.** $\operatorname{arc\,tg} e^x+C$ **31.** $\frac{1}{5}\cos(5/x)+C$

33. $-\dfrac{1}{15}\cos^5 3t+C$ **35.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2)+C$ **37.** $-\frac{1}{6}(2-\operatorname{sen} 4\theta)^{3/2}+C$

39. $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{tg} x)+C$ **41.** $\frac{1}{6}\sec^3 2x+C$ **43.** $-e^{-x}+C$

45. $-e^{-2\sqrt{x}}+C$ **47.** $\frac{1}{6}(2y+1)^{3/2}-\frac{1}{2}(2y+1)^{1/2}+C$

49. $-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{6}\cos^3 2\theta+C$ **51.** $t+\ln|t|+C$

53. $\int[\ln(e^x)+\ln(e^{-x})]dx=C$

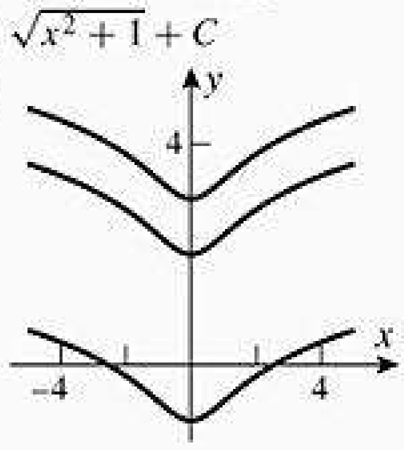
55. (a) $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{3}x\right)+C$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C$
(c) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{arc\,sec}\left(\dfrac{x}{\sqrt{\pi}}\right)+C$

57. $\dfrac{1}{b}\dfrac{(a+bx)^{n+1}}{n+1}+C$ **59.** $\dfrac{1}{b(n+1)}\operatorname{sen}^{n+1}(a+bx)+C$

61. (a) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C_1;\ -\frac{1}{2}\cos^2 x+C_2$
(b) porque diferem por uma constante

63. $\dfrac{2}{15}(5x+1)^{3/2}-\dfrac{158}{15}$ **65.** $y=-\dfrac{1}{2}e^{2t}+\dfrac{13}{2}$

67. (a) $\sqrt{x^2+1}+C$ **69.** $f(x)=\frac{2}{9}(3x+1)^{3/2}+\frac{7}{9}$
(b)



► Exercícios 6.4 (página 383)

1. (a) 36 (b) 55 (c) 40 (d) 6 (e) 11 (f) 0

3. $\sum_{k=1}^{10} k$ **5.** $\sum_{k=1}^{10} 2k$ **7.** $\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k+1}(2k-1)$

9. (a) $\sum_{k=1}^{50} 2k$ (b) $\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$

11. 5050 **13.** 2870 **15.** 214.365 **17.** $\frac{3}{2}(n+1)$

19. $\frac{1}{4}(n-1)^2$ **23.** $\dfrac{n+1}{2n};\ \frac{1}{2}$ **25.** $\dfrac{5(n+1)}{2n};\ \frac{5}{2}$

27. (a) $\sum_{j=0}^{5} 2^j$ (b) $\sum_{j=1}^{6} 2^{j-1}$ (c) $\sum_{j=2}^{7} 2^{j-2}$

29. (a) $\left(2+\dfrac{3}{n}\right)^4\cdot\dfrac{3}{n},\left(2+\dfrac{6}{n}\right)^4\cdot\dfrac{3}{n},\left(2+\dfrac{9}{n}\right)^4\cdot\dfrac{3}{n},$
$\left(2+\dfrac{3(n-1)}{n}\right)^4\cdot\dfrac{3}{n},(2+3)^4\cdot\dfrac{3}{n}$ (b) $\sum_{k=0}^{n-1}\left(2+k\cdot\dfrac{3}{n}\right)^4\frac{3}{n}$

31. (a) 46 (b) 52 (c) 58 **33.** (a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) 0 (c) $-\dfrac{\pi}{4}$

35. (a) 0,7188; 0,7058; 0,6982 (b) 0,6688; 0,6808; 0,6882
(c) 0,6928; 0,6931; 0,6931

37. (a) 4,8841; 5,1156; 5,2488 (b) 5,6841; 5,5156; 5,4088
(c) 5,3471; 5,3384; 5,3346

39. $\frac{15}{4}$ **41.** 18 **43.** 320 **45.** $\frac{15}{4}$ **47.** 18 **49.** 16 **51.** $\frac{1}{3}$ **53.** 0

55. $\frac{2}{3}$ **57.** $\frac{1}{2}m(b^2-a^2)$ **59.** $\frac{1}{4}(b^4-a^4)$

61. $\dfrac{n^2+2n}{4}$ se n for par; $\dfrac{(n+1)^2}{4}$ se n for ímpar. **63.** $3^{17}-3^4$ **65.** $-\frac{399}{400}$

67. (b) $\frac{1}{2}$ **71.** (a) $\frac{3}{2}(3^{20}-1)$ (b) $2^{31}-2^5$ (c) $-\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{2^{101}}\right)$

73. (a) sim (b) sim

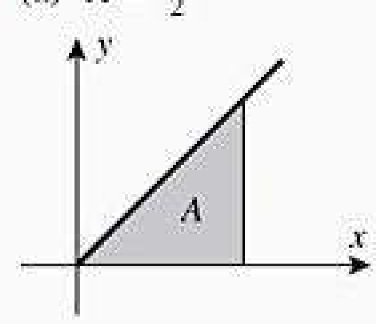
► Exercícios 6.5 (página 393)

1. (a) $\frac{71}{6}$ (b) 2 **3.** (a) $-\frac{117}{16}$ (b) 3 **5.** $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,dx$

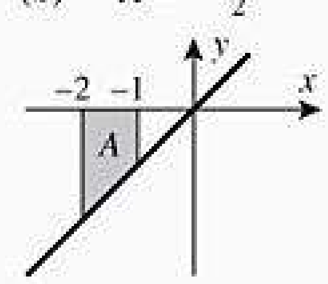
7. $\displaystyle\int_{-3}^{3} 4x(1-3x)dx$ **9.** (a) $\displaystyle\lim_{\max \Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} 2x_k^*\Delta x_k;\ a=1, b=2$

(b) $\displaystyle\lim_{\max \Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^*}{x_k^*+1}\Delta xk;\ a=0, b=1$

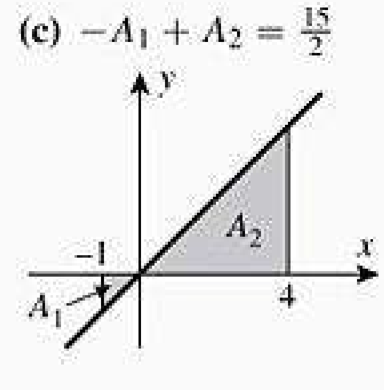
11. (a) $A=\frac{9}{2}$



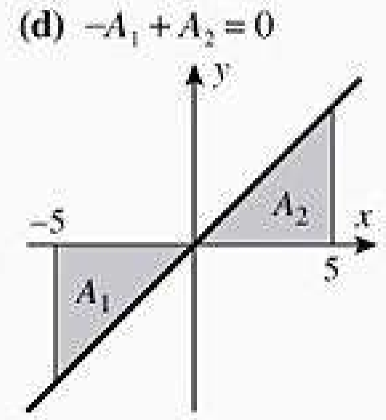
(b) $-A=-\frac{3}{2}$



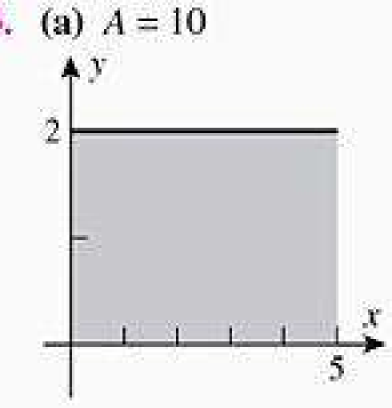
(c) $-A_1+A_2=\frac{15}{2}$



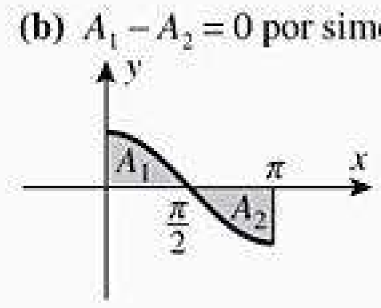
(d) $-A_1+A_2=0$



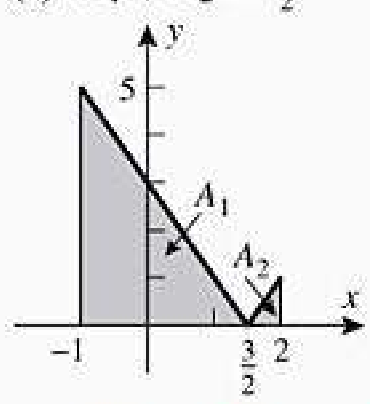
13. (a) $A=10$

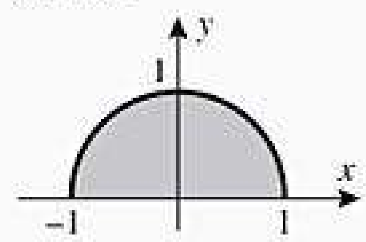


(b) $A_1-A_2=0$ por simetria



(c) $A_1 + A_2 = \frac{13}{2}$ (d) $\pi/2$





15. (a) 2 (b) 4 (c) 10 (d) 10 **17.** (a) 0,8 (b) −2,6 (c) −1,8 (d) −0,3

19. −1 **21.** 3 **23.** − 4 **25.** $(1+\pi)/2$ **27.** (a) negativo (b) positivo **29.** $\frac{25}{2}\pi$ **31.** $\frac{5}{2}$ **37.** maior: $\frac{\pi}{24}(16+3\sqrt{2})$; menor: $\frac{7\pi}{24}$ **39.** $\frac{16}{3}$

► Exercícios 6.6 (página 406)

1. (a) $\int_0^2 (2-x)dx = 2$ (b) $\int_{-1}^1 2dx = 4$ (c) $\int_1^3 (x+1)dx = 6$

3. $\frac{65}{4}$ **5.** 14 **7.** 3/2 **9.** 48 **11.** 3 **13.** $\frac{844}{5}$ **15.** 0 **17.** $\sqrt{2}$

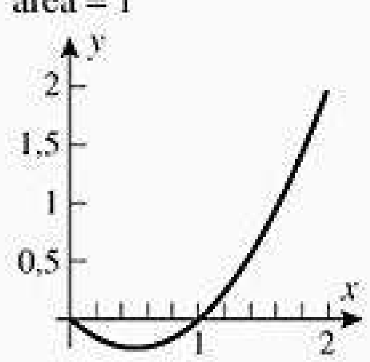
19. $5e^3 - 10$ **21.** $\pi/4$ **23.** $\pi/12$ **25.** −12 **27.** $\frac{\pi^2}{9} + 2\sqrt{3}$

29. (a) 5/2 (b) $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **31.** (a) $e + (1/e) - 2$ (b) 1

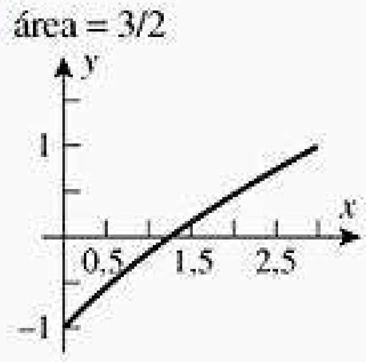
33. (a) $\frac{17}{6}$ (b) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \le 1 \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{6}, & x > 1 \end{cases}$ **35.** 0,6659; $\frac{2}{3}$

37. 3,1060; $\frac{1}{\text{tg } 1}$ **39.** 12 **41.** $\frac{9}{2}$

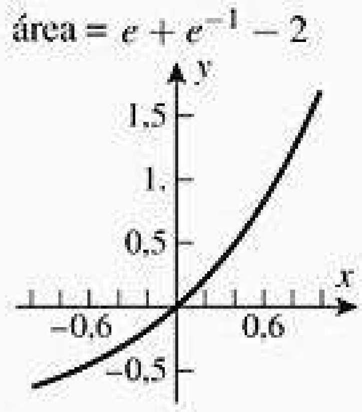
43. área = 1



45. área = 3/2



47. área $= e + e^{-1} - 2$



49. (b) modo graus; 0,93 **51.** (a) A integral é zero. **53.** (a) $3x^2 - 3$ **55.** (a) $\text{sen}(x^2)$ (b) $e^{\sqrt{x}}$ **57.** $-x \sec x$ **59.** (a) 0 (b) 5 (c) 4/5

61. (a) $x = 3$ (b) crescente em $[3,+\infty)$, decrescente em $(-\infty,3]$
(c) côncava para cima em (−1, 7), côncava para baixo em $(-\infty,-1)$ e $(7,+\infty)$

63. (a) $(0,+\infty)$ (b) $x = 1$ **65.** (a) 4/3 (b) −7

67. $3\sqrt{2} \le \int_0^3 \sqrt{x^3+2}\,dx \le 3\sqrt{29}$

71. (a) a variação na altura entre as idades 0 e 10 anos; centímetros.
(b) a variação no raio entre os instantes $t = 1$ s e $t = 2$ s; centímetros.
(c) a diferença entre as velocidades do som a 38° C e 0° C; m/s.
(d) a variação na posição entre os instantes t_1 e t_2; centímetros.

73. (a) 120 galões (b) 420 galões (c) 2076,36 galões **75.** 1

► Exercícios 6.7 (página 416)

1. (a) deslocamento $= -\frac{1}{2}$; distância $= \frac{3}{2}$
(b) deslocamento $= \frac{3}{2}$; distância = 2

3. (a) 35,3 m/s (b) 51,4 m/s **5.** (a) $t^3 - t^2 + 1$ (b) $4t + 3 - \frac{1}{3}\text{sen } 3t$

7. (a) $\frac{3}{2}t^2 + t - 4$ (b) $t + 1 - \ln t$

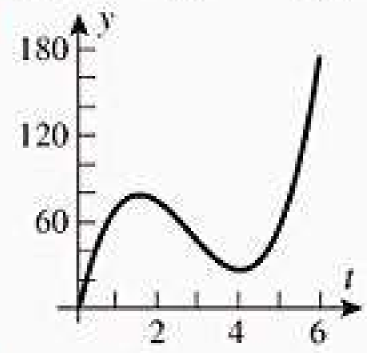
9. (a) deslocamento = 1 m; distância = 1 m
(b) deslocamento = −1 m; distância = 3 m

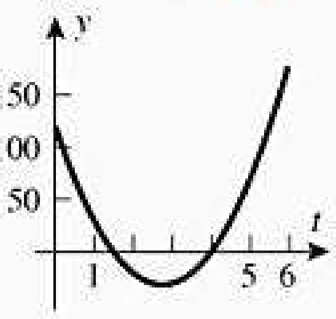
11. (a) deslocamento $= \frac{9}{4}$ m; distância $= \frac{11}{4}$ m
(b) deslocamento $= 2\sqrt{3} - 6$ m; distância $= 6 - 2\sqrt{3}$ m

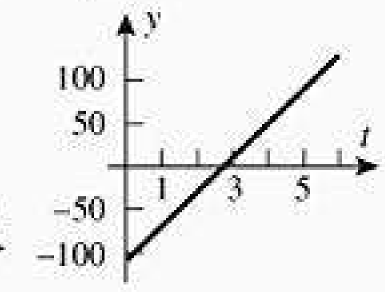
13. 4, 13/3 **15.** 296/27, 296/27

17. (a) $s = 2/\pi$, $v = 1$, $|v| = 1$, $a = 0$
(b) $s = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{3}{2}$, $|v| = \frac{3}{2}$, $a = -3$ **19.** $t \approx 1{,}27$ s

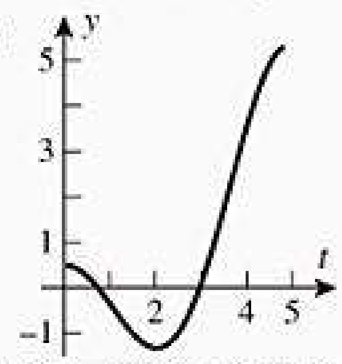
21.





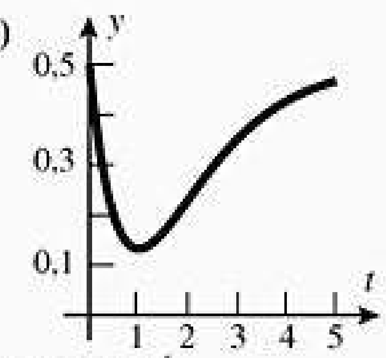


23. (a)



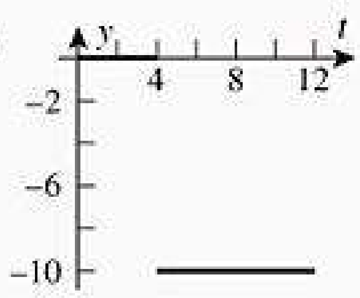
(b) 5/2 − sen 5 + 5 cos 5

25. (a)

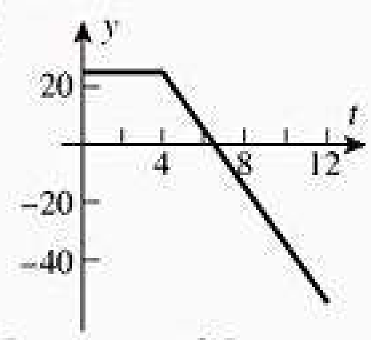


(b) $3/2 + 6e^{-5}$

27. (a)



(b)



(c) 120 cm, −20 cm (d) 131,25 cm em $t = 6{,}5$ s

29. (a) −2,2 pés/s (b) $\frac{1}{7200}$ km/s^2

31. (a) $-\frac{121}{5}$ pés/s^2 (b) $\frac{70}{33}$ s (c) $\frac{60}{11}$ s

33. 280 m **35.** 50 s, 5000 pés

37. (a) 16 pés/s, −48 pés/s (b) 196 pés (c) 112 pés/s

39. (a) 1 s (b) $\frac{1}{2}$ s **41.** (a) 6,122 s (b) 183,7 m (c) 6,122 s (d) 60 m/s

43. (a) 5 s (b) 272,5 m (c) 10 s (d) −49 m/s
(e) 12,46 s (f) 73,1 m/s **45.** 113,42 pés/s

► Exercícios 6.8 (página 423)

1. (a) $\frac{1}{2}\int_1^5 u^3\,du$ (b) $\frac{3}{2}\int_9^{25} \sqrt{u}\,du$ (c) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u\,du$
(d) $\int_1^2 (u+1)u^5\,du$ **3.** (a) $\frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^u\,du$ (b) $\int_1^2 u\,du$ **5.** 10

7. 0

9. $\frac{1192}{15}$ **11.** $8 - (4\sqrt{2})$ **13.** $-\frac{1}{48}$ **15.** $\ln\frac{21}{13}$ **17.** $\pi/6$ **19.** $25\pi/6$

21. $\pi/8$ **23.** $2/\pi$ **25.** 6 **27.** $\pi/18$ **29.** 2 **31.** $\frac{2}{3}(\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$

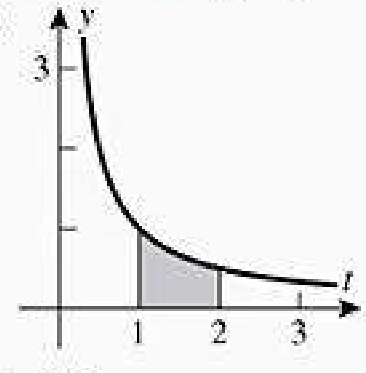
33. $2(\sqrt{7} - \sqrt{3})$ **35.** 1 **37.** 0 **39.** $(\sqrt{3} - 1)/3$ **41.** $\frac{106}{405}$

43. $(\ln 3)/2$ **45.** $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ **47.** $\pi/9$ **49.** $\frac{23}{4480}$ **51.** (a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $-\frac{1}{2}$

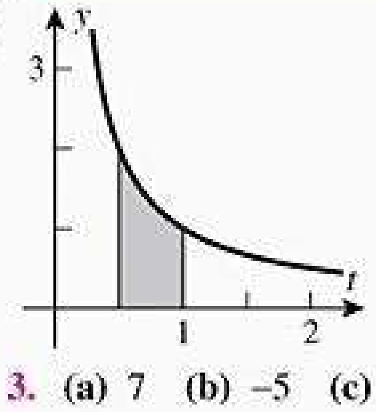
55. ≈ 48.233.500.000 **57.** $(\ln 7)/2$ **59.** (a) $2/\pi$ **61.** (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\pi/4$

► Exercícios 6.9 (página 434)

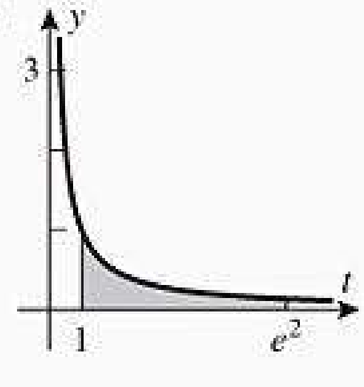
1. (a)



(b)



(c)



3. (a) 7 (b) −5 (c) −3 (d) 6

5. 1,603210678;
a magnitude do erro é < 0,0063

7. (a) $x^{-1}, x > 0$ (b) $x^2, x \neq 0$ (c) $-x^2, -\infty < x < +\infty$
(d) $-x, -\infty < x < +\infty$ (e) $x^3, x > 0$ (f) $\ln x + x, x > 0$
(g) $x - \sqrt[3]{x}, -\infty < x < +\infty$ (h) $\dfrac{e^x}{x}, x > 0$

9. (a) $e^{\pi \ln 3}$ (b) $e^{\sqrt{2}\ln 2}$ **11.** (a) $\sqrt{e}$ (b) e^2 **13.** $x^2 - x$

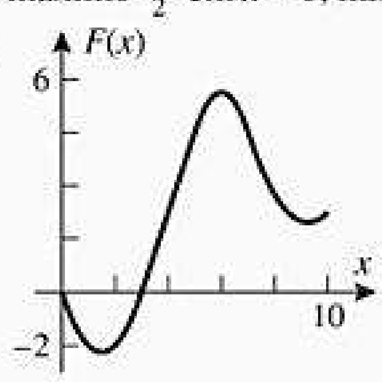
15. (a) $3/x$ (b) 1 **17.** (a) 0 (b) 0 (c) 1

19. (a) $2x^3\sqrt{1+x^2}$ (b) $-\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + \frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2} - \frac{4\sqrt{2}}{15}$

21. (a) $-\cos(x^3)$ (b) $-\operatorname{tg}^2 x$ **23.** $-3\dfrac{3x-1}{9x^2+1} + 2x\dfrac{x^2-1}{x^4+1}$

25. (a) $3x^2 \operatorname{sen}^2(x^3) - 2x \operatorname{sen}^2(x^2)$ (b) $\dfrac{2}{1-x^2}$

27. (a) $F(0) = 0$; $F(3) = 0$; $F(5) = 6$; $F(7) = 6$; $F(10) = 3$
(b) crescendo em $\left[\frac{3}{2}, 6\right]$ e $\left[\frac{37}{4}, 10\right]$ decrescendo em $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $\left[6, \frac{37}{4}\right]$
(c) máximo $\frac{15}{2}$ em $x = 6$, mínimo $-\frac{9}{4}$ em $x = \frac{3}{2}$
(d)

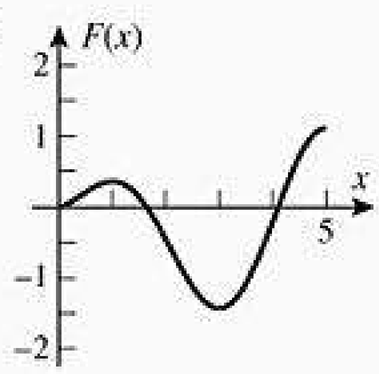


29. $F(x) = \begin{cases} (1-x^2)/2, & x < 0 \\ (1+x^2)/2, & x \geq 0 \end{cases}$ **31.** $y(x) = x^2 + \ln x + 1$

33. $y(x) = \operatorname{tg} x + \cos x - (\sqrt{2}/2)$

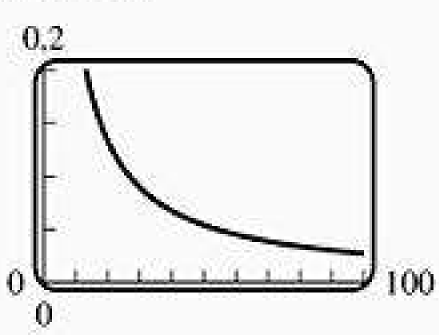
35. $P(x) = P_0 + \int_0^x r(t)\,dt$ indivíduos **37.** I é a derivada de II

39. (a) $t = 3$ (b) $t = 1$ e 5
(c) $t = 5$ (d) $t = 3$
(e) F é côncava para cima em $(0, \frac{1}{2})$ e $(2, 4)$ e côncava para baixo em $(\frac{1}{2}, 2)$ e $(4, 5)$
(f)



41. (a) máximo relativo em $x = \pm\sqrt{4k+1}, k = 0, 1, \ldots$; mínimo relativo em $x = \pm\sqrt{4k-1}, k = 1, 2, \ldots$
(b) $x = \pm\sqrt{2k}, k = 1, 2, \ldots$, e em $x = 0$

43. $f(x) = 2e^{2x}, a = \ln 2$ **45.** 0,06



► Capítulo 6. Exercícios de Revisão (página 437)

3. $-\dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{8}{3}x^{3/2} + C$ **5.** $-4\cos x + 2\operatorname{sen} x + C$

7. $3x^{1/3} - 5e^x + C$ **9.** $\operatorname{arc\,tg} x + 2\operatorname{arc\,sen} x + C$

11. (a) $y(x) = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{3}$ (b) $y(x) = \operatorname{sen} x - 5e^x + 5$

15. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec}(x^2-1) + C$ **17.** $\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\operatorname{sen} 3x} + C$

19. $-\dfrac{1}{3a}\dfrac{1}{ax^3+b} + C$ **25.** $A \approx 8$ **27.** 32/3

29. 0,35122; 0,42054; 0,38650

33. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{35}{4}$ (d) -2 (e) não há informação suficiente (f) não há informação suficiente

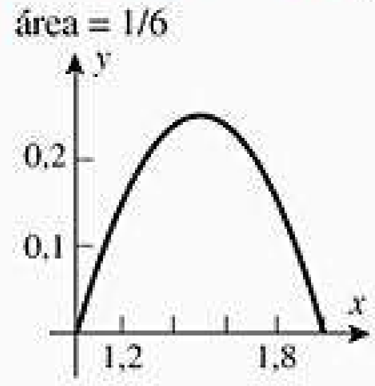
35. (a) $2 + (\pi/2)$ (b) $\dfrac{1}{3}(10^{3/2} - 1) - \dfrac{9\pi}{4}$ (c) $\pi/8$ **37.** $\dfrac{35\pi}{128}$

39. (a) $\displaystyle\int_a^b \left[\sum_{i=1}^n f_i(x)\right] dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x)\,dx$

41. $y = \begin{cases} hx/c & \text{se } 0 \leq x \leq c \\ h & \text{se } c \leq x \leq a + c \\ h(b-x)/(b-a-c) & \text{se } a + c \leq x \leq b \end{cases}$ **43.** $\frac{52}{3}$

45. $e^3 - e$ **47.** 48 **49.** $\frac{2}{3}$ **51.** $3/2 - \sec 1$ **53.** $\frac{5}{2}$

55. área = 1/6



57. (a) $x^3 + 1$

59. e^{x^2}

61. $|x - 1|$

63. $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^3 x}$

69. (a) $F(x)$ é 0 se $x = 1$, positiva se $x > 1$ e negativa se $x < 1$
(b) $F(x)$ é 0 se $x = -1$, postiva se $-1 < x \leq 2$ e negativa se $-2 \leq x < -1$

71. (a) 4/3 (b) $e - 1$ **75.** $\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + t + 1$

77. $t^2 - 3t + 7$ **79.** 12 m, 20 m **81.** 1/3 m, $10/3 - 2\sqrt{2}$ m

83. deslocamento = −6 m; distância = $\frac{13}{2}$ m **85.** $\frac{22}{3}$ **87.** 1/2

89. (a) 5 s (b) 200 m **91.** $v_0/2$ pés/s **93.** $\frac{121}{5}$ **95.** $\frac{2}{3}$ **97.** 0

99. $2 - 2/\sqrt{e}$ **101.** (a) e^2 (b) $e^{1/3}$ **103.** $f(x) = 3e^{3x}, a = (\ln 2)/3$

► Exercícios 7.1 (página 448)

1. 9/2 **3.** 1 **5.** (a) 32/3 (b) 32/3 **7.** 49/192 **9.** 1/2 **11.** $\sqrt{2}$

13. $\frac{1}{2}$ **15.** $\pi - 1$ **17.** 24 **19.** 37/12 **21.** $4\sqrt{2}$ **23.** $\frac{1}{2}$

25. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ **27.** $k \approx 0{,}9973$ **29.** 9152/105 **31.** $9/\sqrt[3]{4}$

33. (a) 4/3 (b) $m = 2 - \sqrt[3]{4}$ **35.** 1,180898334

37. 0,4814; 2,3639; 1,1897 **39.** 2,54270

41. A vantagem do carro 1 sobre o carro 2 no instante $t = 0$.

43. (a) [Área acima do gráfico de g e abaixo do gráfico de f] menos [área acima do gráfico de f e abaixo do gráfico de g]
(b) Área entre os gráficos de f e g. **45.** $a^2/6$

► Exercícios 7.2 (página 456)

1. 8π **3.** $13\pi/6$ **5.** 32/5 **7.** $(1 - \sqrt{2}/2)\pi$ **9.** $256\pi/3$

11. $2048\pi/15$ **13.** 4π **15.** $\pi^2/4$ **17.** 3/5 **19.** 8π **21.** 2π

23. $72\pi/5$ **25.** $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - 1)$ **27.** $4\pi ab^2/3$ **29.** π

31. $\int_a^b \pi[f(x) - k]^2 dx$ **33.** (b) $40\pi/3$ **35.** $648\pi/5$ **37.** $\pi/2$

39. 40.000π pés^3 **41.** 1/30 **43.** (a) $2\pi/3$ (b) 16/3 (c) $4\sqrt{3}/3$

45. 0,710172176 **47.** π

51. (b) esquerda ≈ 11,157; direita ≈ 11,771; V ≈ média = 11, 464 cm^3;

53. $V = \begin{cases} 3\pi h^2, & 0 \leq h < 2 \\ \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3 - 4), & 2 \leq h \leq 4 \end{cases}$ **55.** $\frac{2}{3}r^3 \operatorname{tg}\theta$ **57.** $16r^3/3$

► Exercícios 7.3 (página 464)

1. $15\pi/2$ **3.** $\pi/3$ **5.** $2\pi/5$ **7.** 4π **9.** $20\pi/3$ **11.** $\pi \ln 2$ **13.** $\pi/2$

15. $\pi/5$ **17.** $2\pi e^2$ **19.** 1,73680 **21.** (a) $7\pi/30$ (b) mais fácil

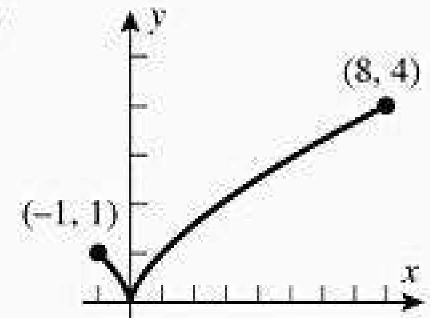
23. $7\pi/4$ **25.** $\pi r^2 h/3$ **27.** $V = \frac{4}{3}\pi(L/2)^3$ **29.** $b = 1$

► Exercícios 7.4 (página 469)

1. $L = \sqrt{5}$ **3.** $(85\sqrt{85} - 8)/243$ **5.** $\frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$ **7.** $\frac{17}{6}$

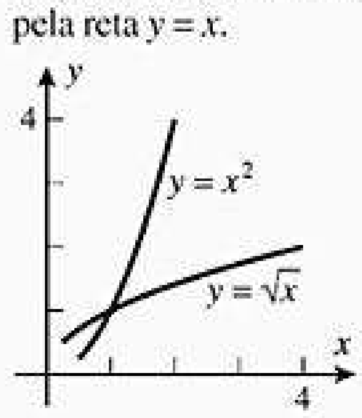
9. $(2\sqrt{2} - 1)/3$ **11.** π **13.** $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$ **15.** $\ln(1 + \sqrt{2})$

17. (a)



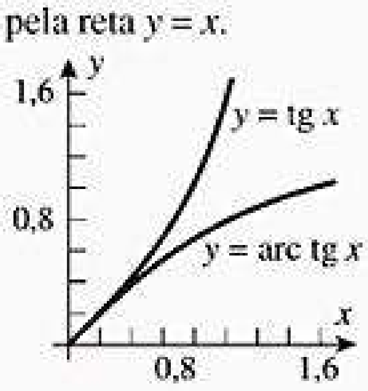
(b) dy/dx não existe em $x = 0$
(c) $L = (13\sqrt{13} + 80\sqrt{10} - 16)/27$

19. **(a)** São imagens espelhadas pela reta $y = x$.



(b) $\int_{1/2}^{2} \sqrt{1+4x^2}\,dx$, $\int_{1/4}^{4} \sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}\,dx$, $x = \sqrt{u}$ transforma a primeira integral na segunda.
(c) $\int_{1/4}^{4} \sqrt{1+\dfrac{1}{4y}}\,dy$, $\int_{1/2}^{2} \sqrt{1+4y^2}\,dy$
(d) 4,0724; 4,0716
(e) A primeira: ambas são subavaliações do comprimento de arco, de modo que a maior é mais precisa.
(f) 4,0724; 4,0662 **(g)** 4,0729

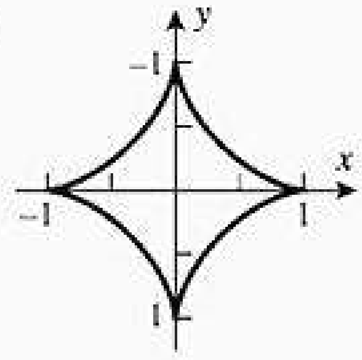
21. **(a)** São imagens espelhadas pela reta $y = x$.



(b) $\int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\sec^4 x}\,dx$, $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}}\,dx$, $x = \text{arc tg}\, u$ transforma a primeira integral na segunda.
(c) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\dfrac{1}{(1+y^2)^2}}\,dy$, $\int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\sec^4 y}\,dy$
(d) 2,0566; 2,0567
(e) A segunda: ambas são subavaliações do comprimento de arco, de modo que a maior é mais precisa. **(f)** 2,0509; 2,0571 **(g)** 2,0570

25. $k = 1{,}83$ **27.** 196,31 jardas

29. **(a)**



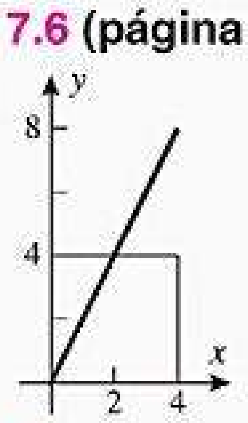
(b) 6 **31.** **(b)** 9,69 **(c)** 5,16 cm

► Exercícios 7.5 (página 474)

1. $35\pi\sqrt{2}$ **3.** 8π **5.** $40\pi\sqrt{82}$ **7.** 24π **9.** $16\pi/9$
11. $16.911\pi/1024$ **13.** $2\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$
15. $S \approx 22{,}94$ **17.** 14,39
23. $S = \int_a^b 2\pi(f(x)+k)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ **29.** $\dfrac{8}{3}\pi(17\sqrt{17}-1)$
31. $\dfrac{\pi}{24}(17\sqrt{17}-1)$ **35.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\pi(2e^{\pi}+1)$

► Exercícios 7.6 (página 479)

1. **(a)** 4 **(b)** 2 **(c)**



3. 6
5. $2/\pi$
7. $\dfrac{1}{e-1}$
9. $\dfrac{\pi}{12(\sqrt{3}-1)}$
11. 1/21
13. $\dfrac{1-e^{-8}}{8}$ **15.** **(a)** 5,28 **(b)** 4,305 **(c)** 4 **17.** **(a)** −1/6 **(b)** 1/2
21. **(a)** $\frac{263}{4}$ **(b)** 31 **23.** 1404π lb **25.** 97 carros/minuto
27. **(a)** 0,451 **(b)** 0,461 **29.** 27 **31.** **(b)** 169,7 V

► Exercícios 7.7 (página 488)

1. **(a)** 210 pés · lb **(b)** 5/6 pés · lb **3.** $d = 7/4$ **5.** levantando a xícara de café
7. 100 pés · lb **9.** 160 J **11.** 20 lb/pés **13.** $900\pi\rho$ J **15.** 261.600 J
17. **(a)** 277.992 J **(b)** hp do motor = 0,468 **19.** 75.000 pés · lb
21. 120.000 pés · toneladas **23.** **(a)** $2.400.000.000/x^2$ lb
(b) $(9{,}6\times10^{10})/(x+4000)^2$ lb **(c)** $2{,}5344\times10^{10}$ pés · lb
25. $v_f = 100$ m/s
27. **(a)** decresce de $4{,}5\times10^{14}$ J **(b)** $\approx 0{,}107$ **(c)** $\approx 8{,}24$ bombas

► Exercícios 7.8 (página 495)

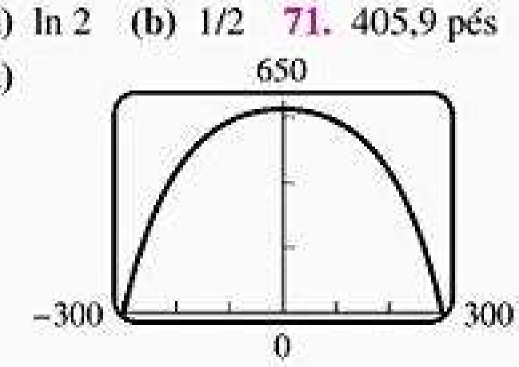
1. **(a)** $F = 31.200$ lb; $P = 312$ lb/pés^2
(b) $F = 2.452.500$ N; $P = 98{,}1$ kPa
3. 499,2 lb **5.** $8{,}175\times10^5$ N **7.** 1.098.720 N **9.** sim
11. $\rho a^3/\sqrt{2}$ lb **13.** 63.648 lb **15.** $9{,}81\times10^9$ N
17. **(b)** 80 ρ_0 lb/min

► Exercícios 7.9 (página 505)

1. **(a)** $\approx 10{,}0179$ **(b)** $\approx 3{,}7622$ **(c)** $\approx 15/17 \approx 0{,}8824$
(d) $\approx -1{,}4436$ **(e)** $\approx 1{,}7627$ **(f)** $\approx 0{,}9730$
3. **(a)** $\frac{4}{3}$ **(b)** $\frac{5}{4}$ **(c)** $\frac{312}{313}$ **(d)** $-\frac{63}{16}$
5.

	$\operatorname{senh} x_0$	$\cosh x_0$	$\operatorname{tgh} x_0$	$\operatorname{cotgh} x_0$	$\operatorname{sech} x_0$	$\operatorname{cossech} x_0$
(a)	2	$\sqrt{5}$	$2/\sqrt{5}$	$\sqrt{5}/2$	$1/\sqrt{5}$	1/2
(b)	3/4	5/4	3/5	5/3	4/5	4/3
(c)	4/3	5/3	4/5	5/4	3/5	3/4

9. $4\cosh(4x-8)$ **11.** $-\dfrac{1}{x}\operatorname{cossech}^2(\ln x)$
13. $\dfrac{1}{x^2}\operatorname{cossech}\left(\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{cotgh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **15.** $\dfrac{2+5\cosh(5x)\operatorname{senh}(5x)}{\sqrt{4x+\cosh^2(5x)}}$
17. $x^{5/2}\operatorname{tgh}(\sqrt{x})\operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) + 3x^2\operatorname{tgh}^2(\sqrt{x})$
19. $\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$ **21.** $\dfrac{1}{(\text{arc cosh}\,x)\sqrt{x^2-1}}$ **23.** $-\dfrac{(\text{arc tgh}\,x)^{-2}}{1-x^2}$
25. $\dfrac{|\operatorname{senh} x|}{|\operatorname{senh} x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ **27.** $-\dfrac{e^x}{2x\sqrt{1-x}} + e^x\,\text{arc sech}\,x$
31. $\frac{1}{7}\operatorname{senh}^7 x + C$ **33.** $\frac{2}{3}(\operatorname{tgh} x)^{3/2} + C$ **35.** $\ln(\cosh x) + C$
37. 37/375 **39.** $\frac{1}{3}\,\text{arc senh}\,3x + C$ **41.** $-\text{arc sech}\,(e^x) + C$
43. $-\text{arc cossech}\,|2x| + C$ **45.** $\frac{1}{2}\ln 3$ **49.** 16/9 **51.** 5π **53.** $\frac{3}{4}$
55. **(a)** $+\infty$ **(b)** $-\infty$ **(c)** 1 **(d)** −1 **(e)** $+\infty$ **(f)** $+\infty$
63. $|u| < 1$: arc tgh $u + C$; $|u| > 1$: arc tgh $(1/u) + C$
65. **(a)** ln 2 **(b)** 1/2 **71.** 405,9 pés
73. **(a)**



(b) 1480,2798 pés
(c) ±283,6249 pés
(d) 82°
75. **(b)** 14,44 m **(c)** $15\ln 3 \approx 16{,}48$ m

► Capítulo 7. Exercícios de Revisão (página 507)

7. **(a)** $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx + \int_b^c (g(x)-f(x))\,dx + \int_c^d (f(x)-g(x))\,dx$
(b) $\frac{11}{4}$
9. $4352\pi/105$ **11.** $3/2 + \ln 4$ **13.** 9 **15.** $\dfrac{\pi}{6}\left(65^{3/2} - 37^{3/2}\right)$
17. 3/10 **19.** $3\sqrt{3}$ **21.** **(a)** $W = \frac{1}{16}$J **(b)** 5 m
23. **(a)** $F = \int_0^1 \rho x 3\,dx$ N **(b)** $F = \int_1^4 \rho(1+x)2x\,dx$ lb/pés^2
(c) $F = \int_{-10}^{0} 9810|y|2\sqrt{\frac{125}{8}(y+10)}\,dy$ N

► Exercícios 8.1 (página 512)

1. $-2(x-2)^4 + C$ **3.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2) + C$ **5.** $-\frac{1}{3}\ln(2+\cos 3x) + C$
7. $\cosh(e^x) + C$ **9.** $e^{\operatorname{tg} x} + C$ **11.** $-\dfrac{1}{30}\cos^6 5x + C$
13. $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+4}) + C$ **15.** $2e^{\sqrt{x-1}} + C$ **17.** $2\operatorname{senh}\sqrt{x} + C$
19. $-\dfrac{2}{\ln 3}3^{-\sqrt{x}} + C$ **21.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{cotgh}\dfrac{2}{x} + C$ **23.** $-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2+e^{-x}}{2-e^{-x}}\right| + C$
25. $\text{arc sen}\,(e^x) + C$ **27.** $-\dfrac{1}{2}\cos(x^2) + C$ **29.** $-\dfrac{1}{\ln 16}4^{-x^2} + C$

31. (a) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ (b) $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$

33. (b) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$ (c) $\ln\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C$

► Exercícios 8.2 (página 520)

1. $-e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$ 3. $x^2e^x - 2xe^x - 2e^x + C$

5. $-\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x + C$ 7. $x^2\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$

9. $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$ 11. $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

13. $x\ln(3x-2) - x - \frac{2}{3}\ln(3x-2) + C$

15. $x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$ 17. $x\operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C$

19. $\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$ 21. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C$

23. $(x/2)[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$ 25. $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$

27. $\frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ 29. $\frac{1}{4}(3e^4+1)$ 31. $(2e^3+1)/9$

33. $3\ln 3 - 2$ 35. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1$ 37. $-\pi/2$

39. $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2\right)$

41. (a) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$ (b) $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

43. $-(3x^2+5x+7)e^{-x} + C$

45. $(4x^3-6x)\operatorname{sen} 2x - (2x^4-6x^2+3)\cos 2x + C$

47. (a) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ (b) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

49. (a) $A = 1$ (b) $V = \pi(e-2)$ 51. $V = 2\pi^2$ 53. $\pi^3 - 6\pi$

55. (a) $-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x - \frac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{3}{8}x + C$ (b) 8/15

59. (a) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$ (b) $\frac{1}{3}\sec^2 x\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + C$
(c) $x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$

63. $(x+1)\ln(x+1) - x + C$ 65. $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + C$

► Exercícios 8.3 (página 529)

1. $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$ 3. $\frac{\theta}{2} - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 10\theta + C$

5. $\frac{1}{3a}\cos^3 a\theta - \cos a\theta + C$ 7. $\frac{1}{2a}\operatorname{sen}^2 ax + C$

9. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 t + C$ 11. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$

13. $-\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$ 15. $-\frac{1}{3}\cos(3x/2) - \cos(x/2) + C$

17. 2/3 19. 0 21. 7/24 23. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x-1) + C$

25. $\ln|\cos(e^{-x})| + C$ 27. $\frac{1}{4}\ln|\sec 4x + \operatorname{tg} 4x| + C$

29. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$ 31. $\frac{1}{16}\sec^4 4x + C$ 33. $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$

35. $\frac{1}{4}\sec^3 x\operatorname{tg} x - \frac{5}{8}\sec x\operatorname{tg} x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$

37. $\frac{1}{3}\sec^3 t + C$ 39. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$

41. $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x + \frac{1}{4}\ln|\cos 4x| + C$ 43. $\frac{2}{3}\operatorname{tg}^{3/2} x + \frac{2}{7}\operatorname{tg}^{7/2} x + C$

45. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ 47. $-\frac{1}{2} + \ln 2$ 49. $-\frac{1}{5}\operatorname{cossec}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{cossec}^3$

51. $-\frac{1}{2}\operatorname{cossec}^2 x - \ln|\operatorname{sen} x| + C$ 55. $L = \ln(\sqrt{2}+1)$ 57. $V = \pi/2$

63. $-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2} + a\cos x - b\operatorname{sen} x}{a\operatorname{sen} x + b\cos x}\right] + C$

65. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $3\pi/16$ (c) $\frac{8}{15}$ (d) $5\pi/32$

► Exercícios 8.4 (página 535)

1. $2\operatorname{arc\,sen}(x/2) + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$ 3. $8\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C$

5. $\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}(x/2) + \frac{x}{8(4+x^2)} + C$ 7. $\sqrt{x^2-9} - 3\operatorname{arc\,sec}(x/3) + C$

9. $-(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$ 11. $\frac{\sqrt{9x^2-4}}{4x} + C$ 13. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

15. $\ln|\sqrt{x^2-9} + x| + C$ 17. $\frac{-x}{9\sqrt{4x^2-9}} + C$

19. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(e^x) + \frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C$ 21. 2/3 23. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$

25. $\frac{10\sqrt{3}+18}{243}$ 27. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$

29. $L = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$ 31. $S = \frac{\pi}{32}[18\sqrt{5} - \ln(2+\sqrt{5})]$

33. $\operatorname{arc\,tg}(x-2) + C$ 35. $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

37. $\ln(x - 3 + \sqrt{(x-3)^2+1}) + C$

39. $2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + C$

41. $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{5}}(x+1) + C$ 43. $\pi/6$

45. $u = \operatorname{sen}^2 x,\ \frac{1}{2}\int\sqrt{1-u^2}\,du$
$= \frac{1}{4}[\operatorname{sen}^2 x\sqrt{1-\operatorname{sen}^4 x} + \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}^2 x)] + C$

47. (a) $\operatorname{arc\,senh}(x/3) + C$ (b) $\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right) + C$

► Exercícios 8.5 (página 543)

1. $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}$ 3. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$

5. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$ 7. $\frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+5)^2}$

9. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right| + C$ 11. $\frac{5}{2}\ln|2x-1| + 3\ln|x+4| + C$

13. $\ln\left|\frac{x(x+3)^2}{x-3}\right| + C$ 15. $\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+3| + C$

17. $3x + 12\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$

19. $x + \frac{x^3}{3} + \ln\left|\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2}\right| + C$

21. $3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$

23. $\frac{2}{x-3} + \ln|x-3| + \ln|x+1| + C$

25. $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \ln|x+1| + C$

27. $-\frac{7}{34}\ln|4x-1| + \frac{6}{17}\ln(x^2+1) + \frac{3}{17}\operatorname{arc\,tg} x + C$

29. $3\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C$

31. $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$ 33. $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{5+\operatorname{sen}\theta}\right) + C$

35. $V = \pi\left(\frac{19}{5} - \frac{9}{4}\ln 5\right)$ 37. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{x^2+2x+3} + C$

39. $\frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\ln|x-3| - \frac{1}{120}\ln|x+3| + C$

► Exercícios 8.6 (página 553)

1. Fórmula (60): $\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\ln|3x-1| + C$

3. Fórmula (65): $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{5+2x}\right| + C$

5. Fórmula (102): $\frac{1}{5}(x-1)(2x+3)^{3/2} + C$

7. Fórmula (108): $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4-3x}-2}{\sqrt{4-3x}+2}\right| + C$

9. Fórmula (69): $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+4}{x-4}\right| + C$

11. Fórmula (73): $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3} - \frac{3}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-3}| + C$

13. Fórmula (95): $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} - 2\ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C$

15. Fórmula (74): $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3} + C$

17. Fórmula (79): $\sqrt{4-x^2} - 2\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C$

19. Fórmula (38): $-\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{14} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$

21. Fórmula (50): $\dfrac{x^4}{16}[4 \ln x - 1] + C$

23. Fórmula (42): $\dfrac{e^{-2x}}{13}[-2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)] + C$

25. Fórmula (62): $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{u\,du}{(4-3u)^2} = \dfrac{1}{18}\left[\dfrac{4}{4-3e^{2x}} + \ln\left|4 - 3e^{2x}\right|\right] + C$

27. Fórmula (68): $\dfrac{2}{3}\displaystyle\int \dfrac{du}{u^2+4} = \dfrac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3\sqrt{x}}{2} + C$

29. Fórmula (76): $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-9}} = \dfrac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2-9}| + C$

31. Fórmula (81): $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int \dfrac{u^2}{\sqrt{2-u^2}}\,du = -\dfrac{1}{4}x^2\sqrt{2-4x^4} + \dfrac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{2}x^2\right) + C$

33. Fórmula (26): $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2\ln x) + C$

35. Fórmula (51): $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int ue^u\,du = \dfrac{1}{4}(-2x-1)e^{-2x} + C$

37. $u = \operatorname{sen} 3x$, Fórmula (67): $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int \dfrac{du}{u(u+1)^2} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x + 1} + \left|\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 3x + 1}\right|\right) + C$

39. $u = 4x^2$, Fórmula (70): $\dfrac{1}{8}\displaystyle\int \dfrac{du}{u^2-1} = \dfrac{1}{16}\ln\left|\dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}\right| + C$

41. $u = 2e^x$, Fórmula (74): $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \sqrt{3-u^2}\,du = \dfrac{1}{2}e^x\sqrt{3-4e^{2x}} + \dfrac{3}{4}\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{2e^x}{\sqrt{3}}\right) + C$

43. $u = 3x$, Fórmula (112): $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int \sqrt{\tfrac{5}{3}u - u^2}\,du = \dfrac{18x-5}{36}\sqrt{5x-9x^2} + \dfrac{25}{216}\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{18x-5}{5}\right) + C$

45. $u = 2x$, Fórmula (44): $\displaystyle\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} 2x - 2x\cos 2x + C$

47. $u = -\sqrt{x}$, Fórmula (51): $2\displaystyle\int ue^u\,du = -2(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}} + C$

49. $x^2 + 6x - 7 = (x+3)^2 - 16$, $u = x + 3$, Fórmula (70): $\displaystyle\int \dfrac{du}{u^2-16} = \dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+7}\right| + C$

51. $x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9$; $u = x - 2$, Fórmula (77): $\displaystyle\int \dfrac{u+2}{\sqrt{9-u^2}}\,du = -\sqrt{5+4x-x^2} + 2\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x-2}{3}\right) + C$

53. $u = \sqrt{x-2}$, $\frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{4}{3}(x-2)^{3/2} + C$

55. $u = \sqrt{x^3+1}$, $\dfrac{2}{3}\displaystyle\int u^2(u^2-1)\,du = \dfrac{2}{15}(x^3+1)^{5/2} - \dfrac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$

57. $u = x^{1/3}$, $\displaystyle\int \dfrac{3u^2}{u^3-u}\,du = \dfrac{3}{2}\ln|x^{2/3}-1| + C$

59. $u = x^{1/4}$, $4\displaystyle\int \dfrac{1}{u(1-u)}\,du = 4\ln\dfrac{x^{1/4}}{|1-x^{1/4}|} + C$

61. $u = x^{1/6}$, $6\displaystyle\int \dfrac{u^3}{u-1}\,du = 2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6\ln|x^{1/6}-1| + C$

63. $u = \sqrt{1+x^2}$, $\displaystyle\int (u^2-1)\,du = \dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} - (1+x^2)^{1/2} + C$

65. $\displaystyle\int \dfrac{1}{1 + \dfrac{2u}{1+u^2} + \dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\,\dfrac{2}{1+u^2}\,du = \int \dfrac{1}{u+1}\,du = \ln|\operatorname{tg}(x/2) + 1| + C$

67. $\displaystyle\int \dfrac{d\theta}{1-\cos\theta} = \int \dfrac{1}{u^2}\,du = -\operatorname{cotg}(\theta/2) + C$

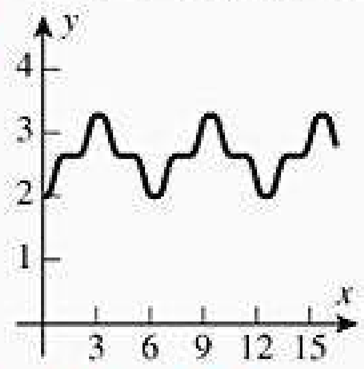
69. $\displaystyle\int \dfrac{1}{\dfrac{2u}{1+u^2} + \dfrac{2u}{1+u^2}\cdot\dfrac{1+u^2}{1-u^2}} \cdot \dfrac{2}{1+u^2}\,du = \int \dfrac{1-u^2}{2u}\,du = \dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}(x/2)| - \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2(x/2) + C$

71. $x = \dfrac{4e^2}{1+e^2}$ **73.** $A = 6 + \frac{25}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}$ **75.** $A = \frac{1}{40}\ln 9$

77. $V = \pi(\pi - 2)$ **79.** $V = 2\pi(1 - 4e^{-3})$

81. $L = \sqrt{65} + \frac{1}{8}\ln(8 + \sqrt{65})$ **83.** $S = 2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$

85.



91. $\frac{1}{31}\cos^{31} x \operatorname{sen}^{31} x + C$

93. $-\frac{1}{9}\ln|1 + x^{-9}| + C$

► Exercícios 8.7 (página 566)

1. valor exato = $14/3 \approx 4{,}666666667$
(a) 4,667600663, $|E_M| \approx 0{,}000933996$
(b) 4,664795679, $|E_T| \approx 0{,}001870988$
(c) 4,666651630, $|E_S| \approx 0{,}000015037$

3. valor exato = 2
(a) 2,008248408, $|E_M| \approx 0{,}008248408$
(b) 1,983523538, $|E_T| \approx 0{,}016476462$
(c) 2,000109517, $|E_S| \approx 0{,}000109517$

5. valor exato = $e^{-1} - e^{-4} \approx 0{,}349563802$
(a) 0,348256371, $|E_M| \approx 0{,}001307431$
(b) 0,352181607, $|E_T| \approx 0{,}002617804$
(c) 0,349579366, $|E_S| \approx 0{,}000015563$

7. **(a)** $|E_M| \le \frac{27}{2400}(1/4) = 0{,}002812500$
(b) $|E_T| \le \frac{27}{1200}(1/4) = 0{,}005625000$
(c) $|E_S| \le \dfrac{243}{180 \times 10^4}(15/16) \approx 0{,}000126563$

9. **(a)** $|E_M| \le \dfrac{\pi^3}{2400}(1) \approx 0{,}012919282$
(b) $|E_T| \le \dfrac{\pi^3}{1200}(1) \approx 0{,}025838564$
(c) $|E_S| \le \dfrac{\pi^5}{180 \times 10^4}(1) \approx 0{,}000170011$

11. **(a)** $|E_M| \le \frac{9}{800}(e^{-1}) \approx 0{,}004138644$
(b) $|E_T| \le \frac{9}{400}(e^{-1}) \approx 0{,}008277287$
(c) $|E_S| \le \frac{27}{20000}(e^{-1}) \approx 0{,}000049664$

13. **(a)** $n = 24$ **(b)** $n = 34$ **(c)** $2n = 8$

15. **(a)** $n = 36$ **(b)** $n = 51$ **(c)** $2n = 8$

17. **(a)** $n = 644$ **(b)** $n = 910$ **(c)** $2n = 28$

19. $g(x) = \frac{1}{24}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{13}{12}$ **21.** 0,746824948; 0,746824133

23. 1,511518748; 1,515927142 **25.** 0,805376152; 0,804776489

27. **(a)** 3,142425985, $|E_M| \approx 0{,}000833331$
(b) 3,139925989, $|E_T| \approx 0{,}001666665$
(c) 3,141592614, $|E_S| \approx 0{,}000000040$

29. $S_{14} = 0{,}693147984$, $|E_S| \approx 0{,}000000803 = 8{,}03 \times 10^{-7}$

31. $n = 116$ **35.** $L \approx 3{,}820187624$ **37.** 1071 pés **39.** 37,9 mi **41.** 9,3 *l*

43. **(a)** $\max|f''(x)| \approx 3{,}844880$ **(b)** $n = 18$ **(c)** 0,904741

45. **(a)** $\max|f^{(4)}(x)| \approx 42{,}551816$ **(b)** $2n = 8$ **(c)** 0,904524

► Exercícios 8.8 (página 576)

1. **(a)** imprópria; descontinuidade infinita em $x = 3$ **(b)** não-imprópria
(c) imprópria, descontinuidade infinita em $x = 0$
(d) imprópria; intervalo infinito de integração
(e) imprópria; intervalo infinito de integração e descontinuidade infinita em $x = 1$ **(f)** não-imprópria

3. 1/2 **5.** ln 2 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $-\frac{1}{4}$ **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** divergente **15.** 0
17. divergente **19.** divergente **21.** $\pi/2$ **23.** 1 **25.** divergente
27. $\frac{9}{2}$ **29.** divergente **31.** 2 **33.** 2 **35.** $\frac{1}{2}$
37. **(a)** 2,726585 **(b)** 2,804364 **(c)** 0,219384 **(d)** 0,504067 **39.** 12
41. -1 **43.** $\frac{1}{3}$ **45.** **(a)** $V = \pi/2$ **(b)** $S = \pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$
47. **(b)** $1/e$ **(c)** É convergente. **53.** $\dfrac{2\pi NI}{kr}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)$
55. **(b)** $2{,}4 \times 10^7$ mi · lb **57.** **(a)** $\dfrac{1}{s^2}$ **(b)** $\dfrac{2}{s^3}$ **(c)** $\dfrac{e^{-3s}}{s}$ **61.** **(a)** 1,047
65. 1,809 **67.** (a) $\Gamma(1) = 1$ (c) $\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(4) = 6$
69. **(b)** 1,37078 segundo

► Capítulo 8. Exercícios de Revisão (página 580)

1. $\frac{2}{27}(4 + 9x)^{3/2} + C$ **3.** $-\frac{2}{3}\cos^{3/2}\theta + C$ **5.** $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3(x^2) + C$
7. **(a)** $2 \text{ arc sen } (\sqrt{x/2}) + C; -2 \text{ arc sen}(\sqrt{2 - x}/\sqrt{2}) + C;$
$\text{arc sen}(x - 1) + C$
9. $-xe^{-x} - e^{-x} + C$ **11.** $x\ln(2x + 3) - x + \frac{3}{2}\ln(2x + 3) + C$
13. $(4x^4 - 12x^2 + 6)\operatorname{sen}(2x) + (8x^3 - 12x)\cos(2x) + C$
15. $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 10\theta + C$ **17.** $-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$
19. $-\frac{1}{8}\operatorname{sen}^3(2x)\cos 2x - \frac{3}{16}\cos 2x \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8}x + C$
21. $\frac{9}{2}\text{ arc sen}(x/3) - \frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} + C$ **23.** $\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$
25. $\dfrac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} - \dfrac{9\ln(|\sqrt{x^2 + 9} + x|)}{2} + C$ **27.** $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{x - 1}{x + 4}\right| + C$
29. $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6\ln|x + 2| + C$
31. $\ln|x + 2| + \dfrac{4}{x + 2} - \dfrac{2}{(x + 2)^2} + C$
35. Fórmula (40): $-\dfrac{\cos 16x}{32} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C$
37. Fórmula (113): $\frac{1}{24}(8x^2 - 2x - 3)\sqrt{x - x^2} + \frac{1}{16}\text{ arc sen }(2x - 1) + C$
39. Fórmula (28): $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x - x + C$
41. valor exato $= 14/3 \approx 4{,}666666667$
(a) $4{,}667600663, |E_M| \approx 0{,}000933996$
(b) $4{,}664795679, |E_T| \approx 0{,}001870988$
(c) $4{,}666651630, |E_S| \approx 0{,}000015037$
43. **(a)** $|E_M| \leq \frac{27}{2400}(1/4) = 0{,}002812500$
(b) $|E_T| \leq \frac{27}{1200}(1/4) = 0{,}005625000$
(c) $|E_S| \leq \dfrac{243}{180 \times 10^4}(15/16) \approx 0{,}000126563$
45. **(a)** $n = 24$ **(b)** $n = 34$ **(c)** $n = 8$ **47.** 1 **49.** 6
51. e^{-1} **53.** $a = \pi/2$ **55.** $\dfrac{x}{3\sqrt{3 + x^2}} + C$ **57.** $\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{2}\ln 2$
59. $\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x - \dfrac{1}{10}\operatorname{sen}^5 2x + C$
61. $\dfrac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \dfrac{3}{13}e^{2x}\operatorname{sen} 3x + C$
63. $-\frac{1}{6}\ln|x - 1| + \frac{1}{15}\ln|x + 2| + \frac{1}{10}\ln|x - 3| + C$
65. $4 - \pi$ **67.** $\ln\dfrac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C$ **69.** $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1$
71. $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2\ln(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1) + C$
73. $\dfrac{1}{2(a^2 + 1)}$

► Exercícios Apêndice A (página A1)

1. **(a)** $\frac{5}{12}\pi$ **(b)** $\frac{13}{6}\pi$ **(c)** $\frac{1}{9}\pi$ **(d)** $\frac{23}{30}\pi$
3. **(a)** 12° **(b)** $(270/\pi)°$ **(c)** 288° **(d)** 540°
5.

	sen θ	cos θ	tg θ	cossec θ	sec θ	cotg θ
(a)	$\sqrt{21}/5$	2/5	$\sqrt{21}/2$	$5/\sqrt{21}$	5/2	$2/\sqrt{21}$
(b)	3/4	$\sqrt{7}/4$	$3/\sqrt{7}$	4/3	$4/\sqrt{7}$	$\sqrt{7}/3$
(c)	$3/\sqrt{10}$	$1/\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}/3$	$\sqrt{10}$	1/3

7. $\operatorname{sen}\theta = 3/\sqrt{10}, \cos\theta = 1/\sqrt{10}$ **9.** $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{21}/2, \operatorname{cossec}\theta = 5/\sqrt{21}$
11. 1,8
13.

	θ	sen θ	cos θ	tg θ	cossec θ	sec θ	cotg θ
(a)	225°	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
(b)	−210°	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	2	$-2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
(c)	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	2	$-1/\sqrt{3}$
(d)	$-3\pi/2$	1	0	—	1	—	0

15.

	sen θ	cos θ	tg θ	cossec θ	sec θ	cotg θ
(a)	4/5	3/5	4/3	5/4	5/3	3/4
(b)	−4/5	3/5	−4/3	−5/4	5/3	−3/4
(c)	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	2	$-2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
(d)	−1/2	$\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	−2	$2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
(e)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
(f)	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	−1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	−1

17. **(a)** 1,2679 **(b)** 3,5753
19.

	sen θ	cos θ	tg θ	cossec θ	sec θ	cotg θ
(a)	$a/3$	$\sqrt{9 - a^2}/3$	$a/\sqrt{9 - a^2}$	$3/a$	$3/\sqrt{9 - a^2}$	$\sqrt{9 - a^2}/a$
(b)	$a/\sqrt{a^2 + 25}$	$5/\sqrt{a^2 + 25}$	$a/5$	$\sqrt{a^2 + 25}/a$	$\sqrt{a^2 + 25}/5$	$5/a$
(c)	$\sqrt{a^2 - 1}/a$	$1/a$	$\sqrt{a^2 - 1}$	$a/\sqrt{a^2 - 1}$	a	$1/\sqrt{a^2 - 1}$

21. **(a)** $3\pi/4 \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$
(b) $\pi/3 \pm 2n\pi$ e $5\pi/3 \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2,...$
23. **(a)** $\pi/6 \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$
(b) $4\pi/3 \pm 2n\pi$ e $5\pi/3 \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2,...$
25. **(a)** $3\pi/4 \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$
(b) $\pi/6 \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$
27. **(a)** $\pi/3 \pm 2n\pi$ e $2\pi/3 \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2,...$
(b) $\pi/6 \pm 2n\pi$ e $11\pi/6 \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2,...$
29. $\operatorname{sen}\theta = 2/5, \cos\theta = -\sqrt{21}/5, \operatorname{tg}\theta = -2/\sqrt{21},$
$\operatorname{cossec}\theta = 5/2, \sec\theta = -5/\sqrt{21}, \operatorname{cotg}\theta = -\sqrt{2}$
31. **(a)** $\theta = \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$ **(b)** $\theta = \pi/2 \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$
(c) $\theta = \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$ **(d)** $\theta = \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$
(e) $\theta = \pi/2 \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$
(f) $\theta = \pm n\pi, n = 0, 1, 2,...$
33. **(a)** $2\pi/3$ cm **(b)** $10\pi/3$ cm **35.** $\frac{2}{5}$
37. **(a)** $\dfrac{2\pi - \theta}{2\pi}R$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{4\pi\theta - \theta^2}}{2\pi}R$ **39.** $\frac{21}{4}\sqrt{3}$ **41.** 9,2 pés
43. $h = d(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$ **45.** **(a)** $4\sqrt{5}/9$ **(b)** $-\frac{1}{9}$
47. $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta, \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$
61. **(a)** $\cos\theta$ **(b)** $-\operatorname{sen}\theta$ **(c)** $-\cos\theta$ **(d)** $\operatorname{sen}\theta$
69. **(a)** 153° **(b)** 45° **(c)** 117° **(d)** 89° **71.** **(a)** 60° **(b)** 117°

► Exercícios Apêndice B (página B1)

1. **(a)** $q(x) = x^2 + 4x + 2, r(x) = -11x + 6$
(b) $q(x) = 2x^2 + 4, r(x) = 9$
(c) $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2, r(x) = 2x + 1$

3. **(a)** $q(x) = 3x^2 + 6x + 8$, $r(x) = 15$
(b) $q(x) = x^3 - 5x^2 + 20x - 100$, $r(x) = 504$
(c) $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $r(x) = 0$

5.

x	0	1	−3	7
$p(x)$	−4	−3	101	5001

7. **(a)** $q(x) = x^2 + 6x + 13$, $r = 20$ **(b)** $q(x) = x^2 + 3x - 2$, $r = -4$

9. **(a)** $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$
(b) $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}$ **(c)** $\pm 1, \pm 17$

11. $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$ **13.** $(x + 3)^3(x + 1)$

15. $(x + 3)(x + 2)(x + 1)^2(x - 3)$ **17.** -3 **19.** $-2, -\frac{2}{3}, -1 \pm \sqrt{3}$

21. $-2, 2, 3$ **23.** $2, 5$ **25.** 7 cm

CRÉDITOS DAS FOTOS

Capítulo 1
Página 1: cortesia de Christopher Evans, The Republican Company. Página 73: Bob Gruen/Star File.

Capítulo 2
Página 102: Joe McBride/Stone/Getty Images.

Capítulo 3
Página 166: Roger Ressmeyer/Corbis Images.

Capítulo 4
Página 236: Craig Lovell/Corbis Images.

Capítulo 5
Página 268: Stone/Getty Images.

Capítulo 6
Página 350: © Chris Alan Wilton/The Image Bank/Getty Images. Página 357: reproduzido de C. I. Gerhardt, *Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern* (1899). Página 416: Corbis-Bettmann.

Capítulo 7
Página 443: cortesia da NASA. Página 484: Stephen Sutton/Duomo Photography, Inc. Página 498: Glen Allison/Stone/Getty Images.

Capítulo 8
Página 511: © AP/Wide World Photos.